А.Г. Мерзляк,
В.Б. Полонский,
Е.М. Рабинович,
М.С. Якир

СБОРНИК

задач и заданий для тематического оценивания по геометрии для 10 класса

Рекомендовано
Министерством науки и образования Украины

Харьков
«Гимназия»
2001

Тематическое распределение тренировочных упражнений

Тема	Номера упражнений
Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия	1–26
Параллельные прямые в пространстве. Скрещивающиеся прямые	27–39
Признак параллельности прямой и плоскости	40–51
Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей	52–63
Изображение простанственных фигур на плоскости	64–83
Перпендикулярность прямой и плоскости	84–108
Перпендикуляр и наклонная	109–125
Теорема о трех перпендикулярах	126–152
Перпендикулярность плоскостей	153–166
Расстояние между скрещивающимися прямыми	167–177
Введение декартовых координат в пространстве	178–186
Координаты середины отрезка. Расстояние между двумя точками	187–199
Преобразование симметрии в пространстве	200–205
Параллельный перенос в пространстве	206–210
Подобие пространственных фигур	211–215
Угол между скрещивающимися прямыми	216–220
Угол между прямой и плоскостью	221–232
Угол между плоскостями	233–249
Площадь ортогональной проекции многоугольника	250–257
Векторы в пространстве. Равенство векторов. Координаты вектора	258–265
Сложение векторов	266–270
Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы	271–282
Разложение вектора по трем векторам, не лежащим в одной плоскости. Единичный вектор	283–286
Скалярное произведение векторов	287–303

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Вариант 1

Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия

1. Можно ли утверждать, что:
   1) любые две точки всегда лежат на одной прямой;
   2) любые четыре точки всегда лежат в одной плоскости?
2. Могут ли две разные плоскости иметь только одну общую точку?
3. Можно ли утверждать, что любая прямая, пересекающая каждую из двух данных пересекающихся прямых, лежит в плоскости, проходящей через эти прямые?
4. Верно ли, что прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, является касательной к окружности в этой точке:
   1) на плоскости; 2) в пространстве?
5. Доказать, что если через две прямые нельзя провести плоскость, то эти прямые не пересекаются.
6. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. В плоскости β проведена прямая b, пересекающая плоскость α. Доказать, что точка пересечения b и α принадлежит прямой a.
7. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым a и b соответственно, пересекающимся в точке A. Доказать, что точка A принадлежит прямой m.
8. Можно ли утверждать, что через прямую и две точки вне ее можно провести плоскость?
9. Доказать, что через две произвольные точки можно провести хотя бы одну плоскость.
10. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Доказать, что каждые три из них не лежат на одной прямой.

11. Три прямые лежат в плоскости α и пересекаются в точке K. Доказать, что существует плоскость, отличная от α, пересекающая данные прямые.

12. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Доказать, что существует еще хотя бы одна плоскость, отличная от α и β, содержащая прямую c.

13. Прямая b пересекает плоскость β в точке B. Прямая a принадлежит плоскости β и не проходит через точку B. Доказать, что прямые a и b не пересекаются.

14. Точки A, B, C и D расположены в пространстве так, что продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются. Доказать, что указанные точки принадлежат одной плоскости.

15. Прямые a и b пересекаются в точке O. Доказать, что все прямые, пересекающие прямую b и проходящие через точку прямой a, отличную от O, лежат в одной плоскости.

16. Среди n данных прямых каждые две пересекаются. Доказать, что все эти прямые лежат в одной плоскости или проходят через одну точку.

17. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Прямые c и d пересекают каждую из прямых a и b. Доказать, что прямые c и d не пересекаются.

18. Даны плоскость α и точка K, ей не принадлежащая. Из точки K проведены два луча, пересекающие плоскость α в точках A и B. Прямая l пересекает лучи KA и KB и плоскость α. Доказать, что прямые l и AB пересекаются.

19. Вершина D плоского четырехугольника $ABCD$ принадлежит плоскости α, а другие вершины лежат вне этой плоскости. Продолжения сторон BA и BC пересекают плоскость α в точках M и K соответственно. Доказать, что точки M, D и K лежат на одной прямой.

20. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. На плоскости α взяты точки M и N такие, что прямые MN и a не параллельны, а в плоскости β выбрана точка K, не принадлежащая прямой a. Построить линии пересечения плоскости MNK с плоскостями α и β.

21. Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма принадлежат плоскости β. Принадлежат ли плоскости β две другие вершины параллелограмма?

22. Можно ли утверждать, что все точки окружности принадлежат плоскости, если эта окружность имеет с данной плоскостью:

1) две общие точки; 2) три общие точки?

23. Через три точки можно провести две разные плоскости. Как расположены эти точки?

24. Даны четыре точки, одна из которых не принадлежит плоскости, определяемой тремя другими. Доказать, что каждая из точек не лежит в плоскости, определяемой тремя другими.

25. Середины трех сторон треугольника принадлежат плоскости α. Принадлежат ли плоскости α вершины треугольника?

26. Точки M и N лежат по одну сторону от плоскости β, а точки M и K — по разные стороны. Известно, что прямые MN, MK и NK пересекают плоскость β. Доказать, что точки их пересечения с плоскостью β лежат на одной прямой.

Параллельные прямые в пространстве. Скрещивающиеся прямые

27. Можно ли утверждать, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую:

1) на плоскости; 2) в пространстве?

28. Даны две параллельные прямые. Можно ли утверждать, что прямые, пересекающие каждую из этих прямых, лежат в плоскости данных прямых?

29. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Доказать, что прямые AB и CD скрещивающиеся.

30. Через точки A и B прямой l проведены перпендикулярные ей прямые AA_1 и BB_1. Верно ли, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны:

1) на плоскости; 2) в пространстве?

31. Прямые a и b параллельны. Через точку M, не принадлежащую этим прямым, проведена прямая, пересекающая прямые a и b. Лежат ли прямые a и b и точка M в одной плоскости?

32. Через точки A и B можно провести две параллельные прямые, пересекающие прямую a. Доказать, что точки A и B и прямая a лежат в одной плоскости.

33. Прямые a и b скрещивающиеся и прямые b и c скрещивающиеся. Верно ли, что прямые a и c скрещивающиеся?

34. Треугольник ADE и трапеция $ABCD$ (AD — основание) не лежат в одной плоскости. K — середина AE, P — середина DE. Доказать, что $KP \parallel BC$.

35. Две параллельные прямые a и b соответственно параллельны прямым m и n. Параллельны ли m и n?

36. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая a, не принадлежащая плоскости ABC, а через точку C — прямая b, параллельная прямой BD. Доказать, что прямые a и b скрещивающиеся.

37. Через прямые a и b проведены плоскости, пересекающиеся по прямой c. Доказать, что если c не пересекает a и b, то a и b — параллельны.

38. Точки M, N, P и Q — середины отрезков BD, CD, AB и AC соответственно (рис. 1), $AD = 16$ см, $BC = 18$ см. Найти периметр четырехугольника $MNQP$.

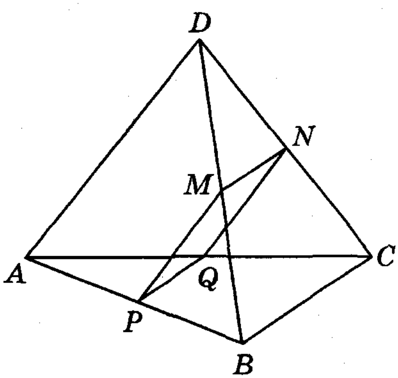


Рис. 1

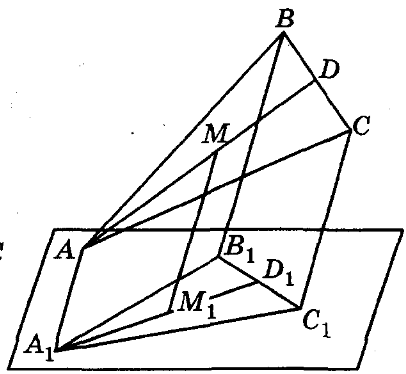


Рис. 2

39. Даны треугольник ABC и плоскость α, не пересекающая его. Через вершины треугольника ABC и точку M — середину медианы AD этого треугольника — проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1 и M_1 соответственно (рис. 2). Найти длину отрезка MM_1, если $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 8$ см, $CC_1 = 6$ см.

Признак параллельности прямой и плоскости

40. Точка A не принадлежит плоскости α. Сколько существует прямых, проходящих через точку A и параллельных плоскости α?

41. Прямая a параллельна плоскости α. Существуют ли в плоскости α прямые, не параллельные прямой a?

42. Прямые a и b параллельны. Как расположена прямая b относительно плоскости α, если прямая a:

1) принадлежит плоскости α;

2) пересекает плоскость α;

3) параллельна плоскости α?

43. Прямая a принадлежит плоскости α и параллельна плоскости β. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Доказать, что прямые a и m параллельны.

44. Через середины двух сторон треугольника проведена плоскость, не совпадающая с плоскостью треугольника. Какое взаимное расположение этой плоскости и третьей стороны треугольника?

45. Прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна плоскости α. Обязательно ли прямая a параллельна плоскости α?

46. Доказать, что все прямые, пересекающие одну из двух скрещивающихся прямых и параллельные другой прямой, лежат в одной плоскости.

47. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскостях α и β взяты такие прямые a и b соответственно, что a и b параллельны. Доказать, что прямые a, b и c попарно параллельны.

48. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ параллельна плоскости γ, а лучи AD и AB пересекают эту плоскость в точках M и N соответственно. Доказать, что треугольники DAB и MAN подобны.

49. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках B_1 и C_1 соответственно, причем $AC_1 : C_1C = 3 : 2$ и $B_1C_1 = 5$ см. Найти длину отрезка BC, если прямая BC и плоскость α параллельны.

50. Прямые MN и KP скрещивающиеся. Точка E — середина отрезка NP. Построить плоскость, проходящую через точку E и параллельную прямым MN и KP.

51. Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) лежит в плоскости α, $AB = 8$ см. Вне плоскости α взяли точку M и на отрезке AM отметили такую точку K, что $AK : KM = 3 : 1$. Построить точку F — точку пересечения плоскости DKC и отрезка MB и найти длину отрезка KF (рис. 3).

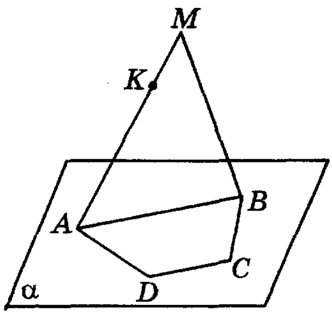


Рис. 3

Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей

52. Плоскости α и β параллельны. Как расположены прямые, принадлежащие плоскости α, относительно плоскости β?
53. Могут ли быть параллельными плоскости, проходящие через непараллельные прямые?
54. Две смежные стороны параллелограмма параллельны плоскости α. Как взаимно расположены плоскость α и плоскость параллелограмма?
55. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC. На отрезках DA, DB и DC выбраны такие точки A_1, B_1 и C_1 соответственно, что $DA_1 : A_1A = DB_1 : B_1B = DC_1 : C_1C$. Доказать, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.
56. Треугольник ABC лежит в плоскости α. Через его вершины проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β, параллельную плоскости α, в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
57. Плоскости α и β параллельны. В плоскости α выбраны точки M и N, а в плоскости β — точки M_1 и N_1 такие, что прямые MM_1 и NN_1 параллельны. Найти длины отрезков NN_1 и M_1N_1, если $MN = 5$ см, $MM_1 = 6$ см.
58. Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α. Плоскость β, параллельная плоскости α, пересекает стороны AC и BC в точках A_1 и B_1 соответственно.

Найти длину отрезка A_1B_1, если $A_1C = 9$ см, $AA_1 = 3$ см, $AB = 8$ см.

59. Через точки A и A_1, лежащие вне плоскости α, проведены прямые AB, AC, A_1B_1, A_1C_1 так, что прямая AB параллельна прямой A_1B_1, а прямая AC — прямой A_1C_1, где точки B, C, B_1 и C_1 — точки пересечения соответствующих прямых с плоскостью α. Доказать, что прямые BC и B_1C_1 параллельны или совпадают.

60. Прямая b параллельна плоскости α. Плоскость β проходит через прямую b и пересекает плоскость α по прямой c. Доказать, что прямые b и c параллельны.

61. Плоскости α и β параллельны. На плоскости α выбраны точки A и B, а на плоскости β — точки C и D так, что отрезки AD и BC пересекаются в точке K. Доказать, что прямые AB и CD параллельны.

62. Плоскость α параллельна плоскости β и прямой a, не лежащей в плоскости β. Доказать, что прямая a параллельна плоскости β.

63. Плоскости α и β параллельны. Через точку B плоскости β проведена прямая b, параллельная плоскости α. Доказать, что прямая b принадлежит плоскости β.

Изображение пространственных фигур на плоскости

64. Какие геометрические фигуры могут быть параллельными проекциями: 1) прямой; 2) двух параллельных прямых; 3) треугольника?

65. Могут ли две пересекающиеся прямые проектироваться: 1) в две пересекающиеся прямые; 2) в параллельные прямые; 3) в одну прямую; 4) в прямую и точку на ней; 5) в прямую и точку вне ее?

66. Даны прямая и точка, ей не принадлежащая. Может ли проекция данной точки принадлежать проекции данной прямой?

67. Можно ли при параллельном проектировании прямоугольника получить: 1) параллелограмм; 2) трапецию?

68. Можно ли при параллельном проектировании параллелограмма получить четырехугольник с углами 30°, 70°, 150°, 110°?

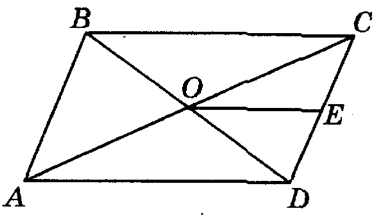


Рис. 4

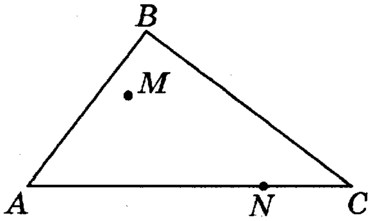


Рис. 5

69. Могут ли неравные отрезки иметь равные параллельные проекции?

70. Может ли параллельной проекцией отрезка быть: 1) прямая ; 2) луч; 3) точка?

71. В каком случае треугольник проектируется: 1) в отрезок; 2) в равный ему треугольник?

72. При каких условиях квадрат проектируется в прямоугольник?

73. Четырехугольник $ABCD$ является параллельной проекцией ромба (рис. 4), $OE \parallel AD$. Какой вид имеет проектируемый четырехугольник, если OE и CD — проекции двух перпендикулярных отрезков?

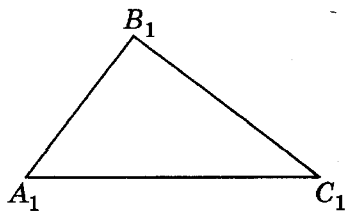


Рис. 6

74. Треугольник ABC является параллельной проекцией равностороннего треугольника (рис. 5). Построить изображение перпендикуляров, проведенных из точек M и N к сторонам AC и AB треугольника.

75. Даны проекции вершин треугольника ABC на плоскость (рис. 6). Построить проекцию биссектрисы угла B, если $AB : BC = 3 : 5$.

76. Точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями трех вершин параллелограмма. Построить проекцию четвертой вершины параллелограмма. Сколько решений имеет задача?

77. Треугольник ABC является параллельной проекцией равнобедренного прямоугольного треугольника, на гипотенузе которого вне его построен квадрат (квадрат лежит в плоскости треугольника). Построить параллельную проекцию этого квадрата.

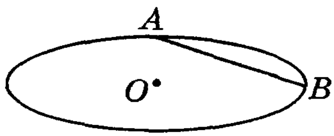


Рис. 7

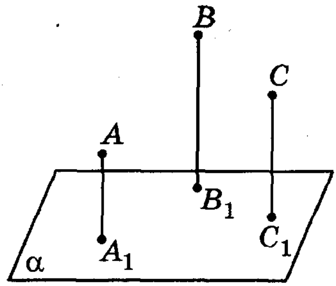


Рис. 8

78. Дана параллельная проекция окружности с центром O на плоскость (рис. 7). Построить проекцию диаметра окружности, перпендикулярного хорде AB.

79. Дана параллельная проекция окружности с центром O. Построить параллельную проекцию правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

80. Точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями трех последовательных вершин правильного шестиугольника. Построить проекции остальных вершин этого шестиугольника.

81. На изображении равнобедренной трапеции построить изображение ее высот, проведенных из вершин тупых углов.

82. Треугольник ABC является изображением треугольника $A_1B_1C_1$, у которого $\angle C_1 = 90^\circ$ и $A_1C_1 : B_1C_1 = 3 : 4$. Построить изображение центра вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

83. Точки A_1, B_1 и C_1 — параллельные проекции точек A, B и C на плоскость α (рис. 8). Построить прямую пересечения плоскостей α и ABC.

Перпендикулярность прямой и плоскости

84. Верно ли, что если прямая не перпендикулярна плоскости, то она не перпендикулярна ни одной прямой этой плоскости?

85. Через точку E, лежащую вне плоскости треугольника ABC, проведена прямая EA, перпендикулярная прямым AB и AC. На отрезке BC взята произвольная точка D. Определить вид треугольника EAD.

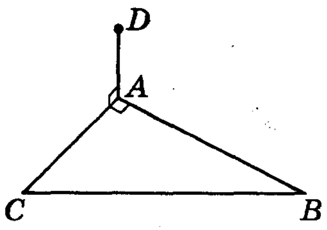


Рис. 9

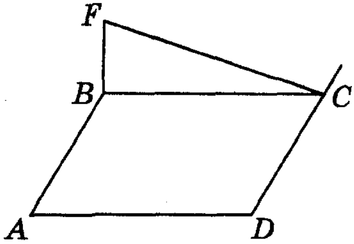


Рис. 10

86. Доказать, что каждое ребро куба перпендикулярно двум его граням.

87. Точка D лежит вне плоскости треугольника ABC (рис. 9), причем $\angle DAC = \angle BAC = 90^\circ$. Указать прямую и плоскость, перпендикулярные между собой.

88. $ABCD$ — квадрат (рис. 10). Прямая FB перпендикулярна плоскости ABC. Доказать, что прямые FC и CD перпендикулярны.

89. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 11). Является ли прямоугольником четырехугольник A_1BCD_1?

90. Определить вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

91. Точка M лежит вне плоскости параллелограмма $ABCD$ (рис. 12), причем $MA = MC$ и $MB = MD$. O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Доказать, что прямая MO перпендикулярна плоскости параллелограмма.

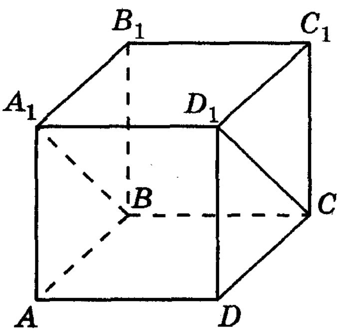


Рис. 11

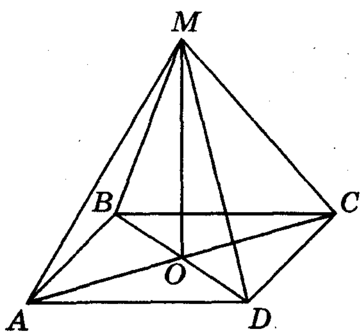


Рис. 12

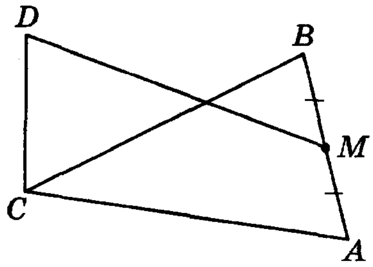


Рис. 13

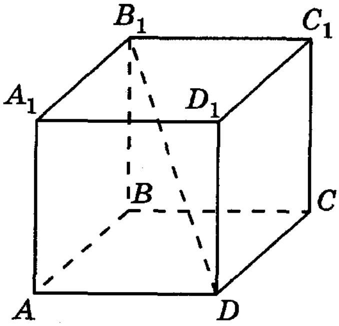


Рис. 14

92. Точка D лежит вне плоскости равнобедренного треугольника ABC и равноудалена от точек B и C, M — середина основания BC. Доказать, что прямая BC перпендикулярна плоскости ADM.

93. Прямая AO перпендикулярна плоскости окружности с центром O. Точка B лежит на окружности. Найти расстояние от точки A до точки B, если радиус окружности равен 8 см и $\angle ABO = 60^\circ$.

94. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 9$ см, $BC = 12$ см, M — середина BA. Прямая DC перпендикулярна плоскости ABC, $DC = 18$ см. Найти DM (рис. 13).

95. Сторона квадрата $ABCD$ равна 6 см. Из точки O — точки пересечения диагоналей квадрата к его плоскости проведен перпендикуляр SO. Найти длину отрезка SO, если $\angle SAO = 60^\circ$.

96. Точка M лежит вне плоскости треугольника ABC и равноудалена от его вершин. Как расположена точка O — проекция точки M на плоскость ABC — относительно треугольника ABC, если этот треугольник остроугольный?

97. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 14). Найти ортогональные проекции отрезка B_1D на плоскости граней куба.

98. Из точек A и B, лежащих вне плоскости α, проведены к ней перпендикуляры AA_1 и BB_1. Доказать, что если прямые AB и A_1B_1 параллельны, то AA_1B_1B — прямоугольник.

99. Доказать, что если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

100. Прямая FC перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$, сторона которого равна a. Найти расстояние от точки F до вершин квадрата, если $FC = b$.

101. Из центра O правильного треугольника ABC со стороной 9 см проведен перпендикуляр OM к его плоскости длиной 3 см. Найти угол MAO.

102. Точка M находится на расстоянии 5 см от каждой вершины равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = BC = 6$ см, $AC = 8$ см. Найти расстояние от точки M до плоскости треугольника.

103. Прямая EC перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$ (рис. 15), O — точка пересечения его диагоналей. Доказать, что прямая BD перпендикулярна плоскости OCE.

104. Точка S равноудалена от вершин квадрата $ABCD$. Найти угол ASC, если $SA = AB$.

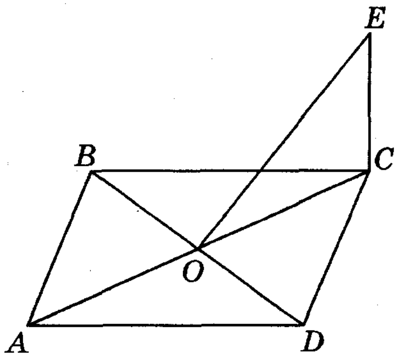


Рис. 15

105. Из точки D, не принадлежащей плоскости равностороннего треугольника ABC, проведен перпендикуляр AD к его плоскости. Через центр O треугольника проведена прямая FO, параллельная AD. Найти расстояние от точки F до вершин треугольника, если $OF = 6$ см и $BC = 8\sqrt{3}$ см.

106. Концы отрезка, расположенного по одну сторону от плоскости, удалены от этой плоскости на расстояния 5 см и 7 см. Найти расстояние от середины этого отрезка до плоскости.

107. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая AE, перпендикулярная его плоскости. Доказать, что прямая CD перпендикулярна плоскости EAD.

108. FA и CE — перпендикуляры к плоскости параллелограмма $ABCD$. Доказать, что плоскости FAB и ECD параллельны.

Перпендикуляр и наклонная

109. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр длиной 9 см и наклонная длиной 11 см. Найти длину проекции этой наклонной на плоскость.

110. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Длина наклонной равна 8 см, а угол между ею и перпендикуляром равен 60°. Найти длины перпендикуляра и проекции наклонной.

111. Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AD, длины которых равны 17 см и 10 см соответственно. Найти длину проекции второй наклонной, если длина проекции первой наклонной равна 15 см.

112. Из точки A к плоскости α проведены две наклонные AC и AD и перпендикуляр AB. Найти длины проекций этих наклонных на плоскость, если $AC = 8$ см, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle DAB = 45^\circ$.

113. Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC, длины которых 15 см и 20 см соответственно. Найти расстояние от точки A до плоскости, если проекции наклонных на эту плоскость относятся как 9 : 16.

114. Доказать, что равные наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, имеют равные проекции.

115. $ABCD$ — ромб. Прямая PB перпендикулярна плоскости ромба. Доказать, что углы PDA и PDC равны (рис. 16).

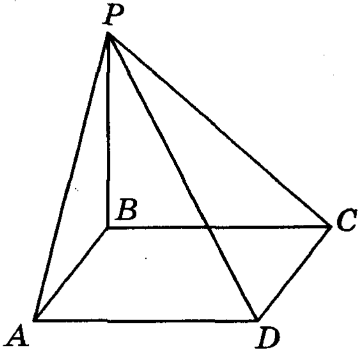


Рис. 16

116. Прямая AD перпендикулярна плоскости треугольника ABC (рис. 17). Точка D равноудалена от точек B и C. Найти расстояние между точками B и C, если $AD = 3$ см, $\angle BDA = \angle BDC = 60^\circ$.

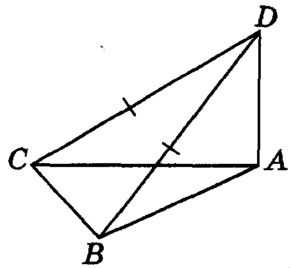


Рис. 17

117. Точка K равноудалена от вершин параллелограмма $ABCD$. Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.

118. Точка F находится на расстоянии 6 см от вершин прямоугольника и на расстоянии 4 см от его плоскости. Найти стороны прямоугольника, если одна из них в два раза больше другой.

119. В ромбе $ABCD$ $AB = BD = 6$ см. Прямая EA перпендикулярна плоскости ромба, а точка E удалена от его плоскости на 2 см. Найти длину проекции наклонной EC на плоскость ромба.

120. Из точки, лежащей вне данной плоскости, проведены к ней две наклонные, длины которых равны 15 см и 27 см. Сумма длин проекций этих наклонных на плоскость равна 24 см. Найти проекцию каждой из наклонных.

121. Два отрезка, длины которых равны 13 см и 20 см, упираются своими концами в параллельные плоскости. Найти расстояние между плоскостями, если разность проекций этих отрезков на одну из плоскостей равна 11 см.

122. Из точки A к плоскости α проведены равные наклонные AB и AC, угол между которыми равен 60°. Найти угол между наклонной AB и ее проекцией на плоскость α, если проекции наклонных взаимно перпендикулярны.

123. Из точки T к плоскости α проведены наклонные TA и TB и перпендикуляр TO, $TA = 17$ см, $OA = 15$ см, $AB = 3\sqrt{19}$ см, $\angle AOB = 60^\circ$. Найти длину наклонной TB.

124. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена плоскость α, параллельная диагонали BD. Расстояние между BD и α равно 5 см, а проекции AB и AD на эту плоскость равны 8 см и 7 см соответственно. Найти диагональ AC параллелограмма, если диагональ BD равна 9 см.

125. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AM и наклонные AB и AC, причем $\angle BAM + \angle CAM = 90^\circ$. Доказать, что $MC : MB = AC^2 : AB^2$.

Теорема о трех перпендикулярах

126. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 18). Доказать, что прямая AB_1 перпендикулярна прямым AD и B_1C_1.

127. $ABCD$ — ромб (рис. 19). Прямая FC перпендикулярна его плоскости. Доказать, что прямые AF и BD перпендикулярны.

128. К плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведен перпендикуляр DA (рис. 20). Найти расстояние от точки D до точки B, если $BC = a$, $DC = b$.

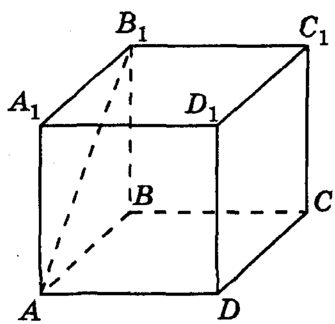


Рис. 18

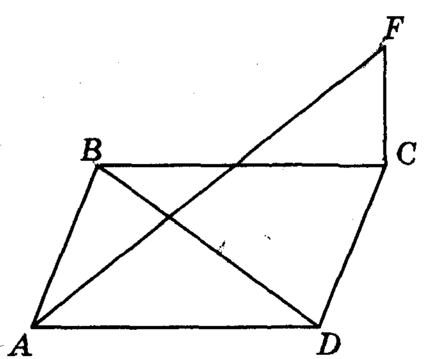


Рис. 19

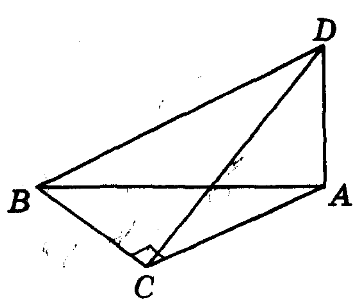


Рис. 20

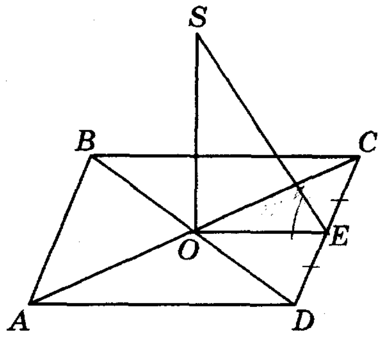


Рис. 21

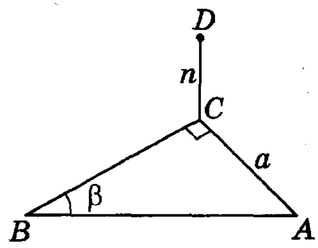


Рис. 22

129. Из точки O пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр SO и точка S соединена с серединой стороны DC (рис. 21). Найти длину отрезка SC, если $AB = 8$ см, $\angle SEO = 60^\circ$.

130. Точка M принадлежит перпендикуляру к плоскости ромба, который проходит через точку пересечения его диагоналей. Доказать, что точка M равноудалена от сторон ромба.

131. Через вершину C треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр KC. Прямая, проходящая через точку K и середину AB, перпендикулярна прямой AB. Доказать, что треугольник ABC — равнобедренный.

132. Через вершину прямого угла C треугольника ABC проведен перпендикуляр DC к его плоскости длиной n. Найти расстояние от точки D до прямой AB, если $AC = a$, $\angle B = \beta$ (рис. 22).

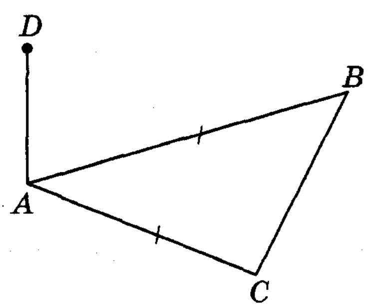


Рис. 23

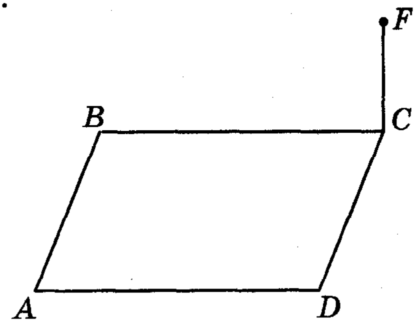


Рис. 24

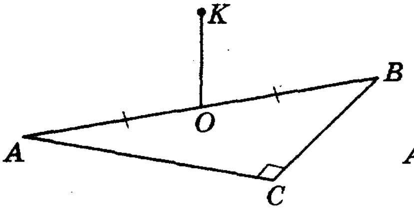


Рис. 25

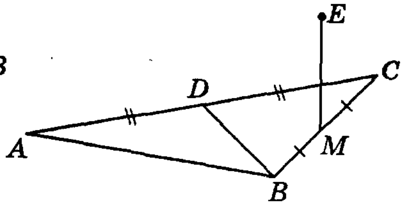


Рис. 26

133. Прямая AD перпендикулярна плоскости равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Провести перпендикуляр из точки D к прямой BC (рис. 23).

