Н. В. Горбачёв

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Москва
Издательство МЦНМО
2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ответы, указания, решения

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом сборнике собраны самые разные по сложности задачи. Их уровень сложности в какой-то степени характеризуется количеством баллов, которое указано в скобках после номера задачи. В сборнике есть как нетрудные задачи (5–15 баллов), которые часто решаются устно в одну строчку, так и задачи исследовательского типа (25–30 баллов) — своего рода «школьные курсовые», решение которых может занять несколько дней, недель и даже месяцев. Правда, при этом вполне возможна ситуация, когда кто-то легко решит задачу в 20 баллов, но очень долго промучается над задачей в 10 или 15 баллов. Внутри каждого раздела задачи располагаются по возрастанию сложности.

Иногда после номера задачи указывается также название и год проведения олимпиады, на которой давалась эта задача. При этом используются следующие сокращения:
МО Московская Олимпиада,
СПО Санкт-Петербургская олимпиада,
ТГ Турнир Городов,
СО Соросовская олимпиада,
ВО Всероссийская или Всесоюзная олимпиада (последние этапы),
МЕО Международная олимпиада.
Название страны (города) в скобках означает, что задача давалась на олимпиаде этой страны (города).

В конце сборника приведён список литературы, в котором указаны книги, использовавшиеся при его составлении.

Автор выражает искреннюю признательность А. В. Клименко и И. В. Межирову за подготовку книги к печати, конструктивную критику и исправление многочисленных опечаток и неточностей.

Условия

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

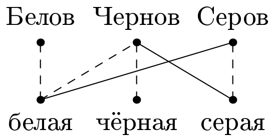
1. СЮЖЕТНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ (НАХОЖДЕНИЕ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ)

Эти задачи могут быть решены перебором вариантов, однако использование иллюстраций (в виде таблиц или рисунков) значительно ускоряет процесс решения. Рассмотрим следующую задачу.

Встретились три друга: *Белов, Серов, Чернов. На них были белая, серая и чёрная рубашки. Одетый в белую рубашку сказал Чернову*: «*Интересно, что цвет рубашки на каждом из нас не соответствует фамилии*». *Какой цвет рубашки у каждого*?

Решение 1. Напишем в первом столбце таблицы фамилии друзей, а в первой строке — цвета рубашек. По условию, на Белове не белая рубашка, на Серове — не серая, на Чернове — не чёрная. Поставим минусы в эти клетки таблицы. Из условия Чернов не в белой рубашке — ставим минус в соответствующую клетку.

Рубашка	Белов	Чернов	Серов
белая	−	−	+
чёрная		−	
серая		+	−



Значит, в белой рубашке Серов, Чернов — в серой, а Белов — в чёрной.

Решение 2. Пунктирная линия (на графе) между Б и б на рисунке означает, что Белов не в белой рубашке. Так получим четыре пунктирных линии, соответствующие минусам в таблице. Сплошная линия между С и б означает, что белая рубашка на Серове и т. д.

1.1.(15) На улице, встав в кружок, беседуют четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Надя. Девочка в зелёном платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом и Валей. Какое платье носит каждая из девочек?

1.2.(15) В очереди за билетами в кино стоят друзья: Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Известно, что Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега, Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Кто за кем стоит?

1.3.(5) Друзья Алёша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один из них ездит домой из школы на автобусе, другой — на трамвае, а третий — на троллейбусе. Однажды после уроков Алёша пошёл проводить своего друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадку!» Кто на чем ездит домой?

1.4.(5) На одном заводе работают три друга: слесарь, токарь и сварщик. Их фамилии: Борисов, Иванов и Семёнов. У слесаря нет ни братьев, ни сестёр, он самый младший из друзей. Семёнов старше токаря и женат на сестре Борисова. Назовите фамилии слесаря, токаря и сварщика.

1.5.(10) В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода, причём вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

1.6.(10) На даче поселились пятеро мальчиков: Андрюша, Боря, Володя, Гена и Дима. Все были разного возраста: одному был 1 год, другому — 2 года, остальным — 3, 4 и 5 лет. Володя был самым маленьким, Диме было столько лет, сколько Андрюше и Гене вместе. Сколько лет Боре? Возраст кого ещё из мальчиков можно определить?

1.7.(15) Имеются 6 человек: москвич, парижанин, киевлянин, туляк, одессит и римлянин. Имена их: А, Б, В, Г, Д и Е. Известно, что А и москвич — врачи, Д и парижанин — учителя, В и туляк — инженеры. Б и Е женаты, а туляк — холост. Римлянин старше А, одессит старше В. Б и москвич курят, а В и римлянин — нет. Определите, кто есть кто. Есть ли в задаче лишние условия?

В задачах на соответствие между тремя и более множествами используются несколько таблиц (в 1.8 — две) или рисунков.

1.8.(15) (Задача о Смите–Джонсоне–Робинсоне) Смит, Джонсон и Робинсон работают в одном поезде машинистом, кондуктором и кочегаром. В поезде едут три пассажира с теми же фамилиями. (Пассажира будем называть «Мистер» (М-р).) М-р Робинсон живет в Лос-Анджелесе, кондуктор — в Омахе.

М-р Джонсон давно позабыл всю алгебру, которой его учили в колледже. Однофамилец кондуктора живет в Чикаго. Кондуктор и один из пассажиров, известный специалист по математической физике, ходят в одну церковь. Смит всегда выигрывает у кочегара партию в бильярд. Как фамилия машиниста?

1.9.(15) Три подруги были в белом, красном и голубом платьях. Их туфли были тех же трех цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг.

1.10.(15) Три друга — Владимир, Игорь и Сергей преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Калуги. Владимир работает не в Рязани, Игорь — не в Туле, туляк преподает литературу, рязанец — не физику, Игорь — не математику. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из них?

1.11.(15) Среди офицеров Александрова, Борисова, Васильева и Григорьева — майор, капитан и два лейтенанта. Александров и один из лейтенантов — танкисты, Борисов и капитан — артиллеристы, Александров младше по званию,* чем Васильев. Определите род войск и воинское звание каждого из них.

Перебор всех вариантов и отбрасывание заведомо неудовлетворительных весьма эффективен в задачах, связанных с понятиями математической логики.

Приведем решение такой задачи.

Если Элен не должна выполнить поручение, его выполняет Ванда. Утверждения «Элен должна» и «Камилла не может» не могут быть истинными одновременно. Если Ванда выполняет поручение, то Элен должна, а Камилла может выполнить его. Правильно ли заключение: «Камилла всегда может выполнить поручение»?

Решение. Обозначим через A, B и C высказывания «Элен должна», «Ванда выполняет», «Камилла может выполнить поручение», а через A', B' и C' — их отрицания (например, A' — «Элен не должна выполнить поручение»).

Ясно, что всего вариантов 8 (ABC, $A'BC$, $AB'C$, и т. д.). Из первого условия следует, что комбинация A' и B' недопустима, поэтому отбрасываем варианты $A'B'C$ и $A'B'C'$. Из второго условия следует, что AC' недопустима, значит, отбрасываются варианты

*Майор старше по званию, чем капитан, а тот — старше лейтенанта.

$AB'C'$ и ABC'. Третье условие исключает $A'B$ и BC', что отбрасывает вариант $A'BC'$. Итак, остаются варианты ABC и $AB'C$. В обоих вариантах Камилла может, Элен должна, а вот вопрос о Ванде остается неразрешимым. Значит, заключение правильно.

1.12.(20) В доме живут A, его жена B и трое их детей C, D, E, при этом справедливы следующие утверждения:

1) Если A смотрит телевизор, то и B смотрит телевизор.
2) Хотя бы один из D и E смотрит телевизор.
3) Ровно один из B и C смотрит телевизор.
4) C и D либо оба смотрят, либо оба не смотрят телевизор.
5) Если E смотрит телевизор, то A и D тоже смотрят телевизор.

Кто смотрит и кто не смотрит телевизор?

1.13.(20) Пять девушек: Анна, Белла, Вера, Галина и Дарья — вышли в финал конкурса красоты. На вопрос Дарье: «Кто старше: Вы или Белла?», журналист получил следующий ответ: «Если я старше Анны, то я старше Беллы, либо моложе Веры. Если же я не старше Беллы, то я моложе Галины. Если я моложе Галины и старше Анны, то я не моложе Веры. Если я моложе Галины и не старше Беллы, то я старше Анны». Каков правильный ответ на вопрос журналиста?

1.14.(25) Шесть человек: А, Б, В, Г, Д, Е — кандидаты на посты президента, вице-президента и секретаря. При этом А не хочет входить в состав руководства, если Д не будет президентом, Б не хочет входить в состав руководства, если ему надо будет быть старшим над В, Б не хочет работать вместе с Е, В не хочет работать, если в состав руководства войдут Д и Е вместе, В не будет работать, если Е будет президентом или если Б будет секретарем, Г не будет работать с В или Д, если ему придётся подчиняться тому или другому, Д не хочет быть вице-президентом, Д не хочет быть секретарем, если в состав руководства войдет Г, Д не хочет работать вместе с А, если Е не войдет в состав руководства, Е согласен работать только в том случае, если президентом будет либо он, либо В. Кого кем назначить, чтобы учесть все пожелания?

1.15.(10) Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли он что-то лишнее?

1.16.(10) Предположим, что справедливы следующие утверждения: 1. «Среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами»; 2. «Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров».

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

1.17.(10) Каково наибольшее число утверждений из приводимых ниже, которые одновременно могут быть истинными: 1. «Джо ловкач», 2. «Джо не везет», 3. «Джо везет, но он не ловкач», 4. «Если Джо ловкач, то ему не везет», 5. «Джо является ловкачом тогда и только тогда, если ему везет», 6. «Либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно»?

1.18.(10) Львов, Михайлов и Николаев работают бухгалтером, кассиром и секретарем. Если Николаев — кассир, то Михайлов — секретарь, если Николаев — секретарь, то Михайлов — бухгалтер. Если Михайлов — не кассир, то и Львов — не кассир, если Львов — бухгалтер, то Николаев — секретарь. Кто кем работает?

1.19.(10) На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: А, Б, 4, 5. Какое наименьшее количество карточек и какие именно надо перевернуть, чтобы проверить, верно ли утверждение: «Если на одной стороне карточки написано чётное число, то на другой стороне карточки — гласная буква»?

1.20.(15) В одной урне лежат два белых шара, в другой — два чёрных, в третьей — один белый шар и один чёрный. На каждой урне висела табличка, указывающая её состав: «○○», «●●», «○●». Но какой-то шутник перевесил все таблички так, что теперь каждая из них указывает состав урны неверно. Можно вынуть шар из любой урны, не заглядывая в неё. Какое наименьшее число извлечений потребуется, чтобы определить состав всех трех урн? (После каждого извлечения шар опускается обратно.)

1.21.(20) В одной урне лежало три белых шара, в другой — два белых и один чёрный, в третьей — один белый и два чёрных, в четвёртой — три чёрных. Все тот же шутник перевесил таблички с составом урн так, что теперь каждая из них указывает состав урн неправильно. Четырём мудрецам предложили вынуть два шарика из трех и, имея шарики и неправильные таблички, определить цвет последнего шарика в урне. Трое из них были глухими, и они не слышали, что говорят остальные, а четвёртый был слепым. Первый мудрец сказал: «Я достал два чёрных шарика и могу определить цвет последнего шарика». Второй мудрец сказал: «Я вынул один белый и один чёрный и знаю, какой шарик остался в урне». Третий мудрец сказал: «Я вынул два белых шарика, но определить цвет последнего шарика невозможно». Четвёртый мудрец даже не видел таблички на своей урне. Однако он сказал:

«Мне не надо вынимать шарики. Я знаю, какие шарики лежат в моей урне. Я даже знаю цвета шариков, которые остались в урнах у каждого из моих товарищей». Определить как и к каким выводам пришёл слепой мудрец.

1.22.(15) Троим мудрецам завязывают глаза и говорят, что каждому из них на голову надели либо красный, либо зелёный колпак. Всего было два зелёных и три красных колпака. Затем глаза развязывают и просят выйти знающего цвет колпака на своей голове. Все три колпака были красные. Через несколько минут третий мудрец, наиболее сообразительный, вышел из комнаты. Как он установил цвет колпака?

1.23.(15) Царь дал каждому из двух мудрецов карточку так, чтобы другой её не видел, и сказал: «У каждого из Вас на карточке написано натуральное число, причём эти числа отличаются на единицу». Царь спросил у первого мудреца: «Какое у второго число?» — «Не знаю», — ответил тот. Царь спросил второго: «А ты не знаешь, какое число у первого?» — «И я не знаю», — ответил второй. И снова царь спросил первого, и снова тот ответил, что не знает. После этого он спросил второго, и тот сказал, какое число у первого. Какие числа были на карточках, и как рассуждал второй?

1.24.(20) Для полярной экспедиции из восьми претендентов: A, B, C, D, E, F, G и H надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанность биолога могут выполнять E и G, гидролога — B и F, синоптика — F и G, радиста — C и D, механика — C и H, врача — A и D. Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну обязанность. Кого и кем следует взять в экспедицию, если F не сможет ехать без B, D — без H и без C, C не может ехать одновременно с G, а A не может ехать вместе с B?

1.25.(15) На соревновании рыболовов Семёнов, Петров, Борисов и Левин договорились за судака давать 5 очков, за леща — 4, за окуня — 2, а за ерша — 1. Единственного судака поймал Семёнов. Всего было выловлено 3 окуня. Все рыбаки набрали 18 очков. Меньше всего очков получил Петров, хотя он и наловил больше всех. Петров и Борисов вместе набрали столько же очков, сколько и Семёнов и Львов вместе. У всех оказалось разное количество очков. Какой улов был у каждого?

1.26.(20) Мать собрала своих дочерей и сказала: «Каждая из вас может истратить на подарки по 20 долларов. Разделите свои деньги на 3 разные части так, чтобы в любой из них было целое число долларов. На подарки для дяди А. расходуйте наименьшую долю денег. На подарки для отца тратьте среднюю из частей. А самые дорогие подарки покупайте для тёти М. Вы должны разделить деньги каждая по-разному». Известно, что девушки израсходовали на подарки тёте М. вместе 52 доллара. Даша потратила на подарок для дяди А. меньше всех — 3 доллара. Сколько денег израсходовали девушки на подарки для отца?

1.27.(20) На соревнованиях по сумме баллов на I место вышел A, затем шли B, C, D и E. (За I место по одному виду давалось 5 баллов, за II — 4 балла и т. д.). A набрал 24 балла, C по четырём видам получил одинаковые баллы, E выиграл 4-й вид, а по 5-му занял III место. Какое место по 4-му виду занял B?

1.28.(25) «Мы с подружками по вечерам разгадывали ребусы. Соревнование продолжалось столько дней, сколько было участниц. Каждой засчитывалось одно очко за решение первого ребуса, два — за решение второго, и т. д. Мы решили 100 ребусов. Каждый вечер вместе мы набирали 100 очков. Каждая из нас в конце концов набрала по 100 очков, причём ни разу не было так, чтобы кто-нибудь из нас не решил за вечер ни одного ребуса. В первый вечер я решила 7 ребусов, а Света — 6. В последний вечер Лена решила только 3 ребуса», — писала Таня сестре. Достаточно ли сведений, чтобы выяснить, сколько ребусов решила Лена в первый вечер?

2. ИСТИННЫЕ И ЛОЖНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ. РЫЦАРИ, ЛЖЕЦЫ, ХИТРЕЦЫ

2.1.(5) Сидят мальчик и девочка. «Я — мальчик», — сказал первый ребёнок. «Я — девочка», — говорит второй ребёнок. Хотя бы один из них врёт. Кто мальчик, а кто девочка?

2.2.(5) 1. «У Вовы больше 1000 книг». 2. «Нет, книг у него меньше тысячи». 3. «Одна-то книга у него наверняка есть». Сколько книг может быть у Вовы, если только одно из этих утверждений истинно?

2.3.(5) До царя Гороха дошла молва, что кто-то из троих богатырей убил Змея Горыныча. Царь приказал всем троим явится ко двору и молвили они:

Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».

Добрыня Никитич: «Змея убил Алёша Попович».

Алёша Попович: «Я убил змея».

При этом известно, что один из них сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

2.4.(10) Три богини пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее.

Афродита: «Я самая прекрасная, Гера не самая прекрасная».

Афина: «Афродита не самая прекрасная. Я самая прекрасная».

Гера: «Я самая прекрасная».

Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения остальных богинь ложны. Исходя из этого, определите прекраснейшую из богинь.

2.5.(10) Ученицы: Мария, Нина, Ольга и Поля — участвовали в лыжных соревнованиях и заняли I–IV места. На вопрос, кто какое место занял, они дали 3 разных ответа: «Ольга заняла I место, Нина — II»; «Ольга — II, Поля — III»; «Мария — II, Поля — IV». Отвечавшие при этом признали, что одна часть каждого ответа верна, а другая — неверна. Какое место заняла каждая из учениц?

2.6.(10) В велогонках приняли участие 5 школьников. После гонок 5 болельщиков заявили:

«Коля занял I место, а Ваня — IV»;

«Серёжа занял II место, а Ваня — IV»;

«Серёжа занял II место, а Коля — III»;

«Толя занял I место, а Надя — II»;

«Надя заняла III место, а Толя — V».

Зная, что одно из показаний каждого болельщика верное, а другое — неверное, найти правильное распределение мест.

2.7.(10) Пятеро школьников из пяти различных городов приехали в Смоленск для участия в областной математической олимпиаде. «Откуда вы, ребята?» — спросили их. Вот что они ответили.

Андреев: «Я живу в Рославле, а Григорьев — в Гагарине».

Борисов: «В Гагарине живёт Васильев, я прибыл из Вязьмы».

Васильев: «Из Рославля приехал я, а Борисов — из Ельни».

Григорьев: «Я прибыл из Гагарина, а Данилов — из Ярцева».

Данилов: «Андреев приехал из Вязьмы, а я действительно живу в Ярцеве».

Когда удивились противоречивости их ответов, ребята объяснили: «Каждый высказал одно правильное утверждение, а другое — ложное. Но по нашим ответам вполне можно установить, откуда мы приехали». Откуда приехал каждый из школьников?

2.8.(5) Коля произнёс истинное утверждение. Миша повторил его дословно, и оно стало ложным. Что мог сказать Коля?

2.9.(5) Житель острова Крит говорит: «Все критяне — лжецы». Истинно или ложно это высказывание?

2.10.(5) Истинно или ложно высказывание «Нет правил без исключения»? (Данное высказывание также является правилом.)

2.11.(10) Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы рады бы отпустить тебя, но по нашему закону ты должен сказать какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы съедим тебя. Если оно окажется ложным, тебя съест наш ручной лев.» Что сказать Робинзону, чтобы людоеды его отпустили?

2.12.(20) Воробьёв, Синицын и Орлов — студенты, каждый из которых увлекается тремя предметами из четырёх: биологией, химией, историей и математикой.

Синицын: «Воробьёв — единственный из нас, кто любит историю. Орлов и я увлекаемся одними и теми же предметами. Мы все считаем биологию интересной наукой. Двое из нас любят и химию, и биологию».

Орлов: «Нам всем нравится математика. Синицын — историк. В одном из увлечений мы расходимся с Воробьёвым. Синицын и Воробьёв любят химию».

Воробьёв: «Есть только один предмет, который любим мы все. Математикой увлекаюсь я один. Каждый из нас любит разное сочетание предметов. Орлов ошибается, говоря, что Синицын и я увлекаемся химией».

Только два из высказываний каждого студента истинны. Какими предметами увлекается каждый?

2.13.(20) Вернувшись с рыбалки Борисов, Тимофеев и Васильев рассказали:

Борисов: «Тимофеев поймал только две рыбы. Васильев поймал на одну больше, чем Тимофеев. Мы с Васильевым поймали на 8 рыб больше, чем Тимофеев. Я наловил больше, чем Тимофеев и Васильев вместе».

Тимофеев: «Васильев не выудил ни одной рыбы. Борисов говорит неправду, что я поймал 2 рыбы. У меня и Борисова разный улов. Васильев и Борисов поймали вместе 13 штук».

Васильев: «Тимофеев — самый удачливый из нас. Я поймал на 3 рыбы больше, чем Борисов. Тимофеев врёт, что я ничего не поймал. У Борисова и Тимофеева одинаковый улов».

Каждый из рыболовов только два раза сказал правду. Сколько рыбы наловил каждый из них?

2.14.(15) Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был чёрный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо её цвет. Какого цвета и какой марки был автомобиль?

2.15.(20) Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. На следствии каждый из них сделал два заявления.

Браун: «Я не делал этого. Смит сделал это.»

Джонс: «Смит невиновен. Браун сделал это.»

Смит: «Я не делал этого. Джонс не делал этого.»

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой — дважды сказал правду, третий — один раз солгал, один раз сказал правду. Кто совершил преступление?

2.16.(20) «Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

— Говорит комиссар Мегрэ. Есть новости?

— Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжёт. Жуссье считает, что либо Этьен убийца, либо Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжёт. Затем звонила...

— Всё, спасибо. Этого достаточно. — Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжёт. Теперь он знал всё...»

Какой вывод сделал Мегрэ?

2.17.(5) Число x — натуральное. Из утверждений $2x > 70$, $x < 100$, $4x > 25$, $x > 10$ и $x > 5$ два верных и три неверных. Чему равно x?

2.18.(10) В одной тетради было написано 40 утверждений.

— В этой тетради ровно 1 неверное утверждение.

— В этой тетради ровно 2 неверных утверждения.

...

— В этой тетради ровно 40 неверных утверждений.

Какие из этих высказываний истинны?

2.19.(15) Найти натуральное число A, для которого из трёх утверждений: «$(A + 51)$ — точный квадрат», «последняя цифра числа A — единица» и «$(A - 38)$ — точный квадрат» — два верны, а третье неверно.

2.20.(20) a и b — целые положительные числа. Известно, что из следующих четырёх утверждений: «$a + 1$ делится на b», «a равно $2b + 5$», «$a + b$ делится на 3», «$a + 7b$ — простое число» — три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары a, b.

2.21.(20) Найти все такие двузначные числа A, для каждого из которых два из следующих четырёх утверждений верны, а два — неверны:

«A делится на 5», «A делится на 23», «$A + 7$ есть точный квадрат», «$A - 10$ есть точный квадрат».

2.22.(5) В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденной муке. На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, которые по каким-то причинам не были записаны. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трёх подсудимых и что только он дал правдивые показания. Кто украл муку?

2.23.(10) На суде каждый из троих подсудимых обвинял одного из двух других. Оказалось, что первый был единственным, кто говорил правду. Если бы каждый стал обвинять другого из них (но не себя), то второй был бы единственным, кто сказал правду. Кто виновен?

2.24.(20) У Императора украли перец. Как известно, те, кто крадёт перец, всегда лгут. Пресс-секретарь заявил, что знает, кто украл перец. Виновен ли он?

2.25.(20) На суде первый подсудимый обвинял второго. Когда логику сказали, что либо виновный был единственным, кто лгал, либо, что он был единственным, кто говорил правду, логик сразу же определил виновного. Кто виновен, если известно, что виновен только один?

2.26.(10) (СПО 83) Каждый из четырёх гномов — Беня, Веня, Женя и Сеня либо всегда говорит правду, либо врёт. Мы услышали разговор: Беня — Вене: «Ты врун». Женя — Бене: «Сам ты врун!» Сеня — Жене: «Оба они вруны. Да и ты тоже». Кто из них говорит правду?

2.27.(5) Школьники разделились на две команды: «серьёзных», отвечающих правильно, и «шутников», отвечающих неправильно. Учитель спросил у Иванова, серьёзен он или шутник. Не расслышав ответ Иванова, он спросил у Петрова и Сидорова: «Что ответил мне Иванов?» Петров сказал: «Иванов ответил, что он серьёзен». Сидоров сказал: «Иванов ответил, что он шутник». Кем были Петров и Сидоров?

2.28.(15) Лёва лжёт по понедельникам, вторникам и средам, а в остальные дни говорит правду. В какие дни он может заявить: а) «Я лгал вчера»; б) «Я буду лгать завтра»; в) «Я лгал вчера и буду лгать завтра»?

2.29.(20) В городе жили два чудака — Чук и Гек. Чук врал по понедельникам, вторникам и средам, Гек — по вторникам, четвергам и субботам. В остальные дни они говорили только правду. Однажды при встрече одному из них задали вопрос: «Как тебя зовут?»

— Чук, — ответил он.

— А какой сегодня день недели?

— Вчера было воскресенье.

Его приятель добавил: «А завтра будет пятница». У приятеля спросили: «Ты говоришь правду?»

— Я всегда говорю правду по средам», — ответил он.

Кто из них Чук, кто — Гек и в какой день недели состоялся этот разговор?

2.30.(15) (СПО 89) За круглым столом сидят k физиков и k химиков, причём некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Известно, что физиков-лжецов столько же, сколько химиков-лжецов. Все сидящие за столом утверждают, что их сосед справа химик. Докажите, что k чётно.

2.31.(15) После представления «Ревизора» состоялся диалог.

Бобчинский: «Это Вы, Пётр Иванович, первый сказали „Э!“. Вы сами так говорили».

Добчинский: «Нет, Пётр Иванович, я так не говорил. Это Вы сёмгу первый заказали. Вы и сказали „Э!“. А у меня зуб во рту со свистом».

Бобчинский: «Что я сёмгу первый заказал, это верно. И верно, что у Вас зуб со свистом. А всё-таки, это Вы первый сказали „Э!“».

Выясните, кто первым сказал „Э!“, если известно, что из девяти произнесённых в этом диалоге фраз-утверждений чётное число верных.

В следующих задачах участвуют люди, которые всегда говорят правду, и *упыри*, которые всегда лгут. Кроме того, каждый персонаж может либо находиться в здравом уме, тогда он считает истинными только истинные утверждения, либо оказаться сумасшедшим, тогда он считает истинными только ложные.

2.32.(10) А сказал: «Я — человек», В сказал: «Я — человек». А сказал: «Я — нормальный». Известно среди них ровно один упырь. Кто он?

2.33.(10) Предположим, что сумасшедший человек убеждён, что Император спит. Следует ли из этого, что он убеждён, что ты снишься Императору?

2.34.(15) А сказал: «Я — упырь», В сказал: «Я — человек». А сказал: «У нас двоих одинаковое психическое состояние». Известно, что один из них человек, другой упырь. Кто есть кто?

2.35.(15) А сказал: «Мы оба сумасшедшие». В ответил: «Ничего подобного». Известно, что один из них человек, другой — упырь. Кто он?

2.36.(15) Между А и Б произошёл следующий диалог. А: «Ты нормальный». В: «Ты сумасшедший». А: «Ты упырь». В: «Ты человек». Что Вы можете про них сказать?

2.37.(15) Придумайте утверждение, которое может произнести только сумасшедший упырь.

В приведённых ниже задачах действие происходит на острове, где живут *рыцари* (*правдолюбцы*), которые всегда говорят правду и *лжецы*, которые всегда лгут.

2.38.(10) Путешественник дважды задал рыцарю один и тот же вопрос и получил разные ответы. Приведите пример такого вопроса.

2.39.(10) На какой вопрос любой абориген (житель острова) даст одинаковый ответ?

2.40.(10) Какой вопрос нужно задать встречному аборигену, чтобы понять лжец он или рыцарь?

2.41.(10) Путник послал проводника спросить у аборигена, работающего в поле, кто он — рыцарь или лжец. Проводник вернулся и сказал: «Лжец». Кем был проводник — рыцарем или лжецом?

2.42.(10) Человек говорит: «Я лжец». Является ли он уроженцем острова рыцарей и лжецов?

2.43.(15) Какой вопрос нужно задать на острове аборигену, чтобы узнать, куда ведёт интересующая Вас дорога — в город лжецов или в город рыцарей?

2.44.(15) Лжецы бывают в городе рыцарей, а рыцари — в городе лжецов. Путешественник встретил аборигена в одном из этих городов. Как, задав один вопрос, выяснить у аборигена, где находится путешественник?

2.45.(15) Островитянин A в присутствии другого островитянина B говорит: «По крайней мере один из нас — лжец». Кто такой A и кто такой B?

2.46.(15) Встретились несколько аборигенов, и каждый заявил всем остальным: «Вы все — лжецы». Сколько рыцарей могло быть среди аборигенов?

2.47.(15) Какой вопрос Вы задали бы островитянину, чтобы узнать, живет ли у него дома ручной крокодил?

2.48.(15) Из трёх жителей K, M и P острова правдолюбцев и лжецов двое сказали: K: «Мы все лжецы». M: «Один из нас правдолюбец». Кто из жителей K, M и P правдолюбец и кто лжец?

2.49.(15) Из трёх жителей K, M и P острова правдолюбцев и лжецов двое говорят: K: «Мы все лжецы». M: «Ровно один из нас лжец». Кем является P — правдолюбцем или лжецом?

2.50.(20) Однажды в одной комнате находилось несколько жителей острова, на котором живут только правдолюбцы и лжецы. Трое из них сказали следующее: «Нас тут не больше трёх человек. Все мы лжецы». «Нас тут не больше четырёх человек. Не все мы лжецы». «Нас тут пятеро. Трое из нас лжецы». Сколько в комнате человек и сколько среди них лжецов?

2.51.(20) а) Среди четырёх островитян произошёл следующий разговор:

— По меньшей мере один из нас — лжец.

— По меньшей мере двое из нас — лжецы.

— По меньшей мере трое из нас — лжецы.

— Среди нас нет лжецов.

Кем является каждый из четверых — рыцарем или лжецом?

б) Решить задачу в случае n островитян.

2.52.(20) а) Каждый из 7 сидящих за круглым столом сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Кто за столом? б) Решить задачу в случае 6 островитян, n островитян. Указать все ответы.

2.53.(20) а) В комнате 10 аборигенов. Один из них сказал: «Здесь нет ни одного рыцаря»; второй: «Здесь не более одного рыцаря»; третий: «Здесь не более двух рыцарей», и т. д., десятый: «Здесь не более девяти рыцарей». Сколько в комнате рыцарей? б) Решить задачу в случае n аборигенов.

2.54.(20) (ВО 94) На совместной конференции партий лжецов и рыцарей в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в 4 ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. При каком наименьшем числе лжецов возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого.)

Далее в задачах среди аборигенов появляются *хитрецы* — те, кто иногда говорят правду, иногда — лгут.

2.55.(10) Из трёх жителей К, М и Р отдалённого района один является правдолюбцем, другой — лжецом, а третий — хитрецом. Они произнесли следующие утверждения — К: «Я хитрец». М: «Это правда». Р: «Я не хитрец». Кем в действительности являются К, М и Р?

2.56.(10) Три аборигена: А, В, С (рыцарь, лжец и хитрец) — на вопрос: «Кто В?» — ответили: А: «Лжец». В: «Я хитрец». С: «Рыцарь». Кто рыцарь и кто хитрец?

2.57.(15) Двое людей, К и М, о которых известно, что каждый из них либо правдолюбец, либо лжец, либо хитрец, утверждают: К: «М — правдолюбец». М: «К — не правдолюбец». Докажите, что по меньшей мере один из них говорит правду и является хитрецом.

2.58.(15) Из трёх человек, А, В и С, один — рыцарь, другой — лжец, а третий — хитрец. А сказал: «Я хитрец». В сказал: «А и С иногда говорят правду». С сказал: «В — хитрец». Кто из них лжец, кто — рыцарь, а кто — хитрец?

2.59.(20) Корреспондент хочет взять интервью у четырёх учёных, о которых он знает, что трое из них — правдолюбцы, а один — хитрец. Прежде чем брать интервью, корреспондент хотел бы узнать, кто из учёных хитрец. Как он может выяснить это за три вопроса?

2.60.(25) (МО 79) На собрании присутствовало k рыцарей и хитрецов, причём рыцарей было больше, чем хитрецов. Путешественник хочет выяснить про каждого, кто он. Для этого он может задать вопрос: «Кем является такой-то: рыцарем или хитрецом?» (В частности, может спросить, кем является сам отвечающий.) Доказать, что путешественник может установить это за: а) $4k$ вопросов; б) $2k-2$ вопроса; в) $2k-3$ вопроса.

2.61.(15) На острове Буяне жители деревни А — рыцари, деревни Б — лжецы, В — хитрецы с причудой: они говорят попеременно правду и ложь. Дежурному пожарной части, увидевшему огонь, позвонили:

— У нас пожар, приезжайте скорее!

— Где? — спросил дежурный.

— В деревне В — был ответ.

Куда выехала пожарная машина?

2.62.(20) На острове Буяне (см. задачу 2.61) путник встретился с островитянином в одной из трёх деревень. Как за 4 вопроса он может выяснить, с кем разговаривает и в какой деревне находится?

2.63.(20) (ВО 93) За круглым столом сидит компания из 30 человек. Каждый из них либо хитрец, либо рыцарь. Каждого спрашивают: «Кто ваш сосед справа — рыцарь или хитрец?» Известно, что количество хитрецов не превосходит F. При каком наибольшем значении F всегда можно, зная эти ответы, указать на рыцаря в этой компании?

2.64.(15) (МО 98) Некоторое количество аборигенов заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число аборигенов быть нечётным?

2.65.(15) (МО 98) Аборигены встали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, рыцарь тот или лжец. На основании этих сообщений путешественник однозначно определил, какую долю от всех жителей селения составляют рыцари. Определите и вы, чему она равна.

3. ПЕРЕЛИВАНИЕ

Задача Пуассона. *Некто имеет* 12 *пинт вина* (*пинта — старинная мера жидкости, равная примерно* 0,568 *л*) *и хочет подарить его половину. Однако у него нет сосуда ёмкостью* 6 *пинт, а есть два сосуда*: 8-*пинтовый и* 5-*пинтовый. Спрашивается, каким образом отлить* 6 *пинт вина в* 8-*пинтовый сосуд*?

Прежде чем решать задачу Пуассона, решим несколько более простых задач.

Имеется два сосуда ёмкостью 3 *л и* 5 *л. Нужно, пользуясь этими сосудами, получить* 1 *л воды. В нашем распоряжении водопроводный кран и раковина, куда можно сливать воду.*

Решение. Решение задачи можно записать в виде таблицы (см. рис.). Вначале оба сосуда пусты (первый столбец). Наполним водой трёхлитровый сосуд, затем перельём из него воду в другой сосуд (третий столбец). Вновь наполним первый сосуд (четвёртый столбец) и будем переливать из него воду во второй сосуд, пока тот не наполнится. Тогда в первом сосуде останется 1 л воды.

3 л	0	3	0	3	1
5 л	0	0	3	3	5

3.1.(10) В условиях предыдущей задачи получить а) 2 л, б) 4 л воды.

3.2.(10) Можно ли, пользуясь девятилитровым и двенадцатилитровым сосудами, отмерить 4 л воды?

3.3.(15) Как, пользуясь сосудами в 7 л и 12 л, получить 1 л воды?

3.4.(15) Решите задачу Пуассона, совершив наименьшее число переливаний.

3.5.(10) Как, имея лишь два сосуда ёмкостью 5 и 7 л, налить из крана 6 л воды?

3.6.(10) В первый сосуд входит 9 л, во второй — 5 л, а в третий — 3 л. Первый сосуд наполнен водой, а остальные два пусты. Как с помощью этих сосудов отмерить 1 л воды? Как отмерить 4 л воды?

3.7.(15) Каким образом можно принести из реки ровно 6 л воды, если имеется только два ведра: одно — ёмкостью 4 л, другое — 9 л?

3.8.(15) Бидон ёмкостью 10 л наполнен молоком. Требуется перелить из этого бидона 5 л в семилитровый бидон, используя при этом ещё один бидон, вмещающий 3 л. Как это сделать?

3.9.(10) В бочке находится не менее 13 вёдер бензина. Как отлить из неё 8 вёдер с помощью 9-ведёрной и 5-ведёрной бочек?

3.10.(10) 12-ведёрная бочка наполнена керосином. Как разлить его на две равные части, пользуясь пятиведёрной и восьмиведёрной бочками?

3.11.(15) В бочке не менее 10 л бензина. Как отлить из неё 6 л с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

3.12.(20) В бочке 18 л бензина. Имеется два ведра по 7 л, в которые нужно налить по 6 л бензина и черпак объёмом 4 л. Как можно осуществить розлив?

3.13.(15) Имеются три бочонка вместимостью 6 вёдер, 3 ведра и 7 вёдер. В первом и третьем содержится соответственно 4 и 6 вёдер кваса. Требуется, пользуясь только этими тремя бочонками, разделить квас поровну на две части.

3.14.(15) В трёх кучках находится 22, 14 и 12 орехов. Требуется путём трёх перекладываний уравнять число орехов в каждой кучке, соблюдая при этом условие: из любой кучки разрешается перекладывать в другую лишь столько орехов, сколько их в этой второй кучке.

3.15.(15) В трёх кучках лежит 11, 7, 6 спичек соответственно. Разрешается перекладывать из одной кучки в другую столько спичек, сколько там уже есть. Как за три операции сравнять число спичек во всех кучках?

3.16.(15) Есть двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Яйцо должно вариться 15 минут. Как сварить яйцо, переворачивая часы минимальное число раз?

3.17.(10) В один стакан налито 5 ложек чая, а в другой — 5 ложек молока. Ложку молока перелили из второго стакана в первый, затем тщательно перемешали и ложку чая с молоком перелили обратно во второй стакан. Чего оказалось больше: чая в во втором стакане или молока в первом? Как изменится ответ, если такое переливание производили 10 раз? Если перемешивали не очень тщательно? Если чая в первом стакане немного больше, чем молока во втором?

3.18.(10) От полного стакана кофе я отпил половину и долил столько же молока. Затем я отпил третью часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Наконец, я отпил шестую часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Только после этого я выпил всё до конца. Чего в итоге я больше выпил: молока или кофе?

3.19.(15) В первый стакан налит кофе, а во второй — такое же количество молока. Разрешается переливать из одного стакана в другой любое количество жидкости. Можно ли с помощью нескольких таких переливаний добиться того, чтобы в первом стакане молока стало больше, чем кофе?

3.20.(20) В кастрюле налито 10 л сиропа. Из неё отливают 1 л сиропа и добавляют 1 л воды. Затем отливают 1 л смеси и снова доливают 1 л воды. Может ли сироп в результате нескольких таких операций оказаться разбавленным ровно в два раза?

3.21.(15) Даны две бутылки с растворами разной концентрации. В одной бутылке 0,5 л раствора, в другой — 0,3 л. Два одинаковых стакана налили доверху (каждый из своей бутылки), после чего влили обратно, поменяв бутылки местами. В результате в обеих бутылках получился раствор одинаковой концентрации. Найти объём стаканчиков.

3.22.(15) В школьном кабинете химии имеются три банки с серной кислотой ёмкостью 1, 2 и 3 литра. Концентрация кислоты в этих банках неизвестна (скорее всего, она различна, но в точности этого никто не знает). Требуется перелить кислоту в три пустые банки такой же ёмкости, но так, чтобы концентрация кислоты во всех банках была одинакова. Как это сделать, если никаких других ёмкостей нет?

3.23.(20) Имеются два сосуда ёмкостью 1 л каждый, один из них наполнен кофе, другой пустой. Кофе последовательно переливают из первого сосуда во второй, из второго — в первый, из первого — снова во второй и т. д., причём доля отливаемого кофе составляет $1/2$, $1/3$, $1/4$ и т. д. от количества кофе во сосуде, из которого оно отливается. Сколько кофе будет в каждом из сосудов после 125 переливаний?

3.24.(20) В два сосуда разлили 1 л воды. Из первого сосуда переливают половину воды во второй, затем из второго — половину оказавшейся в нем воды в первый, затем из первого — половину во второй и т. д. Докажите, что независимо от того сколько воды было сначала в каждом из сосудов, после 100 переливаний в них будет $^2/_3$ л и $^1/_3$ л с точностью до 1 миллилитра.

3.25.(20) (МО 59) Даны две бочки бесконечной ёмкости. Можно ли, пользуясь ковшами ёмкостью $\left(2-\sqrt{2}\right)$ л и $\left(\sqrt{2}\right)$ л, перелить из одной в другую ровно 1 л?

3.26.(20) (МО 64) В n стаканов достаточно большой вместимости налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких n можно за конечное число операций слить всю воду в один стакан?

3.27.(20) (ВО 71) В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого. Докажите, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды велики: каждый может вместить всю имеющуюся воду.)

3.28.(20) (ВО 77) За круглым столом сидят семь гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает всё своё молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и так далее. После того, как последний, седьмой гном разлил всем остальным своё молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока было 3 л. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

3.29.(20) (ВО 86) Молоко разлито по 30 стаканам. Мальчик пытается добиться, чтобы во всех стаканах молока стало поровну. Для этого он берет какие-нибудь два стакана и отливает молоко из одного в другой до тех пор, пока количество молока в них не уравняется. Можно ли разлить молоко по стаканам так, чтобы мальчик не смог добиться своей цели, сколь бы долго он ни занимался переливанием?

4. ВЗВЕШИВАНИЕ

4.1. Есть n одинаковых монет, из которых одна — фальшивая (более лёгкая). Как с помощью чашечных весов без гирь выделить фальшивую монету за наименьшее число взвешиваний, если а) (5) $n = 3$; б) (10) $n = 9$; в) (10) $n = 27$; г) (15) n — произвольное число?

4.2.(10) Среди четырёх монет имеется одна фальшивая, отличающаяся от всех остальных по весу. Как выделить её с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь? Можно ли при этом выяснить, легче ли она, чем остальные монеты?

4.3. а) (20) Среди 12 монет имеется одна фальшивая, отличная по весу от настоящих, причём неизвестно, легче она или тяжелее. Выделить тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь фальшивую монету и выяснить, легче она или тяжелее настоящей. б) (25) Пусть монет n. Найти наименьшее число взвешиваний.

4.4.(15) Докажите, что если неизвестно, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета, то для её выделения из 13 монет недостаточно трёх взвешиваний.

4.5.(20) Имеется 13 монет, среди которых одна фальшивая, отличающаяся по весу от остальных. Пусть у нас есть ещё одна монета, причём настоящая. Покажите, что при помощи трёх взвешиваний можно выделить фальшивую монету. Можно ли при этом выяснить, легче она или тяжелее настоящей монеты?

4.6.(15) Среди семи монет имеются две фальшивые (более лёгкие) монеты. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь понадобится, чтобы выделить обе фальшивые монеты?

4.7.(20) Перед Вами лежат шесть монет, две из которых фальшивые (фальшивая монета тяжелее настоящей на 0,1 г). Кроме того, у Вас есть чашечные весы без гирь. Весы эти, правда, не очень чувствительные и реагируют на разность грузов не менее 0,2 г. Попробуйте за четыре взвешивания найти обе фальшивые монеты.

4.8.(15) Имеется 6 одинаковых по виду монет, четыре из них настоящие, а две — фальшивые: обе легче настоящих, но их масса различна. За три взвешивания на чашечных весах без гирь найдите обе фальшивые монеты.

4.9.(15) Имеется 6 одинаковых по виду монет, четыре из них настоящие, по 4 г каждая, а две — фальшивые: массой 5 г и 3 г. За четыре взвешивания на чашечных весах без гирь найдите обе фальшивые монеты.

4.10.(20) Есть 6 монет, из которых три фальшивые, имеющие вес меньший, чем настоящие. Монеты разложены в три столбика одинакового веса. Двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь выделить все три фальшивые монеты.

4.11.(20) Имеется 10 мешков монет. В 9 мешках монеты настоящие (весят по 10 г), а в одном мешке все монеты фальшивые (весят по 11 г). Как одним взвешиванием на весах со стрелкой определить, в каком мешке лежат фальшивые монеты?

4.12.(20) Есть 10 мешков монет. В некоторых мешках монеты — настоящие (вес — 10 г), а в остальных — фальшивые (вес — 11 г). Можете ли вы снова лишь одним взвешиванием определить, в каких мешках фальшивые монеты?

4.13.(20) Из 21 монеты 10 настоящих и 11 фальшивых, причём каждая фальшивая на 1 г легче каждой настоящей. Взяли одну из монет. Как за одно взвешивание на весах со стрелкой определить фальшивая ли монета?

4.14.(20) (МО 65) В 10 мешках лежат настоящие монеты, а в 11-м — фальшивые. Все фальшивые монеты весят одинаково и отличаются по массе от настоящих. Имеются точные весы с чашками и стрелкой, но без гирь, позволяющие узнать, на какой чашке груз имеет большую массу и насколько. С помощью двух взвешиваний определите, в каком мешке фальшивые монеты.

4.15. а) (15) Среди 18 монет одна фальшивая, причём фальшивая монета отличается по массе от настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета? (Находить фальшивую монету не нужно.) б) (20) Пусть монет n ($n > 2$). Найти наименьшее число взвешиваний.

4.16.(20) (МО 72) Имеется 1000 монет, среди них не более двух фальшивых (быть может, ни одной), причём фальшивые имеют одинаковую массу, отличную от массы настоящих. Можно ли за три взвешивания на весах без гирь определить, есть ли фальшивые и легче они или тяжелее настоящих? (Число фальшивых монет определять не надо.)

4.17.(25) (ВО 73) На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперимент обнаружил, что монеты №№1–7 фальшивые, а №№8–14 — настоящие. Суд же знает только то, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково, и что фальшивые монеты легче настоящих. У эксперта есть только чашечные весы без гирь.

а) Эксперт хочет доказать суду, что монеты №№1–7 — фальшивые. Как он может это сделать, используя только три взвешивания? б) Покажите, что с помощью трёх взвешиваний он может даже доказать, что монеты №№1–7 — фальшивые, а №№8–14 — настоящие.

4.18.(10) Как взвесить груз на чашечных весах с гирями, если гири правильные, а весы неправильные?

4.19. а) (10) Есть четыре камня, разной массы. За какое наименьшее число взвешиваний на весах без гирь можно найти самый тяжёлый и лёгкий камни? б) (10) Решить задачу для 6 камней. в) (20) Решить задачу для $2n$ камней.

4.20.(15) Есть 64 камня разной массы. За 68 взвешиваний найти два самых тяжёлых камня.

4.21.(15) Имеется три пакета разной массы и чашечные весы без гирь. Всегда ли можно двумя взвешиваниями расположить пакеты в порядке возрастания?

4.22.(15) Имеется 4 пакета разной массы и правильные чашечные весы без гирь. Как за 5 взвешиваний расположить пакеты в порядке возрастания массы?

4.23.(20) Имеется 5 пакетов разной массы и весы без гирь. Как за 7 взвешиваний расположить пакеты в порядке возрастания?

Общая задача о наименьшем числе взвешиваний, за которые можно упорядочить n пакетов, далеко не решена и вызывает интерес у специалистов по программированию. Есть несколько алгоритмов, которые являются оптимальными для частных случаев.

4.24.(20) (МО 76) Даны четыре шара массой 101 г, 102 г, 103 г и 105 г, а также весы со стрелкой, на которых можно взвесить любой груз. Сделав два взвешивания, определить массу каждого шара.

4.25.(20) (МО 81) Имеется 5 гирь массой 1000 г, 1001 г, 1002 г, 1004 г и 1007 г без надписей. Имеются весы со стрелкой, показывающие массу в граммах. Как с помощью трёх взвешиваний определить гирю массой 1000 г?

4.26.(20) (МО 66) Из 10 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). За наименьшее число проверок выделить оба радиоактивных шара.

4.27.(20) (МО 95) Из 9 внешне неразличимых монет одна фальшивая — легче остальных. Имеются два экземпляра внешне неразличимых чашечных весов, из которых одни заедают (они чувствуют разницу лишь в том случае, если на одну чашку положить больше монет, чем на другую). За сколько взвешиваний можно наверняка выделить фальшивую монету?

4.28.(20) (МО 97) Банкир узнал, что среди одинаковых на вид монет одна — фальшивая (более лёгкая). Он попросил эксперта определить эту монету с помощью чашечных весов без гирь, причём потребовал, чтобы каждая монета участвовала во взвешиваниях не более двух раз. Какое наибольшее число монет может быть у банкира, чтобы эксперт заведомо смог выделить фальшивую за n взвешиваний?

4.29.(20) (ВО 87) Среди 99 внешне одинаковых монет имеется несколько фальшивых. Каждая фальшивая монета отличается по весу от настоящей на нечётное число граммов. Суммарный вес 99 данных монет равен суммарному весу 99 настоящих монет. Имеются двухчашечные весы со стрелкой, показывающей разницу в граммах весов грузов, положенных на чаши. Докажите, что, осуществив только одно взвешивание на таких весах, про любую заданную монету можно узнать, является она фальшивой или нет.

4.30.(20) (МО 85) Есть три одинаковые фляги, две из которых пусты, а в третьей налит 1 л молока, цистерна молока и весы без гирь, на которые можно ставить фляги. Как отлить в одну флягу 85 л молока, сделав не более 8 взвешиваний? (Во флягу вмещается больше 85 л. При взвешивании на одну чашку весов ставится фляга с молоком, на другую — пустая и в пустую доливается молоко до равновесия.)

4.31.(10) Найти массы четырёх гирь так, чтобы ими можно было отмерить на чашечных весах любое целое число килограммов от 1 до 40, если гири можно класть на обе чашки.

4.32.(15) Имеется некоторое количество гирь. Вес любой гири не превосходит 500 г. Известно, что гири нельзя разбить на две группы так, чтобы вес каждой группы превосходил 500 г. Найти наибольший возможный общий вес гирь.

4.33.(20) (ВО 87) Известно, что с помощью набора из шести гирь можно уравновесить 63 груза, веса которых являются последовательными натуральными числами. Найдите все такие наборы.

4.34.(15) Из набора гирь массой 1 г, 2 г, ..., 101 г удалили гирю 19 г. Можно ли остальные разложить по 50 штук на весы так, чтобы весы уравновесились?

4.35.(15) Имеется 201 гиря, веса которых (в граммах) — последовательные натуральные числа от 1 до 201. Назовем гирю хорошей, если после её удаления оставшиеся 200 гирь можно разделить на две группы, равные по весу и по количеству гирь. Докажите, что а) гиря 101 г хорошая; б) гиря 199 г хорошая.

4.36.(15) Из набора гирь массой 1 г, ..., 30 г убрали 10 гирь с общей массой, равной трети общей массы всех гирь. Можно ли оставшиеся гири разложить на двух чашках весов по 10 штук на каждой так, чтобы весы оказались в равновесии?

4.37.(20) Набор состоит из гирь с целочисленными массами. Известно, что если из набора убрать любую из гирь, то остальные можно разложить по двум чашкам весов так, что весы будут в равновесии. Доказать, что в наборе нечётное число гирь.

4.38.(15) (МО 47) Из 20 металлических кубиков, одинаковых по внешнему виду, часть — алюминиевые, а остальные — дюралевые (более тяжёлые). Как при помощи не более чем 11 взвешиваний на чашечных весах без гирь определить число дюралевых кубиков?

4.39.(20) (МО 49) Есть 13 гирь, масса каждой из которых равна целому числу граммов. Любые 12 из них можно так разложить на две чаши весов, по 6 на каждую, что будет равновесие. Докажите, что все гири имеют одну и ту же массу.

4.40.(20) (МО 50) Имеется n гирь с весами 1 г, 2 г, ..., n г. Их надо разложить на три равные по весу кучки. При каких n это удастся сделать?

4.41.(20) (МО 66) Из набора гирь массой 1 г, 2 г, ..., 26 г выбрать 6 гирь так, чтобы из них нельзя было составить два набора равных масс. Доказать, что нельзя выбрать 7 гирь, обладающих тем же свойством.

4.42.(20) (МО 70) Каждые две гири набора из 100 гирь отличаются по массе не более, чем на 20 г. Доказать, что эти гири можно разложить на две чашки весов, по 50 на каждую, так, чтобы одна чашка весов была легче другой не более, чем на 20 г.

4.43.(20) (МО 70) На каждую чашку весов положили по k гирь, занумерованных числами от 1 до k, причём левая чашка перевесила. Оказалось, что если поменять местами любые две гири с одинаковыми номерами, то либо правая чашка перевесит, либо чашки будут в равновесии. При каких k это возможно?

4.44.(20) (МО 74) Имеется несколько гирь, масса каждой из которых равна целому числу. Известно, что их можно разбить на k равных по массе групп. Докажите, что не менее чем k способами можно убрать одну гирю так, чтобы оставшиеся гири нельзя было разбить на k равных по массе групп.