134. Через вершину C ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр FC к его плоскости (рис. 24). Построить перпендикуляр, опущенный из точки F на диагональ BD ромба.

135. Через точку O — середину гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC — проведен перпендикуляр KO к его плоскости (рис. 25). Построить перпендикуляры, опущенные из точки K на катеты треугольника.

136. Точка M — середина стороны BC правильного треугольника ABC (рис. 26). Через точку M проведен перпендикуляр ME к плоскости треугольника. Построить перпендикуляры, опущенные из точки E на прямые AB, AC и BD, где D — середина стороны AC.

137. Из вершины прямого угла C треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр CM длиной $4\sqrt{7}$ см. Найти расстояние от точки M до AB, если $AC = BC = 8$ см.

138. Из точки O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр OM длиной 4 см. Найти расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны параллелограмма, если $AB = 12$ см, $BC = 20$ см, $\angle BAD = 30°$.

139. Из вершины прямого угла C треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр CK. Расстояние от точки K до прямой AB равно 13 см. Найти расстояние от точки K до плоскости треугольника, если его катеты равны 15 см и 20 см.

140. Из вершины угла D треугольника DFE к его плоскости проведен перпендикуляр DS длиной 16 см. Найти расстояние от точки S до стороны EF, если $DE = 13$ см, $DF = 15$ см, $EF = 14$ см.

141. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Через точку O к плоскости треугольника проведен перпендикуляр SO длиной 5 см. Точка S удалена от стороны AB на 13 см. Найти радиус вписанной окружности.

142. Из центра O окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 6 см, к плоскости треугольника проведен перпендикуляр OM длиной 3 см. Найти расстояние от точки M до сторон треугольника.

143. Основания равнобокой трапеции равны 8 см и 18 см. Из центра O окружности, вписанной в эту трапецию, к ее плоскости проведен перпендикуляр OM. Точка M находится на расстоянии 10 см от сторон трапеции. Найти расстояние от точки M до плоскости трапеции.

144. Диагонали ромба равны 18 см и 24 см. Точка K находится на расстоянии 3 см от плоскости ромба и равноудалена от его сторон. Найти это расстояние.

145. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 17$ см, $AC = 16$ см. Точка P находится на расстоянии 8 см от всех сторон треугольника ABC. Найти расстояние от точки P до плоскости треугольника.

146. Площадь ромба равна S, а его острый угол — α. Точка F удалена от плоскости ромба на расстояние m. Найти расстояние от точки F до сторон ромба, если она равноудалена от них.

147. Точка D находится на одинаковом расстоянии DA и DB от сторон прямого угла с вершиной C. O — проекция точки D на плоскость этого угла. Доказать, что $OACB$ — квадрат.

148. Стороны прямоугольника равны 15 см и 20 см. Из середины M его большей стороны к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр MK длиной 8 см. Найти расстояние от точки K до диагоналей прямоугольника.

149. Из вершины D прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр DE. Точка E удалена от стороны AB на 4 см, от стороны BC — на 9 см. Найти длину отрезка DE, если $BD = 7$ см.

150. Из точки D к плоскости γ проведены перпендикуляр DO и наклонная DA, образующая со своей проекцией угол α. Через точку A в плоскости γ проведена прямая m, образующая с прямой OA угол β. Найти косинус угла между наклонной DA и прямой m.

151. В треугольнике ABC $AB = 26$ см, $BC = 28$ см, $AC = 27$ см. Через вершину B треугольника проведена наклонная, образующая с лучами BA и BC равные углы. Проекция наклонной пересекает сторону AC в точке D. Найти длину отрезка BD.

152. Основания трапеции равны 14 см и 18 см. Через большее основание трапеции проведена плоскость, находящаяся на расстоянии 8 см от меньшего основания трапеции. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до проведенной плоскости.

Перпендикулярность плоскостей

153. Верно ли, что через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести только одну плоскость, перпендикулярную данной плоскости?

154. Верно ли, что если плоскость α перпендикулярна плоскости β, а плоскость β перпендикулярна плоскости γ, то плоскости α и γ параллельны?

155. Доказать, что если прямая пересечения плоскостей α и β перпендикулярна плоскости γ, то плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ.

156. Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая MC, перпендикулярная его плоскости. Доказать, что плоскости MAD и MDC перпендикулярны.

157. Два прямоугольных равнобедренных треугольника имеют общую гипотенузу, равную 8 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найти расстояние между вершинами прямых углов.

158. Точка E равноудалена от сторон квадрата $ABCD$. Доказать, что плоскости AEC и BED перпендикулярны.

159. Точка Q равноудалена от вершин прямоугольника $ABCD$. Доказать, что плоскости AQC и ABC перпендикулярны.

160. Точка S равноудалена от вершин квадрата $ABCD$. O — ее проекция на плоскость квадрата. Из точки S проведен перпендикуляр SM к стороне AB квадрата. Доказать, что плоскости ASB и OSM перпендикулярны.

161. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым b и c соответственно, параллельным прямой a. Расстояние между прямыми b и a равно 8 см, а между c и a — 15 см. Найти расстояние между прямой a и плоскостью γ.

162. Концы отрезка, длина которого равна 13 см, принадлежат двум взаимно перпендикулярным плоскостям, а расстояния от концов отрезка до линии пересечения плоскостей равны 8 см и 5 см. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к линии пересечения плоскостей.

163. Концы отрезка лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Проекции отрезка на плоскости равны 20 см и 16 см. Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к линии пересечения плоскостей, равно 12 см. Найти длину отрезка.

164. Отрезок лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и не пересекает другую. Концы этого отрезка удалены от прямой l пересечения плоскостей на 18 см и 10 см. Во второй плоскости проведена прямая m, параллельная l. Расстояние от одного из концов данного отрезка до прямой m равно 30 см. Найти расстояния от середины отрезка и от его второго конца до прямой m.

165. Прямоугольник $ABCD$ перегнули по диагонали AC так, что плоскости ABC и ACD оказались перпендикулярными. Найти расстояние между точками B и D, если стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см.

166. Доказать, что если плоскости α, β и γ попарно перпендикулярны, то линии их пересечения также попарно перпендикулярны.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

167. На рисунке 27 дано изображение куба с ребром a. Найти расстояние между прямыми MN и PK.

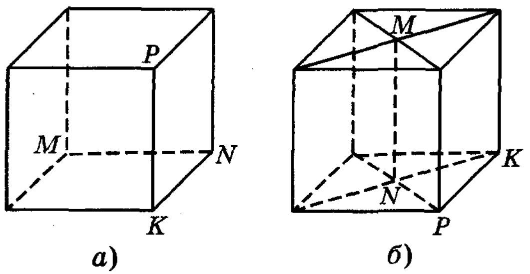


Рис. 27

168. Через вершину прямого угла C треугольника ABC проведена прямая l, перпендикулярная его плоскости. Найти расстояние между прямой l и прямой AB, если $AB = 13$ см, $AC = 5$ см.

169. Через вершину B равнобедренного треугольника ABC проведена прямая a, перпендикулярная его плоскости. Найти расстояние между прямыми a и AC, если $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см.

170. Через точку D окружности с центром O и радиусом 8 см проведена прямая a, перпендикулярная плоскости окружности. Через центр окружности в его плоскости проведена прямая b, образующая угол 60° с прямой OD. Найти расстояние между прямыми a и b.

171. Через точку A окружности с центром O и радиусом 6 см проведена прямая l, перпендикулярная плоскости окружности, а через точку B окружности — прямая b, касательная к окружности. Найти расстояние между прямыми b и l, если угол AOB равен 120°.

172. В параллелограмме $ABCD$ сторона CD равна 10 см, а угол B — 120°. Через сторону AD параллелограмма проведена плоскость, перпендикулярная плоскости параллелограмма, и в этой плоскости через точку A проведена прямая a, скрещивающаяся с прямой BC. Найти расстояние между прямыми a и BC.

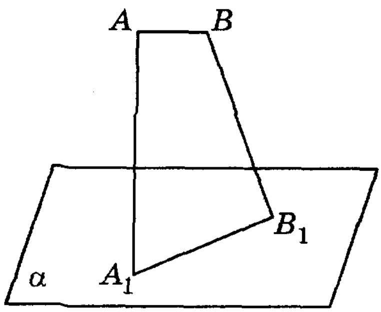


Рис. 28

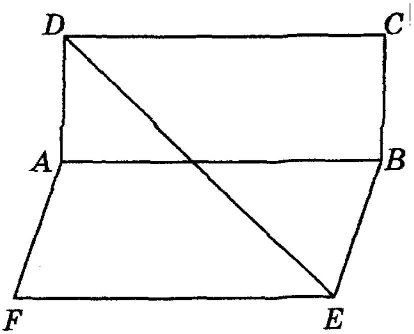


Рис. 29

173. Через гипотенузу AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость α. Расстояние от точки C до α равно 3 см. Найти расстояние между прямой AB и прямой, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости α, если $AC = BC = 6$ см.

174. Прямая a параллельна плоскости α. Доказать, что расстояние между прямой a и каждой прямой, принадлежащей плоскости α и скрещивающейся с a, равно расстоянию между a и α.

175. Точки A и B находятся по одну сторону от плоскости α на расстоянии 8 см от нее. Из точки A к плоскости α проведен перпендикуляр AA_1 длиной 8 см, а из точки B — наклонная BB_1 длиной 10 см. Найти расстояние между прямыми AA_1 и BB_1, если $AB = 7$ см, $A_1B_1 = 11$ см (рис. 28).

176. Плоскости прямоугольников $ABCD$ и $ABEF$ взаимно перпендикулярны. Найти расстояние между прямыми DE и AB, если $AF = 8$ см, $BC = 15$ см (рис. 29).

177. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, длина ребра которого равна 4 см. Найти расстояние между прямыми AC_1 и BB_1.

Введение декартовых координат в пространстве

178. Какие из приведенных точек лежат на координатных осях: A (3; –2; 0), B (2; 0; –3), C (–2; 0; 0), D (0; 1; 0), E (0; 0; –8), F (–4; 0; 0)? Указать, на каких именно.

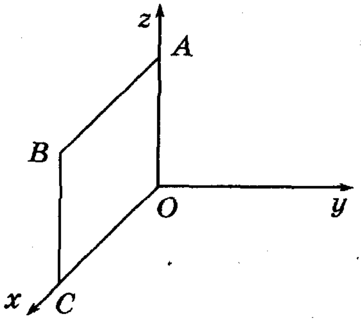


Рис. 30

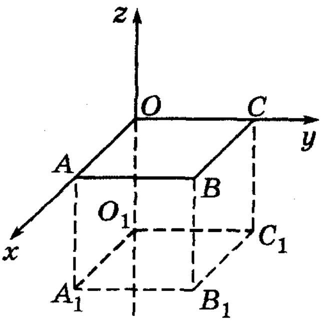


Рис. 31

179. Какие из приведенных точек лежат в координатных плоскостях: M (3; –2; 1), N (–2; 0; 4), P (–4; 4; 0), K (0; 1; 6), D (–8; 0; 0), Q (–8; 9; 3)? Указать, в каких именно.

180. Какие из приведенных точек лежат на одной прямой, параллельной оси аппликат: A (4; –7; 1), M (4; 7; –1), T (–4; –7; –1), R (–4; 7; –1)?

181. Какие из приведенных точек лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xz: F (3; –8; 2), E (3; 8; –2), K (–3; –8; –2), N (3; 14; 2)?

182. На каких расстояниях от координатных плоскостей находится точка D (–4; –2; 1)?

183. Диагональ квадрата $OABC$ равна $\sqrt{2}$ (рис. 30). Найти координаты его вершин.

184. Ребро куба $ABCOA_1B_1C_1O_1$ равно 4 (рис. 31). Найти координаты вершин куба.

185. Точка A находится на расстоянии 2 см от начала координат, а луч OA образует с положительными направлениями координатных осей x и y углы 60° и 45° соответственно. Найти координаты точки A, если известно, что они положительные.

186. Расстояния от точки K до осей координат равны 3 см, 5 см и 6 см. Найти расстояние от точки K до начала координат.

Координаты середины отрезка. Расстояние между двумя точками

187. Найти координаты середины отрезка FK, если:
1) $F(-2; 3; 4)$, $K(6; 1; -2)$; 2) $F(-3; 0; 4)$, $K(3; 5; -2)$.

188. Точка M — середина отрезка AB. Найти координаты точки B, если $A(-3; 8; 5)$, $M(-5; 4; -6)$.

189. Найти координаты точки, делящей отрезок MK в отношении $3 : 1$, считая от точки M, если $M(3; -5; 1)$, $K(-1; 7; 5)$.

190. Найти координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A(3; -4; 5)$, $B(-6; 1; 6)$, $C(-5; 2; 1)$.

191. Точки $C_1(2; -3; 4)$ и $B_1(-6; 1; 2)$ — середины сторон AC и AB треугольника ABC соответственно. Найти координаты вершин A и B, если вершина C имеет координаты $(-3; 4; 6)$.

192. Точки $A(4; 1; -1)$, $B(2; 4; -4)$ и $C(1; 2; 1)$ — середины сторон треугольника. Найти координаты вершин этого треугольника.

193. Найти расстояние между точками A и B, если:
1) $A(3; -2; 3)$, $B(-1; 2; 5)$;
2) $A(1; 5; -6)$, $B(-2; 3; -4)$.

194. В треугольнике ABC $A(3; -1; -2)$, $B(-5; 7; 4)$, $C(1; 5; 2)$. Найти длину средней линии MN треугольника ABC, где M и N — середины сторон AC и BC соответственно.

195. Расстояние между точками $A(4; -5; 2)$ и $B(1; y; -4)$ равно 7. Найти y.

196. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(-2; 3; 1)$ и $B(1; 2; -4)$.

197. Найти координаты точек A и B и длину отрезка AB, если точка A принадлежит оси y, точка B лежит в плоскости xz и точка $C(-2; 1; -3)$ — середина отрезка AB.

198. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(2; -3; 1)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(4; 1; 5)$ и $D(7; -2; 2)$ является ромбом.

199. Доказать, что точки $A(5; 6; 7)$, $B(-1; -1; -4)$ и $C(11; 13; 18)$ лежат на одной прямой. Какая их них лежит между двумя другими?

Преобразование симметрии в пространстве

200. *Записать координаты точек, симметричных точкам* $A\,(3;\ -4;\ 1)$, $B\,(-2;\ 1;\ -3)$, $C\,(5;\ 1;\ 9)$, $D\,(-2;\ -9;\ -8)$, $E\,(0;\ 0;\ 3)$, $F\,(0;\ -8;\ 9)$ относительно: 1) начала координат; 2) плоскости xy; 3) плоскости xz; 4) оси z.

201. Точки $M\,(4;\ -7;\ 2)$ и N симметричны относительно: 1) начала координат; 2) плоскости yz. Найти длину отрезка MN.

202. Точки $A\,(5;\ -3;\ 4)$ и $B\,(-3;\ 1;\ -2)$ симметричны относительно точки C. Найти ее координаты.

203. Точку $M\,(a;\ b;\ c)$ отобразили последовательно симметрично относительно координатных плоскостей xy, xz, yz. Доказать, что полученная при этом точка M_1 симметрична точке M относительно начала координат.

204. На рис. 32 дано изображение куба. Перерисовать его в тетрадь и построить фигуру, симметричную кубу *относительно точки* M.

205. На рис. 33 дано изображение куба. Перерисовать его в тетрадь и построить фигуру, симметричную кубу относительно прямой AB.

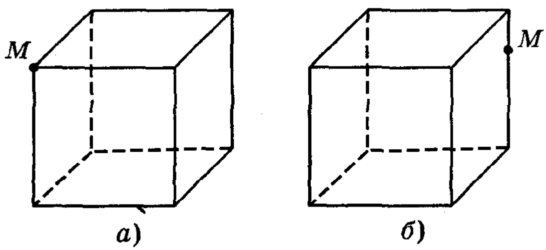


Рис. 32

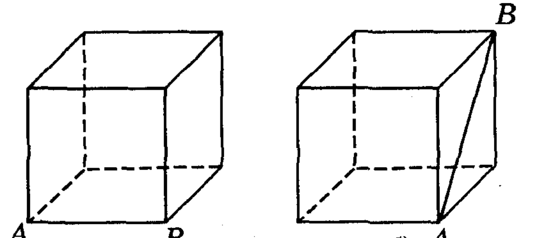


Рис. 33

Параллельный перенос в пространстве

206. Параллельный перенос задается формулами $x' = x + 3$, $y' = y - 2$, $z' = z + 8$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки А $(4; -1; 5)$, B $(0; -3; -2)$, C $(2; 0; 0)$, O $(0; 0; 0)$?

207. При параллельном переносе точка A $(-3; 1; 2)$ переходит в точку A_1 $(5; -1; 4)$. Записать формулы этого параллельного переноса и найти, в какую точку при этом переносе переходит точка B $(-4; 5; -7)$.

208. Даны точки A $(-7; 3; -2)$ и B $(4; -5; 1)$. Записать формулы параллельного переноса, при котором точка A переходит в точку B, и переноса, при котором B переходит в A.

209. Существует ли параллельный перенос, при котором точка K $(-3; -2; 5)$ переходит в точку K_1 $(2; 4; 1)$, а точка F $(2; -7; 4)$ — в точку F_1 $(7; -1; 8)$?

210. На рис. 33 дано изображение куба. Перерисовать его в тетрадь и построить фигуру, в которую переходит куб при параллельном переносе, при котором точка A переходит в точку B.

Подобие пространственных фигур

211. Треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ относительно начала координат с коэффициентом гомотетии $k = 3$. Найти координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$, если A $(1; 0; 0)$, B $(0; 2; 0)$, C $(0; 0; -3)$.

212. При гомотетии с центром M $(3; 1; -4)$ и коэффициентом гомотетии $k = 2$ треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Найти координаты вершин треугольника ABC, если A_1 $(2; 1; -4)$, B_1 $(3; -2; 1)$, C_1 $(-1; 5; 6)$.

213. При гомотетии с центром A $(3; 2; -1)$ точка P $(8; 5; -2)$ переходит в точку C $(13; 8; -3)$. Найти коэффициент гомотетии и выяснить, в какую точку при этой гомотетии переходит точка D $(6; -3; 4)$.

214. Через точку K проведены три прямые, пересекающие плоскость α в точках A, B и C, а параллельную ей плоскость β в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найти неизвестные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $AB = 4$ см, $AC = 7$ см, $A_1B_1 = 16$ см, $B_1C_1 = 20$ см.

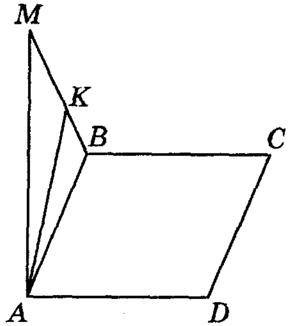


Рис. 34

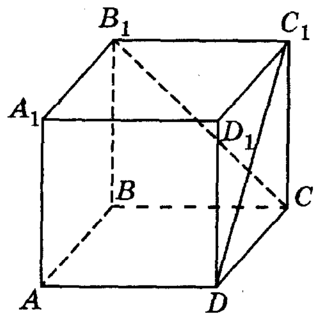


Рис. 35

215. Плоскости α и β параллельны. Из точки S проведены три луча, пересекающие плоскость α в точках K, P и F, а плоскость β — соответственно в точках K_1, P_1 и F_1. Найти стороны треугольника $K_1P_1F_1$, если $KP = a$, $PF = b$, $KF = c$, $SK : KK_1 = m : n$ и точка K лежит между точками S и K_1.

Угол между скрещивающимися прямыми

216. Прямая MA перпендикулярна сторонам AB и AC треугольника ABC. Найти угол между прямыми MA и BC.

217. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр AM (рис. 34). На отрезке MB взяли произвольную точку K. Найти угол между прямыми AK и BC.

218. Доказать, что если точка M равноудалена от сторон правильного треугольника ABC, то прямые AM и BC перпендикулярны.

219. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 35). Найти углы между прямыми: 1) AD и BB_1; 2) DD_1 и B_1C; 3) B_1C и DC_1.

220. Через центр O квадрата $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр OM. Расстояние от точки M до A равно стороне квадрата. Через точку M и точку E — середину AB — проведена прямая l. Найти угол между прямыми l и AC.

Угол между прямой и плоскостью

221. Наклонная образует с плоскостью угол 30°. Длина наклонной 4 см. Найти длину ее проекции.

222. Найти угол между наклонной и плоскостью, если длина наклонной 6 см, а длина ее проекции 3 см.

223. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найти угол между прямой DC_1 и плоскостью ABC.

224. Доказать, что параллельные прямые, пересекающие плоскость, образуют с ней равные углы.

225. Из точки A, лежащей вне плоскости α, проведены к ней равные наклонные AB_1, AB_2, AB_3, ... и перпендикуляр AO. Доказать, что точки B_1, B_2, B_3, ... лежат на окружности с центром O.

226. Точка A находится на расстоянии 9 см от плоскости α. Наклонные AB и AC образуют с плоскостью α углы 45° и 60°, а угол между проекциями наклонных равен 150°. Найти расстояние между точками B и C.

227. Через вершину B равностороннего треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр DB длиной $4\sqrt{3}$ см. Найти угол между прямой AD и плоскостью треугольника, если его площадь равна $4\sqrt{3}$ см^2.

228. Точки A и B лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях α и β соответственно. Из точек A и B проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к линии пересечения плоскостей. Найти углы, образуемые отрезком AB с плоскостями α и β, если $AA_1 = 2\sqrt{3}$ см, $BB_1 = 2\sqrt{6}$ см, $A_1B = 6$ см.

229. Точки A и B лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Отрезок AB образует с этими плоскостями углы 30° и 45°. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек A и B к линии пересечения плоскостей, если $AB = 8$ см.

230. Из центра O правильного треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр MO длиной 9 см. Перпендикуляр, проведенный из точки M к прямой AB, образует с плоскостью ABC угол 30°. Найти длину отрезка AB.

231. Из точки к плоскости проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы по 30°. Найти угол между проекциями наклонных, если угол между наклонными равен 60°.

232. Через вершину прямого угла проведена прямая, образующая со сторонами этого угла углы по 60°. Найти угол, образуемый этой прямой с плоскостью прямого угла.

Угол между плоскостями

233. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. В плоскостях α и β проведены прямые a и b соответственно, параллельные прямой m. Расстояние между прямыми a и m равно 5 см, между b и m — 3 см. Найти угол между плоскостями, если расстояние между прямыми a и b равно 7 см.

234. Плоскости α и β пересекаются по прямой m, а угол между ними — 30°. Найти расстояние между прямой m и плоскостью γ, пересекающей плоскости α и β по параллельным прямым, удаленным от линии пересечения плоскостей на 2 см и $2\sqrt{3}$ см.

235. Квадрат и прямоугольник, площади которых соответственно равны 36 см^2 и 54 см^2, имеют общую сторону, а угол между их плоскостями равен 30°. Найти расстояние между параллельными сторонами прямоугольника и квадрата.

236. Сторона BC равностороннего треугольника ABC принадлежит плоскости α, а расстояние от вершины A до α равно 1 см. Найти угол между плоскостями ABC и α, если площадь треугольника ABC равна $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см^2.

237. Через гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол 30°. Найти расстояние от вершины C до этой плоскости, если катеты треугольника равны 6 см и 8 см.

238. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB, равное 24 см. Угол между их плоскостями равен 60°. Найти длину отрезка CD, если $BC = 15$ см и $BD = 13$ см.

239. Два равнобедренных треугольника ABC и DBC имеют общее основание CB, равное 12 см. Найти угол между плоскостями ABC и DBC, если $AB = 2\sqrt{21}$ см, $AD = 2\sqrt{15}$ см, $\angle BDC = 90^\circ$.

240. Равносторонний треугольник ABE и квадрат $ABCD$ имеют общую сторону AB, равную 4 см. Найти угол между их плоскостями, если $EC = 2\sqrt{2}$ см.

241. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 36). Найти угол между плоскостями ABC и A_1BC.

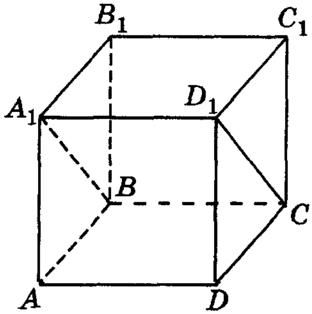


Рис. 36

242. Через гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол 45°. Найти углы, образованные катетами треугольника с этой плоскостью.

243. Угол между плоскостями α и β, пересекающимися по прямой a, равен 60°. В плоскостях α и β выбраны точки M и K соответственно и из них проведены перпендикуляры MM_1 и KK_1 к прямой a. Найти длину отрезка MK, если $KK_1 = 3$ см, $MM_1 = 8$ см, $K_1M_1 = \sqrt{15}$ см.

244. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Из точек A и B, лежащих в плоскостях α и β соответственно, проведены перпендикуляры $AC = 5$ см и $BD = 8$ см к прямой a. Расстояние между точками C и D равно 24 см, $AB = 25$ см. Найти угол между плоскостями α и β.

245. Сторона квадрата $ABCD$ равна 4 см. Через его центр O проведена прямая OE, перпендикулярная плоскости квадрата. Плоскость, проведенная через сторону AB, пересекает прямую OE в точке F. Угол между плоскостями ABF и ABC равен 60°. Найти длину проекции отрезка OF на плоскость ABF.

246. Из точки M, лежащей вне плоскости α, проведены к ней две наклонные MA и MB, образующие с α углы 30° и 45° соответственно. Найти угол между плоскостями α и MAB, если $\angle AMB = 90^\circ$.

247. В одной из двух пересекающихся плоскостей проведена прямая, образующая со второй плоскостью угол 30°, а с прямой пересечения этих плоскостей — угол 45°. Найти угол между плоскостями.

248. Точка M находится на равных расстояниях от вершин квадрата $ABCD$. Угол между прямой MA и плоскостью ABC равен α. Найти угол между плоскостями MAB и ABC.

249. Точка P равноудалена от вершин правильного треугольника ABC. Угол между прямой PA и плоскостью ABC равен β. Найти угол между плоскостями APC и BPC.

Площадь ортогональной проекции многоугольника

250. Может ли площадь ортогональной проекции многоугольника быть равной площади самого многоугольника?

251. Найти площадь ортогональной проекции многоугольника на некоторую плоскость, если площадь многоугольника равна 8 см^2, а угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции равен 30°.

252. Площадь многоугольника равна 8 см^2, а площадь его ортогональной проекции — 4 см^2. Найти угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

253. Ортогональной проекцией треугольника ABC на некоторую плоскость является прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с гипотенузой 10 см и катетом 8 см. Найти площадь треугольника ABC, если угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$ равен 45°.

254. Площадь четырехугольника равна 126 см^2. Его ортогональной проекцией является прямоугольник, диагональ которого равна $\sqrt{130}$ см, а одна из сторон — 9 см. Найти угол между плоскостями четырехугольника и прямоугольника.

255. Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 42 см^2. Он является ортогональной проекцией треугольника ABC со сторонами 7 см, 17 см и 18 см. Найти угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

256. Треугольник $A_1B_1C_1$ — ортогональная проекция треугольника ABC на плоскость α, а треугольник $A_2B_2C_2$ — ортогональная проекция треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC. Найти угол между плоскостями α и ABC, если отношение площадей треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ равно $\frac{4}{3}$.

257. Площадь трапеции равна $48\sqrt{3}$ см^2, а ее ортогональная проекция — равнобокая трапеция с основаниями 4 см и 20 см и боковой стороной 10 см. Найти угол между плоскостями трапеций.

Векторы в пространстве. Равенство векторов. Координаты вектора

258. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если: 1) A (2; 3; –1), B (1; –4; 5); 2) A (–3; –2; –8), B (4; –8; –9).

259. Даны точки A (3; –2; 5), B (–4; 6; 1), C (–2; –6; –11), D (x; y; z). Найти x, y и z, если $\overline{AB} = \overline{CD}$.

260. От точки K (3; 9; –15) отложен вектор $\bar{a}$ (2; –2; 1). Найти координаты конца вектора.

261. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (3; –2; 5), B (–2; 7; –1), C (–4; 14; –4), D (1; 5; 2) является параллелограммом.

262. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: A (3; –2; 1), B (–6; 4; 2), D (–3; 2; –4). Найти координаты вершины C.

263. Среди векторов $\bar{a}$ (3; –4; 5), $\bar{b}$ (–4; 2; 4), $\bar{c}$ (3; $\sqrt{2}$; –5), $\bar{d}$ (1; 7; 0), $\bar{e}$ (–2; $\sqrt{5}$; –5) найти имеющие одинаковый модуль.

264. Модуль вектора $\bar{m}$ (5; –3; z) равен 9. Найти z.

265. Модуль вектора $\bar{p}$ равен 6, а его координаты равны. Найти координаты вектора $\bar{p}$.

Сложение векторов

266. Даны векторы $\bar{a}$ (4; –5; 6) и $\bar{b}$ (–1; 2; 5). Найти:

1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{a} - \bar{b}$; 3) $|\bar{a} + \bar{b}|$; 4) $|\bar{a} - \bar{b}|$.

267. Найти координаты точки C такой, что $\overline{CA} + \overline{CB} = \bar{0}$, где A (3; –4; 1), B (–2; 6; –3).

268. Найти координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если их сумма — вектор $\overline{(4; -1; 5)}$, а разность — $\overline{(6; 3; -1)}$.

269. Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:

1) 2; 3; 4; 2) 7; 1; 8; 3) 3; 5; 9?

270. Даны векторы $\bar{a}$ (–2; 4; 1), $\bar{b}$ (3; –1; 4), $\bar{c}$ (1; –3; z). При каком значении z модуль вектора $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$ наименьший? Найти это значение модуля.

Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы

271. Даны векторы $\bar{a}$ (2; –3; 4) и $\bar{b}$ (–1; 6; 2). Найти:

1) $2\bar{a} + \bar{b}$; 2) $3\bar{a} + 4\bar{b}$; 3) $4\bar{a} - \bar{b}$; 4) $-3\bar{a} - 2\bar{b}$.

272. Найти модуль вектора $\bar{c} = -3\bar{a} + \bar{b}$, где $\bar{a}$ (4; 0; –3), $\bar{b}$ (4; –6; –3).

273. Точка S находится вне плоскости треугольника ABC. Выразить через векторы $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ и $\overline{SC}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{BM}$, где M — середина отрезка AC.

274. Точка K равноудалена от вершин квадрата $ABCD$ с центром O. Выразить через векторы $\overline{KA}$, $\overline{KB}$ и $\overline{KC}$ векторы $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{KD}$ и $\overline{KO}$.

275. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки E и F соответственно такие, что $BE : EA = 1 : 2$, $BF : FC = 3 : 1$. Вне плоскости треугольника ABC взяли произвольную точку P. Выразить вектор $\overline{FE}$ через векторы $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ и $\overline{PC}$.

276. Коллинеарны ли векторы $\overline{DE}$ и $\overline{KF}$, если D (3; –2; –5), E (–1; 4; 7), K (1; 3; 6), F (–3; 9; 18)?

277. Среди векторов $\bar{a}$ (3; –2; 4), $\bar{b}$ (–6; 4; –8), $\bar{d}$(–9; 6; –12), $\bar{m}$ (30; –20; 40) найти одинаково направленные и противоположно направленные векторы.

278. Найти значения y и z, при которых векторы $\bar{a}$ (3; y; 6) и $\bar{b}$ (–6; 4; z) коллинеарны.

279. Дан вектор $\bar{a}$ (–3; 2; 6). Найти координаты вектора $\bar{b}$, противоположно направленного с вектором $\bar{a}$, если $|\bar{b}| = 21$.

280. Для ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется равенство $5\bar{a} - 7\bar{b} = 2\bar{a} + 4\bar{b}$. Доказать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены.

281. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (2; −3; 1), B (−4; 2; 3), C (6; 1; −4), D (22; −5; −13) — трапеция.

282. Лежат ли точки A (2; 3; −7), B (4; 5; −1) и C (0; 1; 11) на одной прямой?

Разложение вектора по трем векторам, не лежащим в одной плоскости. Единичный вектор

283. Среди векторов $\bar{a}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{\sqrt{23}}{6}\right)$, $\bar{b}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\bar{c}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{11}}{4}\right)$, $\bar{d}$ (0; 0; −1), $\bar{e}$ (1; 1; 1) указать единичные векторы.

284. Найти координаты единичного вектора, одинаково направленного с вектором:

1) $\bar{a}$ (−3; 4; 0); 2) $\bar{b}$ (2; −3; −6); 3) $\bar{c}$ (k; p; m).

285. Даны единичные векторы $\bar{e}_1$ (1; 0; 0), $\bar{e}_2$ (0; 1; 0), $\bar{e}_3$ (0; 0; 1). Найти координаты векторов:

1) $5\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$; 2) $4\bar{e}_1 + 5\bar{e}_3$; 3) $m\bar{e}_1 - n\bar{e}_2 + k\bar{e}_3$.

286. Разложить вектор $\bar{m}$ (5; −17; 11) по направлениям векторов $\bar{a}$ (3; −2; 0), $\bar{b}$ (−2; 4; 1) и $\bar{c}$ (−1; −3; 4).

Скалярное произведение векторов

287. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1) $\bar{a}$ (−2; 3; 1), $\bar{b}$ (−4; −5; 2);
2) $\bar{a}$ (0; 4; −7), $\bar{b}$ (−3; 0; 2);
3) $\bar{a}$ (2; −1; 4), $\bar{b}$ (3; 2; −1).

288. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 60°$;

2) $|\bar{a}| = 7$, $|\bar{b}| = 1$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 150°$;

3) $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 9$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 90°$.

289. Даны векторы $\bar{a}$ (4; −1; 5) и $\bar{b}$ (3; y; 2). При каком значении y $\bar{a} \cdot \bar{b} = 14$?

290. Найти косинус угла между векторами $\bar{a}$ (2; –1; 2) и $\bar{b}$ (–4; 1; 3).

291. Найти косинусы углов треугольника ABC и установить вид этого треугольника, если A (1; –3; 4), B (2; –2; 5), C (3; 1; 3).

292. Даны векторы $\bar{a}$ (2; –3; 5) и $\bar{b}$ (1; 2; z). При каком значении z векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны?

293. Даны векторы $\bar{a}$ (2; 4; –3) и $\bar{b}$ (x; 1; 6). При каких значениях x угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

1) острый; 2) прямой; 3) тупой?

294. Найти углы, образуемые вектором $\overline{AB}$, где A (5; 3; –1), B (7; 1; –1), с положительными направлениями координатных осей.

295. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами A (5; –3; 2), B (9; –1; 3), C (12; –5; –1), D (8; –7; –2) — прямоугольник.

296. Найти координаты вектора $\bar{n}$, коллинеарного вектору $\bar{k}$ (5; –3; 4), если $\bar{n} \cdot \bar{k} = -100$.

297. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 120°, $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 6$. Найти:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; 2) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{b}$; 3) $(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{a}$; 4) $(2\bar{a} + 3\bar{b}) \cdot \bar{a}$.

298. $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — единичные векторы, угол между которыми равен 30°. Вычислить скалярное произведение $(\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$.

299. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 60°$. Найти: 1) $|\bar{a} + \bar{b}|$; 2) $|2\bar{a} - 3\bar{b}|$.

300. Найти косинус угла между векторами $\bar{a} = \bar{m} + 3\bar{n}$ и $\bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}$, где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

301. Даны векторы $\bar{a}$ (–2; 3; 1) и $\bar{b}$ (1; 4; –3). Найти значение k, при котором векторы $\bar{a} + k\bar{b}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны.

302. Даны точки A (1; 5; 8), B (5; 2; 9), C (7; 4; 7) и D (8; 3; 0). Доказать, что прямая AB перпендикулярна плоскости BCD.

303. Найти множество точек K (x; y; z), которое содержит точку M (2; 3; –1), и прямая, проходящая через точки A (2; –6; 4) и B (6; –3; 5), перпендикулярна каждой прямой, проходящей через точку M.

Вариант 2

Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия

1. Можно ли утверждать, что:
   1) любые три точки всегда лежат на одной прямой;
   2) любые три точки всегда лежат в одной плоскости?
2. Сколько различных плоскостей можно провести через одну прямую?
3. Верно ли, что любая прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей данного треугольника, лежит в плоскости этого треугольника?
4. Может ли прямая проходить через центр окружности, но не иметь с окружностью общих точек?
5. Верно ли, что если через две прямые можно провести плоскость, то эти прямые параллельны?
6. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. В плоскостях α и β проведены соответственно пересекающиеся прямые m и n. Где находится точка их пересечения?
7. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. В плоскости α проведена прямая a, пересекающая прямую m. Через прямую a проведена плоскость γ, пересекающая плоскость β по прямой b. Доказать, что прямые a и b пересекаются.
8. Через прямую a и точку A можно провести две различные плоскости. Какой вывод можно сделать?
9. Точка A принадлежит плоскости α. Доказать, что через точку A можно провести плоскость, не совпадающую с плоскостью α.
10. Среди точек A, B, C и D никакие три не лежат на одной прямой. Могут ли эти точки лежать в одной плоскости?

11. В плоскости α лежат две параллельные прямые. Доказать, что существует плоскость, отличная от плоскости α, пересекающая две данные параллельные прямые.

12. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Доказать, что существует хотя бы одна плоскость, пересекающая прямую c и плоскости α и β.

13. Прямая a принадлежит плоскости α. Доказать, что существует хотя бы одна прямая, не пересекающая прямую a и не лежащая с ней в одной плоскости.

14. Точки A, B, C и D расположены в пространстве так, что диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются. Доказать, что указанные точки лежат в одной плоскости.

15. Через точку A проведены две прямые, пересекающие прямые a и b в точках, отличных от точки A. Доказать, что прямые a и b лежат в одной плоскости.

16. Даны прямая a и точка A вне ее. Доказать, что все прямые, проходящие через A и пересекающие a, лежат в одной плоскости.

17. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Прямая c пересекает прямые a и b. Существует ли прямая, пересекающая прямые a, b и c в трех различных точках?

18. Прямые MA, MB и MC пересекают плоскость α в точках A, B и C, не лежащих на одной прямой. Существует ли прямая, пересекающая прямые MA, MB и MC в трех различных точках?

19. Вершина D плоского четырехугольника $ABCD$ принадлежит плоскости α, а другие вершины лежат вне этой плоскости. Продолжения стороны BC и диагонали AC пересекают плоскость α в точках M и N. Доказать, что точки D, M и N лежат на одной прямой.

20. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Треугольник ABC расположен так, что две его вершины A и C принадлежат плоскости α (прямые AC и a не параллельны), а вершина B — плоскости β. Построить линии пересечения плоскости ABC с плоскостями α и β.

21. Две противоположные вершины трапеции и точка пересечения диагоналей принадлежат плоскости α. Принадлежат ли плоскости α две другие вершины трапеции?

22. Можно ли утверждать, что все точки окружности принадлежат плоскости, если:

1) хорда и центр окружности принадлежат плоскости;

2) две хорды окружности принадлежат плоскости?

23. Сколько плоскостей можно провести через три точки, лежащие на одной прямой?

24. Любые четыре точки фигуры принадлежат одной плоскости. Доказать, что вся фигура принадлежит плоскости.

25. Основания биссектрис треугольника принадлежат плоскости α. Принадлежат ли плоскости α вершины треугольника?

26. Вершины A и B треугольника ABC лежат по одну сторону от плоскости α, а вершина C — по другую. Доказать, что точки пересечения сторон BC и AC и медианы CM с плоскостью α лежат на одной прямой.

Параллельные прямые в пространстве. Скрещивающиеся прямые

27. Прямые a и b не параллельны, прямая c параллельна прямой a. Можно ли утверждать, что прямая b пересекает прямую c:

1) на плоскости; 2) в пространстве?

28. Точки A и B принадлежат прямой a, точки C и D — прямой b, причем $a \parallel b$. Доказать, что прямые AC и BD не являются скрещивающимися.

29. Точка A не лежит в плоскости треугольника DEF. Доказать, что прямые AD и EF скрещивающиеся.

30. Через точку A прямой l к ней проведен перпендикуляр AA_1. Через точку A_1 проведена прямая m, перпендикулярная прямой AA_1. Верно ли, что прямые l и m параллельны:

1) на плоскости; 2) в пространстве?

31. На одной из двух пересекающихся прямых выбрана точка и через нее проведена прямая, параллельная другой прямой. Доказать, что эти три прямые лежат в одной плоскости.

32. Доказать, что две пересекающиеся прямые не могут пересекать две скрещивающиеся прямые.

33. Прямые a и b скрещивающиеся, прямая c параллельна прямой a. Верно ли, что прямые b и c скрещивающиеся?

34. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC. M, N, P и Q — середины отрезков AD, AB, BC и CD соответственно. Доказать, что $MN \parallel PQ$.

35. Две скрещивающиеся прямые a и b соответственно параллельны прямым m и n. Верно ли, что прямые m и n скрещивающиеся?

36. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая a, не принадлежащая плоскости треугольника. Доказать, что прямые a и BM — скрещивающиеся, где M — середина AC.

37. Три плоскости попарно пересекаются по прямым a, b и c. Доказать, что если эти плоскости не имеют общей точки, то $a \parallel b \parallel c$.

38. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. M, N, K и F — середины отрезков AB, BD, DC и AC соответственно. Доказать, что отрезки MK и NF пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

39. Треугольник ABC не пересекает плоскость α. Через его вершины и середины M и N соответственно сторон AB и AC проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, M_1, N_1 (рис. 37). Найти длины отрезков BB_1 и CC_1, если $AA_1 = 9$ см, $NN_1 = 8$ см, $MM_1 = 10$ см.

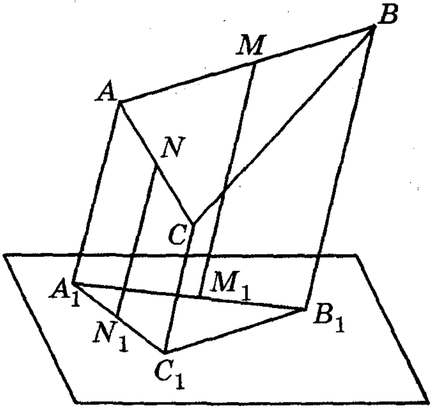


Рис. 37

Признак параллельности прямой и плоскости

40. Через точку A, не принадлежащую плоскости α, проведена прямая, параллельная плоскости α. Сколько существует в плоскости α прямых, параллельных прямой a?

41. Прямые a и b параллельны плоскости α. Могут ли прямые a и b пересекаться?

42. Прямая a параллельна плоскости α. Верно ли, что:

1) a не пересекает никакую прямую, лежащую в плоскости α;
2) a параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α;
3) a параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости α?

43. Доказать, что *если прямая a параллельна каждой из* двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна прямой их пересечения.

44. Отрезок AB лежит в плоскости α. Точка M не принадлежит плоскости α. Точки K и P — середины отрезков MA и MB соответственно. Доказать, что прямая KP параллельна плоскости α.

45. Прямая a пересекает плоскость α. Лежит ли в плоскости α хотя бы одна прямая, параллельная прямой a?

46. Прямые a и b скрещивающиеся. Сколько существует плоскостей, содержащих прямую b и параллельных прямой a?

47. Через параллельные прямые a и b проведены две плоскости, пересекающиеся по прямой c. Доказать, что прямые a и b параллельны прямой c.

48. Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена плоскость, параллельная прямой AC и пересекающая сторону BC в точке N. Доказать, что MN — средняя линия треугольника ABC.

49. Плоскость, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1 соответственно. Найти отношение $AA_1 : AB$, если $A_1C_1 = 6$, $AC = 9$.

50. Доказать, что через любую точку пространства можно провести плоскость, параллельную каждой из двух данных скрещивающихся прямых.

51. Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E. На отрезке BE отмечена точка F так, что $BF : FE = 4 : 1$ (рис. 38). Построить точку M — точку пересечения плоскости AFD и отрезка CE и найти длину отрезка FM, если $BC = 12$ см.

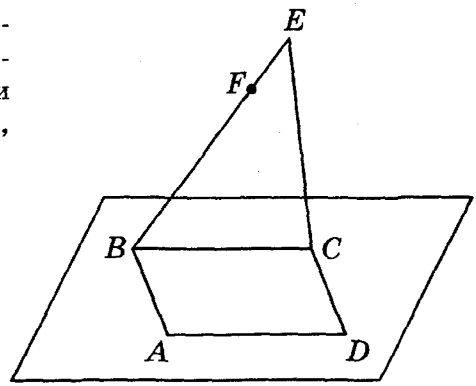


Рис. 38

Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей

52. Две плоскости параллельны одной и той же прямой. Верно ли, что эти плоскости параллельны?

53. Каждая из двух данных плоскостей параллельна каждой из двух данных пересекающихся прямых. Параллельны ли эти плоскости?

54. Основания трапеции параллельны плоскости α. Параллельны ли плоскость трапеции и плоскость α?

55. Точка D лежит вне плоскости треугольника ABC. На отрезках BA, BC и BD выбраны соответственно точки K, F и E так, что $BF : BC = BK : BA = BE : BD$. Доказать, что плоскости KEF и ADC параллельны.

56. В плоскости α лежит параллелограмм $ABCD$. Плоскость β пересекает прямые SA, SB, SC, SD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно так, что $AB \parallel A_1B_1$, $AD \parallel A_1D_1$. Докажите, что если S не принадлежит плоскости α, то $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

57. Параллельные прямые l_1 и l_2 пересекают плоскость α в точках A и B. Доказать, что любая плоскость, параллельная плоскости α, пересекает прямые l_1 и l_2 в точках, расстояние между которыми равно AB.

58. Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α. Плоскость β параллельна плоскости α и пересекает стороны AC и BC в точках A_1 и B_1 соответственно.

Найти длину отрезка A_1B_1, если $AB = 12$ см, $CB_1 : B_1B = 2 : 3$.

59. Через противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ проведены попарно параллельные плоскости. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

60. Плоскости α и β параллельны. Через прямую a плоскости α проведены плоскости γ_1 и γ_2, пересекающие плоскость β по прямым b_1 и b_2 соответственно. Доказать, что $b_1 \parallel b_2$.

61. Плоскости α и β параллельны. Отрезки AB и CD, лежащие в этих плоскостях, не параллельны. Могут ли отрезки AD и BC быть параллельными?

62. Плоскость α параллельна плоскости β, плоскость β параллельна плоскости γ. Доказать, что плоскости α и γ параллельны.

63. Плоскости α и β параллельны. В плоскости α лежит прямая a. Через точку B плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой a. Доказать, что прямая b лежит в плоскости β.

Изображение пространственных фигур на плоскости

64. Какие геометрические фигуры могут быть параллельными проекциями: 1) отрезка; 2) двух параллельных отрезков; 3) параллелограмма?

65. Могут ли две параллельные прямые проектироваться: 1) в две пересекающиеся прямые; 2) в параллельные прямые; 3) в одну прямую; 4) в прямую и точку, принадлежащую этой прямой; 5) в прямую и точку, не принадлежащую этой прямой?

66. Как должны быть расположены относительно направления проектирования две пересекающиеся прямые, чтобы они проектировались в прямую и принадлежащую ей точку?

67. Можно ли при параллельном проектировании трапеции получить: 1) параллелограмм; 2) прямоугольник?

68. Можно ли при параллельном проектировании выпуклого четырехугольника с углами 20°, 100°, 160°, 80° получить ромб?

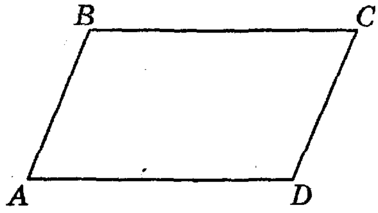


Рис. 39

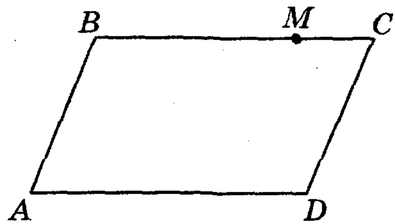


Рис. 40

69. Могут ли равные отрезки иметь неравные параллельные проекции?

70. Может ли параллельной проекцией луча быть: 1) отрезок; 2) прямая; 3) точка?

71. В каком случае отрезок проектируется: 1) в точку; 2) в равный ему отрезок?

72. При каких условиях квадрат проектируется в ромб?

73. Параллелограмм $ABCD$ является изображением ромба с острым углом 60° (рис. 39). Построить изображение высоты, проведенной из вершины тупого угла B к стороне AD.

74. Четырехугольник $ABCD$ — проекция ромба (рис. 40). M — точка на стороне BC. Построить изображение перпендикуляров, опущенных из точки M на диагонали ромба.

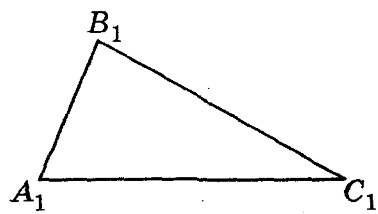


Рис. 41

75. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение равнобедренного треугольника ABC (рис. 41). Построить изображение точки пересечения биссектрис этого треугольника, если $AB : BC : AC = 5 : 5 : 8$.

76. Точки M_1, N_1, P_1 являются изображением одной вершины и середин двух сторон треугольника. Построить изображение треугольника. Сколько решений имеет задача?

77. Треугольник ABC является параллельной проекцией правильного треугольника, на сторонах которого в его плоскости построены в свою очередь правильные треугольники. Построить параллельные проекции этих треугольников.

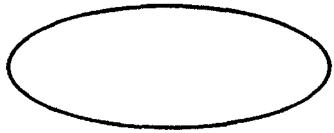


Рис. 42

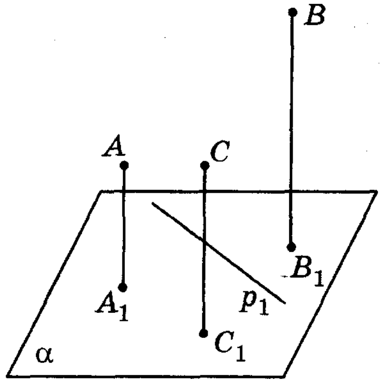


Рис. 43

78. На изображении окружности (рис. 42) построить изображение ее центра.

79. Дана параллельная проекция окружности с центром O. Построить параллельную проекцию квадрата, вписанного в эту окружность.

80. Точки A, B, O, не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями двух вершин квадрата и его центра. Построить изображение квадрата. Сколько решений имеет задача?

81. Даны изображения треугольника и двух его высот. Построить изображение центра окружности, описанного вокруг треугольника.

82. Стороны прямоугольника относятся как 3 : 1. Построить изображение перпендикуляра, проведенного из вершины прямоугольника к его диагонали.

83. Точки A_1, B_1, C_1 — параллельные проекции точек A, B, C на плоскость α (рис. 43), p_1 — проекция прямой p, лежащей в плоскости ABC, на плоскость α. Построить прямую p.

Перпендикулярность прямой и плоскости

84. Может ли прямая быть перпендикулярна только одной прямой плоскости?

85. Через точку M, лежащую вне плоскости треугольника ABC, проведена прямая MA, перпендикулярная прямым AB и AC. Доказать, что прямая MA перпендикулярна медиане AN треугольника ABC.

86. Как расположена относительно плоскости круга прямая, перпендикулярная двум его диаметрам?

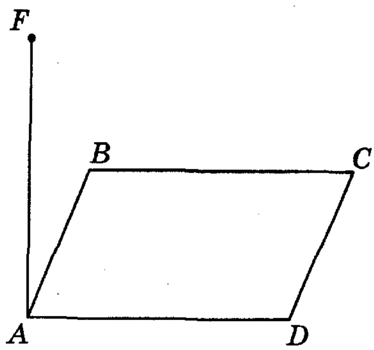


Рис. 44

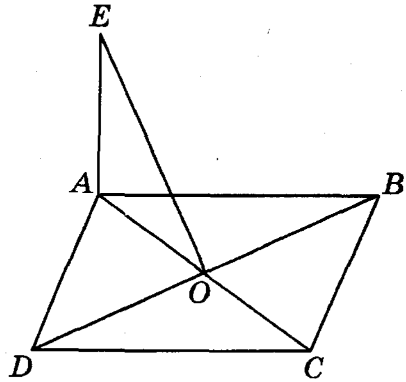


Рис. 45

87. На рис. 44 $ABCD$ — прямоугольник, $FA \perp AD$. Указать прямую и плоскость, перпендикулярные между собой.

88. $ABCD$ — ромб (рис. 45). Прямая AE перпендикулярна плоскости ABC. Доказать, что $EO \perp DB$.

89. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 46). Доказать, что четырехугольник AB_1C_1D — прямоугольник.

90. Через одну сторону ромба проходит плоскость, перпендикулярная соседней стороне. Доказать, что этот ромб — квадрат.

91. Точка M лежит вне плоскости равностороннего треугольника ABC (рис. 47), $MA = MB = MC$, O — центр правильного треугольника. Доказать, что прямая MO перпендикулярна плоскости ABC.

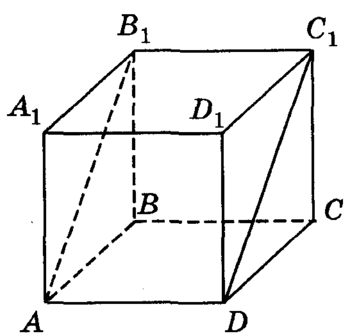


Рис. 46

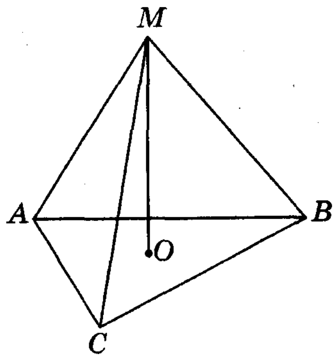


Рис. 47

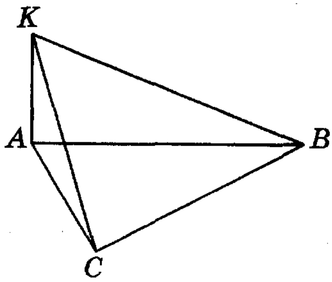


Рис. 48

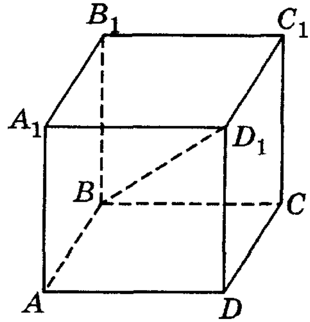


Рис. 49

92. Точка M лежит вне плоскости равностороннего треугольника ABC и равноудалена от всех его вершин, N — середина стороны AB. Доказать, что прямая AB перпендикулярна плоскости NMC.

93. Прямая AO перпендикулярна плоскости окружности с центром в точке O. Точка B лежит на окружности. Найти радиус окружности, если $AB = 12$ см, $\angle ABO = 30^\circ$.

94. Из вершины A правильного треугольника ABC проведен перпендикуляр AK к плоскости треугольника (рис. 48). Найти расстояние от точки K до вершин треугольника, если $BC = 12\sqrt{3}$ см, $\angle KBA = 30^\circ$.

95. Прямая SA перпендикулярна плоскости прямоугольника $ABCD$, $AD = 6$ см, $CD = 8$ см, $\angle SCA = 30^\circ$. Найти SA.

96. Точка M лежит вне плоскости треугольника ABC и равноудалена от его вершин. Как расположена точка O — проекция точки M на плоскость ABC — относительно треугольника ABC, если этот треугольник прямоугольный?

97. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 49). Найти ортогональные проекции отрезка BD_1 на плоскости граней куба.

98. Плоскость α проходит через середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$ и перпендикулярна прямым AD и BC. Доказать, что если $BC = AD$, то $ABCD$ — прямоугольник.

99. Могут ли две пересекающиеся плоскости быть перпендикулярными одной прямой?

100. Через вершину B прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр SB. Известно, что $SA = a$, $SC = b$, $SD = c$. Найти SB.

101. Через вершину B равнобедренного треугольника ABC проведен перпендикуляр SB к его плоскости длиной 4 см. Найти $\angle SMB$, где M — середина стороны AC, если $AB = BC = 5$ см, $AC = 6$ см.

102. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 18 см. Точка M находится на расстоянии 15 см от всех его вершин. Найти расстояние от точки M до плоскости треугольника.

103. Прямая BK перпендикулярна плоскости ромба $ABCD$ (рис. 50). O — точка пересечения диагоналей ромба. Доказать, что прямая AC перпендикулярна плоскости KBO.

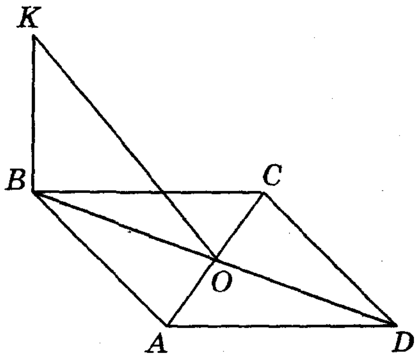


Рис. 50

104. Точка S лежит на прямой, перпендикулярной плоскости ромба $ABCD$ и равноудалена от его вершин B и D. Найти угол BSD, если $SB = AB$ и $\angle BAD = 60^\circ$.

105. Через точку M, не принадлежащую плоскости прямоугольника $ABCD$, проведен перпендикуляр AM к его плоскости. Через точку O — точку пересечения диагоналей прямоугольника — проведена прямая OK, параллельная прямой AM. Найти расстояние от точки K до вершин прямоугольника, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $OK = 6$ см.

106. Концы отрезка, расположенного по одну сторону от плоскости, удалены от плоскости на 9 см и 11 см. Найти расстояние от середины отрезка до плоскости.

107. Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BF, перпендикулярная прямым AB и BD. Доказать, что прямая AC перпендикулярна плоскости BFD.

108. Через вершины B и D ромба $ABCD$ проведены перпендикуляры BM и DN к плоскости ромба. Доказать, что плоскость ABM параллельна плоскости CDN.

Перпендикуляр и наклонная

109. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная длиной 12 см. Найти длину перпендикуляра, если длина проекции наклонной равна 7 см.

110. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Длина проекции наклонной равна 6 см. Найти длины перпендикуляра и наклонной, если угол между перпендикуляром и наклонной равен 30°.

111. Из точки M к плоскости α проведены наклонные MN и MK, а также перпендикуляр MF. Найти MF и MK, если $MN = 20$ см, $NF = 16$ см, $KF = 5$ см.

112. Из точки M к плоскости α проведены наклонные MK и MC и перпендикуляр MD. Найти длины наклонных, если $KD = 6$ см, $\angle MCD = 30^\circ$, $\angle MKD = 60^\circ$.

113. Из точки M к плоскости α проведены наклонные MN и MK, длины которых относятся как $25 : 26$. Найти расстояние от точки M до плоскости α, если длины проекций наклонных MN и MK равны 14 см и 20 см.

114. Доказать, что если проекции двух наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, равны, то равны и наклонные.

115. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD$ (рис. 51). Прямая SA перпендикулярна плоскости четырехугольника, $\angle DSC = \angle BSC$. Доказать, что $BC = CD$.

116. Прямая FB перпендикулярна плоскости треугольника ABC (рис. 52). Точка F равноудалена от точек A и C. Найти длину отрезка FB, если $AC = 6$ см, $\angle CBA = 120^\circ$, $\angle CFA = 90^\circ$.

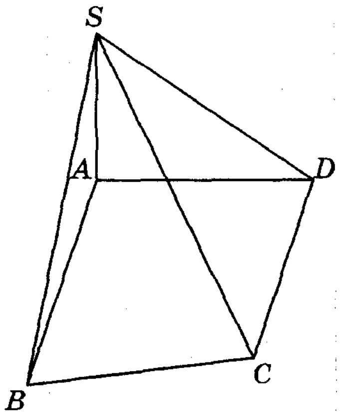


Рис. 51

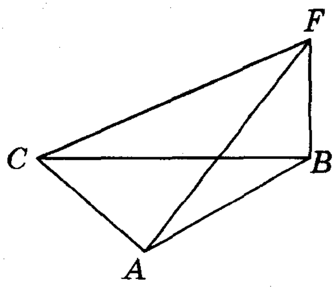


Рис. 52

117. Точка M равноудалена от вершин ромба $ABCD$. Доказать, что $ABCD$ — квадрат.

118. Точка M находится на расстоянии 10 см от вершин равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и на расстоянии 6 см от его плоскости. Найти стороны треугольника, если $\angle BAC = 30^\circ$.

119. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2BC$. Прямая FB перпендикулярна плоскости прямоугольника, $FB = 7$ см, $FD = 12$ см. Найти стороны прямоугольника.

120. *Из точки, лежащей вне данной плоскости*, проведены к ней две наклонные, длины проекций которых равны 9 см и 5 см. Найти длины наклонных, если разность их длин равна 2 см.

121. Два отрезка длиной 10 см и 17 см упираются своими концами в параллельные плоскости. Найти расстояние между этими плоскостями, если сумма проекций этих наклонных на одну из плоскостей равна 21 см.

122. Из точки M к плоскости α проведены две равные наклонные, угол между которыми равен 90°. Найти угол между наклонными и их проекциями на плоскость α, если угол между проекциями наклонных равен 120°.

123. Из точки M к плоскости α проведены наклонные MA и MB и перпендикуляр MC, $MA = 10$ см, $MC = 8$ см, $AB = \sqrt{316}$ см, $\angle ACB = 120^\circ$. Найти длину наклонной MB.

124. Через вершину C треугольника ABC проведена плоскость α, параллельная стороне AB. Расстояние от AB до плоскости α равно 6 см, а проекции сторон CA и CB на эту плоскость равны 4 см и 8 см соответственно. Найти медиану CM треугольника ABC, если $AB = 10$ см.

125. Из точки M к плоскости α проведены перпендикуляр MA и наклонные MB и MC, причем $MA^2 = AC \cdot AB$. Доказать, что $\angle AMB + \angle AMC = 90^\circ$.

Теорема о трех перпендикулярах

126. $ABCD$ — квадрат (рис. 53). Прямая NC перпендикулярна его плоскости. Доказать, что прямые BD и NO перпендикулярны.

127. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 54). Доказать, что прямая BD_1 перпендикулярна прямым AC и A_1C_1.

128. К плоскости равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) провели перпендикуляр $SB = a$ (рис. 55). Найти расстояние от точки S до прямой AC, если $AC = c$, $BC = b$.

129. Из точки M пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр SM и точка S соединена с серединой F стороны CD (рис. 56). Найти длину отрезка SD, если $AB = 10$ см, $BC = 24$ см, $\angle MSF = 60^\circ$.

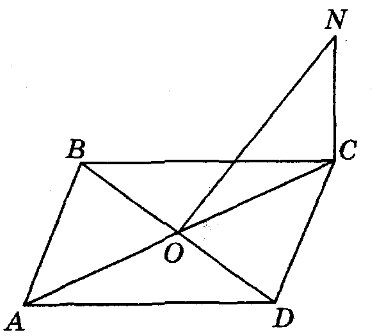


Рис. 53

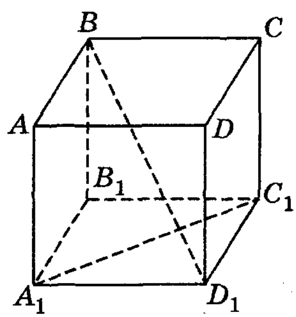


Рис. 54

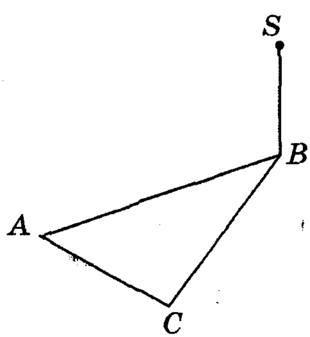


Рис. 55

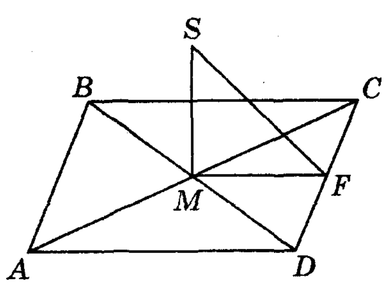


Рис. 56

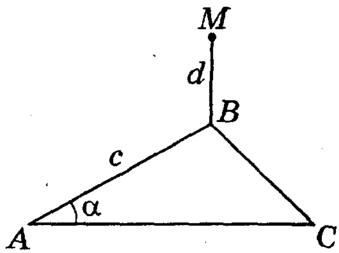


Рис. 57

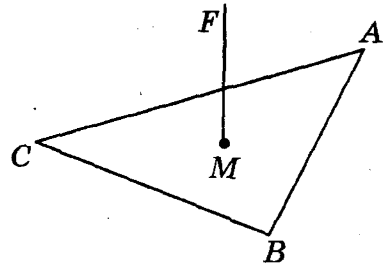


Рис. 58

130. Точка S принадлежит перпендикуляру к плоскости треугольника, проходящему через точку пересечения его биссектрис. Доказать, что точка S равноудалена от сторон треугольника.

131. Через вершину B треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр MB. Прямая, проходящая через точку M, перпендикулярна отрезку AC и пересекает этот отрезок в его середине. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

132. Через вершину угла B треугольника ABC проведен перпендикуляр MB к его плоскости. Найти расстояние от точки M до прямой AC, если $AB = c$, $MB = d$, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 57).

133. M — центр равностороннего треугольника ABC (рис. 58). Прямая FM перпендикулярна плоскости треугольника. Построить перпендикуляры, опущенные из точки F на стороны треугольника.

134. К плоскости прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр FK (рис. 59). Построить перпендикуляр, проведенный из точки F к прямой AB.

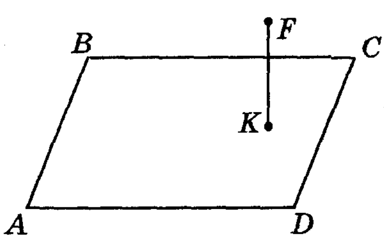


Рис. 59

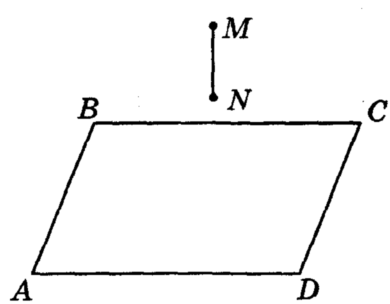


Рис. 60

135. Из точки M к плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр MN (рис. 60). Из точки M провести перпендикуляр к прямой AC.

136. Точка N принадлежит плоскости правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 61). К плоскости шестиугольника проведен перпендикуляр MN. Из точки M провести перпендикуляр к прямой CD.

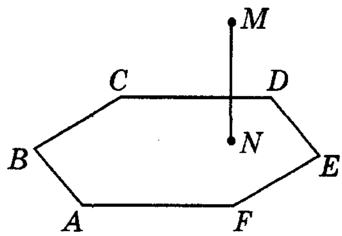


Рис. 61

137. Из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр BK длиной 7 см. Найти расстояние от точки K до AC, если $AC = 8\sqrt{2}$ см, $\angle BAC = 45^\circ$.

138. Из точки O пересечения диагоналей ромба $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр OF длиной 2 см. Найти расстояние от точки F до сторон ромба, если $AC = 16$ см, $BD = 12$ см.

139. Из вершины угла C треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр CN. Расстояние от точки N до прямой AB равно 26 см. Найти расстояние от точки N до плоскости треугольника, если $AC = 30$ см, $AB = 28$ см, $BC = 26$ см.

140. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) к плоскости треугольника проведен перпендикуляр BT длиной 5 см. Найти расстояние от точки T до стороны AC, если $AC = 8$ см, $AB = 6$ см.

141. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Через точку O к плоскости треугольника проведен перпендикуляр FO. Точка F удалена от стороны AB треугольника на 5 см. Найти длину отрезка FO, если $AB = 15$ см, $AC = 12$ см, $BC = 9$ см.

142. Из центра O окружности, вписанной в правильный треугольник, к плоскости треугольника проведен перпендикуляр OD длиной 6 см. Точка D удалена от сторон треугольника на расстояние 14 см. Найти сторону треугольника.

143. Основания равнобокой трапеции равны 2 см и 14 см. Из центра O окружности, вписанной в эту трапецию, проведен перпендикуляр OK к плоскости трапеции, $OK = 6$ см. Найти расстояние от точки K до сторон трапеции.

144. Диагонали ромба равны 60 см и 80 см. Точка M удалена от каждой из сторон ромба на 26 см. Найти расстояние от точки M до плоскости ромба.

145. Точка M удалена от каждой из сторон треугольника ABC на 10 см, а от его плоскости — на 6 см. Найти периметр треугольника ABC, если его площадь равна 96 см^2.

146. Сторона ромба с тупым углом α равна a. Точка M удалена от плоскости ромба на расстояние b. Найти расстояние от точки M до сторон ромба, если известно, что она равноудалена от них.

147. Точка S находится на одинаковом расстоянии от сторон угла. Доказать, что проекция точки S на плоскость данного угла принадлежит биссектрисе этого угла.

148. Стороны прямоугольника равны 12 см и 16 см. Из середины F меньшей стороны к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр FT длиной 2 см. Найти расстояние от точки T до диагоналей прямоугольника.

149. Из вершины C ромба $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр CF. Точка F удалена от стороны AB на 25 см. Найти расстояние от точки F до плоскости ромба, если диагонали ромба равны 30 см и 40 см.

150. Из точки S к плоскости π проведены перпендикуляр SF и наклонная SK, образующая со своей проекцией угол γ. Через точку K в плоскости π проведена прямая a, образующая с наклонной SK угол φ. Найти угол между прямыми FK и a.

151. В треугольнике ABC $AB = 18$ см, $BC = 26$ см, $AC = 21$ см. Через вершину A треугольника проведена наклонная, образующая с лучами AC и AB равные углы. Проекция наклонной пересекает сторону BC в точке F. Найти длины отрезков BF и CF.

152. Основания трапеции равны 8 см и 12 см. Через меньшее основание трапеции проведена плоскость, удаленная на расстояние 4 см от большего основания. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до данной плоскости.

Перпендикулярность плоскостей

153. Верно ли, что если плоскость α перпендикулярна плоскости β, то любая прямая, перпендикулярная плоскости α, перпендикулярна плоскости β?

154. Верно ли, что если прямая a и плоскость α перпендикулярны плоскости β, то прямая a параллельна плоскости α?

155. Доказать, что если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то линия их пересечения также перпендикулярна этой плоскости.

156. Точка D равноудалена от вершин A и C равнобедренного треугольника ABC, $AB = BC$. Точка M — середина стороны AC. Доказать, что плоскости ABC и BDM перпендикулярны.

157. Два равносторонних треугольника ABC и ABC_1 имеют общую сторону AB, длина которой равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найти расстояние между вершинами C и C_1.

158. Точка M равноудалена от сторон ромба $ABCD$. Доказать, что плоскости AMC и BMD перпендикулярны.

159. Точка S равноудалена от вершин равностороннего треугольника ABC, M — середина стороны AC. Доказать, что плоскости MSB и ABC перпендикулярны.

160. Точка M равноудалена от вершин C и D прямоугольника $ABCD$. Из точки M к стороне AB проведен перпендикуляр MN. Доказать, что плоскость прямоугольника перпендикулярна плоскости MNO, где O — точка пересечения диагоналей прямоугольника.

161. Плоскости π и γ перпендикулярны и пересекаются по прямой m. Плоскость φ пересекает плоскости π и γ по прямым k и p, параллельным прямой m. Расстояние между прямыми k и p равно 20 см, а между прямыми m и p — 16 см. Найти расстояние между прямыми m и k, а также расстояние от прямой m до плоскости φ.

162. Концы отрезка, длина которого равна 25 см, принадлежат двум взаимно перпендикулярным плоскостям, а расстояния от концов отрезка до линии пересечения плоскостей равны 20 см и 9 см. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к линии пересечения плоскостей.

163. Точки A и B принадлежат двум перпендикулярным плоскостям α и β соответственно, a — линия пересечения этих плоскостей, AD и BC — перпендикуляры, проведенные из точек A и B к прямой a. Найти длину отрезка AB, если $AD = 5$ см, $BC = 6$ см, $DC = 12$ см.

164. Отрезок лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и не пересекает другую. Один из концов отрезка удален от прямой a пересечения плоскостей на 12 см. В другой плоскости проведена прямая b, параллельная a. Расстояния от концов данного отрезка до прямой b равны 13 см и $\sqrt{41}$ см. Найти расстояние от середины отрезка до прямой a.

165. Прямоугольник $ABCD$ перегнули по диагонали так, что плоскости ABD и CBD оказались перпендикулярными. Найти расстояние между точками A и C, если $AB = 30$ см, $BD = 50$ см.

166. Доказать, что если прямые пересечения плоскостей α, β и γ попарно перпендикулярны, то и плоскости попарно перпендикулярны.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

167. На рис. 62 дано изображение куба с ребром a. Найти расстояние между прямыми AB и CD.

168. Через вершину острого угла A прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) проведена прямая a, перпендикулярная плоскости треугольника. Найти расстояние между прямыми BC и a, если $BC = 7$ см, $AC = 25$ см.

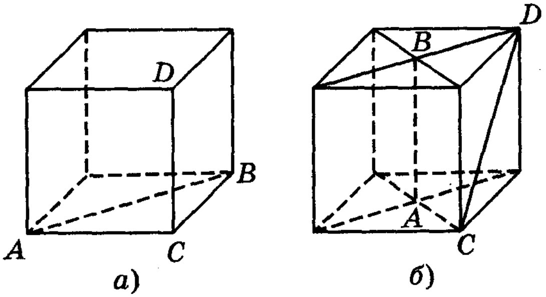


Рис. 62

169. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая l, перпендикулярная плоскости треугольника. Найти расстояние между прямыми l и BC, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

170. Через середину хорды AB окружности радиусом 5 см проведена прямая n, перпендикулярная плоскости окружности. Найти расстояние между прямой n и диаметром BC, если $AC = 8$ см.

171. Через точку A окружности проведены хорды AB и AC. Через точку B проведена прямая m, перпендикулярная плоскости окружности, а через точку C прямая k — касательная к окружности. Найти расстояние между прямыми m и k, если $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle BAC = 60^\circ$.

172. Через вершину A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) проведена плоскость, перпендикулярная плоскости ABC, и в этой плоскости через точку A проведена прямая m. Найти расстояние между прямыми m и BC, если $BC = 8$ см, $\angle BAC = 120^\circ$.

173. Через основание BC равнобедренного треугольника ABC проведена плоскость α. Расстояние от точки A до α равно 4 см. Найти расстояние между прямой BC и прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости α, если $BC = 12$ см, $AB = 10$ см.

174. Скрещивающиеся прямые a и b принадлежат параллельным плоскостям α и β соответственно. Доказать, что расстояние между прямыми a и b равно расстоянию между плоскостями α и β.

175. Плоскость α проведена через сторону CD прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно его плоскости (рис. 63). Из точки A к плоскости α проведена наклонная AK длиной 15 см. Найти расстояние между прямыми BC и AK, если $AB = 8$ см, $AD = 9$ см, $KC = 12$ см.

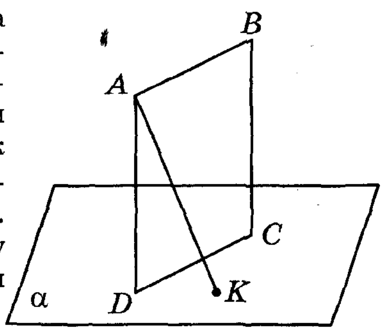


Рис. 63

176. Плоскости квадратов $ABCD$ и ABC_1D_1 взаимно перпендикулярны (рис. 64). Найти расстояние между прямыми CD_1 и AB, если $AB = 6$ см.

177. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, длина ребра которого равна 2 см. Найти расстояние между прямыми DB_1 и AB.

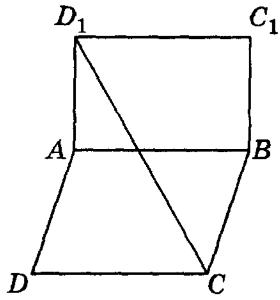


Рис. 64

Введение декартовых координат в пространстве

178. Какие из приведенных точек лежат на координатных осях: M (−7; 0; 9), N (0; 8; −12), K (−23; 0; 0), P (0; 0; 101), Q (0; 14,7; 0), S (19; −36; 0)? Указать, на каких именно.

179. Какие из приведенных точек лежат в координатных плоскостях: A (6; −9; 11), B (−5; 7; 0), C (5; 0; −12), D (0; 17; −20), E (1; −1; 2), F (0; −9; 0)? Указать, в каких именно.

180. Какие из приведенных точек лежат на одной прямой, параллельной оси ординат: T (−2; 3; 1), R (2; 3; 1), S (−2; −8; 1), F (−2; 0; −1)?

181. Какие из приведенных точек лежат в одной плоскости, параллельной плоскости yz: A (6; −4; 10), B (6; 7; −12), C (4; 7; −12), D (−6; 13; 10)?

182. На каких расстояниях от координатных плоскостей находится точка M (−9; 7; −3)?

183. Сторона правильного треугольника OAB (рис. 65), лежащего в плоскости yz, равна $2\sqrt{3}$. Найти координаты его вершин.

184. Ребро куба $OABCO_1A_1B_1C_1$ равно 6 (рис. 66). Найти координаты вершин куба.

185. Точка K находится на расстоянии 4 см от начала координат, а луч OK образует с положительными направлениями координатных осей x и y углы 45° и 60° соответственно. Найти координаты точки K, если известно, что ее аппликата — отрицательное число, а абсцисса и ордината — положительные числа.

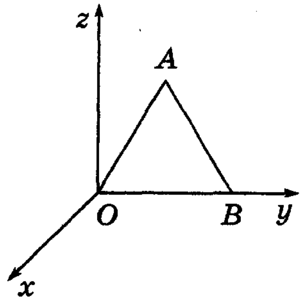


Рис. 65

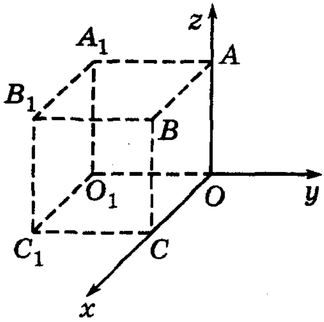


Рис. 66

186. Расстояния от точки E до осей координат равны 12 см, 4 см и 1 см. Найти расстояние от точки E до начала координат.

Координаты середины отрезка. Расстояние между двумя точками

187. Найти координаты середины отрезка ST, если:

1) S (–4; 8; –5), T (8; 6; –7);

2) S (–1; 13; 9), T (10; –15; 2).

188. Точка C — середина отрезка MK. Найти координаты точки M, если C (–6; 2; 3,5), K (0; –8; 3).

189. Найти координаты точки, делящей отрезок AB в отношении 1 : 3, считая от точки A, если A (4; –5; 2), B (12; –3; –4).

190. Найти координаты вершины B параллелограмма $ABCD$, если A (–3; 8; –5), C (–7; 6; 7), D (4; –2; –3).

191. Точки A_1 (–4; 3; –2) и C_1 (3; –1; –2) — середины сторон BC и AB треугольника ABC соответственно. Найти координаты вершин B и C, если вершина A имеет координаты (5; 3; –6).

192. Точки M (–2; 3; 4), N (3; 5; 2) и K (3; –5; 1) — середины сторон треугольника. Найти координаты вершин этого треугольника.

193. Найти расстояние между точками E и F, если:

1) E (7; –7; 10), F (1; –4; 4);

2) E (5; –2; –1), F (–3; 4; 3).

194. В треугольнике ABC A (3; –5; 0), B (7; 1; 4), C (–3; 9; –6). Найти длину средней линии MN треугольника ABC, где M и N — середины сторон AB и BC соответственно.

195. Расстояние между точками A (–2; 3; z) и B (1; –5; –2) равно $7\sqrt{2}$. Найти z.

196. На оси абсцисс найти точку, равноудаленную от точек A (4; –5; 6) и B (2; 3; –4).

197. Найти координаты точек A и B и длину отрезка AB, если точка A принадлежит оси z, точка B лежит в плоскости xy и точка C (–12; 10; –5) — середина отрезка AB.

198. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (–1; 5; 3), B (–3; 7; –5), C (3; 1; –5) и D (5; –1; 3) — ромб.

199. Доказать, что точки A (–3; –7; 4), B (2; 3; –1) и C (–4; –9; 5) лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?

Преобразование симметрии в пространстве

200. Записать координаты точек, симметричных точкам M (–3; 5; –1), N (0; –1; 7), K (8; 12; 6), P (10; –5; 5), E (4; 0; 0), F (–11; –2; –4) относительно: 1) начала координат; 2) плоскости xz; 3) плоскости yz; 4) оси x.

201. Точки A (3; –8; 6) и B симметричны относительно: 1) начала координат; 2) плоскости xy. Найти длину отрезка AB.

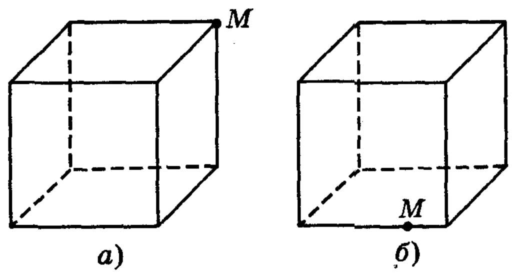


Рис. 67

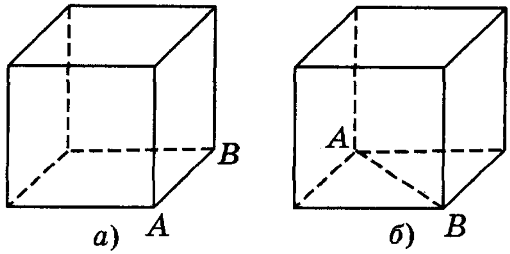


Рис. 68

202. Точки E (–3; 8; 7) и F (–9; 6; 2) симметричны относительно точки M. Найти ее координаты.

203. Точку A (m; n; p) отобразили симметрично последовательно относительно координатных плоскостей xy, yz и начала координат. Доказать, что полученная при этом точка A_1 симметрична точке A относительно плоскости xz.

204. На рис. 67 дано изображение куба. Перерисовать его в тетрадь и построить фигуру, симметричную кубу относительно точки M.

205. На рис. 68 дано изображение куба. Перерисовать его в тетрадь и построить фигуру, симметричную кубу относительно прямой AB.

Параллельный перенос в пространстве

206. Параллельный перенос задается формулами $x' = x - 4$, $y' = y + 2$, $z' = z - 6$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки M (4; –2; 7), N (–2; 0; –1), K (0; 0; –8), O (0; 0; 0)?

207. При параллельном переносе точка M (–8; 6; –3) переходит в точку M_1 (3; –7; 2). Записать формулы этого параллельного переноса и найти, в какую точку при этом переносе переходит точка K (–1; –9; 6).

208. Даны точки M (2; –3; 7) и K (–3; –5; 0). Записать формулы параллельного переноса, при котором точка M переходит в точку K, и переноса, при котором K переходит в M.

209. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A (–3; 1; –6) переходит в точку A_1 (2; 3; –9), а точка B (4; –6; 3) — в точку B_1 (9; –4; 6)?

210. На рис. 68 дано изображение куба. Перерисовать его в тетрадь и построить фигуру, в которую переходит куб при параллельном переносе, при котором точка A переходит в точку B.

Подобие пространственных фигур

211. Треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ относительно начала координат с коэффициентом гомотетии $k = 0{,}5$. Найти координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$, если A (0; 0; 1), B (16; 0; 0), C (0; –6; 0).

212. При гомотетии с центром K (4; –2; 7) и коэффициентом гомотетии $k = 4$ треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Найти координаты вершин треугольника ABC, если A_1 (12; 2; 5), B_1 (–20; 6; 11), C_1 (–12; 26; –3).

213. При гомотетии с центром D (–2; 2; 1) точка Q (6; 10; –5) переходит в точку T (2; 6; –2). Найти коэффициент гомотетии и выяснить, в какую точку при этой гомотетии переходит точка K (5; –4; 3).

214. Через точку M проведены три прямые, пересекающие плоскость α в точках A, B и C, а параллельную ей плоскость β в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найти неизвестные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $A_1C_1 = 15$ см, $B_1C_1 = 18$ см.

215. Плоскости α и β параллельны. Из точки K проведены три луча, пересекающие плоскость α в точках M, N и E, а плоскость β — соответственно в точках M_1, N_1 и E_1. Найти стороны треугольника $M_1N_1E_1$, если $MN = a$, $NE = b$, $ME = c$, $KM_1 : MM_1 = m : n$ и точка M лежит между точками K и M_1.

Угол между скрещивающимися прямыми

216. AM — медиана треугольника ABC, прямая MK перпендикулярна прямым AM и BC. Найти угол между прямыми AB и MK.

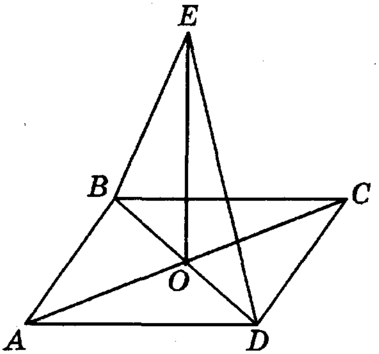


Рис. 69

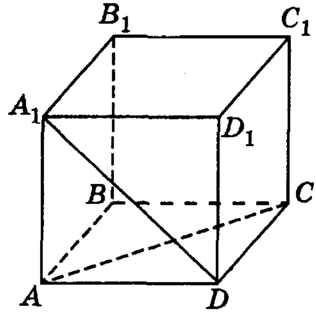


Рис. 70

217. Через центр O квадрата $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр EO (рис. 69). Найти угол между прямыми ED и AC.

218. Через центр O правильного шестиугольника $ABCDEF$ к его плоскости проведена перпендикулярная прямая. На этой прямой выбрана точка K, соединенная с серединой P стороны AB. Доказать, что прямые KP и FC перпендикулярны.

219. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 70). Найти угол между прямыми: 1) AB и CC_1; 2) B_1C_1 и AC; 3) A_1D и AC.

220. Через вершину B прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр FB длиной 6 см. Найти угол между прямыми AB и FD, если $AB = 9$ см, $BC = 12$ см.

Угол между прямой и плоскостью

221. Наклонная образует с плоскостью угол 60°. Найти длину наклонной, если длина ее проекции 9 см.

222. Найти угол между наклонной и плоскостью, если длина наклонной равна 15 см, а расстояние от конца наклонной до плоскости — 3 см.

223. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 70). Найти угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

224. Доказать, что боковые стороны равнобедренного треугольника образуют равные углы с плоскостью, проходящей через его основание.

225. Точка M лежит вне плоскости правильного треугольника ABC, а наклонные MA, MB и MC образуют равные углы с плоскостью ABC. Доказать, что проекция точки M на плоскость треугольника — центр этого треугольника.

226. Точка K находится на расстоянии 6 см от плоскости α. Наклонные KA и KB образуют с плоскостью α углы 45° и 30°, а угол между наклонными равен 135°. Найти расстояние между точками A и B.

227. В треугольнике ABC $AB = AC$, $BC = 12$ см, площадь треугольника равна 18 см^2. Через вершину A проведен к плоскости треугольника перпендикуляр DA такой, что $DE = 3\sqrt{2}$ см, где E — середина BC. Найти угол между прямой DE и плоскостью треугольника.

228. Концы отрезка AB, длина которого равна $2\sqrt{2}$ см, лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях α и β соответственно. Из точек A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на линию пересечения плоскостей, $AB_1 = \sqrt{6}$ см, $AA_1 = 2$ см. Найти углы, образуемые отрезком AB с плоскостями α и β.

229. Точки A и B лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. С одной из плоскостей отрезок AB образует угол 30°. Точка A находится на расстоянии 4 см от этой плоскости, а расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек A и B к линии пересечения плоскостей, равно $4\sqrt{2}$ см. Найти угол между отрезком AB и второй плоскостью.

230. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) к плоскости треугольника проведен перпендикуляр DA. Найти расстояние от точки D до прямой BC, если прямая DB образует с плоскостью ABC угол β, $AC = c$, $\angle BAC = \alpha$.

231. Треугольники ABC и ADC лежат в различных плоскостях. Найти углы, образуемые прямыми AB и CB с плоскостью ADC, если $AB = BC = AC$, $AD = DC$, $\angle ADC = 90^\circ$, прямая BD перпендикулярна плоскости ADC.

232. Через вершину угла, равного 60°, проведена прямая, образующая со сторонами этого угла углы по 60°. Найти угол, образуемый этой прямой с плоскостью данного угла.

Угол между плоскостями

233. Угол между двумя плоскостями равен 30°. В каждой из плоскостей проведена прямая, параллельная линии их пересечения. Расстояние от одной из этих прямых до линии пересечения плоскостей равно 8 см, а от другой — $2\sqrt{3}$ см. Найти расстояние между проведенными прямыми.

234. Плоскости α и β, угол между которыми равен 60°, пересекаются по прямой l. Плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым a и b, параллельным прямой l, соответственно. Расстояние между прямыми a и b равно $2\sqrt{19}$ см, между a и l — 6 см. Найти расстояние от прямой b до плоскости α.

235. Квадрат и прямоугольник, площади которых соответственно равны 36 см^2 и 96 см^2, имеют общую сторону, а расстояние между их параллельными сторонами равно 14 см. Найти угол между плоскостями квадрата и прямоугольника.

236. Сторона AB равностороннего треугольника ABC принадлежит плоскости α. Из точки C к плоскости α проведен перпендикуляр CO. Расстояние от точки O до прямой AB равно $3\sqrt{3}$ см, площадь треугольника ABC равна $36\sqrt{3}$ см^2. Найти угол между плоскостями ABC и α.

237. Через сторону AB треугольника ABC проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол 45°. Найти расстояние от вершины C до этой плоскости, если $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

238. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC, равное 12 см. Угол между их плоскостями равен 60°, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ADC = 120^\circ$. Найти длину отрезка BD.

239. Два равнобедренных треугольника MNK и MEK имеют общее основание MK, равное 10 см. Найти угол между плоскостями MNK и MEK, если $MN = 5\sqrt{3}$ см, $EK = 13$ см, $EN = \sqrt{74}$ см.

240. Прямоугольники $ABCD$ и $AMKD$ имеют общую сторону AD, равную 6 см. Найти угол между плоскостями прямоугольников, если $DK = 16$ см, $DC = 12$ см, $MC = 10$ см.

241. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 71). Найти угол между плоскостями ABC и AB_1C_1.

242. Через сторону правильного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол 30°. Найти углы, образуемые двумя другими сторонами треугольника с этой плоскостью.

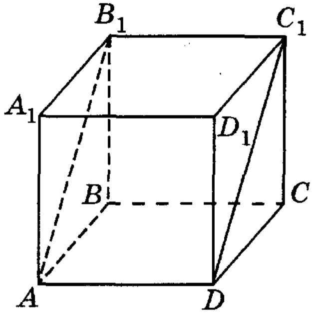


Рис. 71

243. Угол между плоскостями α и β, пересекающимися по прямой a, равен 45°. В плоскостях α и β выбраны точки C и D соответственно и из них проведены перпендикуляры DA и CB к прямой a. Найти длину отрезка AB, если $AD = 6\sqrt{2}$ см, $CB = 8$ см, $DC = 11$ см.

244. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Из точек A и B, лежащих в плоскостях α и β соответственно, проведены перпендикуляры AM и BN к прямой l. Найти угол между плоскостями α и β, если $AM = 12$ см, $BN = 8\sqrt{3}$ см, $AN = 4\sqrt{10}$ см, $AB = 8$ см.

245. Через центр O правильного треугольника ABC проведена прямая l, перпендикулярная плоскости треугольника. Плоскость, проведенная через сторону AB, пересекает прямую l в точке M. Угол между плоскостями ABC и ABM равен 60°. Найти длину стороны треугольника ABC, если длина проекции отрезка MO на плоскость ABM равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см.

246. Из точки M, лежащей вне плоскости α, проведены к ней две наклонные MA и MB, образующие с α углы 45° и 60° соответственно. Найти угол между плоскостями α и MAB, если угол между проекциями наклонных MA и MB равен 150°.

247. Угол между двумя плоскостями равен 60°. В одной из плоскостей проведена прямая, образующая с другой плоскостью угол 30°. Найти угол, образуемый этой прямой с линией пересечения плоскостей.

248. Точка M находится на равных расстояниях от вершин правильного шестиугольника $ABCDEF$. Угол между прямой MA и плоскостью ABC равен α. Найти угол между плоскостями MAB и ABC.

249. Точка K равноудалена от вершин квадрата $ABCD$. Угол между прямой KA и плоскостью ABC равен β. Найти угол между плоскостями ABK и ADK.