4.45.(20) (МО 96) По кругу расставлены 10 железных гирь. Между каждыми гирями находится бронзовый шарик, масса которого равна разности масс соседних с ним гирь. Докажите, что шарики можно разложить на две чашки весов так, чтобы весы уравновесились.

4.46.(20) (МО 97) На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились бы на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

4.47.(20) (ТГ 98) Имеется 19 гирек весом 1 г, 2 г, …, 19 г. Девять из них — железные, девять — бронзовые и одна — золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.

4.48.(20) Дан ящик сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Как быстрее отвесить 1 кг сахара? (Указать систему уравновешиваний.)

4.49.(20) (ВО 84) Есть $n+1$ гиря общим весом $2n$ и весы с двумя чашками, находящиеся в равновесии. Вес каждой из гирь выражается натуральным числом. Гири по очереди кладут на чашки весов: сначала самую тяжёлую (или одну из самых тяжёлых), затем самую тяжёлую из оставшихся и т. д. При этом каждую следующую гирю кладут на ту чашку весов, которая в данный момент легче, а если весы находятся в равновесии, то на любую из чашек. Докажите, что после того, как на весах окажутся все гири, весы будут находиться в равновесии.

4.50.(20) (ВО 85) Можно ли разделить 1985 гирь массами 1 г, 2 г, …, 1985 г на пять групп так, чтобы и число гирь, и их суммарная масса были бы одинаковы во всех группах?

4.51.(20) (ВО 86) Имеются гири массой 1^2 г, 2^2 г, …, 1000^2 г. Докажите, что их можно разделить на две группы одинаковой массы, по 500 гирь в каждой группе.

4.52.(20) (ВО 92) Рассматриваются наборы из n различных гирек. Масса каждой гирьки — целое число граммов, не превосходящее 21. При каком наименьшем n в любом наборе найдутся две пары гирек, уравновешивающие друг друга?

4.53.(15) (ВО 97) Есть 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в 1,5 раза.

4.54.(20) (ВО 00) Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A, B и C и спросить, верно ли, что $m(A) < m(B) < m(C)$. (Через $m(x)$ обозначена масса гири m, при этом даётся ответ «Да» или «Нет».) Можно ли за девять вопросов гарантировано узнать, в каком порядке идут веса гирь?

4.55.(25) (ВО 77) На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется любая гиря и добавляется на ту или другую чашку весов).

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее. Этой последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв L и R: $LRLRLR\ldots$. Здесь буква L обозначает, что перевесила левая чашка, а буква R означает, что перевесила правая чашка.

б) Докажите, что для любого слова длины n из букв L и R можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний.

5. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Приведём шутливую формулировку этого принципа:

Принцип Дирихле. Если по n клеткам рассадить больше n кроликов, то найдётся клетка, в которой сидит больше одного кролика.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть в каждой клетке сидит не более одного кролика, тогда в n клетках сидит не более n кроликов, что противоречит условию.

Эти задачи решаются двумя способами: либо явно предъявляются в конкретной задаче «кролики» и «клетки», либо доказательство идёт от противного, аналогично доказательству принципа Дирихле.

5.1.(5) В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся по меньшей мере двое, у которых фамилии начинаются с одной и той же буквы.

5.2.(5) В бору 600 000 сосен, и на каждой из них не более 500 000 игл. Докажите, что в этом бору найдутся две сосны с одинаковым количеством игл.

5.3.(5) В Москве живет более 8 000 000 человек. Доказать, что у каких-то двоих из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос.

5.4.(5) В школе 20 классов. В ближайшем доме живет 23 ученика этой школы. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два одноклассника?

5.5.(10) При каком наименьшем количестве учеников школы среди них найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

Верен и более общий принцип:

Обобщённый принцип Дирихле. Если в n клетках сидит не менее $kn+1$ кроликов, то найдётся клетка, в которой сидит более k кроликов.

Его доказательство аналогично доказательству принципа Дирихле.

5.6.(10) Алёша в среду, четверг, пятницу съел всего 7 конфет. Докажите, что хотя бы в один день он съел более 2 конфет.

5.7.(10) Машинистка, перепечатывая текст в 25 страниц, сделала 102 ошибки. Докажите, что найдётся страница, на которой сделано более четырёх ошибок.

5.8.(10) У человека на голове не более 1 000 000 волос, в Москве более 8 000 000 жителей. Докажите, что найдутся 8 москвичей с одинаковым числом волос.

5.9.(10) В ящике лежат 105 яблок четырёх сортов. Докажите, что среди них найдутся по меньшей мере 27 яблок какого-либо одного сорта.

5.10.(10) Каждому из 35 ребят дали решить по выбору одну из 17 задач. Верно ли, что среди них всегда найдутся трое, которые решали одну и ту же задачу?

5.11.(10) В школе 30 классов и 995 учеников. Докажите, что в ней имеется класс, в котором не менее 34 учеников.

5.12.(10) В поход пошли ученики трёх классов. Руководитель не знает, кто в каком классе учится. Какое наименьшее число дежурных он должен назначить для того, чтобы среди них обязательно оказалось не менее трёх человек из одного класса?

Иногда при доказательстве используют слова «в худшем случае». («В худшем случае в каждой клетке сидит...».)

5.13. В непрозрачном мешке лежат 4 красных и 2 зелёных шара. Какое наименьшее число шаров надо вытащить, чтобы среди них оказался: а) (5) 1 красный шар; б) (5) 1 зелёный шар; в) (5) 1 красный и 1 зелёный шар; г) (5) 2 шара одного цвета.

5.14.(10) В ящике лежит 100 разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 12 жёлтых, 20 синих, 10 белых и 10 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них обязательно оказалось 15 шариков одного цвета?

5.15.(15) Докажите, что из 82 выкрашенных в определённый цвет кубиков, можно выбрать или 10 кубиков разных цветов, или 10 кубиков одного цвета.

Принцип Дирихле связан с понятием «более» (кроликов больше, чем клеток). Верно близкое утверждение, связанное с понятием «менее».

Теорема. Если в n клетках сидит менее $n(n-1)/2$ кроликов, то найдутся две клетки, в которых сидит одинаковое количество кроликов (может быть, ни одного).

Доказательство. Пусть это не так. Расположим клетки в порядке увеличения числа кроликов. Тогда в первой клетке число кроликов не меньше 0, во второй — больше, чем в первой, т. е. не менее 1, в третьей — больше, чем во второй, т. е. по меньшей мере 2, и т. д. Но тогда всего кроликов по меньшей мере $0+1+\ldots+(n-1)=n(n-1)/2$. Противоречие.

5.16.(10) В районе 7 средних школ. На район выделили 20 компьютеров. Докажите, что при любом распределении их между школами найдутся две школы, которые получат одинаковое число компьютеров (может быть, ни одного).

5.17.(10) 34 пассажира едут в автобусе, который делает всего 9 остановок, причём новые пассажиры ни на одной из них не входят. Докажите, что найдутся две остановки, на которых выйдет одинаковое число пассажиров (возможно, ни одного).

5.18.(10) Можно ли 60 монет разложить по 12 кошелькам так, чтобы любые два из них содержали разное количество монет (может быть, ни одной)?

5.19.(10) На 10 крышах в марте, почуяв весну, расположились 50 кошек, на каждой по меньшей мере одна. Верно ли, что обязательно найдутся две крыши, на которых окажется поровну кошек?

5.20.(15) Какому минимальному числу школьников можно раздать 200 конфет так, чтобы среди них при любом распределении конфет нашлись двое, которым конфет достанется поровну (возможно, ни одной)?

5.21.(15) 100 книг распределили между несколькими школьниками. При каком максимальном числе школьников это можно сделать таким образом, что все они получат разное количество книг?

5.22.(15) 15 мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое количество орехов.

5.1. Принцип Дирихле и делимость целых чисел

Использование принципа Дирихле основано на следующей задаче:

5.23.(10) Среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

5.24.(10) Среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два числа таких, что их разность делится на n.

5.25.(10) Доказать, что из любых трёх целых чисел можно найти два, сумма которых чётна.

5.26.(15) Доказать, что из совокупности любых $2^{n+1}-1$ целых чисел можно найти 2^n чисел, сумма которых делится на 2^n.

5.27.(10) Даны 12 различных двузначных натуральных чисел. Доказать, что из них можно выбрать 2 числа, разность которых — двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.

5.28.(15) Доказать, что найдётся число вида $11\ldots10\ldots00$, делящееся на 1998.

5.29.(15) Доказать, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 1997.

5.30.(15) Доказать, что существует натуральное число, последние четыре цифры которого 1996 и которое делится на 1997.

5.31.(15) Можно ли найти такие две (различные) степени числа 4, у которых а) последняя цифра одинакова? б) две последние цифры одинаковы? в) три последние цифры одинаковы?

5.32.(20) Можно ли найти такую натуральную степень числа 3, которая оканчивается на $\ldots0001$?

5.33.(10) Верно ли, что среди любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

5.34. Имеются n целых чисел. Доказать, что среди них всегда найдутся несколько (или, быть может, одно), сумма которых делится на n, если а) (10) $n = 3$; б) (15) (МО 49) $n = 100$; в) (15) (Англия 70) n — любое.

5.35.(20) Докажите, что если целые числа m и n взаимно просты, то найдётся такое натуральное k, что $m^k - 1$ делится на n.

5.36.(20) Докажите, что среди любых 9 последовательных натуральных чисел найдётся по крайней мере одно, взаимно простое с каждым из остальных.

5.37.(20) (МО 74) Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Доказать, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.

5.38.(20) (ВО 61) Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел найдётся такое, сумма цифр которого делится на 11.

5.2. Принцип Дирихле и дополнительные соображения

Следующие задачи отличаются тем, что в них либо количество кроликов, либо количество клеток, либо и то, и другое явно не дано, и их надо посчитать из условия задачи (иногда с помощью дополнительных соображений). В более сложных задачах клетки (кроликов) необходимо предварительно создать («сконструировать»).

В бригаде 7 *человек и их суммарный возраст* — 332 *года. Доказать, что из них можно выбрать* 3 *человека, сумма возрастов которых не меньше* 142 *лет.*

Решение 1. Выберем трёх старших членов бригады. Если им вместе 142 года, то хотя бы одному из них больше 47 лет. Если самому младшему из троих больше 47 лет, то им троим больше 142 лет. Пусть самому младшему из троих 47 лет или меньше, и им троим вместе менее 142 лет. Тогда на долю остальных четверых приходится более $320 - 142 = 190$ лет. Разделим 190 на 4 с остатком: $190 = 4 \cdot 47 + 2$. Тогда по принципу Дирихле одному из четверых больше 47 лет. Это противоречит выбору троих самых старших в бригаде.

Решение 2. Рассмотрим все возможные тройки рабочих бригады. Всего таких троек $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$. Сумма их суммарных возрастов равна $332 \cdot 35 \cdot 3/7 = 4980$. Значит, по принципу

Дирихле есть тройка, суммарный возраст в которой не меньше, чем $4980 : 35$, что больше 142.

Решение 3. Средний возраст трёх самых старших не меньше среднего возраста по бригаде, который равен $332/7$. Поэтому сумма их возрастов по меньшей мере $3 \cdot 332/7 > 142$ года.

Даны 8 натуральных чисел $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_8 \leqslant 15$. *Докажите, что среди всевозможных разностей* $a_i - a_k$ (*где* $k < i \leqslant 8$) *имеются три равных.*

Решение 1. Рассмотрим семь разностей $a_{i+1} - a_i$ $(i = 1, \ldots, 7)$. Если среди разностей нет трёх равных, то среди этих семи не более чем по две единицы, двойки, тройки и одно число не меньше 4. $a_8 - a_1 = a_8 - a_7 + a_7 - a_6 + \ldots + a_2 - a_1 \geqslant 2(1 + 2 + 3) + 4 = 16$. Так как $1 \leqslant a_i \leqslant 15$, то $a_8 - a_1 \leqslant 14$. Противоречие.

Решение 2. Общее число разностей — $C_8^2 = 28$. Они принимают значения $1, \ldots, 14$, причём 14 не более одного раза. Значит, не менее 27 разностей принимают значения $1, \ldots, 13$. Тогда по принципу Дирихле среди этих разностей найдутся три равных.

5.39.(5) Пятеро рабочих получили на всех зарплату 1500 долларов. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 долларов. Докажите, что кому-то из них придётся подождать до следующей зарплаты.

5.40.(10) Цифры 1–9 разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

5.41.(5) На 5 полках шкафа расставлены 160 книг, на одной из них — 3 книги. Докажите, что найдётся полка, на которой стоит не менее 40 книг.

5.42.(10) 25 покупателей купили 80 арбузов. Среди них были купившие по одному и по два арбуза. Верно ли, что среди них имеется покупатель (хотя бы один), который купил не менее 4 арбузов?

5.43.(15) Десять студентов-математиков составили 35 задач для математической олимпиады. Известно, что среди них были студенты, которые составили по 1, 2 и 3 задачи. Докажите, что среди них есть студент (по меньшей мере один), который составил не менее пяти задач.

5.44.(15) Сможет ли мальчик Коля написать на доске 57 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100?

5.45.(15) Сто человек сидят за круглым столом, причём более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят напротив друг друга.

5.46.(15) В классе из 30 учеников на диктанте один ученик сделал 12 ошибок, а остальные — меньше 12. Докажите, что в классе имеются по крайней мере три ученика, сделавшие в диктанте одинаковое количество ошибок.

5.47.(15) (МО 93) У Пети 28 одноклассников. У них различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

5.48.(15) В школьный драмкружок ходит 31 человек. Возрасты участников различны, а всем вместе 434 года. Докажите, что можно указать 20 кружковцев, которым вместе не меньше 280 лет.

5.49.(15) (СПО 80) В отряде в летнем лагере собраны ребята 10, 11, 12 и 13 лет. Их 23 человека и им вместе 253 года. Сколько в отряде 12-летних ребят, если известно, что их в полтора раза больше, чем 13-летних?

5.50.(15) За 5 лет обучения студент сдал 31 экзамен, причём в каждом году он сдавал экзаменов больше, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов на четвёртом курсе?

5.51.(10) Кот Базилио пообещал Буратино открыть Великую Тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел $+1$, -1 и 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

5.52.(15) На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили три контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки за все контрольные?

5.53.(20) (ТГ 85) В классе из 32 учеников создано 33 кружка, причём каждый кружок состоит из трёх человек и никакие два кружка не совпадают по составу. Докажите, что найдутся два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.

5.54.(15) (МО 60) 30 студентов со всех пяти курсов составили 40 задач. Любые два однокурсника придумали одинаковое количество задач, любые два студента с разных курсов придумали разное количество задач. Сколько человек придумали по одной задаче?

5.55.(15) Если класс из 30 человек рассадить в зале, то хотя бы в одном ряду окажется не менее двух одноклассников. Если то же самое проделать с классом из 26 человек, то по крайней мере 3 ряда окажутся пустыми. Сколько рядов в зале?

5.56.(15) В классе 25 человек. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Доказать, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

5.57.(20) (МО 94) На кружок пришло 60 учеников. Оказалось, что среди любых 10 учеников есть не меньше трёх одноклассников. Докажите, что среди кружковцев найдётся не менее 15 учеников, которые учатся в одном классе.

5.58.(20) На пир собралось 100 людоедов. Известно, что среди любых 10 хотя бы один оказался в желудке у другого (из этой десятки). Докажите, что есть «матрёшка» из 12 людоедов, каждый из которых (кроме последнего) находится в желудке у следующего.

5.59.(20) (СПО 86) 11 пионеров занимаются в пяти кружках дома культуры. Докажите, что найдутся такие два пионера A и B, что все кружки, которые посещает A, посещает и B.

5.60.(20) Числа от 1 до 10 записаны в строчку в произвольном порядке. Каждое из них сложим с номером места, на котором оно стоит. Докажите, что хотя бы две суммы оканчиваются одной и той же цифрой.

5.61.(20) Докажите, что в любой компании из 10 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

5.62.(20) (МО 65) 10 футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

Заметим, что утверждения в задачах 5.61, 5.62 остаются верными при любом числе человек в компании и команд в турнире.

5.63.(20) Школьник в течение года каждый день решает хотя бы по одной задаче. Каждую неделю он решает не больше 12 задач. Доказать, что найдётся несколько последовательных дней, в которые он решает ровно 20 задач.

5.64.(20) Имеется $2k+1$ карточка, занумерованных натуральными числами от 1 до $2k+1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлечённых номеров не был равен сумме двух других извлечённых номеров?

5.65.(20) (МО 47, ВО 79) Из набора $1, \ldots, 200$ выбрано 101 число. Докажите, что среди них существует пара чисел, одно из которых делится на другое.

5.66.(20) (МО 67) Шестеро друзей решили в воскресенье побывать в семи кинотеатрах, сеансы в которых начинаются в 9, 10, 11, ..., 17, 18 и 19 часов. На каждый сеанс двое из них шли в один кинотеатр, остальные — в другой. Вечером выяснилось, что каждый из них побывал в этот день во всех семи кинотеатрах. Доказать, что в каждом из семи кинотеатров хотя бы на одном сеансе в этот день не был никто из друзей.

5.67.(20) Дано 51 различное натуральное число, меньшее 100. Доказать, что из них можно выбрать 6 таких чисел, что никакие два из выбранных не имеют одинаковых цифр ни в одном разряде.

5.68.(15) Верно ли, что из любых 30 разных натуральных чисел, не больших 50, всегда можно выбрать два, одно из которых точно вдвое больше другого?

5.69.(15) Дан набор из $n+1$ различного натурального числа, меньшего $2n$. Доказать, что из него можно выбрать три таких числа, что одно из них равно сумме двух других.

5.70.(15) В Москве не меньше 10 000 000 человек в возрасте не более 100 лет. Докажите, что найдутся 270 человек, родившихся в один год и один день.

5.71.(15) Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

С помощью своего принципа Дирихле доказал следующую теорему.

5.72.(20) Теорема Дирихле. Для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$ существуют такие $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$, что $m \geqslant q$ и $|\alpha - p/q| < 1/(qm)$.

Из этой теоремы следует важное для теории алгебраических чисел следствие.

Следствие. Для любого иррационального числа α существует бесконечно много рациональных дробей p/q таких, что $|\alpha - p/q| < 1/q^2$.

Доказательство. Из теоремы Дирихле следует, что для каждого m существует такая дробь p/q, $q \leqslant m$, что

$$0 < |\alpha - p/q| < 1/(qm) \leqslant 1/q^2.$$

Выбирая m всё больше, получим бесконечно много таких q.

5.73.(20) В целых точках прямой расположены ямы, шириной 0,01 каждая. Длина прыжка блохи постоянна и равна $\sqrt{2}$ (блоха прыгает в одну и ту же сторону). Докажите, что блоха рано или поздно попадёт в яму.

5.74. Докажите, что а) (20) существует степень 2, начинающаяся тремя девятками; б) (25) если p — не степень 10, то среди степеней p найдутся такие, которые начинаются любой наперёд заданной комбинацией цифр.

5.75.(20) Барон Мюнхгаузен заявил, что любую бесконечную последовательность попарно различных натуральных чисел без 1, он запишет так, что только конечное число чисел будет больше своего номера. Не хвастает ли барон?

5.76.(15) Даны 70 разных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 200. Доказать, что какие-то два из них отличаются на 4, 5 или 9.

5.77.(15) Можно ли увезти 50 камней весом 370 кг, 372 кг, ..., 468 кг на 7 трёхтонках?

5.78.(20) В алфавите языка племени Ни-Бум-Бум 22 согласных и 11 гласных, причём словом в этом языке называется произвольное буквосочетание, в котором нет двух согласных подряд и ни одна буква не использована дважды. Алфавит разбили на 6 непустых групп. Докажите, что из всех букв одной из групп можно составить слово.

5.79.(20) У любых двух из 20 детей в школе есть общий дед. Доказать, что у одного из дедов в этой школе учится не менее 14 внуков и внучек.

5.80.(15) (Англия 66) Доказать, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два числа, сумма или разность которых делится на 100.

5.81.(20) (Югославия 72) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найти наибольшее $k \in \mathbb{N}$, обладающее свойством: в множестве, состоящем из n элементов, можно выбрать k различных подмножеств, любые два из которых имеют непустое пересечение.

5.82.(20) (Англия 76) Пусть в конечном множестве X выбрано 50 подмножеств $A_1, \ldots, A_{50}$, в каждом из которых больше половины элементов множества X. Доказать, что можно найти подмножество $B \subset X$, содержащее не более 5 элементов и имеющее хотя бы один элемент, общий с каждым из множеств $A_1, \ldots, A_{50}$.

5.83.(15) (Югославия 77) Даны 20 положительных целых чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20}$, не превосходящих 70. Доказать, что среди разностей $a_j - a_k$ $(j > k)$ найдутся хотя бы четыре одинаковых числа.

5.84.(15) (Румыния 78) Доказать, что при любом разбиении множества $X = \{1, 2, \ldots, 9\}$ на два подмножества хотя бы одно из полученных подмножеств содержит три таких числа, что сумма двух из них равна удвоенному третьему.

5.85.(20) (Австрия 78) Дано 1978 групп людей, каждая из которых состоит из 40 человек. У любых двух из этих групп ровно один общий представитель. Доказать, что существует человек, принадлежащий всем 1978 группам.

5.86.(20) (Польша 79) Натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$ при делении на некоторое натуральное число m дают разные остатки, причём $n > m/2$. Доказать, что для каждого k существуют такие (не обязательно различные) номера i и j ($1 \leqslant i, j \leqslant n$), что число $a_i + a_j - k$ делится на m.

5.87.(20) (Югославия 81) Множество чисел $\{1, 2, \ldots, 100\}$ разбито на 7 подмножеств. Доказать, что хотя бы в одном из этих подмножеств найдутся или 4 числа a, b, c, d, для которых $a + b = c + d$, или 3 числа e, f, g, для которых $e + f = 2g$.

5.88.(20) (МО 63) Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора $\{1, 2, \ldots, 1963\}$, чтобы сумма никаких двух чисел не делилась на их разность?

5.89.(20) (МО 72) Сумма любых 7 натуральных чисел из набора меньше 15, а сумма всех чисел из набора равна 100. Какое наименьшее количество чисел может быть в наборе?

5.90.(20) (СПО 85) На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причём среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

5.91.(15) (ВО 89) Каждый из 7 мальчиков в воскресенье три раза подходил к киоску мороженого. Известно, что каждые двое из них встречались около киоска. Доказать, что в некоторый момент около киоска одновременно встретились по крайней мере 3 мальчика.

5.92.(20) (ВО 65, МО 94) а) Некая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседаниях присутствовали по 10 человек, причём никакие два из членов комиссии не были вместе на заседаниях более одного раза. Докажите, что число членов комиссии больше 60.

б) Докажите, что из 25 человек нельзя составить больше 30 комиссий по 5 человек в каждой, чтобы никакие две комиссии не имели больше одного общего члена.

5.93.(20) (ВО 82) Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть из совокупности чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 1982\}$ так, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других из оставшихся чисел? Каким образом это можно сделать?

5.94.(20) (ВО 83) Докажите, что среди любых $2m + 1$ разных целых чисел, не превосходящих по модулю $2m - 1$, можно найти три числа, сумма которых равна 0.

5.95.(20) (ВО 90) В соревновании по бегу участвуют 100 спортсменов. Известно, что среди любых 12 из них найдутся двое знакомых между собой. Докажите, что как бы ни раздали спортсменам стартовые номера (не обязательно от 1 до 100), найдутся два знакомых спортсмена, номера которых начинаются с одинаковой цифры.

5.96.(20) (ВО 94) В классе 30 учеников, и у каждого из них одинаковое число друзей среди одноклассников. Каково наибольшее возможное число учеников, которые учатся лучше большинства своих друзей? (Про любых двух учеников в классе можно сказать, кто из них учится лучше.)

5.97.(20) (ВО 94) В Цветочном городе n площадей и m улиц ($m > n$). Каждая улица соединяет две площади и не проходит через другие площади. По существующей в городе традиции улица может называться либо синей, либо красной. Ежегодно в городе происходит переименование: выбирается площадь и переименовываются все выходящие из неё улицы. Докажите, что вначале можно назвать улицы так, что переименованиями нельзя добиться одинаковых названий у всех улиц города.

5.98.(20) (ВО 97) У каждого из 33 учеников спросили, сколько у него в классе тёзок и сколько однофамильцев (включая родственников). Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые от 0 до 10 включительно. Докажите, что в классе есть два ученика с одинаковым именем и фамилией.

5.99.(30) (Бельгия 79) Множество X состоит из n элементов. Какое наибольшее число трёхэлементных подмножеств можно выбрать в X так, чтобы любые два выбранные подмножества имели ровно один общий элемент.

5.100.(25) (МЕО 76) В системе из p уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$

с $q = 2p$ неизвестными коэффициенты a_{ij} равны -1, 0 или 1. Доказать, что существует целочисленное решение $(x_1, \ldots, x_q)$ этой системы такое, что для некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ $x_j \neq 0$, и для всех j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ $|x_j| \leqslant q$.

5.101.(20) (МЕО 78) Международное общество состоит из представителей 6 стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами от 1 до 1978. Доказать, что существует хотя бы один член общества, номер которого равен сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

5.102.(20) (МЕО 91) Пусть $S = \{1, 2, \ldots, 280\}$. Найти наименьшее натуральное число n такое, что любое n-элементное подмножество множества S содержит пять попарно взаимно простых чисел.

5.3. Принцип Дирихле в геометрии

Аналогом принципа Дирихле в геометрии является следующее утверждение:

Если на отрезке (окружности) длиной 1 расположено несколько отрезков (дуг), сумма длин которых больше 1, то по крайней мере два (две) из них имеют общую точку. Если внутри фигуры площади 1 расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше 1, то по крайней мере две из них имеют общую точку.

5.103. На плоскости проведено n прямых, никакие две из которых не параллельны. Доказать, что найдутся две из них, угол между которыми не больше $180^\circ/n$ градусов. а) (10) (МО 63) $n = 7$; б) (15) n — любое.

5.104.(10) Из точки на плоскости проведены семь несовпадающих лучей. Докажите, что среди углов, образованных соседними лучами, найдётся угол, величина которого больше 51°.