Площадь ортогональной проекции многоугольника

250. Может ли площадь ортогональной проекции многоугольника быть больше площади самого многоугольника?

251. Найти площадь многоугольника, если площадь его ортогональной проекции на некоторую плоскость равна $32\sqrt{2}$ см^2, а угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции равен 45°.

252. Площадь многоугольника равна 24 см^2, а площадь его ортогональной проекции — 16 см^2. Найти угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

253. Ортогональной проекцией треугольника ABC на некоторую плоскость является прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ такой, что катет A_1C_1 равен 30 см, медиана, проведенная к гипотенузе A_1B_1, — 17 см. Найти угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна $160\sqrt{3}$ см^2.

254. Площадь четырехугольника равна $56\sqrt{2}$ см^2. Его ортогональной проекцией на некоторую плоскость является ромб, одна из диагоналей которого равна 14 см. Найти другую диагональ ромба, если угол между плоскостью четырехугольника и плоскостью ромба равен 45°.

255. Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 22,5 см^2. Он является ортогональной проекцией треугольника ABC со сторонами 6 см, 10 см и 14 см. Найти угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

256. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — ортогональная проекция четырехугольника $ABCD$ на плоскость α, а четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ — ортогональная проекция четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ на плоскость ABC. Найти угол между плоскостями α и ABC, если отношение площадей четырехугольников $A_2B_2C_2D_2$ и $ABCD$ равно $\frac{1}{2}$.

257. Ортогональной проекцией трапеции является равнобокая трапеция, основания которой равны 4 см и 8 см, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь данной трапеции, если угол между ее плоскостью и плоскостью проекции равен 60°.

Векторы в пространстве. Равенство векторов. Координаты вектора

258. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если: 1) $A\ (3;\ -4;\ -7)$, $B\ (-1;\ 5;\ 3)$; 2) $A\ (-4;\ 0;\ 8)$, $B\ (0;\ -6;\ 2)$.

259. Даны точки $M\ (-3;\ 2;\ z)$, $N\ (4;\ -6;\ 3)$, $K\ (x;\ 1;\ -10)$, $E\ (2;\ y;\ -15)$. Найти x, y, z, если $\overline{MN} = \overline{EK}$.

260. Точка $K\ (-8;\ 3;\ -5)$ — конец вектора $\overline{a}\ (6;\ -9;\ 2)$. Найти координаты начала вектора.

261. Доказать, что четырехугольник $MNKP$ с вершинами в точках $M\ (-3;\ 2;\ -4)$, $N\ (-1;\ 6;\ 6)$, $K\ (6;\ 7;\ 8)$, $P\ (4;\ 3;\ -2)$ является параллелограммом.

262. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A\ (4;\ -5;\ -2)$, $B\ (2;\ 3;\ -8)$, $D\ (-3;\ -4;\ 6)$. Найти координаты вершины C.

263. Среди векторов $\overline{a}\ (5;\ -3;\ 4)$, $\overline{b}\ (-2;\ 1;\ -7)$, $\overline{c}\ (2;\ -6;\ \sqrt{10})$, $\overline{d}\ (-3;\ 6;\ 3)$, $\overline{m}\ (-5;\ 5;\ -2)$ найти имеющие одинаковый модуль.

264. Модуль вектора $\overline{n}\ (x;\ -10;\ 8)$ равен 13. Найти x.

265. Модуль вектора $\overline{n}\ (x;\ y;\ z)$ равен $3\sqrt{3}$, его координаты x и y равны, а x и z — противоположные числа. Найти координаты вектора $\overline{n}$.

Сложение векторов

266. Даны векторы $\overline{c}\ (-3;\ 1;\ 2)$ и $\overline{d}\ (5;\ -6;\ 7)$. Найти:
1) $\overline{c} + \overline{d}$; 2) $\overline{c} - \overline{d}$; 3) $|\overline{c} + \overline{d}|$; 4) $|\overline{d} - \overline{c}|$.

267. Найти координаты точки K такой, что $\overline{MK} - \overline{KN} = \overline{0}$, где $M\ (0;\ 5;\ -8)$, $N\ (-6;\ 3;\ 7)$.

268. Найти координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если их сумма — вектор $(-4;\ 5;\ 7)$, а разность — $(-3;\ 15;\ -25)$.

269. Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:
1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

270. Даны векторы $\overline{m}\ (4;\ -2;\ 12)$, $\overline{n}\ (1;\ 3;\ 1)$, $\overline{k}\ (-1;\ y;\ -16)$. При каком значении y модуль вектора $\overline{m} - \overline{n} - \overline{k}$ наименьший? Найти это значение модуля.

Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы

271. Даны векторы $\bar{a}$ (4; −7; −3) и $\bar{b}$ (−3; 6; 22). Найти:

1) $3\bar{a} + \bar{b}$; 2) $4\bar{a} + 6\bar{b}$; 3) $\bar{b} - 4\bar{a}$; 4) $3\bar{b} - 5\bar{a}$.

272. Найти модуль вектора $\bar{m} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$, где $\bar{a}$ (5; −12; 4), $\bar{b}$ (1; −2; 2).

273. Точка M находится вне плоскости треугольника ABC. Выразить через векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ и $\overline{MC}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{EF}$ и $\overline{AF}$, где E — середина отрезка AC, F — середина BC.

274. Проекцией точки S на плоскость параллелограмма $ABCD$ является точка O пересечения его диагоналей. Выразить через векторы $\overline{SA}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{SB}$, $\overline{SO}$.

275. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно такие, что $AM : MB = 2 : 3$, $AN : NC = 3 : 2$. Вне плоскости треугольника ABC взяли точку D. Выразить вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ и $\overline{DC}$.

276. Коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если A (2; −5; 4), B (1; 4; 6), C (−4; −6; 8), D (−2; 0; 12)?

277. Среди векторов $\bar{m}$ (4; −3; 5), $\bar{n}$ (−8; 6; −10), $\bar{p}$ (12; −9; 15), $\bar{k}$ (−0,8; 0,6; −1) найти одинаково направленные и противоположно направленные векторы.

278. Найти значения x и y, при которых векторы $\bar{a}$ (x; −8; 12) и $\bar{b}$ (24; y; −36) коллинеарны.

279. Дан вектор $\bar{n}$ (−3; 4; −5). Найти координаты вектора $\bar{m}$, одинаково направленного с вектором $\bar{n}$, если $|\bar{m}| = 10\sqrt{2}$.

280. Для ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ выполняется равенство $4\bar{a} - 9\bar{b} + 5\bar{c} = 2\bar{a} - 7\bar{b} + 6\bar{c}$, причем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — коллинеарны. Доказать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — коллинеарны.

281. Доказать, что четырехугольник $MPFK$ с вершинами в точках M (−2; 3; −5), P (2; 5; 2), F (4; 1; 6), K (−4; −3; −8) — трапеция.

282. Лежат ли точки D (4; −2; −3), E (5; 1; 1) и F (7; 7; −7) на одной прямой?

Разложение вектора по трем векторам, не лежащим в одной плоскости. Единичный вектор

283. Среди векторов $\bar{a}\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$, $\bar{b}\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $\bar{c}\left(\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$, $\bar{d}$ (0; –1; 0), $\bar{e}$ (1; 0; –1) указать единичные векторы.

284. Найти координаты единичного вектора, противоположно направленного с вектором:

1) $\bar{a}$ (5; 0; –12); 2) $\bar{b}$ (–3; 4; 8); 3) $\bar{c}$ (m; n; t).

285. Даны единичные векторы $\bar{e}_1$ (1; 0; 0), $\bar{e}_2$ (0; 1; 0), $\bar{e}_3$ (0; 0; 1). Найти координаты векторов:

1) $6\bar{e}_1 - 14\bar{e}_2 + 19\bar{e}_3$; 2) $-7\bar{e}_1 - 9\bar{e}_2$; 3) $a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 - c\bar{e}_3$.

286. Разложить вектор $\bar{n}$ (11; –4; 11) по направлениям векторов $\bar{a}$ (1; 2; 3), $\bar{b}$ (2; –1; 1) и $\bar{c}$ (3; –5; 2).

Скалярное произведение векторов

287. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:
1) $\bar{a}$ (1; –3; 8), $\bar{b}$ (4; –2; –6);
2) $\bar{a}$ (–3; –8; 9), $\bar{b}$ (–7; –1; –2);
3) $\bar{a}$ (–10; 5; 6), $\bar{b}$ (4; 2; 5).

288. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1) $|\bar{a}| = 8$, $|\bar{b}| = 7$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 45°$;

2) $|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 11$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 120°$;

3) $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 6$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 90°$.

289. Даны векторы $\bar{a}$ (4; –2; p) и $\bar{b}$ (5; p; –3). При каком значении p $\bar{a} \cdot \bar{b} = 8$?

290. Найти косинус угла между векторами $\bar{a}$ (5; –1; –2) и $\bar{b}$ (2; 6; –3).

291. Найти косинусы углов треугольника ABC и установить вид этого треугольника, если A (1; –4; –1), B (4; 7; 0), C (–2; 1; 6).

292. Даны векторы $\bar{a}$ $(6; -1; -5)$ и $\bar{b}$ $(x; 2; 2)$. При каком значении x векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны?

293. Даны векторы $\bar{a}$ $(4; -7; -2)$ и $\bar{b}$ $(3; y; -1)$. При каких значениях y угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

1) острый; 2) прямой; 3) тупой?

294. Найти углы, образованные вектором $\overline{AB}$, где A $(5; -4; 2)$, B $(7; -4; -2)$, с положительными направлениями координатных осей.

295. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами A $(6; -4; 2)$, B $(3; 2; 3)$, C $(0; 1; 0)$, D $(3; -5; -1)$ — прямоугольник.

296. Найти координаты вектора $\bar{a}$, коллинеарного вектору $\bar{b}$ $(2; -5; -1)$, если $\bar{a} \cdot \bar{b} = -90$.

297. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $135°$, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 7$. Найти:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; 2) $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot \bar{a}$; 3) $(\bar{b} - 2\bar{a}) \cdot \bar{b}$; 4) $(2\bar{b} + 5\bar{a}) \cdot \bar{a}$.

298. $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — единичные векторы, угол между которыми равен $120°$. Вычислить скалярное произведение $(3\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b})$.

299. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 5$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 135°$. Найти: 1) $|\bar{a} + \bar{b}|$; 2) $|\bar{b} - 3\bar{a}|$.

300. Найти косинус угла между векторами $\bar{a} = 3\bar{k} + \bar{p}$ и $\bar{b} = \bar{k} - 2\bar{p}$, где $\bar{k}$ и $\bar{p}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

301. Даны векторы $\bar{c}$ $(1; -2; 8)$ и $\bar{d}$ $(3; 1; -4)$. Найти значение n, при котором векторы $n\bar{c} + \bar{d}$ и $\bar{c}$ перпендикулярны.

302. Даны точки A $(2; 2; 1)$, B $(3; 5; 4)$, C $(-1; -10; -14)$ и D $(-4; 6; -1)$. Доказать, что прямая AD перпендикулярна плоскости ABC.

303. Найти множество точек S $(x; y; z)$ такое, что содержит точку M $(-5; 2; -9)$, и прямая, проходящая через точки A $(7; -8; 20)$ и C $(5; -2; 16)$, перпендикулярна каждой прямой, проходящей через точку M.

Вариант 3

Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия

1. Можно ли утверждать, что:
   1) существуют две точки, не лежащие на одной прямой;
   2) любые две точки всегда лежат в одной плоскости?
2. Сколько различных плоскостей можно провести через две точки?
3. Верно ли, что любая прямая, пересекающая две стороны треугольника, лежит в плоскости этого треугольника?
4. Может ли прямая пересекать хорду окружности, но не пересекать саму окружность?
5. Верно ли, что если через две прямые можно провести плоскость, то эти прямые пересекаются?
6. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. В плоскости α проведена прямая m, пересекающая a в точке M. В какой точке пересекает прямая m плоскость β?
7. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Плоскость γ, пересекая прямую m, пересекает плоскости α и β по прямым a и b соответственно. Доказать, что прямые a и b пересекаются.
8. Точка A принадлежит прямой a, а точка B — нет. Сколько плоскостей можно провести через прямую a и точки A и B?
9. Прямая a принадлежит плоскости α. Доказать, что через прямую a можно провести плоскость, отличную от плоскости α.
10. Среди точек A, B, C и D есть три, лежащие на одной прямой. Верно ли, что через данные четыре точки проходит единственная плоскость?

11. Даны прямая a и точка A вне ее. Доказать, что существует плоскость, проходящая через точку A и пересекающая прямую a.

12. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Доказать, что существует плоскость γ, отличная от α и β и содержащая прямую a.

13. Прямая a принадлежит плоскости α. Прямая b пересекает плоскость α в точке, не принадлежащей прямой a. Доказать, что прямые a и b не лежат в одной плоскости.

14. Точки A, B, C, D расположены в пространстве так, что прямые AB и CD не пересекаются. Следует ли из этого, что указанные точки не лежат в одной плоскости?

15. Прямые a и b не пересекаются. Верно ли, что все прямые, пересекающие прямые a и b, лежат в одной плоскости?

16. Прямые a и b, b и c, a и c пересекаются, и точки их пересечения не совпадают. Лежат ли прямые a, b и c в одной плоскости?

17. Точки A и B принадлежат прямой a, точки D и C принадлежат прямой b. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Доказать, что прямые AC и BD не пересекаются.

18. Лучи MA, MB, MC пересекают плоскость α в точках A, B, C. Прямая l пересекает эти лучи в трех различных точках. Доказать, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

19. Вершина A треугольника ABC принадлежит плоскости α, а вершины B и C ей не принадлежат. Прямая BC пересекает плоскость α в точке D, а продолжение медианы CM — в точке N. Доказать, что точки A, D, N лежат на одной прямой.

20. Вершины A и C треугольника ABC принадлежат плоскости α, а вершина B ей не принадлежит. В плоскости α выбрана точка D, не принадлежащая прямой AC. Внутри треугольника ABC отмечена точка O. Построить линию пересечения плоскости BOD с плоскостью α.

21. Две соседние вершины и точка пересечения диагоналей трапеции принадлежат плоскости α. Принадлежат ли плоскости α две другие вершины трапеции?

22. Можно ли утверждать, что все точки окружности принадлежат плоскости, если: 1) две точки окружности и ее центр принадлежат плоскости; 2) диаметр окружности принадлежит плоскости?

23. Каждая из двух плоскостей α и β проходит через точки A, B и C. Следует ли из этого, что плоскости α и β совпадают?

24. Среди данных n точек любые четыре принадлежат одной плоскости. Доказать, что все n точек лежат в одной плоскости.

25. Основания высот остроугольного треугольника принадлежат плоскости α. Принадлежат ли плоскости α вершины треугольника?

26. Вершины A и B плоского четырехугольника $ABCD$ лежат по одну сторону от плоскости α, и вершины C и D — по другую сторону. Доказать, что точки пересечения диагоналей и сторон BC и AD четырехугольника с плоскостью α лежат на одной прямой.

Параллельные прямые в пространстве. Скрещивающиеся прямые

27. Прямые a и b параллельны, прямая c не пересекает прямую a. Можно ли утверждать, что прямая c не пересекает прямую b:

1) на плоскости; 2) в пространстве?

28. Точки A и B принадлежат прямой a, точки C и D — прямой b, причем $a \parallel b$. Доказать, что прямые BC и AD не являются скрещивающимися.

29. Прямые AB и CD скрещивающиеся. Доказать, что прямые AC и BD также скрещивающиеся.

30. Через точки A и B прямой l проведены перпендикулярные ей прямые. На них отмечены такие точки A_1 и B_1, что $AA_1 = BB_1$. Верно ли, что прямые AB и A_1B_1 параллельны:

1) на плоскости; 2) в пространстве?

31. На одной из двух параллельных прямых выбрали точку и через нее провели прямую, пересекающую другую. Доказать, что эти три прямые лежат в одной плоскости.

32. Доказать, что две параллельные прямые не могут пересекать две скрещивающиеся прямые.

33. Прямые a и b и прямые b и c пересекаются. Верно ли, что прямые a и c также пересекаются?

34. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC. M, N, P, Q — середины отрезков AC, DC, DB, AB соответственно. Доказать, что $MN \parallel PQ$.

35. Две пересекающиеся прямые a и b соответственно параллельны прямым m и n. Верно ли, что прямые m и n пересекаются?

36. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая b, не принадлежащая плоскости треугольника. Доказать, что прямая b и прямая, содержащая медиану, выходящую из вершины A, — скрещивающиеся.

37. Через пересекающиеся прямые a и b проведены две плоскости, пересекающиеся по прямой c. Может ли какая-нибудь прямая a или b быть параллельной прямой c?

38. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Доказать, что отрезки, соединяющие середины отрезков AB и CD, AD и BC, AC и BD, пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

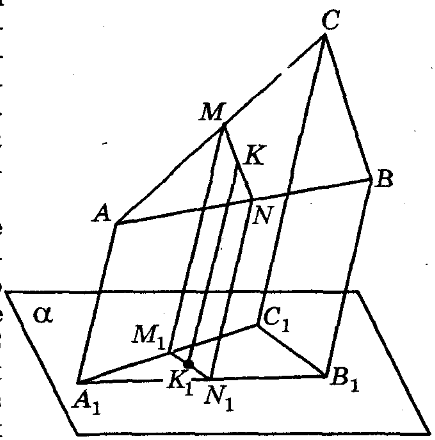


Рис. 72

39. Треугольник ABC не пересекает плоскость α (рис. 72). Через его вершины, середины M и N соответственно сторон AC и AB и середину K отрезка MN проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, M_1, N_1, K_1 соответственно. Найти длину отрезка KK_1, если $AA_1 = 7$ см, $BB_1 = 9$ см, $CC_1 = 15$ см.

Признак параллельности прямой и плоскости

40. Прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α. Верно ли, что прямая a параллельна плоскости α?

41. Прямые a и b параллельны плоскости α. Верно ли, что $a \parallel b$?

42. Прямые a и b пересекаются. Как может быть расположена прямая b относительно плоскости α, если:

1) a лежит в плоскости α;

2) a пересекает плоскость α;

3) прямая a параллельна плоскости α?

43. Точка M не принадлежит плоскости параллелограмма $ABCD$. Доказать, что прямая AD параллельна плоскости MCB.

44. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Точка M — середина отрезка AD, K — CD. Доказать, что прямая AC параллельна плоскости BKM.

45. Прямая a пересекает плоскость α, прямая b параллельна прямой a. Доказать, что прямая b пересекает плоскость α.

46. Прямые a и b скрещивающиеся. Существует ли плоскость, параллельная каждой из данных скрещивающихся прямых?

47. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскости α проведена прямая a, параллельная прямой c. Через прямую a проведена плоскость γ, пересекающая плоскость β по прямой b. Доказать, что прямые b и c параллельны.

48. Через середину M боковой стороны AB трапеции $ABCD$ проведена плоскость, параллельная основаниям BC и AD и пересекающая боковую сторону CD в точке N. Доказать, что MN — средняя линия трапеции.

49. Плоскость, параллельная стороне BC треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно, причем $AB_1 : B_1B = 5 : 3$. Найти B_1C_1, если $BC = 6$ см.

50. Сколько существует плоскостей, проходящих через одну из двух данных скрещивающихся прямых и параллельных другой?

51. MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 73). Вне плоскости треугольника выбрана точка D. На отрезке MD отмечена точка E так, что $ME : ED = 5 : 2$. Построить точку F — точку пе-

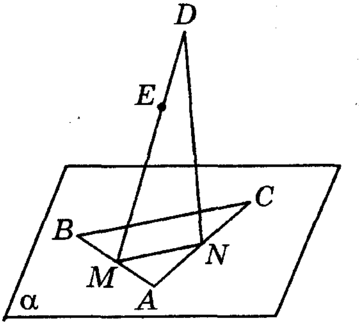


Рис. 73

ресечения плоскости BEC и отрезка DN и найти длину отрезка EF, если $BC = 30$ см.

Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей

52. Две прямые плоскости α параллельны плоскости β. Следует ли из этого, что плоскости α и β параллельны?

53. Каждая из двух данных плоскостей параллельна каждой из двух данных прямых. Параллельны ли плоскости?

54. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α. Параллельны ли плоскость трапеции и плоскость α?

55. Вне плоскости треугольника ABC лежит точка D. На отрезках AB, AC, AD выбраны соответственно точки M, N и P так, что $AM : MB = AN : NC = AP : PD$. Доказать, что плоскости MNP и DBC параллельны.

56. Доказать, что если четыре прямые, проходящие через точку S, пересекают плоскость α в вершинах трапеции, то они пересекают любую плоскость, параллельную α и не проходящую через S, также в вершинах трапеции.

57. Две параллельные прямые пересекают плоскости α и β соответственно в точках A, B и A_1, B_1, $AB = A_1B_1$. Можно ли утверждать, что плоскости α и β параллельны?

58. Через точку C, не принадлежащую двум параллельным плоскостям α и β, проведены два луча, пересекающие плоскость α в точках A_1 и A_2, а плоскость β — в точках B_1 и B_2. Известно, что $CA_1 = 4$ см, $B_1B_2 = 9$ см, $A_1A_2 = CB_1$. Найти A_1A_2 и A_1B_1.

59. Можно ли через боковые стороны трапеции провести параллельные плоскости?

60. Плоскость α параллельна плоскости β, плоскость γ параллельна плоскости δ. Плоскости α и γ пересекаются по прямой a, плоскости β и δ — по прямой b. Доказать, что $a \parallel b$.

61. Прямая a параллельна плоскости α. Доказать, что если плоскость β пересекает прямую a, то она пересекает и плоскость α.

62. Прямая a параллельна плоскости α. Плоскость α пересекает плоскость β. Верно ли, что прямая a пересекает плоскость β?

63. Доказать, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.

Изображение пространственных фигур на плоскости

64. Какие геометрические фигуры могут быть параллельными проекциями:

1) луча;
2) двух скрещивающихся прямых;
3) трапеции?

65. Могут ли две скрещивающиеся прямые проектироваться:

1) в две пересекающиеся прямые;
2) в параллельные прямые;
3) в одну прямую;
4) в прямую и точку, принадлежащую этой прямой;
5) в две точки?

66. Как должны быть расположены относительно направления проектирования две скрещивающиеся прямые, чтобы они проектировались в прямую и точку, ей не принадлежащую?

67. Можно ли при параллельном проектировании квадрата получить: 1) ромб; 2) параллелограмм?

68. Можно ли при параллельном проектировании прямоугольника получить четырехугольник с углами 90°, 90°, 40°, 140°?

69. Может ли проекция отрезка быть больше проектируемого отрезка?

70. Может ли параллельной проекцией прямой быть:

1) отрезок; 2) луч; 3) точка?

71. Может ли параллельной проекцией угла быть:

1) отрезок; 2) равный ему угол?

72. При каких условиях прямоугольник проектируется в прямоугольник?

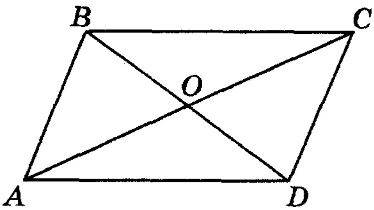


Рис. 74

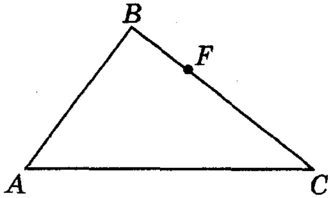


Рис. 75

73. Параллелограмм $ABCD$ — изображение квадрата (рис. 74). Построить изображение перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей квадрата к его стороне.

74. Треугольник ABC является параллельной проекцией равностороннего треугольника (рис. 75). Построить изображение высоты треугольника, проведенной из вершины B, и перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону AC.

75. Треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 76) — изображение прямоугольного треугольника ABC, у которого $\angle C = 90^\circ$, $AC : CB = 3 : 4$. Построить изображение центра вписанной окружности треугольника ABC.

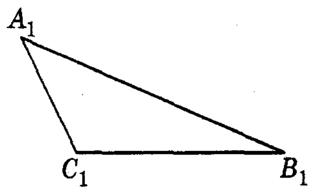


Рис. 76

76. Точки A_1, B_1, O_1, не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями двух вершин и точки пересечения диагоналей параллелограмма. Построить изображение параллелограмма. Сколько решений имеет задача?

77. Параллелограмм $ABCD$ является параллельной проекцией квадрата, на сторонах которого вне его как на гипотенузах построены равнобедренные прямоугольные треугольники (треугольники лежат в плоскости квадрата). Построить параллельные проекции этих треугольников.

78. На изображении окружности с центром O (рис. 77) построить изображение двух перпендикулярных диаметров.

79. Дана параллельная проекция окружности с центром в точке O. Построить параллельную проекцию вписанного правильного шестиугольника.

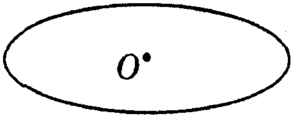


Рис. 77

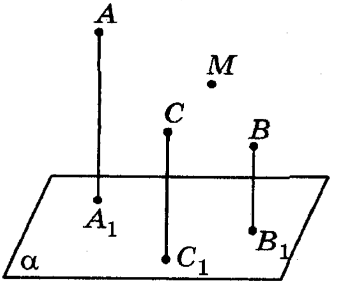


Рис. 78

80. Точки A, B, O, не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями двух вершин правильного треугольника и его центра. Построить изображение правильного треугольника. Сколько решений имеет задача?

81. На изображении ромба построить изображение его высоты, проведенной из вершины тупого угла, если одна из диагоналей ромба равна его стороне.

82. На изображении ромба $ABCD$ построить изображение высоты, проведенной из вершины A, если $\angle ABC = 120°$.

83. Точки A_1, B_1, C_1 — параллельные проекции точек A, B, C на плоскость α. Построить проекцию точки M, лежащей в плоскости ABC, на плоскость α (рис. 78).

Перпендикулярность прямой и плоскости

84. Верно ли, что прямая, перпендикулярная двум прямым плоскости, перпендикулярна этой плоскости?

85. Через вершину C прямоугольника $ABCD$ проведена прямая MC, перпендикулярная прямым BC и AC. Доказать, что $MC \perp CD$.

86. Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная двум его сторонам?

87. На рис. 79 $ABCD$ — квадрат, $MC \perp BC$. Указать прямую и плоскость, перпендикулярные между собой.

88. $ABCD$ — прямоугольник (рис. 80). Прямая MA перпендикулярна плоскости ABC. Доказать, что $MD \perp CD$.

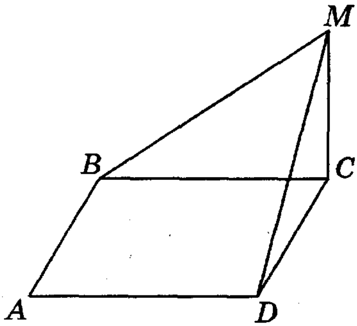


Рис. 79

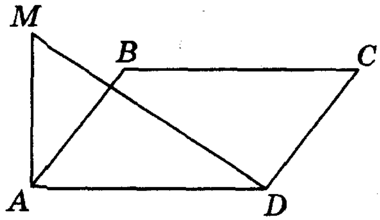


Рис. 80

89. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 81). Доказать, что четырехугольник AA_1C_1C — прямоугольник.

90. Через одну сторону параллелограмма проходит плоскость, перпендикулярная соседней стороне. Доказать, что этот параллелограмм — *прямоугольник.*

91. Точка M лежит вне плоскости прямоугольника $ABCD$ (рис. 82), $MA = MB = MC = MD$, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Доказать, что прямая MO перпендикулярна плоскости ABC.

92. Точка M лежит вне плоскости квадрата $ABCD$ и равноудалена от всех его вершин. O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Доказать, что прямая AC перпендикулярна плоскости BMD.

93. Прямая AO перпендикулярна плоскости окружности с центром в точке O. Точка B лежит на окружности. Найти расстояние от точки A до плоскости окружности, если радиус окружности равен 6 см, $\angle ABO = 45^\circ$.

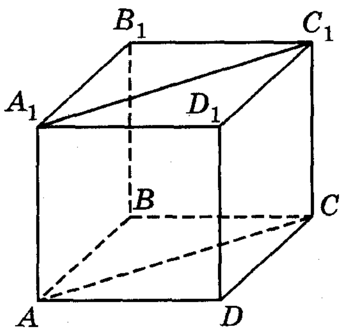


Рис. 81

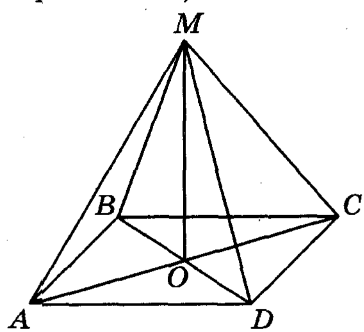


Рис. 82

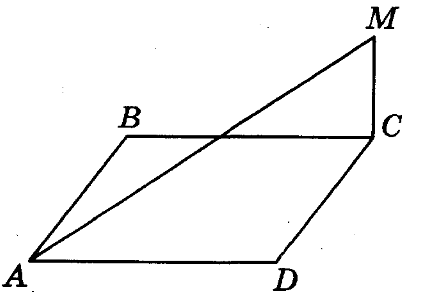


Рис. 83

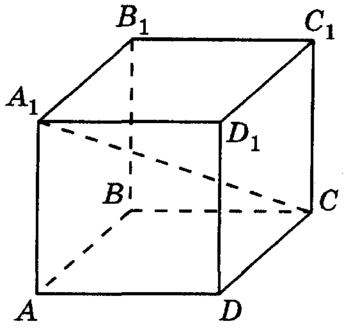


Рис. 84

94. Прямая CM перпендикулярна плоскости прямоугольника $ABCD$ (рис. 83). Найти MC, если $AB = 3$ см, $AD = 4$ см, $AM = 13$ см.

95. Сторона правильного треугольника ABC равна 8 см. Из точки O — центра треугольника ABC — проведен перпендикуляр SO к его плоскости. Найти длину отрезка SO, если $\angle SAO = 30^\circ$.

96. Точка M лежит вне плоскости треугольника ABC и равноудалена от его вершин. Как расположена точка O — проекция точки M на плоскость ABC — относительно треугольника ABC, если этот треугольник тупоугольный?

97. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 84). Найти ортогональные проекции отрезка A_1C на плоскости граней куба.

98. Из точек A и B, лежащих вне плоскости α, проведены к ней перпендикуляры AA_1 и BB_1. Доказать, что если отрезки AB и A_1B_1 равны, то AA_1B_1B — прямоугольник.

99. Доказать, что если прямая перпендикулярна двум плоскостям, то эти плоскости параллельны.

100. Через вершину B ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр SB к плоскости ромба. Найти SD, если $SB = 4$ см, сторона ромба — 3 см, а угол ABC равен 120°.

101. В прямоугольнике $ABCD$ $BC = 1$ см, $CD = \sqrt{3}$ см. Через вершину A проведен перпендикуляр MA к плоскости прямоугольника. Найти угол MCA, если $MA = 2$ см.

102. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 15$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Точка M находится на расстоянии 39 см от его вершин. Найти расстояние от точки M до плоскости треугольника ABC.