5.105.(15) Петя разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Затем он проделал то же самое с одним из трёх получившихся кусков и т. д. Докажите, что после некоторого количества разрезаний заведомо можно выбрать среди получившихся кусков 100 многоугольников с одинаковым числом вершин (например, 100 треугольников или 100 четырёхугольников и т. д.).

5.106.(20) (ВО 63) Дан правильный 45-угольник. Можно ли в его вершинах расставить цифры 0–9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?

Точки

5.107.(10) В квадрате 4×4 нарисовано 15 точек. Доказать, что из него можно вырезать квадратик 1×1, не содержащий внутри себя точек.

5.108.(15) В квадратном ковре со стороной 10 м моль проела 80 дырок. Доказать, что из него можно вырезать квадратный коврик со стороной 1 м, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными.) Дырки а) могут; б) не могут находиться на границе вырезаемого коврика.

5.109.(15) На плоскости даны 5 точек с целыми координатами. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющих их, также имеет целые координаты.

5.110.(15) На газоне в форме правильного треугольника со стороной 3 м растут 10 гвоздик. Докажите, что найдутся две гвоздики, которые находятся друг от друга на расстоянии, не большем 1 м.

5.111.(15) В квадрате со стороной 5 см размещено 126 точек. Доказать, что среди них существует 6 точек, которые лежат в круге радиуса 1 см.

5.112.(15) Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5.

5.113.(15) На плоскости дано 400 точек. Докажите, что различных расстояний между ними не менее 15.

5.114.(15) Форма рощи — круг радиуса 215 м. Расстояние между двумя деревьями в ней не менее 10 м. Доказать, что в роще менее 1950 деревьев.

5.115.(20) Сосновый лес растет на участке, имеющем форму квадрата со стороной 1 км. Он состоит из 4500 деревьев диаметром 50 см. Докажите, что в лесу можно выбрать прямоугольную площадку 10 м $\times$ 20 м, на которой не растет ни одно дерево.

5.116.(20) В прямоугольнике 3×4 расположено шесть точек. Доказать, что среди них найдутся две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$.

5.117.(20) (МО 62) На плоскости дано 25 точек, причём среди любых трёх из них найдутся две на расстоянии меньше 1. Доказать, что существует круг радиуса 1, содержащий не меньше 13 из этих точек.

5.118.(20) (МО 63) Доказать, что из шести точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать три так, что треугольник с вершинами в этих точках имеет хотя бы один угол, не больший $30°$.

5.119.(15) (СПО 64) В единичный квадрат бросили 51 точку. Доказать, что некоторые три из них обязательно лежат внутри круга радиуса $1/7$.

5.120.(20) (МО 67) Доказать, что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более пяти точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

5.121.(20) (МО 70) В парке растет 10 000 деревьев (100 рядов по 100 деревьев). Какое наибольшее число деревьев надо срубить, чтобы выполнялось условие: если встать на любой пень, то не будет видно ни одного другого пня? (Деревья можно считать достаточно тонкими.)

5.122.(15) (МО 73) На плоскости находится 5 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие четыре — на одной окружности. Доказать, что среди этих точек можно выбрать две, которые расположены по разные стороны от окружности, проходящей через оставшиеся три точки.

5.123.(20) (МО 82) В квадрате $ABCD$ находятся пять точек. Доказать, что расстояние между какими-то двумя из них не превосходит $AC/2$.

Отрезки, прямые

5.124.(15) Дано 7 отрезков, длины которых заключены между 0,1 м и 1 м. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три таких, что из них можно составить треугольник.

5.125.(15) В плоскости отмечена 101 точка, причём не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красной ручкой проводится прямая. Доказать, что на плоскости существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.

5.126.(15) В окружности единичного диаметра проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин всех хорд меньше $3{,}15k$.

5.127.(20) Внутри окружности радиуса n расположены $4n$ отрезков длиной 1. Докажите, что можно провести прямую, параллельную или перпендикулярную данной прямой l и пересекающую не менее двух данных отрезков.

5.128.(20) Даны две окружности, длина каждой равна 100 см. На одной из них отмечено 100 точек, а на другой — несколько дуг, сумма длин которых меньше 1 см. Докажите, что эти окружности можно совместить так, чтобы ни одна отмеченная точка не попала на отмеченную дугу.

5.129.(20) Прямоугольник размером 20×30 разбит на клетки 1×1. Можно ли провести прямую, пересекающую по внутренним точкам 50 клеток прямоугольника?

5.130.(20) Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Доказать, что найдётся прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.

5.131.(20) (МО 74) Докажите, что в любом выпуклом $2n$-угольнике найдётся диагональ, не параллельная ни одной из его сторон.

5.132.(20) (МО 75) На шахматной доске 8×8 отмечены центры всех полей. Можно ли тринадцатью прямыми разбить доску на части так, чтобы внутри каждой из них лежало не более одной отмеченной точки?

5.133.(20) (МО 79) На отрезке длиной 1 закрашено несколько отрезков, причём расстояние между любыми двумя точками закрашенных отрезков не равно 0,1. Докажите, что сумма длин закрашенных отрезков не превосходит 0,5.

5.134.(20) (МО 79) На плоскости отмечена точка O. Можно ли расположить на плоскости а) 5 кругов; б) 4 круга, не покрывающих точку O, так, чтобы любой луч с началом в точке O пересекал не менее двух кругов?

5.135.(20) (ВО 72) Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырёхугольника, площади которых относятся как $2:3$. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

5.136.(20) (ВО 93) На шахматную доску размера $(2n-1) \times$ $\times (2n-1)$ поставили $(2n-1)$ ладью так, что ни одна из них не бьет другую. Докажите, что в любом квадрате $n \times n$ стоит хотя бы одна ладья.

Круги, многоугольники, площадь

5.137.(15) Докажите, что правильный треугольник нельзя покрыть двумя меньшими правильными треугольниками.

5.138.(15) Фигурой нельзя накрыть полукруг, но двумя такими фигурами можно накрыть круг того же радиуса. Может ли такое быть?

5.139.(20) Внутри квадрата со стороной 2 расположено 7 многоугольников площади не менее 1 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не меньше $1/7$.

5.140.(20) Назовем крестом фигуру, образованную диагоналями квадрата со стороной 1. Докажите, что в круге радиуса 100 можно разместить лишь конечное число непересекающихся крестов.

5.141.(20) В квадрате со стороной 15 находятся 20 попарно непересекающихся квадратиков со стороной 1. Докажите, что в большом квадрате можно разместить круг радиуса 1 так, чтобы он не пересекался ни с одним из квадратиков.

5.142.(20) В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдётся кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

5.143.(20) Покрывается ли квадрат со стороной 1,5 тремя квадратами со стороной 1?

5.144.(15) (МО 64) В квадрате со стороной 1 отметили 101 точку, причём никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше 1/100.

5.145.(15) (МО 74) Докажите, что в круг радиуса 1 нельзя поместить без наложений два треугольника, площадь каждого из которых больше 1.

5.146.(20) (ВО 61) В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросают 120 квадратов со стороной 1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

5.147.(20) (ВО 66) Докажите, что в выпуклый четырёхугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса S/P.

5.148.(15) (ВО 75) В квадрате площадью S расположены 1975 фигур, сумма площадей которых больше $1974S$. Докажите, что у этих фигур есть общая точка.

5.149.(20) (ВО 87) Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно полностью покрыть круг радиуса 2? (Круги могут накладываться друг на друга и выступать за край большого круга.)

Сферы, кубы и т. д.

5.150.(15) На планете в звёздной системе тау Кита суша занимает более половины площади планеты. Докажите, что таукитяне могут прорыть прямой туннель, проходящий через центр планеты и соединяющий сушу с сушей. (Будем считать, что техника у них для этого достаточно развита.)

5.151.(15) Не видя написанных на гранях куба чисел от 1 до 6, Лёша утверждает, что: а) у этого куба есть две соседние грани, на которых написаны соседние числа; б) таких пар соседних граней у куб не меньше двух. Прав ли он в обоих случаях?

5.152.(15) Можно ли занумеровать вершины куба числами от 1 до 8 так, чтобы суммы номеров на концах каждого ребра куба были различными?

5.153.(15) (МО 73) Докажите, что у любого многогранника найдутся две грани, которые имеют одинаковое число сторон.

5.154.(15) (МО 56) В кубе, ребро которого равно 13, выбрано 1956 точек. Можно ли в этот куб поместить куб с ребром 1 так, чтобы внутри него не было ни одной выбранной точки?

5.155.(20) (МО 74, СПО 74) Шарообразная планета окружена 37 точечными астероидами. Доказать, что в любой момент на поверхности планеты найдётся точка, из которой астроном не сможет наблюдать более 17 астероидов. (Астероид, расположенный на линии горизонта, не виден.)

5.4. Окраска плоскости и её частей. Таблицы

5.156.(10) Плоскость окрашена в два цвета — белый и чёрный, причём имеются и точки белого, и точки чёрного цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

5.157.(15) Плоскость окрашена в два цвета — красный и чёрный, причём имеются точки и того и другого цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

5.158.(10) Каждая грань куба разделена на четыре равных квадрата, и каждый квадрат окрашен в один из трёх цветов: синий, красный или зелёный так, что квадраты, имеющий общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько может быть синих, красных и зелёных квадратов?

5.159.(10) Плоскость окрашена в два цвета — белый и чёрный, причём имеются и точки белого, и точки чёрного цвета. Докажите, что всегда найдётся равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета.

5.160.(15) (МО 72) Вершины правильного семиугольника окрашены в два цвета — белый и чёрный. Докажите, что среди них обязательно найдутся три вершины одного цвета, которые являются вершинами равнобедренного треугольника. Верно ли аналогичное утверждение для правильного восьмиугольника?

5.161.(20) Плоскость окрашена в три цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

5.162.(20) Точки сторон правильного треугольника раскрашены в два цвета. Доказать, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

5.163.(25) Как раскрасить плоскость в 7 цветов, чтобы не нашлось двух точек одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

5.164.(15) Пусть прямая раскрашена в два цвета. Доказать, что на ней найдутся три точки A, B, C, окрашенные в один цвет такие, что B — середина отрезка AC.

Теорема ван дер Вардена утверждает, что если прямая раскрашена в n цветов, то для любого m найдутся m точек одного цвета, расположенных на прямой через равные расстояния.

5.165.(15) В булке оказался запечён изюм двух сортов. Доказать, что внутри булки (булка содержит внутри себя шар радиуса 1 см) найдутся две такие точки, удалённые на 1 см, что они либо не принадлежат никаким из изюмин, либо принадлежат изюминам одного сорта.

5.166.(15) Узлы бесконечного листа клетчатой бумаги раскрашены в два цвета. Доказать, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечении которых лежат точки одного цвета.

5.167.(20) Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в три цвета. Доказать, что существует равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

5.168.(15) а) Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в любом уголке из трёх полей было по крайней мере одно незакрашенное поле? б) Какое наименьшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в каждом уголке было по крайней мере 1 чёрное поле?

5.169.(15) Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

5.170.(15) Квадрат со стороной 10 см разделён на 100 квадратов со стороной 1 см, и в каждом из них записано одно из трёх чисел 1, 2 или 3. После этого подсчитали суммы записанных чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей получившейся таблицы. Может ли оказаться, что все подсчитанные суммы будут различными?

5.171.(15) Некоторые из клеток таблицы 5×5 окрашены в красный цвет, остальные в синий. Докажите, что можно найти четыре клетки, окрашенные одним цветом, которые находятся на пересечении двух строк и двух столбцов.

5.172.(20) Бесконечный лист бумаги разлинован в клетку. Каждая клетка окрашена в один из шести цветов. Докажите, что всегда найдутся четыре клетки одного цвета, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными прямым линиям на бумаге.

5.173.(20) В таблице 10×10 расставлены целые числа, причём любые два числа в соседних клетках отличаются не более чем на пять. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.

5.174.(20) Клетчатый лист бумаги размером 10×10 клеток покрыт 55 квадратиками, состоящими из 4 клеток. (Вершины квадратиков лежат в узлах сетки; квадратики не выходят за пределы большого квадрата.) Докажите, что один из них можно убрать так, что оставшиеся будут по-прежнему покрывать всю доску.

5.175.(20) (МО 63) В таблице 9×9 расставлены числа 1–81. Доказать, что при любой расстановке найдутся две соседние (имеющие общую сторону) клетки такие, что разность между числами, стоящими в этих клетках, не меньше 6.

5.176.(20) (СПО 70) В квадрате 5×5 закрашено 16 клеток. Доказать, что найдётся закрашенный трёхклеточный уголок.

5.177.(20) (СПО 82) Каждая клетка прямоугольной таблицы 5×41 покрашена в белый или чёрный цвет. Докажите, что можно выбрать три столбца и три строки, все 9 клеток пересечения которых покрашены в один цвет.

5.178.(15) (Чехословакия 77) На прямой отмечены n различных точек $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geqslant 4$). Каждая из них окрашена в один из четырёх цветов, причём все цвета присутствуют. Доказать, что существует отрезок, содержащий ровно по одной точке двух цветов и по крайней мере по одной точке каждого из оставшихся цветов.

5.179.(20) (США 76) Плоскость окрашена в два цвета: красный и голубой. Докажите, что найдётся прямоугольник, все вершины которого окрашены одинаково.

5.180.(20) (США 76) а) Пусть клетки прямоугольника 4×7 окрашены в белый или чёрный цвет. Доказать, что на доске найдётся прямоугольник, образованный горизонтальными и вертикальными линиями доски, все 4 угловые клетки которого окрашены одинаково. б) Привести пример раскраски прямоугольника 4×6, для которой указанного в пункте а) прямоугольника нет.

5.181.(20) (ВО 61) В некоторых клетках таблицы 4×4 поставлено по звёздочке. а) Покажите, что можно так расставить

7 звёздочек, что при вычёркивании любых двух строк и любых двух столбцов этой таблицы в оставшихся клетках всегда будет хотя бы одна звёздочка. б) Докажите, что если звёздочек меньше 7, то всегда можно так вычеркнуть две строки и два столбца, что все оставшиеся клетки будут пустыми.

5.182.(20) (ВО 75) На бесконечной клетчатой бумаге закрашены в чёрный цвет какие-то 25 клеток. Для какого наибольшего числа k при любом расположении закрашенных клеток верно такое утверждение: среди закрашенных 25 клеток обязательно найдутся k клеток, попарно не имеющих общих вершин.

5.183.(15) (ВО 81) В клетках таблицы $n \times n$ расставлены числа -1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из $2n+2$ сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

5.184.(20) (ВО 86) Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Известно, что у любого правильного треугольника со стороной 1 имеются вершины обоих цветов. а) Докажите, что найдётся правильный треугольник со стороной $\sqrt{3}$, все вершины которого одинакового цвета. б) Приведите пример раскраски плоскости, удовлетворяющей условию задачи.

5.185.(20) (ВО 86) Каждая клетка бесконечного листа клетчатой бумаги окрашена в один из данных n цветов ($n > 3$). Докажите, что найдутся 4 клетки одного цвета, центры которых являются вершинами некоторого прямоугольника со сторонами, параллельными прямым линиям на бумаге.

5.186.(20) (ВО 87) а) Какое наименьшее число уголков нужно разместить в квадрате 8×8 клеток, чтобы в него нельзя было больше поместить без наложения ни одной такой фигуры? б) В квадрате из 1987×1987 клеток вырезана одна произвольная клетка. Докажите, что оставшуюся часть всегда можно разрезать на трёхклеточные «уголки».

5.187.(15) (ВО 95) Клетки квадратной таблицы 15×15 раскрашены в красный, синий и зелёный цвета. Докажите, что найдутся по крайней мере две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

5.188.(20) (МЕО 92) В пространстве даны 9 точек (никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости), попарно соединённые отрезками. Отрезок может быть закрашен в синий или в красный цвет или остаться незакрашенным. Найти наименьшее значение n такое, что при любом закрашивании любых n отрезков найдётся треугольник, все стороны которого будут закрашены в один цвет.

5.189.(25) (ВО 75) а) В квадрате 7×7 клеток нужно отметить центры k клеток так, чтобы никакие четыре отмеченные точки не являлись вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем k это возможно? б) Решите аналогичную задачу для квадрата 13×13 клеток.

5.190.(25) (Швеция 82) На плоскости рассматривается множество M точек $(x; y)$, где $x, y \in \mathbb{N}$ и $x \leqslant 12$, $y \leqslant 12$. Каждая из этих 144 точек окрашена в один из трёх цветов: красный, белый, синий. Доказать, что существует прямоугольник (со сторонами, параллельными осям), все вершины которого принадлежат M и одинаково окрашены.

5.191.(25) (МЕО 86) Пусть M — произвольное конечное множество целочисленных точек на координатной плоскости. Всегда ли можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные — в красный так, чтобы для каждой прямой l, параллельной любой из координатных осей, абсолютная величина разности между числом белых и красных точек на l не превосходила бы единицы?

6. ГРАФЫ

Определение 1. *Графом* называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются *вершинами* графа, а соединяющие линии — *рёбрами*.

Примерами графов могут служить любая карта дорог, схема метро, электросхема, чертёж многоугольника и т. д. В задачах на соответствие при решении вторым способом мы уже использовали графы. В задачах на переливание также могут быть весьма эффективно применены графы. При решении задач из разных областей после прочтения мы пытаемся более наглядно представить их с помощью рисунков или графов (самых простых рисунков).

6.1.(5) Между планетами введено космическое сообщение по следующим маршрутам: З–К, П–В, З–П, П–К, К–В, У–М, М–С, С–Ю, Ю–М, М–У. Можно ли добраться с З до М?

6.2.(10) В 20-этажном доме испорчен лифт: он может либо подниматься на 8 этажей вверх, либо спускаться на 13 этажей вниз. Можно ли с помощью лифта попасть с 20 этажа на первый? (Когда сверху меньше 8 этажей, то лифт вверх не пойдёт. Аналогично — вниз.)

6.3.(10) По столбу высотой 15 метров ползет улитка. За день она поднимается на 4 м, за ночь опускается на 3 м. Через какое время она достигнет вершины столба?

6.4.(10) 25 борцов играют по олимпийской системе (проигравший выбывает). За какое наименьшее количество встреч можно определить победителя?

6.5.(15) (МО 55) А если требуется определить двух сильнейших борцов?

6.6.(10) В стране Цифра есть девять городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Разберём решение следующей задачи.

Можно ли, сделав несколько ходов конями из положения на рис. 6.1, расположить их так, как показано на рис. 6.2?

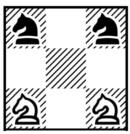


Рис. 6.1

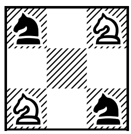


Рис. 6.2

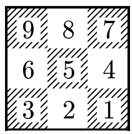


Рис. 6.3

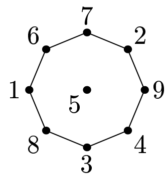


Рис. 6.4

Решение. Занумеруем клетки доски числами 1–9 так, как показано на рис. 6.3. Каждой клетке сопоставим точку на плоскости, и если из одной клетки можно попасть в другую ходом коня, то соединим соответствующие точки линией (см. рис. 6.4). Исходная и требуемая расстановки коней изображены на рис. 6.5. Порядок следования коней на окружности, очевидно, не может измениться. Поэтому переставить коней требуемым образом невозможно.

6.7.(10) Доска имеет форму креста (см. рис. 6.6). Можно ли обойти её ходом коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

6.8.(15) (МО 59) Имеется шахматная доска 3×3, в верхних двух её углах стоят два чёрных коня, в нижних — два белых (рис. 6.1) (кони ходят, как обычно). За 16 ходов поставьте белых коней на место чёрных, а чёрных — на место белых и докажите, что за меньшее число ходов это сделать невозможно.

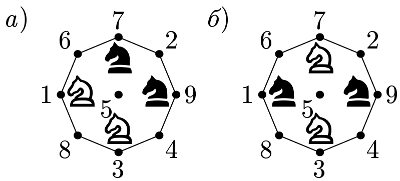


Рис. 6.5

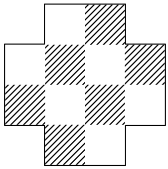


Рис. 6.6

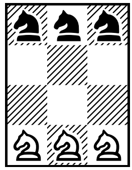


Рис. 6.7

6.9.(10) Заменим на рис. 6.2 одного из белых коней красным. Как поменять местами белого и красного коней за наименьшее число ходов?

6.10.(15) Дана позиция на шахматной доске, изображённая на рис. 6.7. За наименьшее число ходов поменяйте местами трёх чёрных и трёх белых коней.

6.11.(15) Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 15 клеток так, чтобы у каждой из них было а) чётное; б) нечётное число закрашенных соседей? (Клетки называются соседями, если они имеют общую сторону.)

6.12.(15) (МО 73) В городе X с любой станции метро можно проехать на любую другую. Доказать, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через неё так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую.

6.13.(20) (ВО 87) Все грани выпуклого многогранника — треугольники. Докажите, что каждое ребро многогранника можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы в итоге из любой его вершины в любую другую можно было попасть, двигаясь только по красным рёбрам, а также только по синим.

6.14.(20) (ВО 92) Города одной империи с k столицами соединены дорогами так, что из любого города в другой можно по этим дорогам проехать. Доказать, что империю можно разделить на k республик так, чтобы каждая республика имела столицу и вместе с любым городом в ней был бы кратчайший путь из этого города до столицы (кратчайший путь состоит из минимального числа дорог).

6.15.(20) (ВО 92) В стране несколько городов, между некоторыми из них в одном направлении летают самолёты. Известно, что есть город, вылетев из которого, нельзя, перелетая из города в город, побывать в каждом городе страны. Докажите, что часть городов может отделиться так, что ни в один из отделившихся городов нельзя будет попасть с помощью авиаперелётов ни из какого города оставшейся части.

6.16.(20) (ВО 94) В один из дней года оказалось, что каждый житель города сделал не более одного звонка по телефону. Докажите, что население города можно разбить не более чем на три группы так, чтобы жители, входящие в одну группу, не разговаривали в этот день между собой по телефону.

6.1. Подсчёт числа рёбер

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Количество рёбер, выходящих из данной вершины, называется *степенью* вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется *нечётной*, а чётную степень — *чётной*.

Рассмотрим следующую задачу.

В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с пятью другими?

РЕШЕНИЕ. Пусть это возможно. Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют телефонам, а рёбра — соединяющим их проводам. В этом графе 15 вершин, степень каждой из которых равна 5. Для подсчёта количества рёбер в этом графе сначала сложим степени всех его вершин. Ясно, что при таком подсчёте каждое ребро учтено дважды (оно ведь соединяет две вершины). Поэтому число рёбер графа должно быть равно $15 \cdot 5/2$. Но это число нецелое. Значит, такого графа не существует и соединить телефоны невозможно.

При решении этой задачи выяснено, как подсчитать число рёбер графа, зная степени всех его вершин: нужно сложить степени вершин и полученный результат разделить на 2.

6.17.(10) В государстве 50 городов, и из каждого выходит 8 дорог. Сколько всего дорог в государстве?

При решении задач очень полезна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Число нечётных вершин любого графа чётно.

6.18.(10) Доказать теорему 1.

6.19.(5) В турнире принимает участие 15 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?

6.20.(5) Можно ли 1973 телефона соединить между собой так, чтобы каждый был соединён с 1971 телефоном?

6.21.(10) Существует ли многогранник с нечётным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечётным числом сторон?

6.22.(5) В школе 953 ученика. Одни из них знакомы, другие не знакомы друг с другом. Доказать, что хотя бы у одного из них число знакомых среди учеников этой школы чётно.

6.23.(10) В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

6.24.(10) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединён с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединён с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединён с пятью другими?

6.25.(10) У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

6.26.(10) Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

6.27.(10) Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере есть 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

6.28.(10) Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

6.29.(10) У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.

6.30.(10) В городе N от каждой площади отходит ровно 5 улиц, соединяющих площади. Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5.

6.31.(10) В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и девочек?

6.32.(10) 1997 городов соединены дорогами так, что из любого города можно доехать до любого другого (возможно, с пересадками). Доказать, что построено по крайней мере 1996 дорог.

6.33.(15) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

6.34.(15) В шахматном турнире в один круг участвуют 17 человек. Верно ли, что в любой момент турнира найдется шахматист, сыгравший к этому моменту чётное число партий (может быть, ни одной)?

6.35.(15) У царя Гвидона было 5 детей. Из всех его потомков (детей, внуков, правнуков и т. д.) 57 имели ровно трёх сыновей, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

6.36. В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что

а) (15) можно выбрать вид транспорта так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;

б) (15) из некоторого города, выбрав один из видов транспорта, можно добраться до любого другого города не более, чем с одной пересадкой (пользоваться можно только выбранным видом транспорта);

в) (20) каждый город обладает свойством, указанным в п. б);

г) (20) можно выбрать вид транспорта так, чтобы пользуясь только им, можно было добраться из любого города в любой другой не более, чем с двумя пересадками.

6.37.(20) (МО 46) В одном городе есть несколько (более одного) автобусных маршрутов. При этом: 1) на каждом маршруте ровно три остановки; 2) с каждого маршрута на каждый можно пересесть, и при том на одной остановке; 3) с каждой остановки на каждую можно проехать без пересадки, и при том только одним маршрутом. Сколько автобусных маршрутов в этом городе?

6.38.(20) (МО 46) В городе 57 автобусных маршрутов. Известно: 1) с любой остановки на любую другую можно попасть без пересадки. 2) Для любой пары маршрутов найдется, и при том только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из маршрутов на другой. 3) На каждом маршруте не менее трёх остановок. Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

6.39.(20) (МО 66) Сеть метро имеет на каждой линии не менее четырёх станций, из них не более трёх пересадочных. Ни на какой пересадочной станции не пересекается более двух линий. Какое наибольшее количество линий может иметь такая сеть, если с любой станции на любую можно попасть, сделав не более двух пересадок?

6.40.(20) (МО 96) Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

6.41.(15) (МО 96) а) 8 школьников решили 8 задач. Каждую задачу решили 5 школьников. Докажите, что найдутся два таких ученика, что каждую задачу решил хотя бы один из них. б) А если каждую задачу решили 4 ученика?

6.42.(20) (США 81) В некоторой стране любые два города связаны одним из трёх видов транспорта. Не существует города, обеспеченного всеми тремя видами транспорта, и в то же время не существует трёх городов, любые два из которых связаны одним и тем же средством сообщения. Найти наибольшее возможное количество городов в этой стране.

6.43.(20) (ВО 66) В некотором городе для любых трёх перекрёстков A, B и C есть путь, ведущий из A в B и не проходящий через C. Докажите, что с любого перекрёстка на любой другой ведут по крайней мере два непересекающихся пути (перекрёсток — место, где сходятся по крайней мере две улицы; в городе не меньше двух перекрёстков).

6.44.(20) (ВО 69) В государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединён авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

Граф, возникающий в этой задаче, часто используется в качестве примера и имеет специальное название «граф Петерсена».

6.45.(20) (ВО 75) Учитель танцев хочет расставить 10 мальчиков и несколько девочек так, чтобы рядом с каждым мальчиком стояли мальчик и девочка и через одного от каждой девочки тоже стояли мальчик и девочка. Сколько девочек он должен пригласить?

6.46.(20) (ВО 80) На берегу большого круглого озера расположено несколько населённых пунктов. Между некоторыми из них установлено теплоходное сообщение. Известно, что два пункта связаны рейсом тогда и только тогда, когда два следующих за ними против часовой стрелки пункта рейсом не связаны. Докажите, что из любого пункта в любой другой пункт можно добраться теплоходом, причём не более чем с двумя пересадками.

6.47.(20) (ВО 86) В одном государстве король хочет построить n городов и $n-1$ дорог между ними так, что из каждого города можно было проехать в любой другой. (Каждая дорога соединяет два города, дороги не пересекаются и не проходят через другие города.) Король хочет, чтобы кратчайшие расстояния по сети дорог между парами городов равнялись соответственно $1, 2, 3, \ldots, n(n-1)/2$ км. Возможно ли это, если а) $n = 6$; б) $n = 1986$?

6.48.(20) (ВО 88) В стране 21 город. Каждая из авиакомпаний попарно связывает беспосадочными авиалиниями 5 городов (при этом между двумя городами могут летать самолёты разных авиакомпаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспосадочной линией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?

6.49.(20) (ВО 92) План города имеет вид квадрата со стороной $(n-1)$, расчерченного на $(n-1)^2$ единичных квадратиков. Нужно открыть несколько автобусных (двусторонних) маршрутов так, чтобы каждый маршрут имел не более одного поворота и чтобы с любого перекрёстка на любой другой можно было проехать, сделав не более одной пересадки. Каким наименьшим числом маршрутов можно обойтись?

6.50.(20) (ВО 93) В стране 1993 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из любого города можно проехать по дороге в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками. Дорога соединяет между собой два города.

6.51.(20) (ВО 95) Все стороны и диагонали правильного 12-угольника раскрашиваются в 12 цветов (каждый отрезок — одним цветом). Существует ли такая раскраска, что для любых трёх цветов найдутся три вершины, попарно соединённые между собой отрезками этих цветов?

6.2. Эйлеровы графы

Определение 3. Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро один раз, называется *эйлеровым.*

6.52.(15) Можно ли нарисовать граф, изображённый а) на рисунке 6.8, *а*; б) на рисунке 6.8, *б*, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

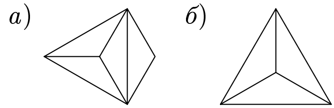


Рис. 6.8

Из решения этой задачи следует, что эйлеров граф должен иметь не более двух нечётных вершин. Впервые это было установлено в связи со знаменитой задачей о кёнигсбергских мостах.

6.53.(15) Схема мостов города Кёнигсберга изображена на рис. 6.9. Можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз?

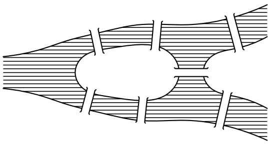


Рис. 6.9

6.54.(15) Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист а) не с него начал и не на нем закончил? б) с него начал, но не на нем закончил? в) с него начал и на нем закончил?

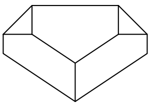


Рис. 6.10

6.55.(15) Хулиган Вася решил прогуляться по парку и его окрестностям (см. рис. 6.10), так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз. Сможет ли он это сделать?

6.56.(15) а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? б) Какое наименьшее число раз придётся ломать проволоку, чтобы изготовить требуемый каркас? в) Жук ползает по рёбрам куба. Сможет ли он последовательно обойти все 12 рёбер куба, не пройдя дважды по одному ребру?

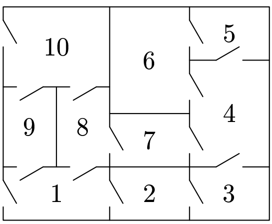


Рис. 6.11

6.57.(15) На рис. 6.11 — план подвала из 10 комнат. Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая каждый раз ту дверь, через которую Вы проходите? С какой комнаты надо начинать движение?

Определение 4. Граф называется *связным*, если любые две его вершины могут быть соединены путём, т. е. последовательностью рёбер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.

6.58.(10) (СПО 74) В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города), т. е. граф дорог связен.

6.59.(15) Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $(n-1)/2$, связен.

Несвязный граф состоит из нескольких «кусков». Эти «куски» называются *компонентами связности* графа. Каждая компонента связности является, конечно, связным графом. Отметим также, что связный граф имеет одну компоненту связности.

6.60.(10) В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковёр-самолёт. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

6.61.(10) В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

6.62.(15) (МО 68) Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из любого города можно было попасть в любой другой, сделав не более двух пересадок?

Теперь сформулируем основную теорему.

Теорема 2. Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и имеет не более двух нечётных вершин.

6.63.(20) Доказать теорему 2.

6.64.(20) (ВО 83) Можно ли составить решётку на рис. 6.12 а) из пяти ломаных длины 8; б) из восьми ломаных длины 5? (Длины сторон клеток равны 1.)

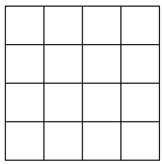


Рис. 6.12

6.65.(15) На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (не распадающуюся на части) фигуру. Доказать, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.

6.66.(20) Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

6.67. Можно ли, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя по одной линии дважды, нарисовать: а) (10) квадрат с диагоналями; б) (10) правильный пятиугольник с диагоналями?

6.68.(15) (МО 94) Турист обошёл 6 улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую по одному разу. Могло ли так быть, если а) улицы могут оканчиваться тупиком; б) конец каждой улицы — перекрёсток?

6.69.(20) (МО 94) Все города страны, кроме столицы, расположены вдоль шоссе. Из столицы в каждый город ведет прямая дорога. Две компании хотят приватизировать дороги и участки шоссе так, чтобы каждая компания могла проехать из любого города в любой другой только по своим дорогам. Смогут ли они это сделать при каком-нибудь числе городов, большем одного?

6.70.(20) (МО 95) Рёбра бесконечной треугольной решётки раскрашены в два цвета. Докажите, что найдутся две сколь угодно далёкие точки, соединённые одноцветным путём.

6.71.(20) (МО 99) Раскраска вершин графа называется правильной, если вершины одного цвета не соединены ребром. Некоторый граф правильно раскрашен в k цветов, причём его нельзя правильно раскрасить в меньшее число цветов. Докажите, что в этом графе существует путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов ровно по одному разу.

6.3. Деревья

Определение 5. *Циклом* в графе называется замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину.

Определение 6. *Деревом* называется связный граф, не имеющий циклов.

Таким образом, в дереве невозможно, передвигаясь по рёбрам и не проходя по одному ребру два или более раз, вернуться в исходную вершину. Этот факт будет не раз использован при доказательстве других свойств деревьев. При изучении свойств деревьев полезно ввести два новых понятия.

Определение 7. *Простым путём* называется путь, в котором никакое ребро не встречается дважды. *Висячей вершиной* называется вершина, из которой выходит ровно одно ребро.

Докажите, что граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путём, является деревом.

Решение. Очевидно, что данный граф связен. Предположим, что в нем есть цикл. Тогда любые две вершины этого цикла соединены по крайней мере двумя простыми путями. Получили противоречие, значит, наше предположение неверно.

Верно и обратное утверждение.

6.72.(15) В дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путём.

Итак, дадим другое определение дерева, которым иногда удобно пользоваться.

Определение $6'$. *Дерево* — это граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путём.

Лемма (о висячей вершине). В дереве есть висячая вершина.

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину дерева и пойдем по любому выходящему из неё ребру в другую вершину.

Если из новой вершины больше рёбер не выходит, то мы остаемся в ней, а в противном случае идём по любому другому ребру дальше. Понятно, что в этом путешествии мы никогда не сможем попасть в вершину, в которой уже побывали: это означало бы наличие цикла. Так как у графа конечное число вершин, то наше путешествие обязательно должно закончиться. Но закончиться оно может только в висячей вершине.

6.73.(15) В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

6.74.(10) Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.

Задачи теории графов можно формулировать как в «игровом» виде, так и на языке теории графов.

6.75.(10) а) („игровой вид“) В стране Древляндия n городов и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог? б) (ВО 61) n точек соединены отрезками так, что любые две точки связывает ровно одна цепочка отрезков. Докажите, что общее число отрезков равно $n-1$.

Решение этой задачи — доказательство часто используемой теоремы.

Теорема 3. В дереве число вершин на одну больше числа рёбер.

Верное и обратное утверждение (используется намного реже).

6.76.(10) Связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является деревом.

6.77.(15) Волейбольная сетка — прямоугольник 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать, чтобы сетка не распалась?

6.78.(15) В некоторой стране 30 городов, причём каждый соединён с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

6.79.(15) Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным.

6.80.(20) В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более а) 198 перелётов; б) 196 перелётов.

6.81.(15) Квадрат 8×8 выложили из спичек. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы с любого поля можно было пройти на любое другое, не перепрыгивая через спички?

6.82.(20) Расстоянием между двумя вершинами дерева назовем длину простого пути, соединяющего их; а удалённостью вершины дерева — сумму расстояний от неё до всех остальных вершин. Докажите, что в дереве, у которого есть две вершины с удалённостями, отличающимися на 1, нечётное число вершин.

6.83.(20) Дима нарисовал на доске 7 графов, каждый из которых является деревом с 6 вершинами. Докажите, что среди них есть два одинаковых.

6.84.(20) (МЕО 91) Дан связный граф G с k рёбрами. Докажите, что можно занумеровать рёбра всеми числами $1, 2, \ldots, k$ так, что для каждой вершины графа, которая соединена рёбрами не менее чем с двумя другими вершинами, набор чисел, которыми помечены эти рёбра, не имеют общего делителя, большего 1.

6.85.(15) (ВО 99) В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причём из каждого города есть по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N - 1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

6.86.(20) (ВО 00) В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого не делится на 3.

6.4. Плоские графы и теорема Эйлера

Определение 8. Граф, который можно нарисовать так, чтобы его рёбра не пересекались нигде, кроме вершин, называется *плоским* или *планарным*.

Граф, изображённый на рис. 6.13 — плоский (его можно нарисовать так, как на рис. 6.14), а на рис. 6.15 — неплоский (это будет доказано ниже). Заметим, что правильный нарисованный плоский граф разбивает плоскость на куски (грани). Обозначим число этих кусков через F, число вершин графа — через V и число рёбер — через E. Так, для графа, изображённого на рисунке

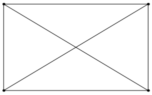


Рис. 6.13

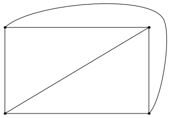


Рис. 6.14

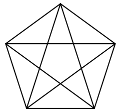


Рис. 6.15

6.14, получаем $V = 4$, $E = 6$, $F = 4$ (внешний кусок плоскости тоже учитывается).

Теорема 4 (Эйлера). Для правильно нарисованного связного плоского графа имеет место равенство

$$V - E + F = 2.$$

(Его обычно называют формулой Эйлера.)

Доказательство. Повторим рассуждение, использованное при решении задачи о волейбольной сетке: будем удалять рёбра до тех пор, пока не получим дерево. Посмотрим, как при удалении очередного ребра изменяются величины V, E и F. Ясно, что число вершин не изменяется, а количество рёбер уменьшается на 1. Число кусков также уменьшается на 1, так как при удалении ребра два примыкающих к нему куска сливаются в один.

Поэтому $V - E + F$ при такой операции не изменяется (инвариант!). Так как для полученного дерева $V - E = 1$ и $F = 1$, то $V - E + F = 2$, и, следовательно, для исходного графа также выполняется это равенство.

6.87.(10) В стране Озёрная 7 озёр, соединённых между собой 10 каналами, причём от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

6.88.(15) В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

6.89.(15) Докажите, что для плоского графа верно неравенство $2E \geqslant 3F$.

Следующие задачи являются классическими следствиями теоремы Эйлера.

6.90. а) (10) Для плоского связного графа справедливо неравенство $E \leqslant 3V - 6$. б) (10) Для плоского графа (в том числе и несвязного) справедливо $E \leqslant 3V - 6$.

Доказанное неравенство позволяет находить неплоские графы. Например, доказать, что граф на рис. 6.15 неплоский.

6.91.(10) Граф, имеющий 5 вершин, каждая из которых соединена ребром с любой другой, не является плоским.

Определение 9. Граф, каждая вершина которого соединена ребром с любой другой вершиной, называется *полным*.

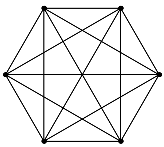


Рис. 6.16

На рис. 6.15 и 6.16 изображены полные графы с 5 и 6 вершинами. Из результата задачи 6.91 следует, что полный граф более чем с 4 вершинами не является плоским.

6.92.(15) (МО 84) а) Каждые две из 6 ЭВМ соединены проводом. Можно ли все эти провода раскрасить в пять цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходили пять проводов разного цвета?

б) Каждые две из 15 ЭВМ соединены проводом. Можно ли все эти провода раскрасить в один из 14 цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило 14 проводов разного цвета?

6.93.(10) Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

Граф из 6.93 называют иногда графом типа «домики — колодцы». Имеет место

Теорема (Понтрягина–Куратовского). Граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит (в топологическом смысле) графа с шестью вершинами типа «домики — колодцы» и полного графа с пятью вершинами.

Определение 9. Граф Γ_1 содержит Γ_2 *в топологическом смысле*, если из графа Γ_1 можно получить Γ_2 последовательностью таких операций: удаление ребра, удаление изолированной вершины и стягивание ребра (при этой операции две вершины V и U, соединённые ребром, сливаются в одну, а рёбра, шедшие к U и V, заменяются на рёбра, идущие к этой вершине).

Замечание. Отличие этого определения от используемого в этой книге (комбинаторного) легко увидеть на следующем примере. Если, например, в графе на рис. 6.15 одно из рёбер разбить на два (при этом появится новая вершина), полученный граф не будет содержать (в комбинаторном смысле) графа с рис. 6.15, но будет содержать его в топологическом смысле.

6.94.(20) Нарисовать плоский граф, имеющий 6 вершин, степень каждой из которых равна а) 3; б) 4.

6.95.(20) Нарисовать плоский граф, имеющий 8 вершин, степень каждой из которой равна 4.

6.96.(15) Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, неплоский.

С помощью неравенства $E \leqslant 3V - 6$ можно доказать следующие три изящных факта.

6.97.(15) Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

6.98.(15) Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо «красный», либо «синий» граф не является плоским.

6.99.(20) Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.

Для плоских графов верен следующий интересный результат:

Теорема (Вагнер, Фари, Штейн). Плоский граф можно изобразить так, чтобы все его рёбра были отрезками.

6.5. Ориентированные графы

Определение 10. Граф, на рёбрах которого расставлены стрелки, называется *ориентированным*.

6.100.(10) Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озёр, соединённых между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки и в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он ошибается.

6.101.(15) В стране есть столица и ещё 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

6.102.(10) В одной стране каждый город соединён с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

6.103.(15) Докажите, что на рёбрах связного графа можно так расставить стрелки, что из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

6.104.(10) Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы любое число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.

6.105.(15) Город Зурбаган ограничен кольцевой дорогой. Все улицы начинаются и кончаются на этой дороге и никакие две улицы не имеют двух различных пересечений. Части, на которые улицы разбивают город, называются микрорайонами. В городе ввели одностороннее движение по всем улицам и кольцевой дороге. Докажите, что хотя бы один микрорайон можно объехать вокруг, не нарушив правил движения.

6.106.(15) В Гиппопотамии города соединены дорогами с односторонним движением, причём из каждого города выходит столько же дорог, сколько в него приходит, и из каждого города можно добраться до другого. Доказать, что можно объехать все города, проезжая по каждой дороге ровно по одному разу.

6.107.(15) В государстве 101 город. а) Каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из любого города можно доехать в любой другой, проехав не более, чем по двум дорогам. б) Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причём в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.

6.108.(15) Написано 1997-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами, делится либо на 17, либо на 23. Последняя цифра числа — 1. Какова первая?

6.109.(20) В стране Ориентация на дорогах введено одностороннее движение, причём из любого города в любой другой можно добраться, проехав не более, чем по двум дорогам. Одну дорогу закрыли на ремонт так, что из каждого города по-прежнему можно добраться до каждого. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать, проехав не более, чем по трём дорогам.

6.110.(20) В некоторой стране между любыми двумя городами имеется непосредственное железнодорожное сообщение, но только в одном направлении. Доказать, что существует такой город, в который из любого другого города можно попасть, проезжая не более, чем через один промежуточный город.

Для решения следующих двух задач полезно вспомнить понятие эйлерова графа и доказательство достаточного условия эйлеровости.

6.111.(15) В связном графе степени всех вершин чётны. Докажите, что на рёбрах графа можно расставить стрелки так, чтобы одновременно выполнялись следующие условия: 1. Двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой. 2. Для каждой вершины числа входящих и выходящих рёбер равны.

6.112.(15) На рёбрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих рёбер равны. Докажите, что двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой.

Решения задач следующего цикла легко оформляются при помощи метода математической индукции.

В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.

Решение. Индукция по числу городов. База очевидна. Для доказательства индукционного перехода удалим сначала один из городов. В силу индукционного предположения есть город A с требуемым свойством. Вспомним теперь про удалённый город. Если в него ведет хотя бы одна дорога, то город A — искомый. В противном случае сам удалённый город удовлетворяет требуемому свойству.

6.113.(10) В одном государстве 100 городов и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

6.114.(15) На графе, который является деревом, каким-то образом расставлены стрелки. Разрешается неограниченное число раз проделать следующую операцию: если в какой-то точке нет выходящих из неё стрелок, а все стрелки в неё входят, то можно изменить направление всех этих стрелок на обратное. Например, $\leftarrow \cdot \rightarrow$ можно переделать в $\rightarrow \cdot \leftarrow$. Доказать, что такими операциями можно изменить направление всех стрелок на любое наперёд заданное.

6.115.(20) (ВО 73) Докажите, что можно соединить n точек ($n > 4$) стрелками так, что из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).

При решении следующих задач удобно использовать граф, изобразив команды в виде вершин, а результат игры в виде стрелки, направленной от победителя к побеждённому.

6.116.(15) Несколько команд сыграли между собой круговой турнир. Будем говорить, что команда A сильнее команды B, если либо A выиграла у B, либо найдется команда C такая, что A выиграла у C, а C — у B. а) Докажите, что есть команда, которая сильнее всех. б) Докажите, что команда, выигравшая турнир, сильнее всех.

6.117.(20) 20 команд сыграли круговой турнир по волейболу. Докажите, что команды можно занумеровать числами от 1 до 20 так, что 1-я команда выиграла у 2-й, 2-я — у 3-й, …, 19-я — у 20-й.

6.118.(20) (МО 70) Какие-то две команды набрали в круговом волейбольном турнире одинаковое число очков. Докажите, что найдутся команды A, B и C такие, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C выиграла у A.

6.6. Знакомства, теория Рамсея

6.119.(10) В купе поезда ехали четыре человека. Среди них не было троих, прежде знакомых друг с другом, но один был знаком с тремя остальными. Докажите, что эти три последних пассажира не были знакомы друг с другом.

6.120.(10) В Цветочном городе каждый коротышка знаком с 6 малышками, а каждая малышка — с 6 коротышками. Докажите, что в этом городе число малышек равно числу коротышек.

6.121.(10) На туристическом слёте выяснилось, что каждый юноша знаком с 8 девушками, а каждая девушка знакома с 6 юношами. Кого больше на слёте: юношей или девушек?

6.122.(10) Во время бала каждый юноша танцевал с девушкой либо более красивой, либо более умной, чем в предыдущем танце, а хотя бы один — с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)

6.123.(15) Однажды друзья обменивались рукопожатиями. В некоторый момент оказалось, что среди любых четырёх из них имеется хотя бы один человек, который успел пожать руки трём другим. Доказать, что друзьям осталось сделать не более трёх рукопожатий.

6.124.(15) На столе лежат журналы. Каждый посетитель просмотрел два журнала; каждый журнал просмотрели три человека; для каждой пары журналов есть только один посетитель, который их просмотрел. Сколько журналов и посетителей?

6.125.(15) Каждый из районов города имеет на центральной станции 4 телефонных аппарата. Каждый аппарат соединяет линии двух районов. Каждая пара районов имеет только один соединяющий их аппарат. Сколько в городе районов и сколько телефонных аппаратов?

6.126.(15) Каждый сотрудник фирмы выписывает две газеты, каждую газету выписывает пять человек и каждую пару газет выписывает только один человек. Сколько человек в фирме и сколько они выписывают газет?

6.127.(20) Докажите, что среди 102 учеников одной школы, знаком не менее чем с 68 другими, них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

6.128.(15) (МО 51) 20 школьникам были заданы 20 задач. Оказалось, что каждый школьник решил две задачи и каждая задача решена двумя школьниками. Доказать, что разбор задач можно организовать так, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и все задачи были разобраны.

6.129.(20) (МО 60) Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причём каждые двое незнакомых имеют ровно двоих общих знакомых, а каждые двое знакомых не имеют общих знакомых. Доказать, что каждый из присутствующих знаком с одинаковым числом человек.

6.130.(20) (МО 64) На конференции присутствует 50 учёных, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

6.131.(20) (МО 72) На конгресс приехало 1000 делегатов из разных стран. Любые трое могут разговаривать между собой без помощи остальных. Доказать, что всех делегатов можно расселить в 500 комнатах так, чтобы в каждой комнате было два делегата, которые могут поговорить между собой.

6.132.(20) (МО 74) На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Любые двое из учёных, имеющие на конгрессе равное количество друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдется учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

6.133.(20) (МО 78) В посёлке живут 100 жительниц. У каждой из них имеется 3 знакомых. 1 января одна узнала новость и сообщила трём своим знакомым, 2 января те сообщили новость всем своим знакомым и т. д. Может ли случиться так, что 5 марта ещё не все жительницы будут знать эту новость, а 19 марта — все?

6.134.(20) (МО 85) Докажите, что в любой группе из 12 человек можно выбрать двух, а среди оставшихся 10 человек ещё пять так, чтобы каждый из них удовлетворял условию: либо он знаком с обоими выбранными в начале, либо не знаком ни с одним из них.

6.135.(20) (МО 95) Докажите, что среди 50 человек обязательно найдутся двое с чётным числом общих знакомых.

6.136.(20) (Венгрия 59) Трое братьев в один день навестили больного друга, и в тот же день ему нанесли визит жёны всех братьев. Никто из посетителей не заходил более одного раза. Каждый из трёх братьев встретился в доме больного друга с двумя своими невестками. Докажите, что кто-то из братьев встретился в доме своего друга также и со своей женой.

6.137.(15) (Венгрия 60) В математическом кружке участвуют 100 школьников. Известно, что среди любых четырёх участников кружка найдется по меньшей мере один, знакомый с остальными тремя. Докажите, что найдется участник, знакомый со всеми 99 остальными участниками. Каково минимальное число школьников, знакомых со всеми остальными 99 участниками?

6.138.(20) (Болгария 78) В компании из 5 человек среди любых троих найдутся двое знакомых и двое, незнакомых друг с другом. Доказать, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

6.139.(20) (США 78) 9 математиков на конгрессе обнаружили, что среди любых трёх из них по меньшей мере двое говорят на одном языке. Кроме того, каждый математик может говорить не более, чем на трёх языках. Докажите, что хотя бы трое из них говорят на одном и том же языке.

6.140.(20) а) (Англия 80) В комнате находятся 10 человек, причём среди любых трёх из них есть двое, знакомые между собой. Докажите, что найдутся четыре человека, любые два из которых знакомы друг с другом. б) (Польша 77) А если вместо 10 человек — 9?

6.141.(20) (ВО 69) В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трёх команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

6.142.(20) (ВО 73) Нужно так познакомить друг с другом некоторых из N человек, не знакомых между собой, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.

6.143.(20) (ВО 81) В посёлке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям посёлка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям.

6.144.(20) (ВО 81) В турнире 18 команд сыграли между собой 8 туров. Каждая команда сыграла с 8 разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

6.145.(20) (ВО 93) У каждого из жителей города N знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города N из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей.

6.146.(20) (ВО 99) В некоторой группе из 12 человек среди каждых девяти найдутся пять попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся шесть попарно знакомых.

Теория Рамсея

6.147.(15) а) Каждое из рёбер полного графа с 6 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми — одного цвета. б) („игровой вид“)(Венгрия 47) На всемирном фестивале молодёжи встретились 6 делегатов. Выяснилось, что среди любых трёх из них двое могут объясниться между собой на каком-нибудь языке. Докажите, что тогда найдется тройка делегатов, каждый из которых может объясниться с каждым.

6.148.(15) (Польша) Докажите, что среди любых пяти точек на плоскости можно выбрать четыре, являющиеся вершинами выпуклого четырёхугольника. (Никакие три точки не лежат на одной прямой.)

6.149.(20) а) Рёбра полного графа с 17 вершинами покрашено в один из трёх цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми — одного цвета. б) („игровой вид“)(МЕО 64) 17 учёных из разных стран переписываются на одном из трёх языков. Докажите, что среди них найдутся трое, которые переписываются на одном языке.

6.150.(20) а) Каждое из рёбер полного графа с 9 вершинами покрашено в синий или в красный цвет. Докажите, что либо есть 4 вершины, все рёбра между которыми синие, либо есть 3 вершины, все рёбра между которыми красные. б) („игровой вид“) Среди 9 мушкетёров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Доказать, что если среди них нет трёх таких, что все они должны драться друг с другом, то найдётся четыре мушкетёра, не поссорившихся между собой.