103. В треугольнике ABC $\angle A = 48^\circ$, $\angle C = 42^\circ$ (рис. 85). Через вершину A проведен перпендикуляр DA к плоскости треугольника. Доказать, что $DB \perp BC$.

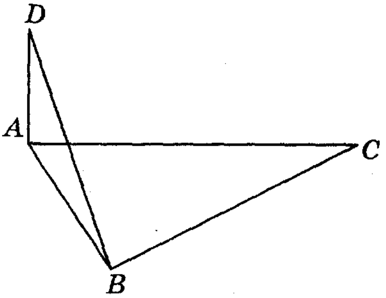


Рис. 85

104. Точка S равноудалена от всех вершин прямоугольника $ABCD$. Найти угол BSD, если $AB = 3$ см, $AD = 4$ см, $SB = 5$ см.

105. Через точку M, не принадлежащую плоскости квадрата $ABCD$, проведен перпендикуляр BM к его плоскости. Через центр квадрата, точку O, проведена прямая NO параллельно BM. Найти расстояние от точки N до вершин квадрата, если $AB = 4\sqrt{2}$ см, $NO = 3$ см.

106. Концы отрезка расположены по разные стороны от плоскости и удалены от нее на 5 см и 7 см. Найти расстояние от середины этого отрезка до плоскости.

107. Через вершину C прямоугольника $ABCD$ проведена прямая MC перпендикулярно прямой CD. Доказать, что прямая AB перпендикулярна плоскости MCB.

108. Через вершины B и D трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проведены перпендикуляры MB и ND к плоскости трапеции. Доказать, что плоскости MBC и NDA параллельны.

Перпендикуляр и наклонная

109. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр длиной 10 см и наклонная. Найти длину наклонной, если длина ее проекции равна 6 см.

110. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр длиной 8 см и наклонная. Угол между наклонной и ее проекцией на плоскость равен 60°. Найти длину наклонной и ее проекции.

111. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 24$ см, $BC = 10$ см. Через точку D к плоскости треугольника проведен перпендикуляр AD так, что $AD = 18$ см. Найти длины наклонных DB и DC.

112. Из точки F к плоскости α проведены две наклонные FM и FN и перпендикуляр FK. Найти длины наклонных, если $MK = 4$ см, $\angle FMK = 30^\circ$, $\angle NFK = 60^\circ$.

113. Из точки M к плоскости проведены две наклонные MB и MA, длины которых относятся как $5 : 7$. Найти расстояние от точки M до плоскости, если проекции наклонных равны 12 см и $12\sqrt{5}$ см.

114. Две точки находятся на различных расстояниях от плоскости. Из этих точек к плоскости проведены две равные наклонные. Доказать, что из проекций этих наклонных больше та, наклонная которой проведена из точки, расположенной ближе к плоскости.

115. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD$, $CB = CD$ (рис. 86). Прямая MA перпендикулярна плоскости четырехугольника. Доказать, что $\angle DMC = \angle BMC$.

116. Точка D удалена от плоскости ABC на расстояние d (рис. 87). Наклонные DB и DC образуют со своими проекциями AB и AC углы, равные 30°, а их проекции образуют угол 120°. Найти длину отрезка BC.

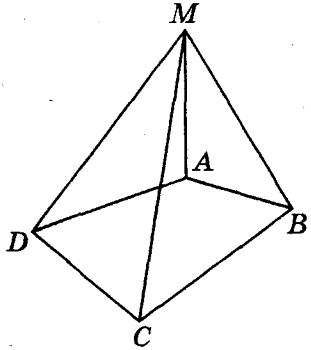


Рис. 86

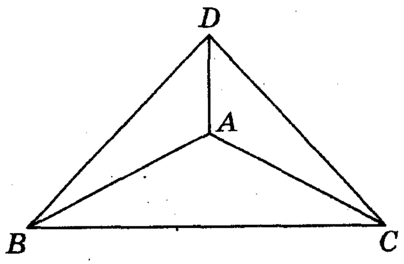


Рис. 87

117. O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Прямая MO перпендикулярна плоскости треугольника. Точка M равноудалена от вершин треугольника. Доказать, что треугольник ABC — равносторонний.

118. Точка K находится на расстоянии 17 см от вершин квадрата и на расстоянии 8 см от его плоскости. Найти сторону квадрата.

119. В ромбе $ABCD$ $AB = 10$ см, $BD = 12$ см. Прямая MC перпендикулярна плоскости ромба. Найти длину проекции наклонной AM, если точка M удалена от плоскости ромба на 16 см.

120. Из точки, не принадлежащей данной плоскости, проведены к ней две наклонные, длины проекций которых равны 12 см и 16 см, а сумма длин наклонных — 56 см. Найти длины наклонных.

121. Два отрезка длиной 10 см и 17 см упираются своими концами в параллельные плоскости. Найти расстояние между этими плоскостями, если сумма проекций этих отрезков на одну из плоскостей равна 21 см.

122. Из данной точки к плоскости проведены две равные наклонные, угол между которыми 60°, а их проекции взаимно перпендикулярны. Найти длины наклонных, если расстояние от данной точки до плоскости равно 4 см.

123. Из точки M к плоскости α проведены две равные наклонные MA и MB и перпендикуляр MO, $AB = 12$ см, $\angle MAB = 60^\circ$, $\angle ABO = 30^\circ$. Найти длину отрезка MO.

124. Сторона ромба равна 4 см, а острый угол — 30°. Через вершину острого угла проведена плоскость, параллельная меньшей диагонали и на расстоянии 6 см от нее. Найти проекции диагоналей на эту плоскость.

125. Из точки S к плоскости α проведены перпендикуляр SD и наклонные SK и SF, причем $SD^2 = DF \cdot DK$. Доказать, что $\angle FSD = \angle SKD$.

Теорема о трех перпендикулярах

126. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 88). Доказать, что прямые B_1O и AC перпендикулярны.

127. ABC — равнобедренный треугольник, $AB = BC$ (рис. 89). Прямая BD перпендикулярна плоскости треугольника, $DM \perp AC$. Доказать, что M — середина AC.

128. К плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) проведен перпендикуляр MC (рис. 90). Найти расстояние от точки M до прямой AB, если $MC = a$, $AC = b, \angle ACB = 30^\circ$.

129. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) к его плоскости проведен перпендикуляр MB (рис. 91). Точка M соединена с серединой стороны AC. Найти длину отрезка MF, если $MB = 10$ см, $\angle BMC = 60^\circ$, $\angle FMC = 45^\circ$.

130. Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая SA, перпендикулярная плоскости ромба. Доказать, что точка S равноудалена от прямых CB и CD.

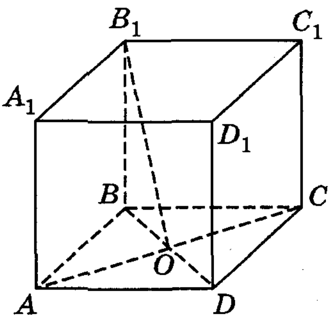


Рис. 88

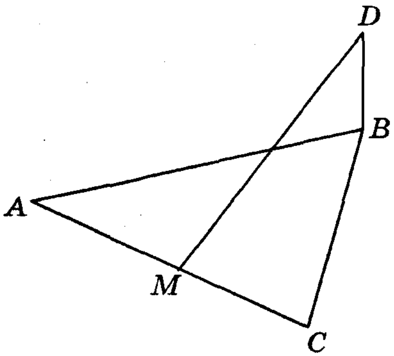


Рис. 89

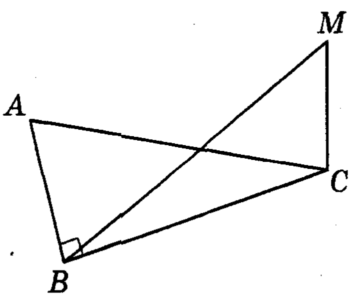


Рис. 90

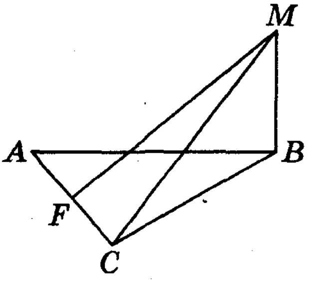


Рис. 91

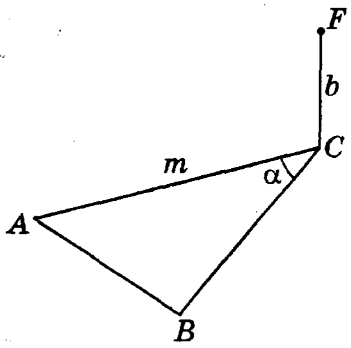


Рис. 92

131. Через вершину B треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр MB. Прямая, проходящая через точку M и середину AC, делит угол AMC пополам. Доказать, что треугольник ABC — равнобедренный.

132. Через вершину C равнобедренного треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр FC (рис. 92). Найти расстояние от точки F до прямой AB, если $AC = m, \angle ACB = \alpha$, $FC = b$.

133. Прямая CD перпендикулярна плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle ABC = 90°$). Провести перпендикуляр из точки D к прямой AB (рис. 93).

134. O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Прямая FO перпендикулярна плоскости квадрата (рис. 94). Из точки F провести перпендикуляры к сторонам квадрата.

135. Точка O принадлежит плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$). Прямая DO перпендикулярна плоскости треугольника (рис. 95). Провести из точки D перпендикуляры к сторонам AB и BC.

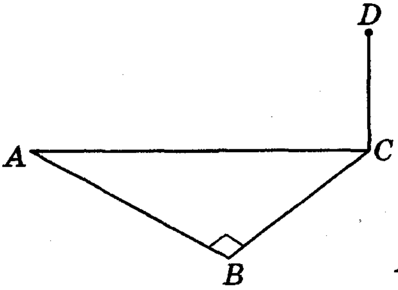


Рис. 93

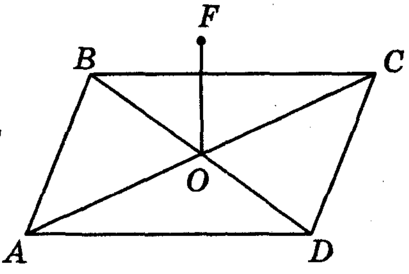


Рис. 94

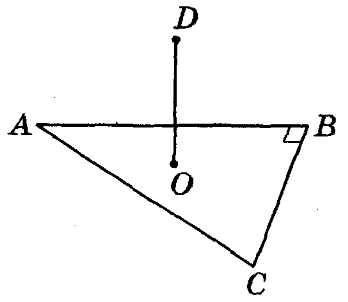


Рис. 95

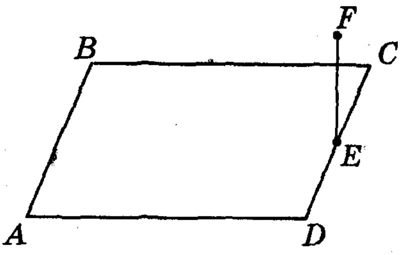


Рис. 96

136. Из середины E стороны DC квадрата $ABCD$ к плоскости квадрата проведен перпендикуляр FE (рис. 96). Из точки F провести перпендикуляры к сторонам и диагоналям квадрата.

137. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AB длиной 12 см и наклонная AC. Найти расстояние от точки A до прямой l, принадлежащей плоскости α и проходящей через точку C перпендикулярно прямой BC, если $BC = 16$ см.

138. Прямая FC перпендикулярна плоскости ромба $ABCD$, $BD = FC = 20$ см, $\angle BAD = 60°$. Найти расстояния от точки F до прямых, содержащих стороны ромба.

139. Из вершины прямого угла B треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр BN. Расстояние от точки N до прямой AC равно 13 см. Найти расстояние от точки N до плоскости треугольника, если $AC = 25$ см, $AB = 15$ см.

140. Из вершины угла M треугольника KMN к его плоскости проведен перпендикуляр PM. Найти расстояние от точки P до прямой KN, если $PM = 1$ см, $MK = 2\sqrt{3}$ см, $MN = 4$ см, $\angle KMN = 150°$.

141. Из точки O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведен перпендикуляр OM к его плоскости. Найти расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны параллелограмма, если $AB = 5$ см, $AD = 12$ см, $OM = 4$ см, площадь параллелограмма равна 120 см^2.

142. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 6 см. Из центра O треугольника к его плоскости проведен перпендикуляр OM длиной 3 см. Найти угол между перпендикуляром, проведенным из точки M к стороне AB, и проекцией этого перпендикуляра на плоскость ABC.

143. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $CD = 16$ см, $\angle CDA = 30^\circ$. Точка M удалена от каждой из сторон трапеции на 5 см. Найти расстояние от точки M до плоскости трапеции.

144. Точка S находится на расстоянии 12 см от каждой из сторон ромба, диагонали которого равны 18 см и 12 см. Найти расстояние от точки S до плоскости ромба.

145. Точка D удалена на 5 см от каждой из сторон треугольника ABC. Найти расстояние от точки D до плоскости треугольника, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

146. Сторона ромба равна a, а его площадь — S. Точка M удалена от каждой из сторон ромба на b. Найти расстояние от точки M до плоскости ромба.

147. Проекция точки F на плоскость угла ABC принадлежит прямой, содержащей биссектрису этого угла. Доказать, что точка F равноудалена от сторон угла.

148. Точка M принадлежит диагонали AC прямоугольника $ABCD$. Из точки M к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр MF длиной 4 см. Найти расстояние от точки F до стороны AB, если $AB = 8$ см, $BC = 15$ см, $AM : MC = 3 : 1$.

149. Из вершины D прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр DF к его плоскости. Найти длину этого перпендикуляра, если $DC = 12$ см, $FA = \sqrt{106}$ см, $DB = 13$ см.

150. Из точки A к плоскости γ проведены перпендикуляр AO и наклонная AK. Через точку K в плоскости γ проведена прямая, образующая с прямой KO угол α. Найти расстояние от этой прямой до точки A, если $\angle AKO = \beta$, $AK = a$.

151. Через вершину B прямого угла ABC проведена прямая, образующая с его сторонами углы α и β (эта прямая не лежит в плоскости ABC). Найти величину угла, образуемого данной прямой и ее проекцией на плоскость ABC.

152. Через середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$ проведена плоскость, параллельная диагонали AC и удаленная от нее на 9 см. Найти расстояние от точки D до данной плоскости.

Перпендикулярность плоскостей

153. Верно ли, что если плоскости α и β перпендикулярны и прямая m параллельна плоскости α, то m перпендикулярна плоскости β?

154. Верно ли, что если прямая перпендикулярна одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, то она параллельна другой плоскости?

155. Прямые a, b и c имеют общую точку M, причем $a \perp b$, $a \perp c$, $b \perp c$. Доказать, что плоскость, проходящая через прямые a и b, перпендикулярна плоскостям, проходящим через прямые a и c и b и c.

156. Через точку D проведена прямая DA, перпендикулярная плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Доказать, что плоскости DAC и DBC перпендикулярны.

157. Два равнобедренных треугольника ABC и AB_1C имеют общее основание $AC = 8$ см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найти расстояние между точками B и B_1, если $AB = 10$ см, $AB_1 = 17$ см.

158. Точка M не принадлежит плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) и равноудалена от его вершин. Доказать, что плоскости AMB и ABC взаимно перпендикулярны.

159. В равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $\angle CAD = 45^\circ$, O — точка пересечения диагоналей. Прямая MO перпендикулярна плоскости трапеции. Доказать, что плоскости AMC и BMD перпендикулярны.

160. Точка S равноудалена от вершин равностороннего треугольника ABC, точка O — центр этого треугольника. Доказать, что плоскость SOC перпендикулярна плоскости ASB.

161. Плоскости β и φ взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой m. Плоскость α параллельна прямой m и пересекает плоскости β и φ по прямым n и p соответственно. Найти расстояние между прямыми n и p, если расстояние от прямой m до плоскости α равно 9 см, а расстояние между прямыми m и n — 15 см.

162. Длина отрезка равна 12 см. Его концы принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Расстояния от концов отрезка до линии пересечения этих плоскостей равны 6 см и $6\sqrt{2}$ см. Найти углы, образуемые отрезком со своими проекциями на данные плоскости.

163. Длина отрезка, концы которого принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, равна 8 см. Углы, образуемые данным отрезком со своими проекциями на данные плоскости, равны 45° и 60°. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к линии пересечения плоскостей.

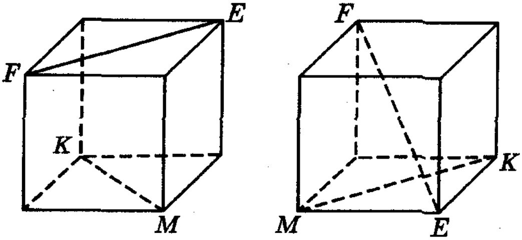
164. Отрезок AB лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и не пересекает другую. На этом отрезке отмечена точка M такая, что $AM : MB = 3 : 1$. В другой плоскости проведена прямая p, параллельная линии a пересечения плоскостей. Расстояние между точкой A и прямой p равно 34 см, между B и p — 20 см, между a и p — 16 см. Найти расстояние между M и p.

165. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$) перегнули по его медиане BM так, что плоскости BAM и BMC оказались перпендикулярными. Найти расстояние между точками A и C, если $AB = 12$ см, $\cos \angle BAM = \frac{3}{5}$.

166. Доказать, что если плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ и пересекаются по прямой a, то прямая a перпендикулярна плоскости γ.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

167. На рис. 97 дано изображение куба с ребром a. Найти расстояние между прямыми FE и KM.



а) б)

Рис. 97

168. Через вершину C прямоугольника $ABCD$ проведена прямая d, перпендикулярная плоскости прямоугольника. Найти расстояния от прямой d до стороны AB и диагонали BD, если $AB = 16$ см, $BD = 30$ см.

169. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) проведена прямая m, перпендикулярная плоскости ABC. Найти расстояние между прямой m и прямой, содержащей медиану BM, если $AC = 30$ см, $\cos \angle ACB = \frac{4}{5}$.

170. К окружности с центром O и радиусом 8 см проведена касательная l в точке M. Через точку K окружности перпендикулярно ее плоскости проведена прямая m. Найти расстояние между прямыми m и l, если $\angle KOM = 60^\circ$.

171. Через середину K стороны AB треугольника ABC проведена прямая n, перпендикулярная плоскости треугольника. Найти расстояние от этой прямой до прямой, содержащей сторону BC, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

172. Через вершину A равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) проведена плоскость, перпендикулярная плоскости ABC и параллельная прямой BC. В этой плоскости через точку A проведена прямая. Найти расстояние от этой прямой до прямой BC, если $AB = 25$ см, $AC = 48$ см.

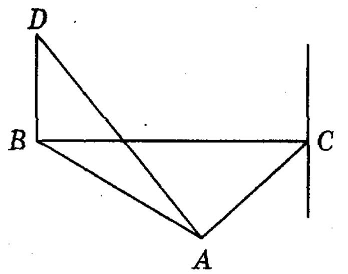


Рис. 98

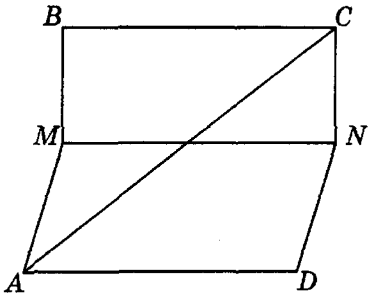


Рис. 99

173. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 37$ см, $AC = 70$ см. Через сторону AC треугольника проведена плоскость α, расстояние от которой до точки B равно 9 см. Найти расстояние между прямой AC и прямой, проходящей через точку B перпендикулярно плоскости α.

174. Прямая a перпендикулярна плоскости α и пересекает ее в точке A. b — скрещивающаяся с ней прямая, b' — проекция прямой b на плоскость α. Доказать, что расстояние между прямыми a и b равно расстоянию от точки A до прямой b'.

175. Через точку D к плоскости равностороннего треугольника ABC проведена прямая DB, перпендикулярная плоскости треугольника (рис. 98). Найти расстояние между прямой AD и прямой, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости ABC, если $AB = 6$ см.

176. M и N — середины сторон AB и CD квадрата $ABCD$. Квадрат перегнули по прямой MN так, что плоскости прямоугольников $AMND$ и $BCNM$ оказались перпендикулярными (рис. 99). Найти расстояние между прямыми AC и MN, если $AD = 4$ см.

177. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, длина ребра которого равна 6 см. M — середина ребра CD. Найти расстояние между прямыми AM и CC_1.

Введение декартовых координат в пространстве

178. Какие из приведенных точек лежат на координатных осях: $A\ (0;\ -7;\ 14)$, $B\ (12;\ -43;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ 1)$, $D\ (-2;\ 3;\ 8)$, $E\ (4;\ 0;\ 0)$, $F\ (0;\ -10;\ 0)$? Указать, на каких именно.

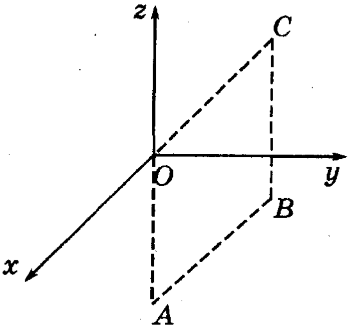


Рис. 100

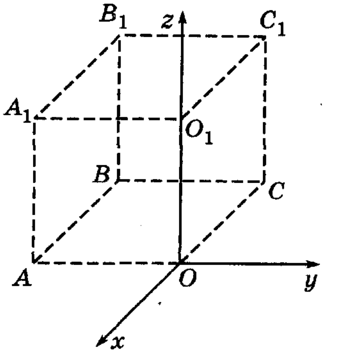


Рис. 101

179. Какие из приведенных точек лежат в координатных плоскостях: M (0; 5; –13), N (–1; 2; 7), K (–7; 4; 0), P (0,6; 0; –0,2), E (0; 0; 16), F (0; 17; 0)? Указать, в каких именно.

180. Какие из приведенных точек лежат на одной прямой, параллельной оси абсцисс: A (4; 2; –5), B (7; –2; 5), C (4; 2; 6), D (7; 2; –5)?

181. Какие из приведенных точек лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xy: M (4; 3; –2), N (–6; –7; 8), K (–4; 3; 2), P (8; –1; –2)?

182. На каких расстояниях от координатных плоскостей находится точка K (18; –8; –10)?

183. Диагональ квадрата $OABC$ равна 4 (рис. 100). Найти координаты его вершин.

184. Ребро куба $OABCO_1A_1B_1C_1$ равно 3 (рис. 101). Найти координаты вершин куба.

185. Точка M находится на расстоянии 6 см от начала координат, а луч OM образует с отрицательными направлениями координатных осей y и z углы 60° и 30° соответственно. Найти координаты точки M, если известно, что они отрицательные.

186. Расстояния от точки F до осей координат равны 5 см, 12 см и $2\sqrt{30}$ см. Найти расстояние от точки F до начала координат.

Координаты середины отрезка. Расстояние между двумя точками

187. Найти координаты середины отрезка AC, если:

1) A (2; –7; –6), C (6; –3; –2);
2) A (5; 11; –1), C (–4; 3; 5).

188. Точка K — середина отрезка BC. Найти координаты точки C, если B $(-4; 5; -3)$, K $(1; 2; -2)$.

189. Найти координаты точки, делящей отрезок FN в отношении $1 : 7$, считая от точки N, если F $(1; -5; -43)$, N $(-7; 23; 5)$.

190. Найти координаты вершины A параллелограмма $ABCD$, если B $(-3; -2; -1)$, C $(4; 7; -3)$, D $(-2; -5; 6)$.

191. Точки B_1 $(-2; 3; 0)$ и A_1 $(5; -1; 8)$ — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. Вершина B имеет координаты $(1; 7; -4)$. Найти координаты вершин A и C.

192. Точки A_1 $(-2; 1; 5)$, B_1 $(4; -3; 6)$ и C_1 $(-1; 5; -7)$ — середины сторон треугольника. Найти координаты вершин этого треугольника.

193. Найти расстояние между точками M и K, если:
1) M $(9; -3; -6)$, K $(1; 5; -10)$;
2) M $(-2; 3; 1)$, K $(-2; 6; 4)$.

194. В треугольнике ABC A $(1; -8; 12)$, B $(3; -4; 10)$, C $(2; -5; 2)$. Найти длину средней линии EF треугольника ABC, где E и F — середины сторон AC и AB соответственно.

195. Расстояние между точками A $(-3; 5; 4)$ и B $(x; 4; -3)$ равно $5\sqrt{3}$. Найти x.

196. На оси аппликат найти точку, равноудаленную от точек A $(1; 1; 7)$ и B $(3; -3; -4)$.

197. Найти координаты точек A и B и длину отрезка AB, если точка A принадлежит оси x, точка B лежит в плоскости yz и точка C $(2; -9; -4)$ — середина отрезка AB.

198. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A $(2; 1; -8)$, B $(1; -5; 0)$, C $(8; 1; -4)$ и D $(9; 7; -12)$ является ромбом.

199. Доказать, что точки A $(5; 2; -6)$, B $(3; -4; 1)$ и C $(9; 14; -20)$ лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?

Преобразование симметрии в пространстве

200. Записать координаты точек, симметричных точкам A $(9; 5; 1)$, B $(-8; 2; -14)$, C $(-15; -20; -25)$, D $(16; 0; -1)$, M $(2; -3; 4)$, K $(0; -1; 0)$ относительно: 1) началу координат; 2) плоскости yz; 3) плоскости xy; 4) оси y.

201. Точки C и D $(-2;\ 5;\ 4)$ симметричны относительно: 1) началу координат; 2) плоскости xz. Найти длину отрезка CD.

202. Точки T $(5;\ -6;\ -20)$ и P $(-13;\ -4;\ 16)$ симметричны относительно точки A. Найти ее координаты.

203. Точку K $(a;\ b;\ c)$ отобразили последовательно симметрично относительно координатной плоскости xz, начала координат, плоскости yz. Доказать, что полученная при этом точка K_1 симметрична точке K относительно плоскости xy.

204. На рис. 102 дано изображение куба. Перерисовать его в тетрадь и построить фигуру, симметричную кубу относительно точки M.

205. На рис. 103 дано изображение куба. Перерисовать его в тетрадь и построить фигуру, симметричную кубу относительно прямой AB.

Параллельный перенос в пространстве

206. Параллельный перенос задается формулами $x' = x + 5$, $y' = y - 1$, $z' = z + 7$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки A $(3;\ -5;\ 6)$, B $(-1;\ -6;\ -10)$, C $(0;\ -4;\ 0)$, O $(0;\ 0;\ 0)$?

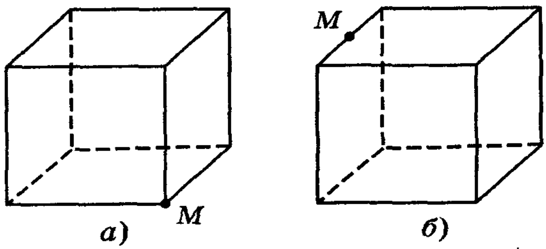


Рис. 102

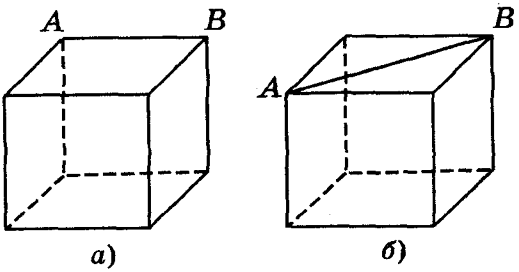


Рис. 103

207. При параллельном переносе точка C (9; −2; −5) переходит в точку C_1 (5; −2; −4). Записать формулы этого параллельного переноса и найти, в какую точку при этом переносе переходит точка D (3; −7; −15).

208. Даны точки E (4; −2; 8) и F (−7; −8; 10). Записать формулы параллельного переноса, при котором точка E переходит в точку F, и переноса, при котором F переходит в E.

209. Существует ли параллельный перенос, при котором точка P (3; −1; 4) переходит в точку P_1 (−2; 1; 3), а точка R (4; −2; −1) — в точку R_1 (−1; 0; −2)?

210. На рис. 103 дано изображение куба. Перерисовать его в тетрадь и построить фигуру, в которую переходит куб при параллельном переносе, при котором точка A переходит в точку B.

Подобие пространственных фигур

211. Треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ относительно начала координат с коэффициентом гомотетии $k = 5$. Найти координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$, если A (0; 1; 0), B (0; 0; 4), C (−2; 0; 0).

212. При гомотетии с центром P (2; −5; 6) и коэффициентом гомотетии $k = \frac{1}{2}$ треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Найти координаты вершин треугольника ABC, если A_1 (1; 7; 0), B_1 (3; −10; 8), C_1 (−2; 11; 13).

213. При гомотетии с центром B (1; −1; 2) точка A (5; 7; 3) переходит в точку C (17; 31; 6). Найти коэффициент гомотетии и выяснить, в какую точку при этой гомотетии переходит точка D (25; 9; −10).

214. Через точку A проведены три прямые, пересекающие плоскость α в точках M, K, N, а параллельную ей плоскость β в точках M_1, K_1, N_1 соответственно. Найти неизвестные стороны треугольников MKN и $M_1K_1N_1$, если MN = 24 см, KN = 54 см, K_1N_1 = 9 см, M_1K_1 = 6 см.

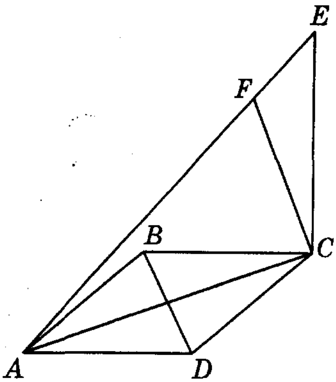


Рис. 104

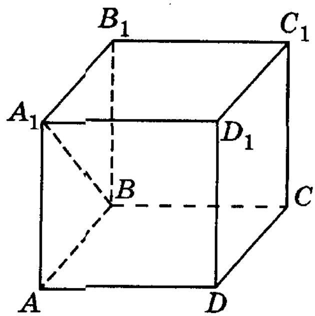


Рис. 105

215. Плоскости α и β параллельны. Из точки M, не лежащей между плоскостями, проведены три луча, пересекающие плоскость α в точках A, B, C, а плоскость β — в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Найти стороны треугольника ABC, если $A_1B_1 = m$, $B_1C_1 = n$, $A_1C_1 = p$, $MA : AA_1 = a : b$.

Угол между скрещивающимися прямыми

216. Через основание M высоты BM треугольника ABC проведен перпендикуляр OM к его плоскости. Найти угол между прямыми BM и OC.

217. Через вершину C ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр EC к плоскости ромба (рис. 104). На отрезке AE выбрали произвольную точку F. Найти угол между прямыми BD и FC.

218. Точка O — центр правильного треугольника ABC, MN — средняя линия этого треугольника, D — середина AB, KO — перпендикуляр к плоскости ABC. Доказать, что прямые KD и MN перпендикулярны.

219. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 105). Найти углы между прямыми: 1) C_1D_1 и AA_1; 2) CD и A_1B; 3) A_1B и AD_1.

220. В треугольнике ABC $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см, точка D — середина AC, E — середина AB, F — середина BC. Прямая PD перпендикулярна плоскости ABC, $BP = 2\sqrt{61}$ см. Найти угол между прямыми EF и PC.