6.151.(20) Рёбра полного графа с 18 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть четыре вершины, все рёбра между которыми одного цвета.

6.152.(20) На плоскости даны n точек (никакие три не лежат на одной прямой), соединённые отрезками, и каждый отрезок окрашен в один из четырёх цветов. При каком наименьшем n найдется треугольник с одноцветными сторонами?

6.153.(30) Докажите, что среди n точек общего положения на плоскости можно отметить 100, образующие вершины выпуклого 100-угольника, если n достаточно большое.

Обобщением задач этого пункта является следующая теорема.

Теорема (Рамсея). Для любых M и K найдётся такое N, что из любого полного графа, имеющего не менее N вершин, рёбра которого раскрашены в M цветов, можно выделить полный подграф с K вершинами, все рёбра которого покрашены в один цвет.

7. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ЛОГИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

7.1.(5) В кошельке лежат 2 монеты на общую сумму 15 коп. Одна из них не пятак. Что это за монеты?

7.2.(10) (МО 96) В двух кошельках лежат две монеты, причём в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как это так может быть?

7.3.(15) Один пятак («пятак» — старинная советская монета достоинством в 5 копеек) обкатывают вокруг неподвижного второго. Сколько оборотов вокруг своего центра он сделает к моменту возвращения в исходную точку?

7.4.(5) Андрей пошёл с папой в тир. Уговор был такой: Андрей делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право ещё на 2 выстрела. Всего Андрей выстрелил 25 раз. Сколько раз он попал?

7.5.(10) Встречаются два математика. Один из них говорит: «У меня есть три сына и произведение их возрастов равно 36. Сколько им лет?» Второй математик не смог ответить на этот вопрос. Тогда первый сказал, что сумма возрастов его сыновей равна числу окон в доме напротив. И снова второй не смог ответить. Тогда первый сказал, что его старший сын рыжий. Тут второй математик сразу всё понял. Сколько лет сыновьям первого математика?

7.6.(10) Путешественник выходит из некоторой точки земного шара и идёт 1 км на юг, 1 км на восток и 1 км на север. В результате оказалось, что он пришёл в ту же самую точку, откуда вышел. Где это могло бы быть?

7.7.(10) (Историческая задача.) В одной экскурсии участвовали семиклассники и восьмиклассники. Все они были либо с комсомольскими значками, либо в пионерских галстуках. Мальчиков было 16, комсомольцев и комсомолок всего 24. Пионерок было столько, сколько мальчиков, вступивших в комсомол. Сколько всего ребят участвовало в экскурсии?

7.8.(15) Когда обезьяна несла три одинаковых кокосовых ореха на вершину многоэтажного дерева, один орех упал с 11-го этажа и разбился. Обезьяна хочет определить самый высокий этаж, при падении с которого кокосовые орехи не разбиваются. Она может уронить орех с любого этажа и подобрать его, если он цел. Докажите, что ей хватит четырёх испытаний (с двумя орехами).

7.9.(10) В гостиницу приехал путешественник. Денег он не имел, а обладал лишь серебряной цепочкой, состоящей из семи звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки, при этом хозяин предупредил, что согласен взять не более одного распиленного звена.

Как путешественнику распилить цепочку, чтобы прожить в гостинице неделю и ежедневно расплачиваться с хозяином?

7.10.(15) (МО 51) Какое наименьшее число звеньев пришлось бы распилить, если бы путешественник жил в гостинице 100 дней и имел бы цепочку из 100 звеньев? Каков ответ в общем случае (n дней и n звеньев)? Предполагается, что хозяин согласен принять любое число распиленных звеньев.

7.11.(10) Ювелиру принесли 5 обрывков цепочки по 3 звена в каждом и заказали соединить их в одну цепочку. Как сделать это, раскрыв и заковав три звена?

7.12.(15) Школьник участвует в двух математических кружках, которые работают в противоположных концах Москвы.

Ехать надо по одной и той же линии метро, но в противоположные стороны. Этот школьник садится каждый раз на первый приходящий поезд независимо от того, с какой стороны тот пришёл. К концу года школьник обнаружил, что в первом кружке он бывал вдвое чаще, чем во втором. Как это могло произойти? (Конечно, школьник попадает в метро не всегда в одно и то же время: иногда немного позже, иногда немного раньше в пределах некоторого промежутка, в течение которого приходит несколько поездов с каждой стороны. Поезда проходят в каждом направлении через одинаковые интервалы времени.)

7.13.(10) (МО 97) В Мексике экологи добились закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей должно быть в семье, если взрослых в ней а) 5 человек, б) 8 человек?

7.14.(15) Какое наименьшее число жильцов можно вселить в 30-квартирный дом так, чтобы в любых трёх наугад взятых квартирах проживало по меньшей мере 7 человек?

7.15.(15) (ВО 88) Книга состоит из 30 рассказов объёмом 1, $2, \ldots, 30$ страниц. Рассказы печатаются с первой страницы, каждый рассказ начинается с новой страницы. Какое наибольшее количество рассказов может начинаться с нечётной страницы?

7.16.(15) 10 человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую смог влезть (т. е. не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей не смогло надеть галоши?

7.17.(20) Между соседними лагерями один день пути. Экспедиции требуется перенести одну банку консервов в лагерь, находящийся в 5 днях пути от базового, и вернуться обратно. При этом каждый член экспедиции может нести с собой не более трёх банок консервов; за один день он съедает одну банку консервов; оставлять консервы можно только в лагерях. Какое наименьшее количество банок консервов придётся взять из базового лагеря для этой цели?

7.18.(20) В пруд выпустили 40 щук. Щука сыта, если она съела трёх других щук (сытых или голодных). Какое максимальное число щук может насытиться? (Съеденная сытая щука считается сытой.)

7.19. а) (15) Три рыбака хотят поделить улов, а весов у них нет. Каждый уверен, что он бы поделил улов на равные части, но остальные ему не доверяют. Если бы рыбаков было двое, то выйти из положения было бы легко: один разделил бы улов на две части, а другой взял бы ту часть, которая ему кажется большей. Укажите, как должны действовать три рыбака, чтобы каждый из них был уверен, что его доля составляет не менее одной трети от всего улова. б) (20) Решите эту задачу в случае, когда рыбаков n.

7.20.(15) (СО 97) Три колокола начинают быть одновременно. Интервалы между ударами колоколов соответственно составляют 4/3 секунды, 5/3 секунды и 2 секунды. Совпавшие во времени удары воспринимаются за один. Сколько ударов будет услышано за 1 минуту? (Включая первый и последний.)

7.21.(15) Однажды я услышал, как били двое часов с боем. Они начали бить одновременно, одни из них били через 3 с, другие — через 4 с. Всего было 8 ударов, но при этом совпадающие удары не мог различить и считал их за один. Сколько было времени, если и те и другие часы бьют только целое число часов?

7.22.(20) И сказал Кощей Ивану-Царевичу: «Жить тебе до завтра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я три цифры — x, y, z. Назовешь ты мне три числа — a, b, c. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax+by+cz$. Не отгадаешь цифры x, y, z — голову с плеч долой». Запечалился Иван-Царевич, пошёл думу думать. Как ему помочь?

7.23.(20) Бизнесмен ежедневно приезжал на станцию в одно и то же время, и в это же время за ним приезжала машина, на которой он ехал на дачу. Однажды бизнесмен приехал на станцию на 55 минут раньше обычного, сразу пошёл навстречу машине и приехал на дачу на 10 минут раньше обычного. Во сколько раз скорость бизнесмена меньше скорости машины?

7.24.(15) (МО 97) От вулканостанции до вершины вулкана Стромболи надо идти 4 часа по дороге, а затем — 4 часа по тропинке. На вершине расположено два кратера. Первый кратер 1 час извергается, потом 17 часов молчит, потом опять 1 час извергается и т. д. Второй кратер 1 час извергается, 9 часов молчит, 1 час извергается и т. д. Во время извержения первого кратера опасно идти и по тропинке, и по дороге, а во время извержения второго опасна только тропинка. Ваня увидел, что ровно в 12 часов оба кратера начали извергаться одновременно. Сможет ли он когда-нибудь подняться на вершину вулкана и вернуться назад, не рискуя жизнью?

7.25.(20) (МО 97) Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика, светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

Домино

7.26.(15) Можно ли выложить в цепь все 28 костей домино так, чтобы а) на одном конце оказалась 6, а на другом — 5? б) на обоих концах была 6?

7.27.(20) Можно ли выложить в цепь в соответствии с правилами игры в домино все кости, не содержащие шестёрок? В две цепи? В три цепи?

7.28.(15) (МО 70) При обычной игре в домино кости выкладываются так, чтобы разность между числами на соседних костях равнялась 0. Можно ли выложить все 28 костей в замкнутую цепь так, чтобы все эти разности равнялись ± 1?

7.29.(15) (МО 76) На бесконечном листе клетчатой бумаги укладываются кости домино размером 1×2 так, что они покрывают все клетки. Можно ли при этом добиться того, чтобы каждая прямая, идущая по линиям сетки, разрезала бы лишь конечное число костей домино?

7.30.(20) Все 28 костей домино выложены в кольцо по правилам игры. Каждую вторую кость выбросили. Доказать, что оставшиеся 14 костей можно сложить либо в одно кольцо, либо в два кольца. Приведите пример, когда их нельзя сложить в одно кольцо.

7.31.(20) Рассмотрим полный набор домино, в котором числа на половинках косточек могут принимать значения от 0 до n. Какое наибольшее число косточек может быть выложено в соответствии с правилами игры?

Доли и проценты

7.32.(10) (МО 95) После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от установившегося нового уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

7.33.(15) Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков в лицее?

7.34.(20) Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше 2/5 от общего числа участников похода. Докажите, что во всем классе доля мальчиков не больше 4/7.

7.35.(15) (СПО 62) На прямоугольном столе лежат 15 журналов, полностью закрывая его. Доказать, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся закрывали не менее 8/15 площади стола. Говоря более формально: некоторый прямоугольник полностью покрыт 15 меньшими прямоугольниками. Доказать, что можно убрать 7 из них так, чтобы оставшиеся покрывали не менее 8/15 площади исходного прямоугольника.

7.36.(15) (СПО 72) На встрече собрались все участники двух походов (кто-то был только в одном походе, а некоторые — в обоих). В первом походе было 60% мужчин, во втором — 75%. Доказать, что мужчин на встрече было не меньше, чем женщин.

7.37.(20) (МО 97) В тексте к каждому вопросу указаны 5 вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Если двоечнику удается списать, он отвечает правильно, в противном случае — наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на 1/5 часть). За год двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

Турниры

Предполагается, что в футболе и хоккее победа даёт два очка, ничья — одно, а поражение — ноль очков, а в шахматах — 1, 1/2 и 0 очков соответственно.

7.38.(10) Четверть участников шахматного турнира составляли гроссмейстеры, а остальные — мастера. За один круг мастера в сумме набрали в 1,2 раза больше очков, чем гроссмейстеры. Сколько было мастеров и гроссмейстеров?

7.39.(15) В чемпионате по футболу в один круг пять команд А, Б, В, Г и Д заняли места в том же порядке, начиная с первого. Команда А не сделала ни одной ничьей, Б не проиграла ни одной встречи, Г не выиграла ни одной встречи. Все команды набрали разное количество очков. Восстановите турнирную таблицу.

7.40.(15) Шесть команд в розыгрыше кубка по хоккею в один круг набрали разное количество очков. Только одна встреча окончилась вничью. Каждая команда, кроме занявшей первое место, выиграла у одной из команд, занявших более высокое место. Восстановите турнирную таблицу.

7.41.(15) Шесть шахматистов: А, Б, В, Г, Д, Е — сыграли в турнире в один круг. А сыграл все партии вничью, Б не проиграл ни одной встречи, В выиграл у победителя и сыграл вничью с Д. Г опередил Д, но отстал от Е. Кто сколько очков набрал?

7.42.(15) Семь шахматистов сыграли в турнире в один круг. Победитель набрал вдвое больше очков, чем набрали вместе шахматисты, занявшие три последних места. Занявший четвёртое место набрал 3 очка. Как он сыграл с занявшими 5-е место и 3-е место?

7.43.(15) В первенстве школы по футболу в один круг участвовали шесть команд. Может ли быть так, что набравшая наибольшее число очков команда одержала меньше побед, чем любая другая?

7.44.(15) Три ученика выполнили несколько контрольных работ. Скажем, что ученик А опередил ученика В, если в большинстве контрольных А получил лучшую оценку, чем В. Придумайте пример, когда А опередил В, В опередил С, а С опередил А.

7.45.(15) После проведения шахматного турнира в один круг выяснилось, что все партии были результативными и все игроки знали имена тех участников, которые выиграли у них, а также тех, кто выиграл у их победителей. Доказать, что найдётся шахматист, знающий всех участников турнира.

7.46.(15) Футбольный турнир в один круг закончился тем, что команды набрали по разному количеству очков, а команда, занявшая последнее место, выиграла у всех трёх призёров. Докажите, что в турнире не могло участвовать 12 команд.

7.47.(15) В шахматном турнире участвовало n шахматистов — гроссмейстеры и мастера. После окончания турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в партиях против мастеров. Доказать, что n — точный квадрат.

7.48.(20) 8 хоккейных команд играют за выход в финальную четвёрку в один круг. Какое наименьшее число очков гарантирует команде выход в финальную четвёрку?

7.49.(20) Три друга играли в шахматы, причём все сыграли одинаковое число партий. Могло ли так случиться, что у первого больше всех побед, у второго меньше всех поражений, а у третьего больше всех очков?

7.50.(20) Призёры турнира по футболу набрали соответственно 7, 5 и 3 очка. Сколько в турнире участвовало команд, и сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? (Если две команды набирают одинаковое число очков, то место определяется по разности числа забитых и пропущенных голов.)

7.51.(20) Три студента A, B, C проходят проверку тестами. Занявший первое место получил x очков, второе — y, третье — z, $x > y > z$. Ни в одном из тестов не было дележа мест. Студент A набрал 20 очков за все тесты, B — 10 очков, C — 9 очков. A был вторым в тесте по алгебре. Кто был вторым в тесте по геометрии?

7.52.(20) (МО 46) В шахматном турнире участвовали два ученика 7-го класса и некоторое число учеников 8-го класса. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а каждый восьмиклассник набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? (Каждый участник играет с каждым другим один раз.) Найдите все решения.

7.53.(15) (МО 60) В турнире каждый шахматист половину всех очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек участвовало в турнире?

7.54.(15) (МО 68) В шахматном турнире участвовало 12 человек. После окончания каждый составил 12 списков. В первый список входит он сам, во второй — он и те, у кого он выиграл, в третий — все люди из второго списка и те, у кого они выиграли, и т. д. В 12-й список входят все люди из 11-го и те, у кого они выиграли. Известно, что для любого участника турнира в его 12-й список попал человек, которого не было в его 11-м списке. Сколько ничейных партий было сыграно в турнире?

7.55.(15) (МО 71) В футбольном турнире участвовало 25 команд. По окончании оказалось, что ни в одной встрече ни одна команда не забила в ворота противника более четырёх мячей. Какое самое низкое место могла занять команда, забившая мячей больше, чем любая другая, и пропустившая меньше любой другой команды?

7.56.(20) (МО 75) В футбольном турнире принимают участие n команд (в один круг). Какой максимальный разрыв в очках может быть между командами, занявшими соседние места?

7.57.(15) (МО 95) В поединке любых двух из девяти борцов разной силы всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их по трое на три команды так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» по числу побед первая команда одержала верх над второй, вторая — над третьей, а третья — над первой?

7.58.(20) (МО 95) В круговом турнире по шашкам из n участников ($n > 1$) каждый должен сыграть с каждым по одной партии. Каждая партия занимает час. а) Докажите, что турнир всегда можно провести за n часов. б) при каких n турнир можно провести за $n - 1$ час?

7.59.(15) (ВО 90) Футбольный турнир в один круг закончился тем, что наибольшее количество очков набрала команда, которая одержала меньше побед, чем любая другая. При каком наименьшем числе команд-участниц это возможно?

7.60.(15) (СО 98) Футбольный турнир проходит в один круг. За победу давалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Могло ли так случиться, что команда, занявшая первое место, при старой системе подсчёта очков (победа — 2 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0) была бы последней?

7.61.(20) (ВО 63) В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов (каждый сыграл по разу с каждым). Все они набрали различное число очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько набрали вместе шахматисты, занявшие места с 5-го по 8-е. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 3-е и 5-е места?

7.62.(20) (ВО 92) Однокруговой футбольный турнир закончился тем, что команды набрали по разному количеству очков, а команда, занявшая последнее место, выиграла у трёх призёров. Докажите, что в турнире не могли участвовать 12 команд.

7.63.(20) (ВО 93) В турнире по теннису n участников хотят провести парные (двое на двое) матчи так, чтобы каждый из участников имел своим противником каждого из остальных ровно в одном матче. При каких n возможен такой турнир?

7.64.(25) (МО 97) В круговом турнире не было ничьих, за победу давалось 1 очко, за поражение — 0. Затем был определён коэффициент каждого участника. Он равнялся сумме очков, набранных теми, кого победил данный спортсмен. Оказалось, что у всех участников коэффициенты равны. Число участников турнира больше двух. Докажите, что все спортсмены набрали одинаковое количество очков.

7.65.(25) (МО 97) $2n$ спортсменов дважды провели круговой турнир (в круговом турнире каждый встречается с каждым, за победу начисляется 1 очко, за ничью — 1/2, за поражение — 0).

Докажите, что если сумма очков каждого изменилась не менее чем на n, то она изменилась ровно на n.

7.66.(20) (МО 99) В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую — чёрными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков. Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий.

7.67.(15) (МО 00) В круговом шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым один раз. Назовём партию неправильной, если выигравший её шахматист в итоге набрал очков меньше чем проигравший. Могут ли неправильные партии составлять а) более 75%; б) более 70% от общего количества партий в турнире?

Числа

7.68.(15) Даны 10 натуральных чисел, не превышающих 91. Докажите, что отношение некоторых двух из этих чисел принадлежит отрезку $[2/3; 3/2]$.

7.69.(15) В 9 ячейках записаны числа: в первой — единица, в остальных — нули. За одну операцию можно выбрать две ячейки и заменить каждое число в них полусуммой этих чисел. Какое наименьшее число можно получить в первой ячейке?

7.70.(15) Можно ли расположить все трёхзначные числа, не оканчивающиеся нулями, в последовательность так, чтобы последняя цифра каждого числа была равна первой цифре следующего за ним числа?

7.71.(15) Президент акционерного общества «Не обманешь — не продашь» объявил на собрании акционеров, что за каждые пять последовательных месяцев расход фирмы превышал доход, а за весь год доход превысил расход. Должны ли акционеры подать на него в суд?

Это «игровой вид» следующей задачи:

7.72.(15) (МО 69) Можно ли выписать в строчку 20 чисел так, чтобы сумма любых трёх соседних была положительной, а сумма всех чисел — отрицательной?

7.73.(20) Докажите, что можно выписать в строчку n чисел так, чтобы сумма любых k соседних была отрицательной, а сумма всех n положительна тогда и только тогда, когда n не делится на k.

7.74.(20) (МО 69) а) Докажите, что нельзя выписать в строку 50 действительных чисел так, чтобы сумма любых 7 идущих подряд чисел была положительна, а сумма любых 11 идущих подряд чисел — отрицательна. б) Выпишите в строку 50 чисел так, чтобы сумма любых 47 стоящих подряд чисел была положительна, а сумма любых 11 стоящих подряд чисел — отрицательна.

7.75.(20) (МЕО 77) В конечной последовательности действительных чисел сумма любых 7 идущих подряд членов отрицательна, а сумма любых 11 идущих подряд положительна. Найти наибольшее число членов такой последовательности.

7.76.(25) Пусть в строчку выписано m чисел. Назовем сумму q идущих подряд чисел этой строки q-суммой. Тогда можно написать m чисел так, что все n-суммы будут иметь один знак, а все k-суммы — другой знак, если $m \leqslant n+k-d-1$, где $d = \text{НОД}(n;k)$.

Если мы имеем дело не обязательно с соседними числами, то

7.77.(15) (ТГ 89) Дано 1989 чисел. Известно, что сумма любых 10 из них положительна. Доказать, что сумма всех чисел положительна.

7.78.(15) Известно, что произведение всех данных 51 чисел, а также любых четырёх из них — положительно. Доказать, что каждое из чисел положительно.

7.79. а) (15) Можно ли 203 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел тоже было равно 203? б) (20) Можно ли это сделать для любого непростого числа?

7.80.(20) (СО 98) На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 9$. За один ход можно увеличить любое из чисел на 3 или на 5. Какое минимальное число ходов нужно сделать, чтобы все числа стали равными?

7.81.(15) (ВО 63) Даны n различных положительных чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Из них составляются всевозможные суммы с любым числом слагаемых (от 1 до n). Докажите, что среди этих сумм найдётся по крайней мере $n(n+1)/2$ попарно разных.

7.82.(15) (ВО 65) а) Каждое из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может независимо от остальных принимать значение 1, 0 или -1. Какое наименьшее значение может иметь сумма всевозможных попарных произведений этих n чисел? б) Какое наименьшее значение может принимать сумма всевозможных попарных произведений n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, каждое из которых по абсолютной величине не превосходит единицы?

7.83.(15) (ВО 85) Числа $1, 2, \ldots, 2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — числа первой группы, записанные в возрастающем порядке, и $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ — числа второй группы в убывающем порядке. Докажите, что $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = n^2$.

7.84.(20) (ВО 75) Числа $1, 2, \ldots, 1975$ разбиты на две группы. К первой группе отнесены числа с нечётной суммой цифр, ко второй — с чётной. Что больше: сумма всех чисел из первой группы или сумма всех чисел второй?

7.85.(20) (ВО 94) Для каких натуральных n числа $1, 2, \ldots, 4n$ можно разбить на n групп по 4 числа так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось среднему арифметическому трёх остальных?

Таблицы

7.86.(15) Прямоугольная таблица из 5 строк и 7 столбцов заполнена целыми числами. Может ли сумма чисел в каждой строке быть положительной, а в каждом столбце — отрицательной?

7.87.(15) (Продолжение) Может ли сумма чисел в каждой строке быть чётной, а в каждом столбце — нечётной?

7.88.(15) Можно ли заполнить таблицу а) 4×4 б) 5×5 числами так, чтобы произведение чисел в каждом столбце было положительно, а в каждой строке — отрицательно?

7.89.(20) Можно ли в клетки таблицы 5×5 записать 25 чисел так, чтобы сумма всех чисел таблицы была положительной, а сумма чисел в любом квадрате 2×2, 3×3, 4×4 — отрицательной?

7.90.(15) Плоскость разбита на квадратные клетки как лист в клетку. В каждой клетке записано целое положительное число. Известно, что каждое число равно среднему арифметическому четырёх чисел, стоящих в соседних клетках: сверху, снизу, справа и слева. Докажите, что все числа равны между собой.

7.91.(20) В клетках квадратной таблицы размера $n \times n$ расставлены числа. Сумма чисел, стоящих в любом «кресте», не меньше a. (Под «крестом» понимается фигура, составленная из одного полного столбца и одной полной строки.) Какое наименьшее значение может иметь сумма всех чисел таблицы?

7.92.(20) (ТГ 88) В таблице 10×10 записаны числа от 1 до 100 по порядку, какие-то с плюсом, а некоторые с минусом так, что в каждой строке и в каждом столбце ровно 5 отрицательных чисел. Найдите сумму всех чисел, стоящих в таблице.

7.93.(15) (ВО 82) По кругу расставлены 100 чисел. Известно, что каждое число равно среднему арифметическому (варианты: среднему геометрическому; среднему арифметическому или среднему геометрическому) двух соседних. Докажите, что все числа равны.

7.94.(20) (МО 56) В каждой клетке бесконечного клетчатого листа бумаги стоит число, равное среднему арифметическому четырёх соседних чисел. Из этого листа вырезана прямоугольная таблица. Доказать, что наибольшее из всех чисел таблицы стоит с краю.

7.95.(20) (МО 94) Есть прямоугольник $m \times n$ клеток. Какое наименьшее число клеток в нем можно заштриховать, чтобы в оставшихся клетках нельзя было разместить «уголок» из трёх клеток (в любом положении)?

7.96.(20) (МО 95) В квадрате размером 6×6 клеток некоторые клетки окрасили в чёрный цвет так, что из любой чёрной клетки можно пройти в любую другую чёрную клетку, переходя только через общие стороны чёрных клеток. Может ли среди чёрных клеток быть а) 10; б) 12 клеток, которые имеют общую сторону ровно с одной чёрной клеткой?

7.97.(20) (МО 95) Прямоугольник размерами $1 \times k$ при всяком натуральном k будем называть полоской. При каких натуральных n прямоугольник размерами $1995 \times n$ можно разрезать на попарно различные полоски?

7.98.(20) (ВО 82) В каждой клетке бесконечного клетчатого листа написано какое-то действительное число. Докажите, что в некоторой клетке написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырёх из восьми соседних клеток.

7.99.(20) (ВО 87) В каждой клетке квадратной таблицы $1987 \times \times 1987$ написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.

7.100.(20) (ВО 90) В клетки таблицы $n \times n$ требуется записать действительные числа так, чтобы сумма всех чисел была положительна, а сумма чисел в любом квадрате $k \times k$ была отрицательна. Найдите все значения k, для которых это можно сделать.

7.101.(20) (ВО 95) Можно ли в таблице 11×11 расставить натуральные числа от 1 до 121 так, чтобы числа, отличающиеся друг от друга на 1, располагались в клетках с общей стороной, а все точные квадраты попали в один столбец?

7.102.(20) (ВО 95) В клетках таблицы 2000×2000 записаны числа 1 и -1. Известно, что сумма всех чисел в таблице неотрицательна. Докажите, что найдутся 1000 строк и 1000 столбцов таблицы таких. что сумма чисел, записанных в клетках, находящихся на их пересечении, не меньше 1000.

Вариации знакомства

7.103.(10) В Парламенте Алексфении 100 депутатов. По крайней мере один из них честен. В каждой паре депутатов по крайней мере один продажен. Сколько честных депутатов в этой стране?

7.104.(10) В компании из пяти мальчиков каждый имеет среди остальных не менее двух братьев. Доказать, что все пятеро — братья.

7.105.(20) (СО 98) В походе, который длился 12 дней, участвовало 9 человек. При этом дежурные ссорились друг с другом и никакие двое из них не хотели больше ни разу дежурить вместе. Тем не менее, все 12 дней им удавалось назначать тройки дежурных с учётом этого требования. Могло ли так быть?

7.106.(10) (МО 97) В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

7.107.(15) В компании N человек ($N > 3$). У каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что если все узнали все про всех, то было не менее чем $2N - 4$ звонка.

7.108.(15) (МО 72) В городе «Многообразие» живут n жителей, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют между собой. Каждый день не более чем один житель может начать новую жизнь: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Доказать, что все жители могут подружиться (если A — друг B, B — друг C, то A также друг C).

7.109.(15) (МО 94) Каждый из 1994 депутатов парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно составить парламентскую комиссию из 665 человек, члены которой не выясняли отношений между собой указанным способом.

7.110.(20) (МО 64) При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причём каждый из них имеет среди присутствующих не более $n-1$ врага. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за Круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

7.111.(20) (СПО 96) В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг другу, некоторые — нет. Каждый вечер один из этих людей устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека всё ещё не знакомы друг с другом. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться также не удастся.

7.112.(20) (ВО 90) В Сенате 30 сенаторов. Каждые двое из них либо дружат, либо враждуют. Каждый сенатор враждует ровно с шестью другими. Каждые три сенатора образуют комиссию. Найти общее число таких комиссий, в которых все три члена попарно дружат либо три попарно враждуют.

7.113.(20) (ВО 91) Делегаты съезда должны выбрать комиссию. Каждый делегат выбирает 10 человек из списка кандидатов. Назовем комиссию «хорошей» для делегата, если хотя бы один выбранный делегатом человек входит в комиссию. Оказалось, что для любых 6 делегатов найдётся комиссия из двух человек, которая является «хорошей» для каждого из 6 делегатов. Докажите, что можно выбрать комиссию из 10 человек, «хорошую» для всех делегатов.

Соответствие (снабжение парой)

7.114.(10) (МО 97) Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

7.115.(15) (МО 53) На окружности выбрано 100 точек: $A_1, \ldots, A_{100}$. Каких и на сколько выпуклых многоугольников больше: тех, у которых A_1 — вершина, или остальных?

7.116.(20) В классе 28 учеников, которые сидят по двое за 14 партами. В начале каждого месяца учитель рассаживает их так, чтобы за каждой партой сидели двое, никогда до этого рядом не сидевшие. Какое наибольшее число месяцев учитель сможет это делать?

7.117.(20) Рассматриваются все натуральные числа, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 0 и 1. Разбейте эти числа на группы так, чтобы в десятичной записи суммы любых двух различных чисел из одной и той же группы, содержалось не менее двух единиц.

7.118.(15) (МО 93) Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с центральной секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

7.119.(15) (МО 94) Придворный астролог называет момент времени хорошим, если часовая, минутная и секундная стрелки часов находятся по одну сторону от какого-нибудь диаметра циферблата. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого? (Стрелки вращаются по общей оси и не делают скачков.)

7.120.(20) (МО 54) Рассматриваются десятизначные числа, записываемые с помощью цифр 1 и 2. Разбить их на два класса так, чтобы при сложении двух любых чисел одного класса получалось число, в написании которого содержится не менее двух троек.

7.121.(20) (МО 57) Даны n чисел: $a_1 = 1$, $a_2, \ldots, a_n$, причём $a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant 2a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и сумма всех чисел чётна. Можно ли эти числа разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были равны?

7.122.(15) (ВО 65) Докажите, что сумма всех «счастливых» чисел от 000000 до 999999 делится на 13. (Число называется «счастливым», если сумма первых трёх его цифр равна сумме трёх последних.)

7.123.(15) (ВО 96) Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 1 000 000 включительно: представимых в виде суммы точного квадрата и точного куба или не представимых в таком виде?

7.124.(20) (ВО 89) Доказать, что все пятизначные числа, в записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5 встречается по одному разу, можно разбить на две группы с одинаковыми суммами квадратов.

Погрузка

7.125.(10) Как погрузить 21 бочку, из которых 7 полны кваса, 7 пусты, а 7 наполнены ровно наполовину, на три автомобиля так, чтобы на всех грузовиках было поровну бочек и кваса?

7.126.(15) Несколько одинаковых ящиков весят вместе 10 т, причём каждый весит не более 1 т. Какого наименьшего числа трёхтонок достаточно, чтобы увезти за один раз весь груз?

7.127.(15) Из карьера нужно вывезти 870 т глыб, причём каждая весит не более 8 т. Докажите, что для перевозки достаточно 17 платформ грузоподъёмностью 58 т каждая.

7.128.(15) (МО 56, СПО 62) Груз 13,5 т упакован в некоторое количество невесомых ящиков. Масса каждого с грузом не превосходит 350 кг. Доказать, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках.

7.129.(15) (СО 98) а) Есть бочки весом $1, 2, \ldots, 20$ пудов. Можно ли разложить их в три грузовика поровну (по весу)? б) А бочки весом $1, 2, \ldots, 10$ пудов.

Дискретная непрерывность

Решение задач этого цикла основано на очень простом соображении, которое можно наглядно продемонстрировать следующим образом. Пусть блоха прыгает по целым числам, каждый раз перепрыгивая на соседнее число. Тогда, если исходно она находилась на отрицательном числе, а в конце — на положительном, то в какой-то момент блоха побывала в нуле.

На плоскости дано 100 *точек. Докажите, что есть прямая, по обе стороны от которой лежит по* 50 *точек данного набора.*

Решение. Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через пары точек нашего 100-элементного множества. Проведём любую прямую, не параллельную ни одной из них, и такую, что все 100 точек лежат по одну сторону от неё. Начнём параллельно самой себе двигать её к этим точкам и следить за тем, как изменяется количество точек за прямой. Очевидно, что в какой-то момент оно станет равно 50. Это и есть нужная нам прямая.

7.130.(15) В ряд выложено 100 чёрных и 100 красных шаров, причём самый левый и самый правый шары — чёрные. Докажите, что можно выбрать слева подряд несколько шаров (но не все!) так, что среди них количество красных равно количеству чёрных.

7.131.(15) В клетках доски 8×8 расставлены числа $+1$ и -1, причём так, что сумма всех чисел равна нулю. Докажите, что доску можно разрезать на два куска так, что сумма чисел в каждом из кусков равна нулю.

7.132.(15) Грани 8 единичных кубиков окрашены в чёрный и белый цвета так, что чёрных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2 \times 2 \times 2$, на поверхности которого чёрных и белых квадратиков поровну.

7.133.(15) Матч «Зенит» — «Молот» закончился со счётом 8 : 5 в пользу «Зенита». Доказать, что в матче был такой момент, когда «Зениту» осталось забить столько мячей, сколько «Молот» уже забил к тому времени.

7.134.(15) (СО 98) Натуральное число a меньше натурального числа b, причём сумма цифр числа a на 100 меньше суммы цифр числа b. Доказать, что между числами a и b есть число, сумма цифр которого на 43 больше суммы цифр a.

7.135.(20) В некоторых клетках квадрата 50×50 стоят $+1$ и -1, причём абсолютная величина суммы всех чисел не больше 100. Докажите, что есть квадрат 25×25, абсолютная величина суммы чисел в котором не превосходит 25.

7.136.(20) Последовательность чисел (a_n) такова, что $a_1 = 1$ и $(a_{n+1} - a_n)$ равно 0 или 1 при любом n. Докажите, что если $a_n = n/1000$ при некотором n, то $a_m = m/500$ для некоторого m.

Геометрия

7.137.(10) Легко распилить кубик $3 \times 3 \times 3$ на 27 кубиков шестью распилами. Можно ли уменьшить число распилов, если распиливать несколько кусков сразу?

7.138.(15) Квадрат 8×8 сложен из доминошек 1×2. Докажите, что какие-то две из них образуют квадрат 2×2.

7.139.(15) Квадратная площадь размером 100×100 выложена квадратными плитами 1×1 четырёх цветов: белого, красного, чёрного и серого — так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (т. е. не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

7.140.(15) (МО 95) Хватит ли для изготовления закрытой со всех сторон прямоугольной коробки с целочисленными длинами сторон, объём которой не меньше 1995 единичных кубиков, а) 962; б) 960; в) 958 квадратных единиц материала?

7.141.(15) (ВО 97) Квадрат $n \times n$ $(n > 24)$ склеен в цилиндр. Часть клеток покрашена в чёрный цвет. Докажите, что найдутся две параллельных линии (две горизонтали, две вертикали или две диагонали), содержащие одинаковое число чёрных клеток.

7.142.(15) (МО 73) На белую плоскость поставили кляксу. Для каждой точки кляксы определили минимальное и максимальное расстояние до границы кляксы. Из всех минимальных расстояний выбрали наибольшее, из всех максимальных — наименьшее. Какую форму имеет клякса, если полученные расстояния равны?

7.143.(20) (МО 94) На белой плоскости живет чёрная ограниченная клякса. Каждая точка плоскости в следующую секунду становится чёрной, если в круге радиусом 1 с центром в этой точке площадь кляксы больше, чем половина круга, и белой в противном случае. а) Может ли клякса жить вечно? б) Может ли клякса через некоторое время увеличиться по площади более чем в миллион раз?

7.144.(10) Какое наибольшее число пешек можно поставить на шахматную доску, если на поле e4 пешку ставить нельзя и никакие две пешки не могут стоять на полях, симметричных относительно поля e4?

7.145.(15) Какое максимальное число ладей можно расставить в кубе а) $4 \times 4 \times 4$, б) $8 \times 8 \times 8$, чтобы они не били друг друга?

7.146.(15) (Венгрия 30) На шахматной доске 8×8 произвольно проведена прямая. Чему равно наибольшее число клеток, которое она может пересечь?

7.147.(20) (МО 95) На полях шахматной доски стоят несколько ладей. Докажите, что можно раскрасить ладьи в три цвета, что одноцветные ладьи не будут бить друг друга.

7.148.(20) (ВО 85) Какое наибольшее число дамок можно расставить на шашечной доске 8×8 клеток так, чтобы каждая дамка билась хотя бы одной другой дамкой?

7.149.(10) Можно ли расставить на окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя и никакие две синие фишки не стояли рядом?

7.150.(10) По окружности стоит 6 чисел, каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найдите все различные наборы чисел, удовлетворяющих данному условию. (Наборы, получающиеся друг из друга поворотом окружности, считаются одинаковыми.)

7.151.(15) На окружности поставлено (в некотором порядке) 10 красных точек и 10 чёрных точек. Доказать, что число пар соседних красных точек равно числу пар соседних чёрных точек.

7.152.(20) (СО 97) Имеется 76 карточек, на которых написаны различные числа. Эти карточки разложены на столе по кругу числом вниз. Надо найти какие-нибудь три идущие подряд карточки такие, что число, написанное на средней из этих трёх карточек, больше, чем на каждой из двух соседних. Перевернуть можно последовательно не более 10 карточек. Как надо действовать, чтобы наверняка найти три карточки, для которых выполняется указанное условие?

7.153.(20) (ВО 67) а) Можно ли на окружности расположить числа 0, 1, $2, \ldots, 9$ так, чтобы любые два соседних отличались на 3, 4 или 5? б) Можно ли на окружности расположить числа $1, 2, 3, \ldots, 13$ так, чтобы любые два соседних числа отличались на 3, 4 или 5?

7.154.(20) (ВО 83) По кругу написано не менее трёх попарно различных действительных чисел. Каждое из этих чисел равно произведению двух чисел, стоящих по обе стороны от него. Сколько чисел написано?

Без общей идеи

7.155.(15) (МО 70) Мудрый таракан, который видит не дальше, чем на 1 см, решил отыскать Истину. Находится она в точке, расстояние до которой D см. Таракан может делать шаги, каждый длиной не более 1 см, и после этого каждого шага ему говорят, приблизился он к Истине или нет. Таракан может помнить всё, в частности, направление своих шагов. Доказать, что он сможет отыскать Истину, сделав не более $1{,}5D + 7$ шагов.

7.156.(20) (МО 93) Существует ли слово (конечная последовательность букв), в котором нет двух соседних одинаковых подслов (т. е. меньших слов), но таковые появляются, если приписать любую букву к любому концу?

7.157.(20) (МО 93) В ботаническом определителе используются 100 признаков. Каждый из этих признаков либо присутствует у растения, либо отсутствует. Назовем определитель хорошим. если любые два растения в нем различаются больше, чем по 50 признакам. Докажите, что в хорошем определителе описано не больше 50 растений.

7.158.(15) (МО 95) Несколько деревень соединены дорогами с городом, а между ними дорог нет. Автомобиль отправляется из города с грузами сразу для всех деревень. Стоимость каждой поездки равна произведению веса всех грузов в кузове на расстояние. Докажите, что если вес каждого груза численно равен расстоянию от города до пункта назначения, то общая стоимость перевозки не зависит от порядка, в котором объезжаются деревни.

7.159.(15) (МО 95) Можно ли ребра n-угольной призмы раскрасить в три цвета так, чтобы на каждой грани были все три цвета и в каждой вершине сходились ребра разных цветов, если а) $n = 1995$; б) $n = 1996$?

7.160.(20) (МО 95) На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдётся кнопка, соединённая с нечётным числом лампочек из этого набора. Докажите, что нажимая кнопки, можно погасить все лампочки.

7.161.(15) (МО 98) Дорога протяжённостью 1 км полностью освещена фонарями, причём каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

7.162.(15) (МО 00) В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходят партии, за которые проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов (т. е. если одна из партий набрала в x раз больше голосов, чем другая, то и мест в парламенте она получит в x раз больше). После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов «против всех» и т. п. не было) и каждая партия получила целое число мест. При этом Партия любителей математики набрала 25% голосов. Какое наибольшее число мест в парламенте она могла получить? (Ответ объясните.)

7.163.(15) (МО 00) В колоде часть карт лежит «рубашкой вниз». Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат «рубашкой вниз», переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут «рубашкой вверх», как бы ни действовал Петя.

7.164.(15) (МО 00) У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т. д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

7.165.(15) (СО 99) В скачках участвуют три лошади. На первую лошадь ставки принимают в соотношении 1 : 4 (т. е. при выигрыше первой лошади игрок получает в четыре раза больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую лошадь ставки принимаются в соотношении 1 : 3, на третью — 1 : 1. Можно ли поставить так, чтобы выиграть при любом исходе скачек?

7.166.(15) (СО 99) Разрежьте прямоугольник размером $10 \times \times 25$ см одним прямолинейным разрезом на две части так, чтобы их можно было без пересечения разместить внутри круга диаметром 22,1 см.

7.167.(20) (СО 99) В некоторой стране решили провести выборы правительства. Две трети избирателей в этой стране — городские жители, а одна треть — сельские. Президент должен предложить на утверждение проект состава правительства из 100 человек. Известно, что за проект проголосует столько процентов городских (сельских) жителей, сколько человек из города (села) в предложенном проекте. Какое наименьшее число городских жителей надо включить в проект состава правительства, чтобы за него проголосовали более половины избирателей?

7.168.(20) (ВО 68) После выступлений 20 фигуристов каждый из 9 судей по своему усмотрению распределяет среди них места с 1-го по 20-е. Оказалось, что у каждого фигуриста места, присвоенные ему разными судьями, отличаются не более чем на 3. Подсчитаем суммы мест, полученных каждым фигуристом, и расположим эти числа в порядке возрастания: $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant \ldots \leqslant c_{20}$. Какое наибольшее значение может иметь c_1?

7.169.(15) (ВО 76) На столе лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

7.170.(20) (ВО 80) Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно день, причём после этого у него по крайней мере ещё один день есть иммунитет — он здоров и заболеть опять в этот день не может. Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их. Докажите, что: а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго; б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится.

7.171.(15) (ВО 82) Однажды три мальчика встретились в библиотеке. Один из них сказал: «Теперь я буду ходить в библиотеку через день». Второй заявил, что он будет ходить в библиотеку через два дня, а третий — что будет ходить в библиотеку через три дня. Слышавший их разговор библиотекарь заметил, что по средам в библиотеке выходной день. Мальчики ответили, что если у кого-нибудь из них дата прихода попадёт на выходной день библиотеки, то он придёт на следующий день и дальнейший отсчёт посещений будет вести уже с этого дня. Так мальчики и поступили. Однажды в понедельник они вновь все вместе встретились в библиотеке. В какой день недели происходил описанный разговор?

7.172.(20) (ВО 99) Каждый голосующий на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии n кандидатов. На избирательном участке находится $n+1$ урна. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит по крайней мере один бюллетень и при всяком выборе $(n+1)$-го бюллетеня по одному из каждой урны найдётся кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

ИНВАРИАНТ

Определение. *Инвариантом* некоторого преобразования (или системы действий) называется величина (или свойство), остающаяся постоянной при этом преобразовании.

Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому. В качестве инварианта может использоваться чётность, остаток от деления на какое-то число, алгебраическое выражение, раскраска и т. д. Наиболее простым и часто используемым инвариантом является чётность некоторой величины.

8. ЧЁТНОСТЬ

Основной трудностью в этих задачах является выбор величины, имеющей определённую чётность. Как и в задачах на принцип Дирихле, часто эту величину необходимо создать (сконструировать). Для этого используется сумма (или произведение), разбиение на пары, раскраска в два цвета, обнаружение чередования состояний и т. д. Чётность использовалась ранее, в частности, в задачах на подсчёт числа рёбер графа, на домино, на установление соответствия (снабжение парой) и других.

8.1.(5) Сумма (разность) двух целых чисел одинаковой чётности чётна.

8.2.(5) Сумма чётного числа нечётных слагаемых чётна.

8.3.(10) (Старинная задача.) Можно ли 25 рублей разменять десятью купюрами по 1, 3 и 5 рублей?

Разберём задачу: *Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1 м). Докажите, что он сделал чётное число прыжков.*

Решение. Так как кузнечик вернулся в исходную точку, количество прыжков вправо равно количеству прыжков влево, т. е. общее количество прыжков чётно.

8.4.(10) Кузнечик прыгает на 1 см, затем прыгает на 3 см в том же или в противоположном направлении, затем в том же или в противоположном направлении на 5 см и т. д. Может ли он после 57-го прыжка оказаться в исходной точке?

8.5.(10) Кузнечик прыгает по прямой, причём в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см и так далее. Докажите, что после 1985 прыжков он не может оказаться там, где начинал.

8.6.(15) (МО 73) В трёх вершинах квадрата сидели кузнечики. Они стали играть в чехарду: один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную относительно другого. Сможет ли хоть один кузнечик попасть в четвёртую вершину квадрата?

8.7.(20) (СПО 85) Три кузнечика играют на прямой в чехарду. Каждый раз один из них прыгает через другого (но не через двух сразу!). Могут ли они после 1985-го прыжка оказаться на прежних местах?

Рассмотрим следующую задачу:

(МО 53) *Девять шестерёнок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третьей, и т. д., девятая с первой. Могут ли они вращаться?*

Решение. Предположим, что первая шестерёнка вращается по часовой стрелке. Тогда вторая шестерёнка должна вращаться против часовой стрелки. Третья — снова по часовой и т. д. Ясно, что шестерёнки с нечётными номерами должны вращаться по часовой стрелке, а с чётными — против. Но тогда первая и девятая шестерёнки одновременно вращаются по часовой стрелке. Противоречие. Главным при решении этой задачи оказалось то, что шестерёнки, вращающиеся по часовой стрелке и против — чередуются.

8.8.(10) Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять 1. Можно ли все числа сделать равными?

8.9.(10) На столе стоят семь перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

8.10.(15) На столе стоят шесть стаканов. Из них пять стаканов стоят правильно, а один — перевёрнут донышком вверх. Разрешается переворачивать любые два стакана. Можно ли их все поставить правильно?

8.11.(15) а) 30 пятаков лежат гербом вверх. Разрешается за один раз перевернуть любые 29 из них. Можно ли за несколько раз перевернуть все пятаки гербом вниз? б) То же для случая 15 пятаков, переворачиваются — 14.

8.12.(10) Петя купил общую тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 1990?

8.13.(10) Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна 0.

8.14.(10) На доске написано несколько знаков «+» и «−». Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них «+», если они одинаковы и «−», если они разные. Доказать, что последний на доске знак не зависит от порядка, в котором производились стирания.

8.15.(10) 100 фишек поставлены в ряд. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке?

8.16.(10) Всегда ли можно расставить по росту 1997 человек, если разрешается переставлять любых двух людей, стоящих только через одного?

8.17.(10) (Англия 68) Набор $(b_1, \ldots, b_7)$ является перестановкой набора целых чисел $(a_1, \ldots, a_7)$. Докажите, что число $(a_1-b_1)\cdot \ldots \times \times (a_7 - b_7)$ — чётное.

8.18.(10) На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать банан и ананас, то вырастет банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

8.19.(10) Даны пять чисел; сумма любых трёх из них чётна. Доказать, что все числа чётны.

8.20.(15) Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?

8.21.(15) В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы значение полученного выражения было равно 0?

8.22.(15) В языке дикарей всего два звука: «ы» и «у». Два слова означают одно и тоже, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: пропуска идущих подряд звуков «ыу» или «ууыы» и добавления в любом месте звуков «уы». Означают ли одно и тоже слова «уыу» и «ыуы»?

8.23.(15) Любые два тома, стоящие на полке, можно поменять местами. Докажите, что чётность числа операций, необходимых для их упорядочивания, зависит от начальной расстановки, но не зависит от способа упорядочивания.

8.24.(15) На турнире им. Ломоносова были конкурсы по математике, физике, химии, биологии и бальным танцам. Когда турнир закончился, выяснилось, что на каждом конкурсе побывало нечётное количество школьников, и каждый школьник участвовал в нечётном количестве конкурсов. Чётное или нечётное число школьников пришло на турнир? (По правилам турнира каждый школьник имеет право участвовать в любом количестве конкурсов турнира.)

8.25.(15) (СПО 66) На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 101$. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть равно 0.

8.26.(15) (МО 57, СПО 61) Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 90°. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.

8.27.(15) Квадрат 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Доказать, что найдется столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.

8.28.(15) Квадратная таблица состоит из 25×25 клеток. В каждой из 625 клеток этой таблицы записано одно из чисел $1, 2, \ldots, 25$. При этом выполняются следующие условия:

1) В клетках, симметричных относительно главной диагонали, записаны равные числа.
2) Два одинаковых числа не могут стоять в одной строке или в одном столбце.

Докажите, что все числа, стоящие на главной диагонали, попарно различны.

8.29.(20) Каждое из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно либо 1, либо -1, причём $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$. Доказать, что n делится на 4.

8.30.(20) На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

8.31.(20) Докажите, что в игре «15» нельзя поменять местами фишки «15» и «14», оставив остальные на месте.

Шахматы, шашки

8.32.(10) Можно ли доску 5×5 заполнить костяшками домино размером 1×2?

8.33.(10) Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на прямоугольники 1×2.

8.34.(10) Конь вышел с поля a1 и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

8.35.(10) Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

8.36.(15) (ВО 89) На шахматной доске стоят 8 ладей так, что они не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на чёрных полях, чётно.

8.37.(15) а) На доске 25×25 расставлены 25 шашек, расположенные симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна шашка расположена на диагонали. б) Допустим, что расположение шашек симметрично относительно обеих главных диагоналей. Докажите, что одна из шашек стоит в центральной клетке.

8.38.(15) (ВО 93) На каждой клетке главной диагонали доски 10×10 стоит по шашке. За один ход разрешается выбрать любые две шашки, и передвинуть каждую из них на одну клетку вниз. Можно ли за несколько таких ходов поставить все шашки на нижнюю горизонталь?

Геометрия

8.39.(10) Докажите, что любая ось симметрии 1997-угольника (если она существует), обязательно проходит через какую-либо его вершину.

8.40.(10) Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-звенной замкнутой ломаной, пересекать все её рёбра?

8.41.(10) Существует ли замкнутая кривая без самопересечений, пересекающая окружность ровно 1997 раз?

8.42.(15) Дан выпуклый $2n$-угольник $A_1 \ldots A_{2n}$. Внутри его взята точка P, не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит чётному числу треугольников с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_{2n}$.

8.43.(15) (МО 56) Нарисуйте шестизвенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев. Может ли у ломаной с таким свойством быть 7, 8, 100, 1001 звено?

8.44.(15) (ВО 89) Есть 77 прямоугольных брусков $3 \times 3 \times 1$. Можно ли эти бруски уложить в прямоугольную коробку размером $7 \times 9 \times 11$ (коробка с крышкой)?

8.45.(15) Квадрат разрезан на прямоугольники так, что никакая точка квадрата не является вершиной сразу четырёх прямоугольников. Доказать, что число точек квадрата, являющихся вершинами прямоугольника, чётно.

8.46.(20) (МО 47) Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограммы?

8.47.(20) На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний от этих точек до точки B.

8.48.(20) На прямой даны точки A и B, а также 1001 точка вне отрезка AB, которые покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма расстояний от A до красных точек, сложенная с суммой расстояний от B до синих точек, отлична от суммы расстояний от B до красных точек, сложенной с суммой расстояний от A до синих точек.

Следующий ряд задач связан с окружностью.

8.49.(10) Катя и её друзья встали по кругу так, что соседи каждого ребёнка либо оба мальчики, либо оба девочки. Мальчиков среди Катиных друзей 5. А сколько девочек?

8.50.(15) По кругу расставлены 9 чисел — четыре единицы и пять нулей. Каждую секунду над числами проделывают следующую операцию: между соседними числами ставят 0, если они различны, и 1, если они равны; после этого старые числа стирают. Могут ли через некоторое время все числа стать одинаковыми?

8.51.(15) 25 мальчиков и 25 девочек сидят за круглым столом. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа-мальчики.

8.52.(20) На окружности отмечены 20 точек, являющихся вершинами правильного 20-угольника, после чего они разбиты на 10 пар и в каждой паре точки соединены хордой. Докажите, что какие-то две хорды имеют одинаковую длину.

8.53.(20) Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4.

С понятием ориентации связаны следующие две задачи:

8.54.(15) На плоскости нарисовано некоторое количество равносторонних треугольников. Они не пересекаются, но могут иметь общие участки сторон. Мы хотим покрасить каждый треугольник в какой-нибудь цвет так, чтобы те из них, которые соприкасаются, были покрашены в разные цвета. (Треугольники, имеющие одну общую точку, могут быть покрашены в один цвет.) Хватит ли для такой раскраски двух цветов?