Угол между прямой и плоскостью

221. Наклонная образует с плоскостью угол 45°. Найти расстояние от конца наклонной до плоскости, если длина наклонной равна $\sqrt{18}$ см.

222. Найти угол между наклонной и плоскостью, если длина наклонной равна 24 см, а расстояние от конца наклонной до плоскости — 18 см.

223. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = 15$ см, $BC = 8$ см, $A_1C = 34$ см. Найти угол между прямой A_1C и плоскостью ABC.

224. Плоскость проходит через диагональ BD ромба $ABCD$. Доказать, что стороны AB и CD образуют с этой плоскостью равные углы.

225. Точка M лежит вне плоскости квадрата $ABCD$, а наклонные MA, MB, MC и MD образуют равные углы с плоскостью ABC. Доказать, что проекция точки M на плоскость этого квадрата — его центр.

226. Из точки B к плоскости α провели наклонные BA и BC, образующие с этой плоскостью углы 60° и 30° соответственно, $BA = 4\sqrt{6}$ см. Найти расстояние между точками A и C, если угол между проекциями наклонных равен 120°.

227. В треугольнике ABC $AB = BC = 8$ см, площадь этого треугольника равна 48 см^2. Через вершину C проведен к плоскости треугольника перпендикуляр FC. Из точки F опущен перпендикуляр FK, равный 18 см, на прямую AB. Найти угол между прямой FK и плоскостью ABC.

228. Точки M и N лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях α и β соответственно. Из точек M и N опущены перпендикуляры ME и NK на линию пересечения плоскостей, $NE = 10$ см, $EK = 8$ см, $MK = 15$ см. Найти углы, образуемые отрезком MN с плоскостями α и β.

229. Концы отрезка AB лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Отрезок AB образует с этими плоскостями углы 30° и 45°. Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек A и B к линии пересечения плоскостей, равно 8 см. Найти длину отрезка AB.

230. Через вершину B квадрата $ABCD$ к плоскости квадрата проведен перпендикуляр KB. Найти расстояние от точки K до прямой AC, если $AD = a$, прямая KO образует с плоскостью квадрата угол φ (O — точка пересечения диагоналей квадрата).

231. Треугольники ABC и ADC лежат в различных плоскостях. Найти углы, образуемые прямыми AD и CD с плоскостью ABC, если $AD = CD$, $AB = CB$, $\angle ADC = 90°$, $\angle ABC = 120°$, прямая BD перпендикулярна плоскости ABC.

232. Луч OM проведен через вершину O прямого угла AOB, $\angle MOA = 45°$, $\angle MOB = 60°$. Найти угол между OM и плоскостью AOB.

Угол между плоскостями

233. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскостях α и β проведены прямые a и b соответственно, параллельные прямой c. Расстояние между прямыми a и b равно 21 см, между a и c — 9 см, угол между плоскостями α и β — 60°. Найти расстояние между прямыми b и c.

234. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым a и b соответственно, параллельным прямой m. Найти расстояние между прямой m и плоскостью γ, если угол между плоскостями α и β равен 60°, расстояние между прямыми a и b — 35 см, а расстояние между a и m на 25 см больше расстояния между b и m.

235. Квадрат $ABCD$ и прямоугольный треугольник FBC ($\angle FBC = 90°$) имеют площади 50 см^2 и $10\sqrt{2}$ см^2 соответственно. Расстояние от точки F до прямой AD равно $\sqrt{26}$ см. Найти угол между плоскостями квадрата и треугольника.

236. Гипотенуза AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC принадлежит плоскости β, площадь этого треугольника равна 49 см^2, а расстояние от точки C до плоскости β — 5 см. Найти угол между плоскостями ABC и β.

237. Через сторону BC треугольника ABC проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол 60°. Найти расстояние от вершины A до этой плоскости, если $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см.

238. Угол между плоскостями треугольников ABC и ABD равен $60°$, $AC = BC = 20$ см, $AB = 24$ см, $AD = BD$, $\angle ADB = 90°$. Найти длину отрезка CD.

239. Найти угол между плоскостями треугольников ABC и AMC, если $AB = BC = AC = a$, $AM = MC$, $\angle AMC = 90°$, $BM = \frac{a}{2}$.

240. Найти угол между плоскостями треугольника ABC и прямоугольника $ABDE$, если $AB = 15$ см, $BD = 12$ см, $AC = 17$ см, $BC = 8$ см, $CD = 10$ см.

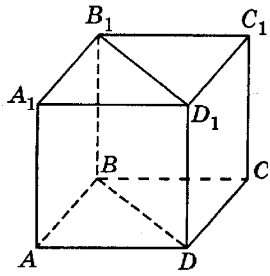


Рис. 106

241. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 106). Найти угол между плоскостями A_1AD и B_1BD.

242. Через катет прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол $60°$. Найти углы, образуемые двумя другими сторонами треугольника с этой плоскостью.

243. Угол между плоскостями α и β, пересекающимися по прямой m, равен $30°$. В плоскостях α и β выбраны точки M и E соответственно и из них проведены перпендикуляры MN и EK к прямой m. Найти длину отрезка ME, если $MN = 10\sqrt{3}$ см, $KE = 5$ см, $MK = 5\sqrt{14}$ см.

244. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Из точек A и M, лежащих в плоскостях α и β соответственно, проведены перпендикуляры MK и AE к прямой m. Найти угол между плоскостями α и β, если $KE = 2\sqrt{7}$ см, $ME = 10$ см, $MA = 2\sqrt{17}$ см, $AE = 8$ см.

245. Через точку O пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ проведена прямая m, перпендикулярная плоскости прямоугольника. Плоскость, проведенная через сторону AB, пересекает прямую m в точке E. Угол между плоскостями ACB и AEB равен $30°$. Найти длину проекции отрезка EO на плоскость AEB, если $AD = 12$ см.

246. Из точки A, лежащей вне плоскости α, проведены к ней две наклонные AB и AC, образующие с α углы $30°$ и $60°$ соответственно. Найти угол между плоскостями α и ABC, если угол между проекциями наклонных прямой.

247. Угол между двумя плоскостями равен 45°. В одной из плоскостей проведена прямая, образующая с линией пересечения плоскостей угол 30°. Найти угол, образуемый этой прямой с другой плоскостью.

248. Точка M находится на равных расстояниях от вершин правильного треугольника ABC. Угол между прямой MA и плоскостью ABC равен α. Найти угол между плоскостями MAB и ABC.

249. Точка S равноудалена от вершин правильного шестиугольника $ABCDEF$. Угол между прямой SA и плоскостью ABC равен β. Найти угол между плоскостями SAB и SAF.

Площадь ортогональной проекции многоугольника

250. Может ли площадь многоугольника быть больше площади его ортогональной проекции?

251. Найти площадь ортогональной проекции многоугольника на некоторую плоскость, если площадь многоугольника равна 18 см^2, а угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции равен 60°.

252. Площадь многоугольника равна $46\sqrt{2}$ см^2, а площадь его ортогональной проекции — 46 см^2. Найти угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

253. Ортогональной проекцией треугольника ABC на некоторую плоскость является прямоугольный равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$ с гипотенузой 12 см. Найти угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 72 см^2.

254. Площадь четырехугольника равна 180 см^2. Его ортогональной проекцией на некоторую плоскость является параллелограмм, одна из сторон которого равна 12 см, а угол между сторонами — 60°. Найти неизвестную сторону параллелограмма, если угол между плоскостью данного четырехугольника и плоскостью его проекции равен 30°.

255. Площадь треугольника ABC равна 75 см^2. Его ортогональной проекцией на некоторую плоскость является треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами 8 см, 18 см и 20 см. Найти угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

256. Многоугольник $B_1B_2 \dots B_n$ — ортогональная проекция многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ на плоскость α, а многоугольник $C_1C_2 \dots C_n$ — ортогональная проекция многоугольника $B_1B_2 \dots B_n$ на плоскость $A_1A_2A_n$. Найти угол между плоскостями $A_1A_2A_n$ и $B_1B_2B_n$, если площадь многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ в 4 раза больше площади многоугольника $C_1C_2 \dots C_n$.

257. Ортогональной проекцией равнобокой трапеции на плоскость α является трапеция площадью 50 см^2. Найти угол между плоскостью α и плоскостью данной трапеции, если основания этой трапеции равны 5 см и 15 см, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

Векторы в пространстве. Равенство векторов. Координаты вектора

258. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если: 1) A (9; –2; –12), B (5; –1; –14); 2) A (3; 7; –11), B (–6; 8; 0).

259. Даны точки A (4; –2; –4), B (x; y; 1), C (5; 2; –3), D (6; 0; z). Найти x, y, z, если $\overline{AB} = \overline{DC}$.

260. От точки M (–2; 4; 7) отложен вектор $\overline{n}$ (4; –6; 8). Найти координаты конца вектора.

261. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (3; –7; 1), B (2; 4; –13), C (–5; 1; 9), D (–4; –10; 23) является параллелограммом.

262. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: B (1; 2; 3), C (–2; 4; 6), D (7; –1; –8). Найти координаты вершины A.

263. Среди векторов $\overline{a}$ (6; 6; 3), $\overline{b}$ ($\sqrt{10}$; $3\sqrt{10}$; 0), $\overline{c}$ (1; 4; –8), $\overline{m}$ (–6; –3; 6), $\overline{n}$ (5; –5; $5\sqrt{2}$) найти имеющие одинаковый модуль.

264. Модуль вектора $\overline{a}$ (–8; y; 4) равен 10. Найти y.

265. Модуль вектора $\overline{k}$ (x; y; z) равен 12. Найти координаты вектора $\overline{k}$, если $y = z = 2x$.

Сложение векторов

266. Даны векторы $\overline{m}$ (–6; 1; 4) и $\overline{n}$ (5; –3; 2). Найти:

1) $\overline{m} + \overline{n}$; 2) $\overline{m} - \overline{n}$; 3) $|\overline{m} + \overline{n}|$; 4) $|\overline{m} - \overline{n}|$.

267. Найти координаты точки M такой, что $\overline{BM} + \overline{AM} = \overline{0}$, где A (–2; 3; –3), B (5; 0; –1).

268. Найти координаты векторов $\overline{c}$ и $\overline{d}$, если их сумма — вектор (6; –3; 9), а разность — (–1; 4; –3).

269. Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:

1) 3; 7; 11; 2) 6; 5; 12; 3) 8; 7; 15?

270. Даны векторы $\overline{a}$ (–2; 5; 7), $\overline{b}$ (x; –3; 4), $\overline{c}$ (4; 1; –10). При каком значении x модуль вектора $\overline{c} - \overline{b} - \overline{a}$ наименьший? Найти это значение модуля.

Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы

271. Даны векторы $\overline{a}$ (–2; 4; 5) и $\overline{b}$ (3; 1; –6). Найти:

1) $\overline{a} + 4\overline{b}$; 2) $2\overline{a} + 3\overline{b}$; 3) $7\overline{a} - \overline{b}$; 4) $6\overline{a} - 2\overline{b}$.

272. Найти модуль вектора $\overline{n} = 5\overline{a} - 3\overline{b}$, где $\overline{a}$ (–5; 6; –3), $\overline{b}$ (–1; –4; –8).

273. Точка D находится вне плоскости треугольника ABC. Выразить через векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{KM}$ и $\overline{CK}$, где M — середина отрезка AB, K — середина AD.

274. Точка M равноудалена от вершин прямоугольника $ABCD$. Выразить через векторы $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ и $\overline{MD}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{DA}$, $\overline{MA}$ и $\overline{MO}$, где O — точка пересечения AC и BD.

275. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно такие, что $CD : DA = 1 : 4$, $BE : EC = 3 : 4$. Вне плоскости треугольника ABC взяли точку O. Выразить вектор $\overline{DE}$ через векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$.

276. Коллинеарны ли векторы $\overline{BA}$ и $\overline{EF}$, если A (3; –2; 0), B (1; 2; –3), E (–1; –3; 4), F (–4; 3; –0,5)?

277. Среди векторов $\overline{a}$ (2; –5; –4), $\overline{b}$ (8; –20; –16), $\overline{c}$ (–4; 10; 8), $\overline{d}$ (–14; 35; 28) найти одинаково направленные и противоположно направленные векторы.

278. Найти значения x и z, при которых векторы $\overline{p}$ (x; 3; –13) и $\overline{q}$ (5; –12; z) коллинеарны.

279. Дан вектор $\overline{c}$ (–2; –4; 5). Найти координаты вектора $\overline{d}$, противоположно направленного с вектором $\overline{c}$, если $|\overline{d}| = \sqrt{5}$.

280. Для ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется равенство $7\overline{a} + 9\overline{b} = \overline{b} - 12\overline{a}$. Доказать, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направлены.

281. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (1; –4; 16), B (2; 1; 1), C (5; 3; –3), D (10; 2; 4) — трапеция.

282. Лежат ли точки A (–1; 5; –6), B (7; 13; 2) и C (0; 6; –5) на одной прямой?

Разложение вектора по трем векторам, не лежащим в одной плоскости. Единичный вектор

283. Среди векторов $\bar{a}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$, $\bar{b}\left(\frac{8}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$, $\bar{m}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$, $\bar{n}$ (1; 0; 0), $\bar{p}\left(\frac{4}{5}; 0; \frac{3}{5}\right)$ указать единичные векторы.

284. Найти координаты единичного вектора, противоположно направленного с вектором:

1) $\bar{p}$ (5; 1; 2); 2) $\bar{q}$ $(-7; 1; -5\sqrt{2})$; 3) $\bar{s}$ $(-a; -b; c)$.

285. Даны единичные векторы $\bar{e}_1$ (1; 0; 0), $\bar{e}_2$ (0; 1; 0), $\bar{e}_3$ (0; 0; 1). Найти координаты векторов:

1) $27\bar{e}_1 - 28\bar{e}_2 - 29\bar{e}_3$; 2) $-14\bar{e}_2 + 10\bar{e}_3$; 3) $p\bar{e}_1 + q\bar{e}_2 - s\bar{e}_2$.

286. Разложить вектор $\bar{p}$ (6; 8; 7) по направлениям векторов $\bar{a}$ (2; 1; 3), $\bar{b}$ (3; –1; –1) и $\bar{c}$ (–1; 7; 2).

Скалярное произведение векторов

287. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1) $\bar{a}$ (2; –1; 7), $\bar{b}$ (4; 3; –9);
2) $\bar{a}$ (–3; 4; 12), $\bar{b}$ (3; –2; 0);
3) $\bar{a}$ (6; –3; 1), $\bar{b}$ (2; 3; –3).

288. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1) $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 30°$;

2) $|\bar{a}| = 15$, $|\bar{b}| = 6$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 135°$;

3) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 12$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 180°$.

289. Даны векторы $\bar{m}$ (5; –2; z) и $\bar{n}$ (4; 2; $-z$). При каком значении z $\bar{m} \cdot \bar{n} = 7$?

290. Найти косинус угла между векторами $\bar{a}$ (–4; 1; 2) и $\bar{b}$ (–6; 8; –10).

291. Найти косинусы углов треугольника ABC и установить вид этого треугольника, если $A\ (-1;\ 2;\ 1)$, $B\ (3;\ 7;\ -4)$, $C\ (2;\ -1;\ 0)$.

292. Даны векторы $\bar{c}\ (4;\ y;\ 6)$ и $\bar{d}\ (3;\ -4;\ 3)$. При каком значении y векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ перпендикулярны?

293. Даны векторы $\bar{a}\ (8;\ -3;\ z)$ и $\bar{c}\ (-6;\ 3;\ -17)$. При каких значениях z угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$:

1) острый; 2) тупой; 3) прямой?

294. Найти углы, образуемые вектором $\overline{AB}$, где $A\ (2;\ -5;\ 4)$, $B\ (2;\ -3;\ 7)$, с отрицательными направлениями координатных осей.

295. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A\ (-2;\ 7;\ -4)$, $B\ (2;\ 4;\ 4)$, $C\ (5;\ 0;\ 1)$, $D\ (1;\ 3;\ -7)$ — прямоугольник.

296. Найти координаты вектора $\bar{p}$, коллинеарного вектору $\bar{q}\ (-3;\ 4;\ 15)$, если $\bar{p}\cdot\bar{q} = -125$.

297. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 30°, $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$. Найти:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; 2) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{a}$; 3) $(\bar{a}-3\bar{b})\cdot\bar{b}$; 4) $(4\bar{a}-2\bar{b})\cdot\bar{b}$.

298. $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — единичные векторы, угол между которыми равен 60°. Вычислить скалярное произведение $(\bar{a}+2\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})$.

299. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 4$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 120^\circ$. Найти: 1) $|\bar{a}-\bar{b}|$; 2) $|\bar{a}+4\bar{b}|$.

300. Найти косинус угла между векторами $\bar{a} = 2\bar{m} + 3\bar{n}$ и $\bar{b} = 3\bar{m} - \bar{n}$, где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

301. Даны векторы $\bar{a}\ (3;\ -5;\ 2)$ и $\bar{b}\ (4;\ -1;\ 6)$. Найти значение m, при котором векторы $m\bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{a}$ перпендикулярны.

302. Даны точки $A\ (12;\ -9;\ -4)$, $B\ (4;\ -5;\ 8)$, $C\ (2;\ -3;\ 6)$ и $D\ (-1;\ -13;\ 5)$. Доказать, что прямая BC перпендикулярна плоскости ADB.

303. Найти множество точек $M\ (x;\ y;\ z)$ такое, что содержит точку $A\ (-2;\ 7;\ -4)$, и прямая, проходящая через точки $B\ (14;\ -3;\ -17)$ и $C\ (18;\ -1;\ -10)$, перпендикулярна каждой прямой, проходящей через точку A.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 1

Тематическое оценивание №1

Тема. *Параллельные прямые в пространстве. Параллельность прямой и плоскости*

1°. Прямые a и b скрещивающиеся и прямые a и c скрещивающиеся. Верно ли, что прямые b и c скрещивающиеся?

2°. Плоскость α проходит через середины сторон AB и BC треугольника ABC. Найти длину отрезка AC, если расстояние между точками пересечения плоскости α со сторонами AB и BC треугольника ABC равно 4,6 см.

3•. Точки M, P, K и E — середины отрезков AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 107). $MK = PE = 10$ см, $AC = 12$ см. Найти BD.

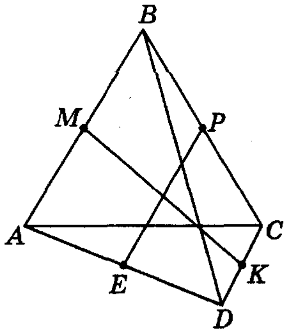


Рис. 107

4••. Через параллельные прямые a и b проведены две плоскости, пересекающиеся по прямой c. Доказать, что прямые a и b параллельны прямой c.

Тематическое оценивание №2

Тема. *Параллельность плоскостей. Изображение пространственных фигур на плоскости*

1°. Плоскости α и β параллельны. В плоскости α выбраны точки A, B и C и через них проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найти длины отрезков A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1, если $AB = 10$ см, $BC = 4$ см, $AC = 8$ см.

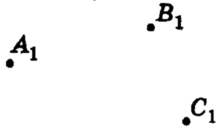


Рис. 108

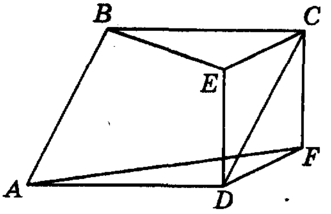


Рис. 109

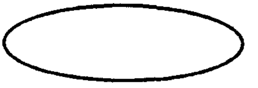


Рис. 110

2°. Точки A_1, B_1 и C_1 — параллельные проекции вершин параллелограмма $ABCD$ на плоскость (рис. 108). Построить проекцию вершины D параллелограмма на эту плоскость.

3•. Четырехугольники $ABCD$ и $DECF$ — параллелограммы, причем точка B не принадлежит плоскости AFD (рис. 109). Доказать, что плоскости AFD и BCE параллельны.

4••. Дана параллельная проекция окружности (рис. 110). Построить проекцию центра этой окружности.

Тематическое оценивание №3

Тема. *Перпендикулярность прямой и плоскости*

1°. Из точки A к плоскости α проведена наклонная длиной 10 см. Найти расстояние от точки A до плоскости, если проекция наклонной на плоскость равна 6 см.

2°. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр CM. Найти длину стороны AB треугольника ABC, если $CM = 8$ см, $BM = 17$ см, $\angle CAB = 30°$.

3•. На рис. 111 изображен прямоугольник $ABCD$. MC — перпендикуляр к плоскости ABC. Доказать, что прямая AD перпендикулярна плоскости DMC.

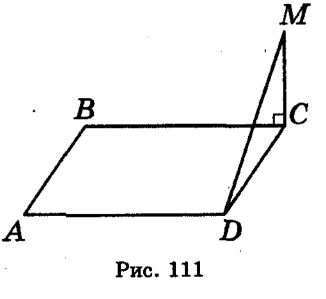


Рис. 111

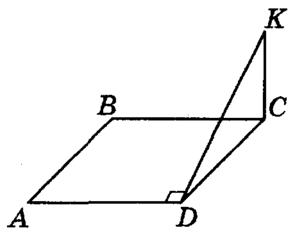
4••. Из точки A к плоскости α проведены две наклонные AB и AD. Проекции этих наклонных на плоскость α равны 7 см и 18 см. Найти расстояние от точки A до плоскости α, если $AB : AD = 5 : 6$.

Тематическое оценивание №4

Тема. *Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикулярность плоскостей*

1°. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена прямая KC, перпендикулярная плоскости параллелограмма. Известно, что $\angle ADK = 90^\circ$ (рис. 112). Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.

2°. Из точки M, находящейся на расстоянии 8 см от плоскости α, проведен перпендикуляр MO к этой плоскости. Расстояние от точки M до прямой a, лежащей в плоскости α, на 2 см больше расстояния от точки O до прямой a. Найти эти расстояния.



Мал. 112

3•. Плоскости α и β перпендикулярны. Прямая a — линия их пересечения. В плоскости α взята точка A, а в плоскости β — точка B такие, что расстояния от них до прямой a равны 4 см и 5 см соответственно. Найти расстояние между точками A и B, если расстояние между их проекциями на прямую a равно $2\sqrt{2}$ см.

4••. Сторона ромба равна 4 см, а острый угол 60°. Точка M удалена от сторон ромба на 5 см. Найти расстояние от точки M до плоскости ромба.

Тематическое оценивание №5

Тема. *Декартовы координаты в пространстве. Угол между прямой и плоскостью*

1°. Дано точки M (3; −2; 1) и N (5; 2; −3). Найти координаты середины отрезка MN и его длину.

2°. Из точки A к плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 6 см и которая образует с плоскостью α угол $60°$. Найти длину проекции наклонной на плоскость и расстояние от точки A до плоскости.

3•. Точки $A(-2; -4; 1)$ и $B(-5; -6; -1)$ — вершины параллелограмма $ABCD$, точка $O(1; 3; 2)$ — точка пересечения его диагоналей. Найти координаты вершин C и D параллелограмма $ABCD$.

4•. Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC, образующие с плоскостью углы по $60°$. Найти расстояние между точками B и C, если $\angle BAC = 90°$, а расстояние от точки A до плоскости α равно 3 см.

5••. Расстояние от точки N до координатных плоскостей равно 3 см, 4 см и 5 см. Найти расстояние от точки N до начала координат.

Тематическое оценивание №6

Тема. *Угол между плоскостями. Векторы в пространстве*

1°. Даны точки $A(-2; 1; 3)$, $B(3; -2; -1)$ и $C(-3; 4; 2)$. Найти:

1) координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;
2) модуль вектора $\overline{AB}$;
3) координаты вектора $\overline{MN} = 2\overline{AB} - 3\overline{AC}$.

2°. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. В плоскости α выбрана точка A такая, что расстояние от нее до плоскости β равно 4 см, а до прямой 8 см. Найти угол между плоскостями α и β.

3•. Даны векторы $\bar{a}(-2; 8; -4)$ и $\bar{b}(1; -4; k)$. При каком значении k векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?

4•. Треугольник ABC, площадь которого равна 24 см^2, является ортогональной проекцией равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$ со стороной 8 см. Найти угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

5••. Через сторону AB равностороннего треугольника ABC проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол $60°$. Точка D — ортогональная проекция точки C на эту плоскость. Найти стороны треугольника ABD, если $AB = 4$ см.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 2

Тематическое оценивание №1

Тема. *Параллельные прямые в пространстве. Параллельность прямой и плоскости*

1°. Прямые a и b скрещивающиеся, а прямые b и c параллельны. Верно ли, что прямые a и c скрещивающиеся?

2°. Плоскость β проходит через середины сторон DE и DF треугольника DEF. Найти расстояние между точками пересечения плоскости β со сторонами DE и DF, если $EF = 3{,}2$ см.

3•. Точки M, K, P и E — середины отрезков AD, DC, CB и AB соответственно (рис. 113).
$AC = BD = 8$ см, $MP = KE$.
Найти MP.

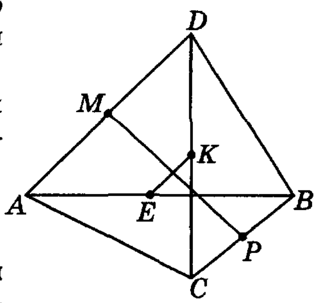


Рис. 113

4••. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. В плоскостях α и β проведены прямые a и b соответственно так, что $a \parallel b$. Доказать, что прямые a, b и l попарно параллельны.

Тематическое оценивание №2

Тема. *Параллельность плоскостей. Изображение пространственных фигур на плоскости*

1°. Плоскости α и β параллельны. В плоскости α выбраны точки A, B и C и через них проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найти длины отрезков AB, BC и A_1C_1, если $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 4$ см, $AC = 5$ см.

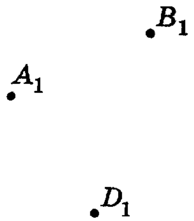


Рис. 114

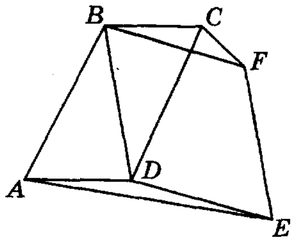


Рис. 115

Рис. 116

2°. Точки A_1, B_1 и D_1 — параллельные проекции вершин параллелограмма $ABCD$ на плоскость (рис. 114). Построить проекцию вершины C параллелограмма на эту плоскость.

3•. Четырехугольники $ABCD$ и $BDEF$ — параллелограммы, причем точка F не принадлежит плоскости ADE (рис. 115). Доказать, что плоскости ADE и BCF параллельны.

4••. Дана параллельная проекция окружности (рис. 116). Построить проекцию диаметра, перпендикулярного диаметру AB.

Тематическое оценивание №3

Тема. *Перпендикулярность прямой и плоскости*

1°. Из точки M к плоскости β проведена наклонная. Проекция наклонной на эту плоскость равна 5 см, а расстояние от точки M до плоскости β равно 12 см. Найти длину наклонной.

2°. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр CD. Найти длину стороны AB треугольника ABC, если $AD = 20$ см, $CD = 16$ см, $\angle CAB = 60°$.

3•. На рис. 117 треугольник BCE и прямоугольник $ABCD$ не лежат в одной плоскости. $\angle ABE = 90°$. Доказать, что прямая DC перпендикулярна плоскости BCE.

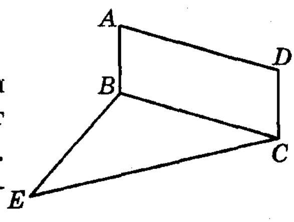


Рис. 117

4••. Из точки K к плоскости β проведены две наклонные KP и KD. Найти расстояние от точки K до плоскости β, если $KD - KP = 2$ см, а длины проекций наклонных равны 9 см и 5 см.

Тематическое оценивание №4

Тема. *Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикулярность плоскостей*

1°. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена прямая EC, перпендикулярная плоскости параллелограмма. Известно, что $\angle EOD = 90°$ (рис. 118). Доказать, что $ABCD$ — ромб.

2°. Расстояние от точки K, не лежащей в плоскости α, до прямой m этой плоскости равно $\sqrt{74}$ см. Найти расстояния от точки K до плоскости α и от основания перпендикуляра, проведенного из точки K к плоскости α, до прямой m, если первое из этих расстояний на 2 см меньше второго.

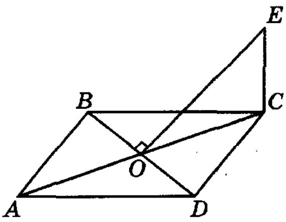


Рис. 118

3•. Плоскости α и β перпендикулярны. Прямая l — линия их пересечения. В плоскости α взята точка M, а в плоскости β — точка N такие, что расстояния от них до прямой l равны 6 см и 7 см соответственно. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенными из точек M и N к прямой l, если расстояние между точками M и N равно $\sqrt{110}$ см.

4••. Сторона равностороннего треугольника равна 12 см. Точка P равноудалена от сторон треугольника и находится на расстоянии 2 см от его плоскости. Найти расстояние от точки P до сторон треугольника, если ее проекция на плоскость треугольника лежит внутри треугольника.

Тематическое оценивание №5

Тема. *Декартовы координаты в пространстве. Угол между прямой и плоскостью*

1°. Даны точки A (–6; 5; 3) и B (4; 1; –5). Найти координаты середины отрезка AB и его длину.

2°. Из точки P к плоскости β проведена наклонная, которая образует с плоскостью угол $30°$. Найти длину наклонной и расстояние от точки P до плоскости β, если проекция наклонной на плоскость равна 6 см.

3•. Точки $A(2; -4; 1)$ и $B(-6; 2; 3)$ и $D(4; 0; -1)$ — вершины параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины C параллелограмма и координаты точки пересечения его диагоналей.

4•. Из точки M к плоскости α проведены наклонные MB и MC, которые образуют с плоскостью углы по $30°$. Найти расстояние от точки M до плоскости α, если $\angle BMC = 90°$, а длина отрезка BC равна 8 см.

5••. Расстояние от точки F до координатных плоскостей xz и yz равно соответственно 4 см и 6 см, а до начала координат 8 см. Найти расстояние от точки F до плоскости xy.

Тематическое оценивание №6

Тема. *Угол между плоскостями. Векторы в пространстве*

1°. Даны точки $M(-4; -2; 1)$, $N(3; -1; -1)$ и $K(2; 1; -3)$. Найти:

1) координаты векторов $\overline{MN}$ и $\overline{KM}$;
2) модуль вектора $\overline{MN}$;
3) координаты вектора $\overline{PF} = 3\overline{MN} - 2\overline{KM}$.

2°. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. В плоскости α выбрана точка K и из нее проведен перпендикуляр KM к плоскости β. Расстояние от точки K до плоскости β равно $4\sqrt{3}$ см, а расстояние от точки M до прямой l — 4 см. Найти угол между плоскостями α и β.

3•. Даны векторы $\overline{m}(1; -4; -3)$ и $\overline{n}(5; p; -15)$. При каком значении p векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$:

1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?

4•. Площадь треугольника ABC равна 36 см^2. Его ортогональная проекция — равнобедренный прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, гипотенуза которого равна $6\sqrt{2}$ см. Найти угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

5••. Угол между плоскостями равнобедренных треугольников ABC и ABD равен $60°$ (AB — общее основание треугольников). Найти расстояние между точками C и D, если $AC = 10$ см, $AD = 17$ см, $AB = 16$ см.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ТРЕНИРОВОЧНЫМ УПРАЖНЕНИЯМ

Вариант 1

5. *Указание.* Применить метод доказательства от противного. **11.** *Указание.* Провести прямую, пересекающую каждую из трех данных прямых и выбрать точку, не принадлежащую плоскости α. Плоскость, проходящая через проведенную прямую и выбранную точку — искомая. **13.** *Указание.* Применить метод доказательства от противного. **16.** *Указание.* Провести плоскость через две произвольные прямые. Применить теорему о принадлежности прямой плоскости. **19.** *Указание.* Точки M, D и K лежат на прямой пересечения плоскостей ABC и α. **20.** Прямые MK и KP — искомые (рис. 119). **25.** Да. **26.** *Указание.* Указанные точки лежат на линии пересечения плоскостей β и MNK. **36.** *Указание.* Применить метод доказательства от противного.

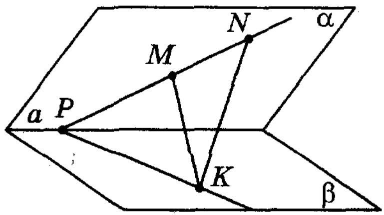


Рис. 119

38. 34 см. *Указание.* Доказать, что четырехугольник $MNQP$ — параллелограмм. **39.** 5 см. **49.** $8\frac{1}{3}$ см. **50.** *Указание.* Через точку E провести прямые, параллельные прямым MN и KP. **51.** 2 см. **55.** *Указание.* Используя теорему Фалеса и метод доказательства от противного, докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$ и $A_1C_1 \parallel AC$. **58.** 6 см. **62.** *Указание.* Провести в плоскости α прямую b, параллельную прямой a, а в плоскости β — прямую c, параллельную прямой b. **63.** *Указание.* Выбрать на плоскости α произвольную точку и провести через эту точку и прямую b плоскость. **68.** Нет. **73.** Квадрат. **75.** *Указание.* Искомая проекция биссектрисы делит отрезок A_1C_1 в отношении 3:5, считая от точки A_1. **76.** 3 решения. *Указание.* Построить точку, симметричную одной из данных точек относительно середины отрезка, соединяющего две другие точки. **77.** *Указание.* Стороны AE и CD проекции квадрата $ACDE$ (рис. 120) параллельны и равны удвоенной медиане BM треугольника ABC. **79.** *Указание.* Провести произвольную хорду MN окружности (рис. 121). Через ее середину и

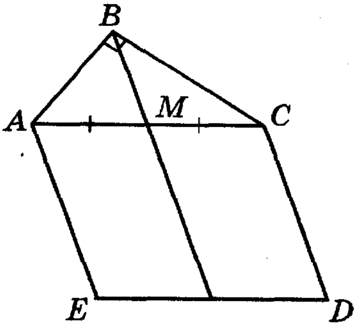


Рис. 120

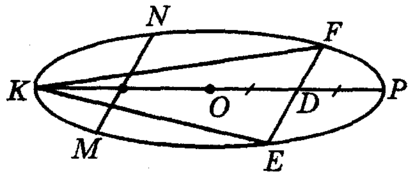


Рис. 121

центр окружности провести диаметр KP. Через точку D — середину отрезка OP — провести хорду EF, параллельную MN. Треугольник KFE — искомый. **80.** *Указание.* Через точки A и C провести прямые, параллельные прямым BC и AB соответственно. Точка пересечения этих прямых — центр искомого правильного шестиугольника. **81.** *Указание.* Искомые высоты параллельны прямой, проходящей через середины оснований трапеции. **82.** *Указание.* При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой. Применить свойство биссектрис треугольника. **83.** *Указание.* Искомая прямая проходит через точки пересечения прямых AB и A_1B_1 и прямых BC и B_1C_1. **90.** Прямоугольный. **93.** 16 см. **94.** 19,5 см. **95.** $3\sqrt{6}$ см. **100.** $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{2a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$. **101.** $30°$. **102.** $\frac{2}{5}\sqrt{55}$. *Указание.* Проекция точки M на плоскость ABC — центр окружности, описанной около треугольника ABC. **103.** *Указание.* Провести прямую OF, перпендикулярную плоскости ABC. **104.** $90°$. **105.** 10 см. **106.** 6 см. **111.** 6 см. **112.** $4\sqrt{3}$ см и 4 см. **113.** 12 см. **116.** 6 см. **118.** 4 см и 8 см. *Указание.* Воспользоваться результатом задачи 117. **119.** $6\sqrt{3}$ см. **120.** 1,5 см; 22,5 см. **121.** 12 см. **122.** $45°$. **123.** 10 см или $\sqrt{145}$ см. **124.** $7\sqrt{5}$ см. *Указание.* Воспользоваться свойством параллелограмма: $2(AB^2+AD^2)=AC^2+BD^2$. **125.** *Решение.* Из подобия треугольников CMA и AMB (рис. 122) имеем: $\frac{AC}{AB}=\frac{AM}{MB}$ и $\frac{AC}{AB}=\frac{MC}{AM}$. Перемножив эти равенства, получим: $\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{MC}{MB}$. **128.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **129.** $4\sqrt{5}$ см. **132.** $\sqrt{n^2+a^2\cos^2\beta}$. **135.** *Указание.* Проекции искомых перпен-

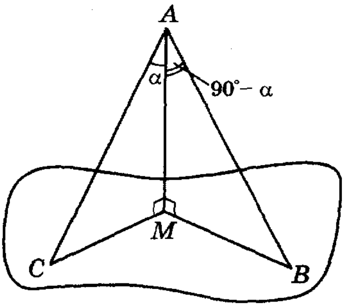


Рис. 122

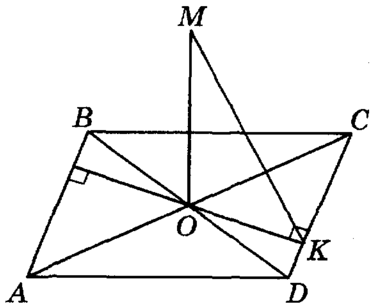


Рис. 123

дикуляров параллельны сторонам BC и AC треугольника ABC. **137.** 12 см. **138.** 5 см, $\sqrt{41}$ см. *Указание.* Высота параллелограмма, проведенная к стороне CD, равна 10 см, откуда $OK = 5$ см (рис. 123). Из ΔMOK найти расстояние от точки M до стороны CD. Аналогично найти расстояние от точки M до стороны AD. **139.** 5 см. **140.** 20 см. **141.** 12 см. **142.** $2\sqrt{3}$ см. **143.** 8 см. *Указание.* Воспользоваться свойством сторон четырехугольника, в который вписана окружность. **144.** 7,8 см. **145.** 6,4 см. **146.** $\sqrt{S \sin\alpha + 4m^2}$. **147.** *Указание.* Доказать, что CO — биссектриса угла ACB. **148.** 10 см. **149.** $2\sqrt{6}$ см. *Указание.* Пусть $DE = x$, тогда из ΔBAD: $16 - x^2 + 81 - x^2 = 49$. **150.** $\cos\alpha \cos\beta$. *Решение.* Провести $DB \perp m$ (рис. 124), тогда и $OB \perp AB$. Из ΔADO: $AO = AD \cos\alpha$. Из ΔAOB: $AB = AO \cos\beta = AD \times$ $\times \cos\alpha \cos\beta$. Из ΔADB: $\cos \angle DAB = \dfrac{AB}{AD} = \cos\alpha \cos\beta$.

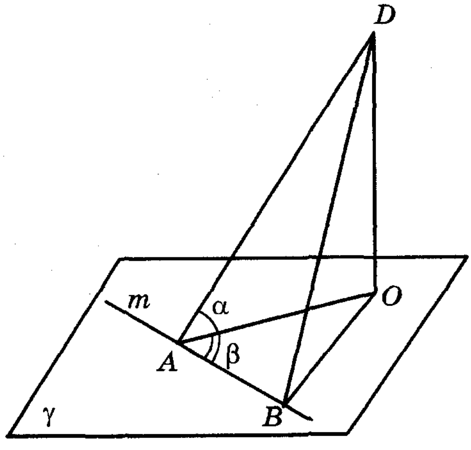


Рис. 124

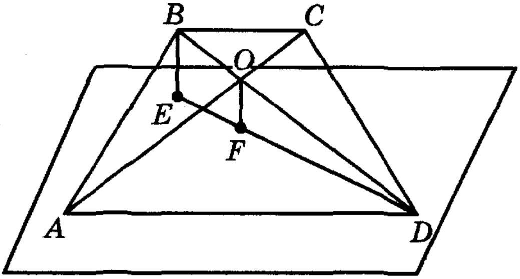


Рис. 125

151. $\sqrt{546}$ см. *Указание.* Проекция наклонной — биссектриса угла B треугольника ABC. **152.** 4,5 см. *Указание.* Через вершину B и точку O пересечения диагоналей провести перпендикуляры к плоскости (рис. 125). Найти отрезок OF, учитывая подобие треугольников BED и OFD.

157. $4\sqrt{2}$ см. **161.** $7\frac{1}{17}$ см. **162.** $4\sqrt{5}$ см. **163.** $16\sqrt{2}$ см.

164. $2\sqrt{193}$ см и 26 см или $2\sqrt{249}$ см и $2\sqrt{281}$ см. **165.** $0{,}4\sqrt{337}$ см. *Решение.* Из ΔABC: $BF = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$,

$BF = 4{,}8$ см (рис. 126).
Из ΔBFC: $FC = 3{,}6$ см.
$EF = AC - 2FC = 2{,}8$ см.
Из ΔEFD:
$DF^2 = DE^2 + EF^2$,
$DF^2 = 30{,}88$. Из ΔBFD:
$BD = \sqrt{BF^2 + FD^2}$.

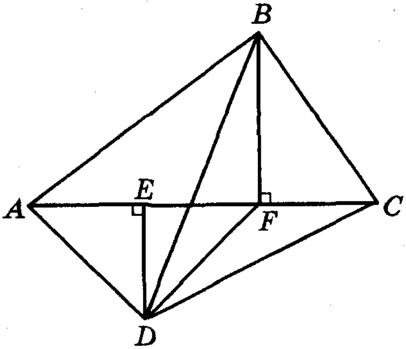


Рис. 126

166. *Указание.* Если плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ, то и линия пересечения плоскостей α и β перпендикулярна плоскости γ. **167.** 1) a; 2) $0{,}5a$. **168.** $4\frac{8}{13}$ см. **169.** 9,6 см. **171.** 9 см. *Указание.* Провести $AD \perp b$. Рассмотреть трапецию $AOBD$.

172. $5\sqrt{3}$ см. **173.** 3 см. **174.** *Указание.* Спроектировать ортогонально прямую a на плоскость α (прямая a'). Из точки пересечения прямой a' с данной скрещивающейся прямой провести перпендикуляр к плоскости α. **175.** $2\sqrt{10}$ см. *Указание.* Провести $BB_2 \perp \alpha$ (рис. 127). Высота

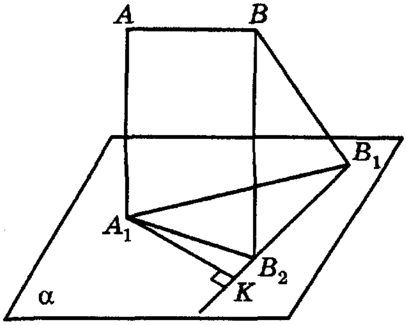


Рис. 127

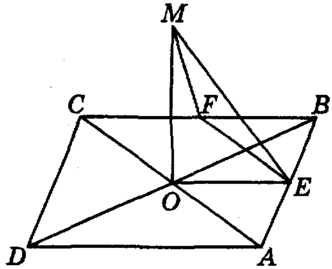


Рис. 128

A_1K треугольника $A_1B_1B_2$ — искомое расстояние между скрещивающимися прямыми. **176.** $7\frac{1}{17}$ см. *Указание.* Искомое расстояние равно высоте треугольника CBE. **177.** $2\sqrt{2}$ см. *Указание.* Искомое расстояние равно расстоянию между прямой BB_1 и плоскостью AC_1C. **185.** $(1;\ \sqrt{2};\ 1)$. *Указание.* Спроектировать точку A на координатные оси. **186.** $\sqrt{70}$ см. **189.** (0; 4; 4). *Указание.* Искомая точка — середина отрезка PK, где P — середина отрезка MK. **190.** D (4; –3; 0). **192.** (3; –1; 4), (5; 3; –6), (–1; 5; –2). **195.** $y = -3$ или $y = -7$. **196.** (0; –3,5; 0). **197.** A (0; 2; 0), B (–4; 0; 6), $AB = 2\sqrt{14}$. **199.** *Указание.* Сравнить длины отрезков AB, BC и AC. **211.** *Указание.* $OA_1 = 3OA$, $OB_1 = 3OB$, $OC_1 = 3OC$. **212.** A (2,5; 1; –4), B (3; –0,5; –1,5), C (1; 3; 1). *Указание.* Точки A, B и C — середины отрезков MA_1, MB_1 и MC_1 соответственно. **213.** $k = 2$, D_1 (9; –8; 9). *Указание.* $k = \frac{AC}{AP}$. **214.** $BC = 5$ см, $A_1C_1 = 28$ см.

215. $\frac{a(m+n)}{m}$, $\frac{b(m+n)}{m}$, $\frac{c(m+n)}{m}$. **219.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 60°. **220.** $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. *Указание.* Провести $EF \parallel AC$ (рис. 128). Искомый угол равен углу MEF. **224.** *Указание.* Рассмотреть параллельный перенос, при котором одна прямая переходит в другую. **226.** $3\sqrt{21}$ см. **227.** 60°. **228.** 45° и 30°. **229.** 4 см. **230.** 54 см. **231.** $\arccos\frac{1}{3}$. **232.** 45°.

233. 60°. *Решение.* Проведем плоскость γ, перпендикулярную прямой m. Пусть она пересекает прямые a, b и m в точках A, B и C соответственно. Из треугольника ABC: $\cos\angle ACB = -0{,}5$, откуда $\angle ACB = 120°$. Тогда угол между плоскостями α и β равен 60°. **234.** $\sqrt{3}$ см.

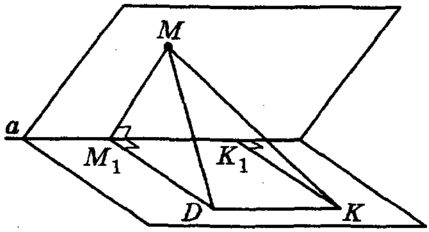


Рис. 129

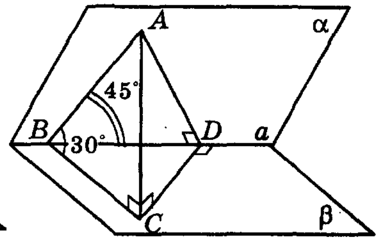


Рис. 130

235. $3\sqrt{13-6\sqrt{3}}$ см. **236.** 30°. **237.** 2,4 см. **238.** $\sqrt{61}$ см. **239.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$. **240.** 30°. **242.** 30°. **243.** 8 см. *Указание* (рис. 129). Провести $M_1D \perp a$, $M_1D = K_1K$. $MK^2 = MD^2 + DK^2$. **244.** 60°. **245.** 3 см. **246.** 60°. *Указание.* Провести $MK \perp \alpha$ и $MM_1 \perp AB$. Выразить отрезок MM_1 через MK. **247.** 45°. *Указание* (рис. 130). Пусть α и β — данные в условии плоскости, прямая a — линия их пересечения. Прямая AB, проведенная в плоскости α, образует с прямой a угол 45°, а с плоскостью β — угол 30°. Из ΔABC: $AB = 2AC$. Из ΔABD: $AD = AC\sqrt{2}$. Из ΔADC: $\angle ADC = 45°$. **248.** $\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha)$. **249.** $2\,\mathrm{arcctg}\,(\sqrt{3}\,\sin\beta)$. *Указание.* Искомый угол — это угол между высотами треугольников APC и BPC, проведенными к общей стороне PC. **253.** $24\sqrt{2}$ см². **254.** 60°. **255.** 45°. **256.** 30°. **257.** 30°. **264.** $\sqrt{47}$ или $-\sqrt{47}$. **265.** $\overline{p}\,(2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$ или $\overline{p}\,(-2\sqrt{3};\ -2\sqrt{3};\ -2\sqrt{3})$. **267.** C (0,5; 1; –1). **268.** $\overline{a}$ (5; 1; 2), $\overline{b}$ (–1; –2; 3). **270.** $z = 5$, $|\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}| = 6$. **273.** $\overline{BM} = 0{,}5\overline{SA} + 0{,}5\overline{SC} - \overline{SB}$. **274.** $\overline{KD} = \overline{KA} - \overline{KB} + \overline{KC}$. **275.** $\frac{1}{3}\overline{PA} + \frac{5}{12}\overline{PB} - \frac{3}{4}\overline{PC}$. *Указание.* $\overline{FE} = \overline{FB} + \overline{BE} = \frac{3}{4}\overline{CB} + \frac{1}{3}\overline{BA}$, $\overline{CB} = \overline{PB} - \overline{PC}$, $\overline{BA} = \overline{PA} - \overline{PB}$. **278.** $y = -2$, $z = -12$. **279.** $\overline{b}(9;\ -6;\ -18)$. **281.** *Указание.* Найти пару коллинеарных и различных по модулю векторов. **282.** *Указание.* Проверить коллинеарность векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. **286.** $\overline{m} = 2\overline{a} - \overline{b} + 3\overline{c}$. **293.** 1) $x > 7$; 2) $x = 7$; 3) $x < 7$. **294.** *Указание.* Найти углы между вектором $\overline{AB}$ и векторами $\overline{e}_1(1; 0; 0)$, $\overline{e}_2$ (0; 1; 0), $\overline{e}_3$ (0; 0; 1). **296.** $\overline{(-10;\ 6;\ -8)}$. **299.** 1) $\sqrt{19}$. *Указание.* $|\overline{a} + \overline{b}| = \sqrt{(\overline{a} + \overline{b})^2} = \sqrt{\overline{a}^{\,2} + \overline{b}^{\,2} + 2\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}}$.

300. $-0{,}1\sqrt{2}$. **301.** $k = -\frac{7}{26}$. **302.** *Указание.* Доказать, что $AB \perp BC$ и $AB \perp BD$. **303.** $4x + 3y + z - 16 = 0$. *Указание.* $\overline{AB} \cdot \overline{KM} = 0$.

Вариант 2

17. *Указание.* Проведем две плоскости — через прямые a и c, а также через прямые b и c. Если допустить, что такая прямая существует, то она должна принадлежать каждой из двух проведенных плоскостей, а это значит, что она совпадает с прямой c. **19.** *Указание.* Точки M, D и N лежат на прямой пересечения плоскостей ABC и α. **20.** Прямые AC и BM — искомые (рис. 131). **24.** *Указание.* Провести плоскость через три точки фигуры, не принадлежащие одной прямой. Тогда каждая следующая точка будет лежать с этими тремя точками в одной плоскости. **26.** *Указание.* Указанные точки лежат на прямой пересечения плоскостей ABC и α. **37.** *Указание.* Применить метод доказательства от противного. **39.** 11 см и 7 см. **43.** *Указание.* Выбрать на прямой пересечения плоскостей произвольную точку и провести плоскость через прямую a и эту точку. Доказать, что эта плоскость содержит прямую пересечения данных плоскостей. **47.** *Указание.* Применить метод доказательства от противного. **49.** 1 : 3. **51.** 2,4 см. **55.** *Указание.* Используя теорему Фалеса и метод доказательства от противного, доказать, что $EF \parallel DC$ и $EK \parallel DA$. **58.** 4,8 см. **63.** *Указание.* Через прямую a и точку B провести плоскость. **73.** *Указание.* Основание высоты — середина стороны AD. **75.** *Указание.* Искомая точка делит медиану B_1D_1 в отношении 5 : 4, считая от точки B_1. **76.** 9 решений. *Указание.* Если одна из данных точек — вершина треугольника, то другая точка может быть как серединой стороны, выходящей из данной вершины, так и серединой противоположной стороны. **78.** *Указание.* Чтобы построить проекцию диаметра окружности, надо провести две параллель-

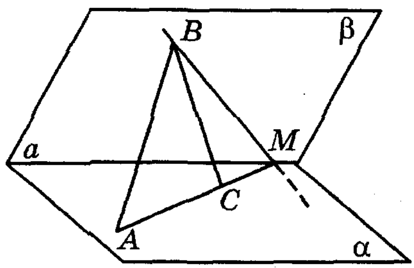


Рис. 131

ные хорды и провести хорду через их середины. **79.** *Указание.* Провести произвольный диаметр AB окружности (рис. 132). Провести хорду MN, параллельную AB. Через середину хорды MN и центр окружности провести диаметр CD окружности. $ACBD$ — изображение квадрата. **80.** 3 решения. *Указание.* Пусть A и B — вершины квадрата, O — его центр. Построить точки, симметричные точкам A и B относительно центра O. **81.** *Указание.* Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника параллельны его соответствующим высотам. **82.** *Указание.*

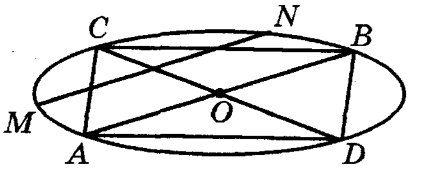


Рис. 132

Пусть в прямоугольнике $ABCD$ $AB : BC = 3 : 1$. Тогда основание высоты BE треугольника ABC делит сторону AC в отношении 9 : 1, считая от точки A. **83.** *Указание.* Соединить точки A_1 и B_1 и C_1 и B_1. Через точки пересечения отрезков A_1B_1 и C_1B_1 с прямой p_1 провести прямые, параллельные прямой BB_1. Их точки пересечения с прямыми BC и AC — точки прямой p. **91.** *Указание.* Провести прямую MO_1, перпендикулярную плоскости ABC. Доказать, что точка O_1 совпадает с O. **94.** $KA = 12$ см, $KB = KC = 24$ см. **100.** $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. **101.** 45°. **102.** 12 см. **104.** 60°. **105.** 6,5 см. **107.** *Указание.* Через точку B провести прямую, параллельную прямой AC. **112.** $MK = 12$ см, $MC = 12\sqrt{3}$ см. **113.** 50 см и 52 см. **116.** $\sqrt{6}$ см. *Указание.* Провести $FK \perp AC$. Найти длины отрезков AF и AB. **118.** 8 см, 8 см, $8\sqrt{3}$ см. *Указание.* Провести прямую MO, перпендикулярную плоскости ABC, OA — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. **119.** $\sqrt{19}$ см, $2\sqrt{19}$ см. **120.** 13 см, 15 см. **121.** 8 см. **122.** $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$. **123.** $2\sqrt{65}$ см. **124.** $\sqrt{51}$ см. *Указание.* Продлить медиану CM на ее длину. Далее воспользоваться указанием к № 124 варианта 1. **125.** *Указание.* $\frac{MA}{AC} = \frac{AB}{MA}$, откуда $\Delta MAB \sim \Delta CAM$ и $\angle BMA = 90^\circ - \angle AMC$. **128.** $0{,}5\sqrt{4a^2 + 4b^2 - c^2}$. **129.** $\sqrt{217}$ см. **132.** $\sqrt{d^2 + c^2 \sin^2\alpha}$. **136.** *Указание.* Проекция искомого перпендикуляра параллельна диагонали AC шестиугольника. **137.** 9 см. **138.** 5,2 см. **139.** 10 см. **140.** $3\sqrt{5}$ см. **141.** 4 см. **142.** $8\sqrt{30}$ см. **143.** $\sqrt{43}$ см. *Указание.* Воспользоваться свойством сторон четырехугольника, в который вписана окружность. **144.** 10 см. **145.** 24 см. **146.** $0{,}5\sqrt{a^2\sin^2\alpha + 4b^2}$. **148.** 5,2 см. **149.** 7 см. **150.** $\arccos \frac{\cos\varphi}{\cos\gamma}$. **151.** 12 см и 14 см. **152.** 1,6 см. **157.** $5\sqrt{6}$ см. **160.** *Указание.* Проекция точки M на плоскость ABC принадлежит прямой, проходящей через середины сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$. **161.** 12 см; 9,6 см. **162.** 12 см. **163.** $\sqrt{205}$ см. **164.** 8 см. **165.** $2\sqrt{337}$ см. **167.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $0{,}5a$. **168.** 24 см. **169.** 12 см. **170.** 2,4 см. **171.** $\sqrt{39}$ см. *Указание.* Воспользоваться тем, что угол между хордой и касательной, проведенной через конец хорды, равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду. **172.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. **173.** $4\sqrt{3}$ см. **175.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ см. *Указание.* Искомое расстояние равно высоте треугольника DCK, проведенной к стороне DK. **176.** $3\sqrt{2}$ см. *Указание.* Искомое расстояние равно высоте треугольника C_1BC. **177.** $\sqrt{2}$ см. *Указание.* Искомое расстояние равно расстоянию между прямой AB и плоскостью DB_1C. **185.** $(2\sqrt{2}; 2; -2)$. *Указание.* Спроектировать точку K на координатные оси. **186.** $\sqrt{161}$ см. **189.** (6; −4,5; 0,5). **190.** B (8; 0; −15). **192.** (−2; 13; 5), (−2; −7; 3), (8; −3; −1). **195.** $z = -7$ или $z = 3$. **196.** (12; 0; 0). **197.** A (0; 0; −10), B (−24; 20; 0), $AB = 2\sqrt{269}$. **199.** *Указание.* Сравнить длины отрезков AB, BC и AC. **211.** A_1 (−4; −0,5; 3), B_1 (2,5; −6; 5), C_1 (2; 8; −9). **212.** A (6; −1; 6,5), B (−2; 0; 8), C (0; 5; 4,5). *Указание.* Точки A, B и C делят отрезки KA_1, KB_1 и KC_1 соответственно в отношении 1 : 3, считая от точки K. **213.** $k = 0{,}5$; K_1 (1,5; −1; 2). *Указание.* $k = \frac{DT}{DQ}$. **214.** $BC = 6$ см, $A_1B_1 = 9$ см. **215.** $\frac{am}{m-n}$, $\frac{bm}{m-n}$, $\frac{cm}{m-n}$. *Указание.* $\Delta KMN \backsim \Delta KM_1N_1$. **218.** *Указание.* Прямые AB и FC параллельны. **219.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 60°. **220.** $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{5}}{3}$. *Указание.* Угол между прямыми AB и FD равен углу между прямыми

FD и DC. Из ΔFBC: $FC = 6\sqrt{5}$ см. Далее находим угол FDC из треугольника FDC. **223.** $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$. **226.** $6\sqrt{4+\sqrt{6}}$ см. **227.** 45°. **228.** 30° и 45°. **229.** 30°. **230.** $c \cos\alpha \operatorname{tg}\beta$. **231.** 45°. **232.** $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. **233.** $2\sqrt{7}$ см. **234.** $5\sqrt{3}$ см. **235.** 60°. **236.** 60°. **237.** $6\sqrt{2}$ см. **238.** $2\sqrt{21}$ см. **239.** 45°. **240.** $\arccos \frac{7}{8}$. **242.** $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$. **243.** 9 см. **244.** 30°. **245.** 6 см. *Указание* (рис. 133). MP — проекция OM на плоскость MAB, $MP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **246.** $\operatorname{arctg} 2\sqrt{7}$. *Указание.* Пусть $MO = a$ (рис. 134). Тогда $AO = a$, $BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Из ΔAOB: $AB = \frac{a\sqrt{21}}{3}$,

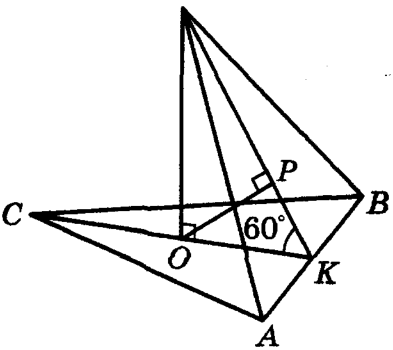


Рис. 133

$OK = \frac{2S_{AOB}}{AB}$, $OK = \frac{a}{2\sqrt{7}}$. Из ΔMOK: $\operatorname{tg}\angle MKO = 2\sqrt{7}$. **247.** $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$. **248.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}\right)$. **249.** $2\operatorname{arcctg}(\sin\beta)$. *Указание.* Искомый угол равен углу между высотами треугольников AKB и AKD, проведенными к их общей стороне AK. **253.** 30°. **254.** 8 см. **255.** 30°. **256.** 45°. **257.** 72 см^2. **264.** $\sqrt{5}$ или $-\sqrt{5}$. **265.** $\overline{n}$ (3; 3; −3) или $\overline{n}$ (−3; −3; 3). **267.** K (−3; 4; −0,5). **268.** $\overline{a}$ (−3,5; 10; −9), $\overline{b}$ (−0,5; −5; 16). **270.** $y = -5$, $|\overline{m} - \overline{n} - \overline{k}| = \sqrt{745}$. **273.** $\overline{EF} = 0,5(\overline{MB} - \overline{MA})$, $\overline{AF} = 0,5\overline{MB} + 0,5\overline{MC} - \overline{MA}$. **274.** $\overline{SB} = \overline{SA} + \overline{SC} - \overline{SD}$. **275.** $\overline{MN} = -0,2\overline{DA} - 0,4\overline{DB} + 0,6\overline{DC}$. **278.** $x = -8$, $y = 24$. **279.** $\overline{m}$ (−6; 8; −10). **282.** *Указание.* Проверить коллинеарность векторов $\overline{DE}$ и $\overline{EF}$. **286.** $\overline{n} = 2\overline{a} + 3\overline{b} + \overline{c}$. **293.** 1) $y < 2$; 2) $y = 2$; 3) $y > 2$. **294.** *Указание.* Найти углы между вектором $\overline{AB}$ и векторами $\overline{e}_1$ (1; 0; 0), $\overline{e}_2$ (0; 1; 0), $\overline{e}_3$ (0; 0; 1).

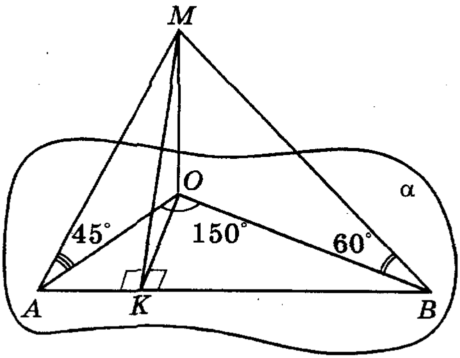


Рис. 134

296. $\bar{a}\,(-6;\ 15;\ 3)$. **299.** 2) $\sqrt{169 + 60\sqrt{2}}$. *Указание.* $|\,\bar{b} - 3\bar{a}\,| = \sqrt{(\bar{b} - 3\bar{a})^2} = \sqrt{\bar{b}^{\,2} - 6\bar{a}\cdot\bar{b} + 9\bar{a}^{\,2}}$. **300.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

301. $n = \frac{31}{69}$. **302.** *Указание.* Доказать, что $AD \perp AB$ и $AD \perp AC$. **303.** $x - 3y + 2z + 29 = 0$. *Указание.* $\overline{AC}\cdot\overline{MS} = 0$.

СОДЕРЖАНИЕ