8.55.(15) На хоккейном поле лежат три шайбы: A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз. Могут ли после этого шайбы оказаться на исходных местах?

Покажем, как можно создать инвариант (величину, имеющую определённую чётность) на примере следующей задачи.

Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью этих операций собрать все фишки в одном секторе?

Решение. Занумеруем сектора по кругу числами от 1 до 6 и для любой расстановки фишек рассмотрим величину S — сумму номеров секторов, в которых стоят данные нам шесть фишек (с учётом кратности). Очевидно, что при сдвиге фишки в соседний сектор соответствующее ей слагаемое в сумме S меняет чётность. Значит, если сдвигаются одновременно две фишки, то чётность величины S не меняется — она инвариантна. Но для расстановки в начале $S = 1 + 2 + \ldots + 6 = 21$. Если же все фишки находятся в одном секторе с номером A, то $S = 6A$ — это чётное число (а 21 — число нечётное). Следовательно, из исходной расстановки нельзя получить расстановку, в которой все фишки находятся в одном секторе.

8.56.(15) Имеется 30 карточек, каждая из которых выкрашена с одной стороны в красный, а с другой — в синий цвет. Карточки разложили подряд в виде полосы так, что у 8 карточек сверху оказался синий цвет. За один ход разрешается перевернуть любые 17 карточек. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы полоса стала полностью: а) красной; б) синей?

8.57.(15) Круг разбит на 6 секторов, в каждом секторе лежит по 1 монете. Одним ходом можно любую монету передвинуть в один из двух соседних секторов. Можно ли все монеты собрать в одном секторе, сделав ровно 20 ходов?

8.58.(20) В ряд выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, n$. За один ход разрешатся поменять местами любые два из них. Может ли после 1989 таких операций восстановиться исходный порядок чисел?

8.59.(20) Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между 1 и 2, 2 и 3, $\ldots$, 8 и 9 было нечётное число цифр?

8.60.(20) (МО 65) Есть 10 пар карточек, на которых написаны числа 0, 0, 1, 1,..., 8, 8, 9, 9. Докажите, что их нельзя выложить в ряд так, чтобы между любыми двумя карточками, на которых написаны одинаковые цифры n, лежало ровно n других карточек $(n = 0, 1, \ldots, 9)$.

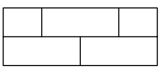
8.61.(15) (МО 70) На бесконечной шахматной доске на двух соседних по диагонали чёрных полях стоят две чёрные шашки. Можно ли дополнительно поставить на эту доску некоторое число чёрных шашек и одну белую так, чтобы белая одним ходом взяла все чёрные шашки, включая две первоначально стоявшие?

8.62.(15) (МО 70) На 99 карточках пишутся числа $1, 2, \ldots, 99$. Затем карточки перемешиваются, раскладываются чистыми сторонами вверх и на чистых сторонах пишутся числа $1, 2, \ldots, 99$. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются и 99 полученных сумм перемножаются. Доказать, что в результате получится чётное число.

8.63.(15) (МО 70) Король Людовик не доверяет некоторым своим придворным. Он составил полный их список и приказал каждому из них следить за одним из остальных. При этом первый следит за тем, кто следит за вторым, второй — за тем, кто следит за третьим и т. д., последний следит за тем, кто следит за первым. Доказать, что у Людовика нечётное число придворных.

8.64.(15) (МО 70) Можно ли разбить числа $1, \ldots, 33$ на 11 групп по 3 числа в каждой так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме двух других?

8.65.(20) (МО 71) Обозначим количество цифр в числе A через $k(A)$. Доказать, что число $k(5^{1090701}) - k(2^{1090701})$ — чётное.



К 8.66.

8.66.(15) (ВО 61) Дана фигура из 16 отрезков. Докажите, что нельзя провести ломаную, пересекающую каждый из отрезков ровно один раз. (Ломаная может быть незамкнутой и самопересекающейся, но её вершины не должны лежать на отрезках, а стороны — проходить через вершины фигуры.)

8.67.(20) (ВО 62) В каждую клетку квадратной таблицы $n \times n$, где n нечётно, вписано одно из чисел 1 или -1 (произвольным образом). Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце, справа от каждой из строк пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма всех $2n$ написанных произведений не равна 0.

8.68.(20) (ВО 63) Квадрат размером 6×6 покрыт без наложения 18 костями домино размером 1×2. Докажите, что квадрат можно разрезать по вертикали или горизонтали, не повредив ни одной доминошки.

8.69.(15) (ВО 65) В народной дружине 100 человек и каждый вечер трое из них идут на дежурство. Может ли через некоторое время оказаться так, что каждый с каждым дежурил ровно один раз?

8.70.(15) (ВО 66) На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечётно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

8.71.(15) (ВО 67) Одно из чисел получается из другого перестановкой цифр. Может ли их сумма равняться $99\ldots9$ (1967 девяток)?

8.72.(15) (ВО 67) Цифры некоторого числа переставили и сложили полученное число с исходным. Докажите, что если эта сумма равна 10^{10}, то исходное число делилось на 10.

8.73. (ВО 70) а) (15) К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.

Задача легко обобщается на все $(4k+1)$-значные числа.

б) (10) А если у числа не $(4k+1)$ знаков?

8.74. (ВО 70) а) (20) Замок имеет форму (в плане) равностороннего треугольника со стороной 100 метров. Он разделен на 100 треугольных залов. Все стены зала имеют одинаковую длину — 10 метров. В середине каждой стены между залами сделана дверь. Докажите, что если человек захочет пройти по замку, побывав в каждом зале не более одного раза, то он сможет осмотреть не более 91 зала. б) (20) Пусть имеется k^2 треугольных залов (сторона треугольника разделена на k частей). Каково в этом случае наибольшее число залов?

8.75.(15) (ВО 71) В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа $+1$ и -1 так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят $+1$. Разрешается изменять знак в любых k подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число -1 сдвинулось в соседнюю с исходной вершину, если а) $k=3$; б) $k=4$; в) $k=6$?

8.76.(20) (ВО 75) На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вписать вместо них цифру, отличную от стёртых (вместо 0 и 1 — цифру 2, вместо 1 и 2 — 0, вместо 0 и 2 — 1). Докажите, что если в результате таких операций на доске останется одно число, то оно не зависит от порядка, в котором производились стирания.

8.77.(15) (ВО 77) На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовём пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особенных пар чётно.

8.78.(15) (ВО 83) Группа детского сада построилась парами друг за другом. При этом оказалось, что в каждой колонне стоит поровну мальчиков и девочек, а число пар, в которых стоят девочка и мальчик, равно числу остальных пар. Докажите, что число детей группы делится на 8.

8.79.(15) (ВО 84) а) Произведение некоторых n целых чисел равно n, а сумма их равна 0. Докажите, что n делится на 4.

б) Пусть n — натуральное число, делящееся на 4. Докажите, что найдутся n целых чисел, произведение которых равно n, а сумма равна 0.

8.80.(20) (ВО 84) Имеются четыре краски и бесконечно много квадратных плиточек со стороной длины 1. Разрешается окрашивать стороны плиточек так, чтобы цвета всех сторон у каждой плиточки были разные, и приклеивать плиточки друг к другу сторонами одного цвета. Для каких чисел m и n из этих плиточек можно склеить прямоугольник размера $m \times n$, у которого каждая сторона покрашена одним цветом и цвета всех сторон разные?

8.81.(20) (ВО 87) На доске написаны числа $1,\ 2, \ldots, 1987$. За ход разрешается стереть любые два числа и вместо них написать остаток от деления на 7 их суммы. После нескольких шагов на доске осталось два числа, одно из которых равно 987. Каким числом является второе из оставшихся чисел?

8.82.(20) (ВО 89) Какое наименьшее неотрицательное число можно получить путём расстановки перед числами а) $1, 2, \ldots, 1989$; б) $1^2,\ 2^2, \ldots, 1989^2$ знаков «+» и «−» и последующего выполнения указанных операций?

8.83.(20) (ВО 98) Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

9. ОСТАТКИ, АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ, РАСКРАСКА, ПОЛУИНВАРИАНТ

Чётность и нечётность числа определяются остатком при делении числа на два. Как самый простой, этот инвариант, естественно, очень распространён. Помимо него, в качестве инварианта могут быть остатки при делении на другие числа (3, 5 и т. д.). Разберём такую задачу.

(ТГ 91) *На острове Серобуромалин живут хамелеоны:* 13 *серых,* 15 *бурых и* 17 *малиновых. Если два хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?*

Решение. В чем состоит описанная операция? В том, что «пропадают» два хамелеона двух разных цветов и «появляются» два хамелеона третьего цвета. Если догадаться о том, что величину-инвариант нужно определять по набору чисел (a, b, c), где a, b, c — количества серых, бурых и малиновых хамелеонов соответственно, то дальше решение получается почти сразу же. В самом деле, операция, описанная в условии, означает то, что из набора (a, b, c) получается набор $(a-1, b-1, c+2)$ или набор $(a-1, b+2, c-1)$ или набор $(a+2, b-1, c-1)$ — всё зависит от того, в какой цвет перекрашиваются хамелеоны. Очевидно, что разности между числами набора либо не меняются, либо меняются на три, а значит, остатки этих разностей при делении на 3 — инварианты. Но вначале $a-b$ равно $13-15=-2$ $(b-c=15-17=-2)$, а в случае, когда все хамелеоны, например, малиновые, $a-b=0-0=0$. Полученные разные остатки доказывают невозможность окраски хамелеонов в один цвет.

Раскраска была использована в задачах 8.34, 8.35. Разберём ещё одну задачу.

Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 *ходом типа* $(1;3)$ (*т. е. она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается ещё на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа* $(1;2)$). *Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?*

Решение. Ответ: нельзя. Рассмотрим шахматную раскраску доски в чёрные и белые цвета. Тогда, как легко проверить, каждым своим ходом «верблюд» ходит с одного поля на поле того же цвета; иными словами, цвет поля, на котором стоит «верблюд» — инвариант. Но так как два соседних поля имеют разную окраску, то пройти с одного на другое ходом «верблюда» невозможно.

Отметим, что помимо раскраски в два цвета (шахматной), используется раскраска в большее число цветов (3, 4 и т. д.).

Наиболее сложны задачи, в которых инвариантом служит алгебраическое выражение (которое ещё надо построить!) от исходных данных задачи.

На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 20$. *Разрешается стереть любые два числа* a *и* b *и вместо них написать число* $a + b - 1$. *Какое число может остаться на доске после* 19 *таких операций?*

Решение. Для любого набора из n чисел на доске рассмотрим следующую величину X: сумму всех чисел, уменьшенную на n. Допустим, что с набором произведено описанное в условии преобразование. Как же изменится эта величина? Если сумма всех чисел набора, кроме a и b, равна S, то до преобразования величина X равнялось $S + a + b - n$, а после преобразования $X = S+(a+b-1)-(n-1) = S+a+b-n$. Итак, значение величины X не изменилось, она — инвариант. Исходно (для набора из условия задачи) $X = (1 + 2 + \ldots + 19 + 20) - 20 = 190$. Значит, и после 19 операций, когда на доске останется одно число p, X также будет равно 190. Но по своему определению, в этот момент X будет равно $p - 1$. Значит, $p = 191$. Следовательно, число, оставшееся на доске обязательно будет равно 191.

Полуинвариант — величина (функция), которая при каждом преобразовании (операции) возрастает (или убывает). Она используется при доказательстве остановки процессов.

Вокруг поляны стоят 12 *домиков, покрашенные в белый и красный цвет, в которых поселилось* 12 *гномов. У каждого гнома нечётное число друзей. В январе первый гном красит свой дом в тот цвет, в который окрашены дома большинства его друзей. В феврале это же делает второй (по часовой стрелке) и т. д. Докажите, что наступит момент, после которого цвет дома у каждого гнома перестанет меняться.*

Решение. Рассмотрим число пар гномов-друзей, у которых дома разного цвета. Каждый месяц это число не увеличивается. Действительно, если цвет дома сохраняется, то число не меняется, если же цвет дома меняется, то это число уменьшится. Так как это число неотрицательно, оно не может бесконечно уменьшаться, значит, с того момента, как оно перестанет меняться, каждый гном будет красить свой дом в один и тот же цвет.

9.1.(10) а) Хулиган Вася рвет школьную стенгазету. За один раз он рвет любой из уже получившихся кусков на 6 частей. Может ли получиться 1993 куска? б) То же, если два хулигана рвут две стенгазеты один на 4 части за раз, а другой — на 7 частей.

9.2.(10) Иван-царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй — 4 головы, но тогда у Змея Горыныча отрастает 1985 голов. (Однако если, например, у Змея Горыныча осталось лишь 3 головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя.) Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов?

9.3.(15) (СПО 84) В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причём в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

9.4.(15) Разменный автомат меняет 1 монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 26 монет?

9.5.(10) За один ход число, написанное на доске, разрешается либо заменить на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 456. Можно ли из него получить число 14?

9.6.(15) На доске написано число 8^n. У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр, и т. д., до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число, если $n = 1989$?

9.7.(15) (ВО 64) У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 подсчитывается сумма его цифр, у каждого из получившегося миллиарда чисел снова подсчитывается сумма его цифр и т. д. до тех пор, пока не получится миллиард однозначных чисел. Каких чисел получится больше: 1 или 2?

К задачам, связанным с суммой цифр числа, мы вернемся в разделе «Целые числа» (Признаки делимости).

9.8.(15) На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 125$. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них остаток от деления суммы этих чисел на 11. После 124 таких операций на доске осталось одно число. Какое это число?

9.9.(15) Первый член последовательности равен 1, а каждый следующий, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену суммы его цифр. Может ли в этой последовательности встретиться число 765432?

9.10.(20) Есть три печатающих автомата: первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $(a-b; b)$; второй — карточку $(a+b; b)$; третий — карточку $(b; a)$. Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки $(19; 86)$ получить карточку а) $(31; 13)$; б) $(12; 21)$?

9.11.(20) (ВО 78) Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом. Первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает новую карточку $(a+1; b+1)$; второй, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a/2; b/2)$ (он работает только тогда, когда a и b чётные); третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$. Кроме того, автоматы выдают обратно все прочитанные карточки. Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(5; 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку: а) $(1; 50)$ б) $(1; 100)$?

в) Пусть первоначально имеется одна карточка $(a; b)$, $a < b$, а мы хотим получить карточку $(1; n)$. При каких n это можно сделать?

9.12.(20) На 44 деревьях, посаженных по окружности, сидели 44 весёлых чижа (на каждом дереве по одному). Время от времени какие-то два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Смогут ли чижи когда-нибудь собраться на одном дереве?

9.13.(20) В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: A, B и C. Две амёбы разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каков её тип, если исходно амёб типа A было 20 штук, типа B — 21 штука и типа C — 22 штуки?

9.14.(25) а) На шахматной доске 10×10 клеток рассматривается фигура (назовем её «лев»), которая может ходить на клетку вправо, на клетку вниз и на клетку по диагонали влево вверх. Может ли «лев» обойти по одному разу все клетки доски и вернуться последним ходом на исходное поле? б) А если «лев» возвращается на соседнее от исходного поля (справа или слева)?

9.15.(15) Пусть «верблюд» ходит следующим образом: вначале сдвигается на соседнее поле, затем на n в перпендикулярном направлении (в частности, при $n = 2$ это конь). При каких n «верблюд» может пройти с любой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?

9.16.(15) В каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Докажите, что после этого останется по меньшей мере одна пустая клетка.

9.17.(15) Дно прямоугольной коробки было выложено прямоугольными плитками размером 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли плитку размером 2×2. Вместо неё нашли плитку размером 1×4. Можно ли при этом опять выложить дно коробки?

9.18.(20) (МО 60) Докажите, что шахматную доску размера $4 \times n$ нельзя обойти конем так, чтобы побывать при этом по одному разу на каждом поле и последним ходом вернуться на исходное поле.

9.19.(15) (Югославия 81) Мышка грызёт куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому, который имеет с предыдущим общую грань. Может ли мышка съесть весь куб, кроме среднего кубика?

9.20.(20) (ВО 77) Дан квадратный лист клетчатой бумаги со стороной 100 клеток. Проведено несколько несамопересекающихся ломаных, идущих по сторонам клеток и не имеющих общих точек. Эти ломаные идут строго внутри квадрата, а концами выходят на его границу. Докажите, что кроме вершин квадрата найдется узел (внутри или на границе), не принадлежащий ни одной ломаной.

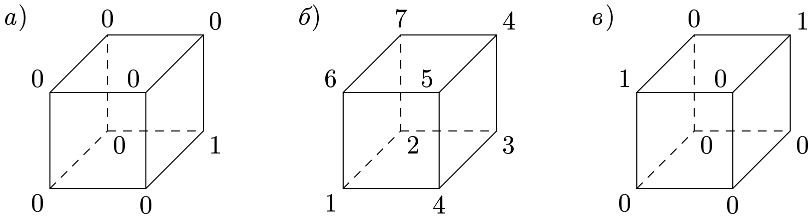
9.21.(25) (ВО 82) На окружности отмечено $3k$ точек, разделяющих её на $3k$ дуг, из которых k дуг имеет длину 1, ещё k дуг — длину 2 и k дуг — длину 3. Докажите, что из отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные.

9.22.(15) Круг разбит на 6 равных секторов, в которых расставлены цифры 0, 1, 2, 0, 2, 1 (в указанном порядке). Разрешается за один ход одновременно прибавлять одно и то же число к двум стоящим рядом числам. Можно ли за несколько таких ходов добиться того, чтобы все числа, стоящие в секторах, были равны?

9.23.(15) В вершинах выпуклого шестиугольника записаны числа 8, 3, 12, 1, 10, 6 (в указанном порядке). За ход разрешается к любым двум числам в соседних вершинах прибавить одно и то же число. Можно ли за несколько таких ходов получить в последовательном порядке шестёрку чисел 5, 2, 14, 6, 13, 4?

9.24.(15) Даны числа 32, 46, 52, 66. За один ход разрешается написать четыре новых числа, заменив каждое из исходных чисел средним арифметическим трёх других. Докажите, что за несколько таких ходов нельзя получить набор а) 36, 45, 50, 56; б) 29, 44, 58, 65.

9.25.(20) (ВО 81) В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещённым на некотором ребре, прибавляется по 1. Можно ли за несколько таких шагов сделать все 8 чисел равными между собой, если вначале были поставлены числа, как на рисунке *а*? Как на рисунке *б*? Как на рисунке *в*?



К 9.25

9.26.(20) (ТГ 91) На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и изменить их на число $ab + a + b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

9.27.(20) (ВО 80) Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны a и b, то их можно заменить на $(a+b)/\sqrt{2}$ и $(a-b)/\sqrt{2}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ из тройки $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$?

9.28.(15) (СПО 96) На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два различных числа и написать вместо этого их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что когда-нибудь числа на доске перестанут меняться.

9.29.(20) (ВО 88) На доске написаны числа 1 и 2. Разрешается дописывать новые числа следующим образом: если имеются a и b, то можно дописать $ab+a+b$. Можно ли этим способом получить: а) 13121, б) 12131?

9.30.(20) На круглом 12-местном столе положены карточки с именами приглашённых. Гости пришли и сели, не обратив внимания на карточки. Докажите, что можно повернуть стол так, что не менее двух гостей окажутся на своих местах.

9.31.(15) На 64 клетках шахматной доски выписаны подряд: в верхнем ряду слева направо числа от 1 до 8, в следующем ряду числа от 9 до 16 и т. д. до 64. Восемь ладей поставлены так, что никакие две не бьют друг друга. Подсчитана сумма чисел, написанных на тех восьми полях, на которых поставлены ладьи. Найти все значения, которые может иметь эта сумма.

9.32.(10) В таблице $m \times n$ расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке или столбце равна 1. Докажите, что $m = n$.

9.33.(15) а) В таблице 8×8 одна из клеток закрашена чёрным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. б) А если таблица 3×3? Как и прежде, исходно лишь одна клетка (угловая) покрашена в чёрный цвет.

9.34.(15) Решите ту же задачу для таблицы 8×8, если исходно в чёрный цвет покрашены все 4 угловые клетки.

9.35.(15) Дана шахматная доска. Может ли при этом на доске остаться ровно одна чёрная клетка, если: а) разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки какой-либо горизонтали или вертикали? б) разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки внутри квадрата 2×2?

9.36.(20) (ВО 91) а) Каждая клетка таблицы $n \times n$ покрашена в один из $n-1$ цветов. За один ход разрешается все клетки любой строки (любого столбца) таблицы перекрасить в некоторый цвет, если в этой строке (столбце) имеются по крайней мере две клетки этого цвета.

б) Каждая клетка таблицы 1991×1991 покрашена в один из двух цветов. За один ход разрешается все клетки любой строки (любого столбца) таблицы перекрасить в тот цвет, который чаще всего встречается в этой строке (столбце). Можно ли за несколько ходов закрасить все клетки таблицы одним цветом?

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

К 9.37

9.37.(15) (ВО 68) В клетках таблицы 4×4 расставлены знаки «+» и «−», как показано на рисунке. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

а)

+	+	+	+
+	+	−	+
+	+	+	+
+	+	+	+

б)

+	+	+	+
+	+	−	+
+	−	+	+
+	+	+	+

К 9.38

9.38.(20) За один ход разрешается менять все знаки в одной строке или в одном столбце на противоположные. Можно таким операциями привести таблицы, показанные на рисунке, к таблице из одних плюсов?

9.39.(30) В клетках таблицы 4×4 расставлены знаки «+» и «−». Разрешается одновременно заменить на противоположные знаки во всех клетках некоторой строки или некоторого столбца. Это можно повторять несколько раз, пока число минусов не станет наименьшим. Наименьшее число минусов, к которому можно прийти, отправляясь от данной таблицы, называется её характеристикой. Найти все возможные значения характеристики.

9.40.(30) (ВО 76) В вершинах правильного n-угольника с центром в точке O расставлены числа $(+1)$ и (-1). За один шаг разрешается изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного k-угольника с центром O (при этом мы допускаем и 2-угольники, понимая под 2-угольником отрезок с серединой в точке O). Докажите, что если а) $n = 15$; б) $n = 30$; в) n — любое число, большее 2, то существует такое первоначальное расположение $(+1)$ и (-1), что из него ни за какое число шагов нельзя получить набор из одних $(+1)$.

г) Попробуйте пояснить для произвольного n, чему равно наибольшее число $K(n)$ различных расстановок $(+1)$ и (-1), среди которых ни одну нельзя получить из другой за несколько шагов. Докажите, например, что $K(200) = 2^{80}$.

9.41.(15) В ряд выложено 100 монет: орёл, решка, орёл, решка, и т. д. За один ход разрешается перевернуть несколько подряд лежащих монет. За какое минимальное количество ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх?

9.42.(15) (СПО 85) Сумасшедший путешественник едет из родного города A в самый удалённый от него город B. Затем оттуда он едет в самый удалённый от B город C, который оказывается отличным от A и т. д. Докажите, что он никогда не вернется в A.

9.43.(20) На 6 гранях куба написаны 6 чисел, среди которых есть 0 и 1. Каждое из 6 чисел заменили средним арифметическим четырёх чисел, стоящих на соседних гранях. С новыми числами повторили ту же операцию, и так 25 раз. В результате на каждой грани оказалось написанным то же самое число, что и в начале. Докажите, что в вычислениях была допущена ошибка.

9.44.(20) В 8 вершинах куба поставлены 8 чисел, среди которых есть 0 и 1. Каждое из 8 чисел заменили средним арифметическим трёх чисел, поставленных в соседних вершинах. После 10 повторений этой операции в каждой вершине оказалось то же число, что и в начале. Найдите эти 8 чисел.

9.45.(15) (МО 70) Число 1234567891011...1000 умножили на целое число от 1 до 9 и вычеркнули из произведения все единицы. Затем опять умножили на цифру от 1 до 9 и вычеркнули все единицы и т. д. Какое наименьшее число можно получить этим способом?

9.46.(20) В некоторой стране из каждого города выходит нечётное число дорог. На центральной площади каждого города поднят чёрный или белый флаг. Каждое утро в одном из городов, у которого число соседей с флагами другого цвета больше половины, меняют цвет флага. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

9.47.(20) Две карты Москвы, одна с более мелким масштабом, наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обеих картах была проколота одна и та же точка Москвы.

9.48.(20) На плоскости дано N точек. Некоторые точки соединены отрезками. Если два отрезка пересекаются, то их можно заменить двумя другими с концами в тех же точках. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

9.49.(20) (ВО 61) В клетках таблицы $m \times n$ вписаны числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел в каждой строке и каждом столбце, были неотрицательными.

9.50.(20) (ВО 79) В парламенте у каждого её члена не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если B — враг A, то A — враг B.)

9.51.(20) (Пекин 64) На кольцевой дороге стоят бензоколонки, причём бензина во всех бензоколонках хватит автомобилю на целый круг. Покажите, что существует бензоколонка, начав от которой, автомобиль с пустым баком сможет проехать весь круг, заправляясь по дороге.

9.52.(20) (ВО 61) а) Из данной четвёрки положительных чисел (a, b, c, d) получается вторая — (ab, bc, cd, da) — по правилу: каждое число умножается на следующее, четвёртое — на первое. Из второй четвёрки по этому же правилу получается третья и т. д. Докажите, что в полученной последовательности четвёрок никогда снова не появится (a, b, c, d), кроме случая, когда $a = b = c = d = 1$.

б) Дан произвольный набор из чисел 1 и -1 длиной 2^k. Из него получается новый по правилу: каждое число умножается на следующее за ним; последнее число умножается на первое. С новым набором из 1 и -1 проделывается то же самое и т. д. Докажите, что в конце получится набор, состоящий из одних 1.

9.53.(20) (ВО 64) Дан произвольный набор из n целых чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Из него получается новый набор: $(a_1 + a_2)/2$, $(a_2 + a_3)/2, \ldots, (a_{n-1} + a_n)/2, (a_n + a_1)/2$; из этого набора — следующий по тому же правилу и т. д. Докажите, что если все получающиеся числа целые, то все первоначальные числа равны.

9.54.(20) (ВО 71) По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырёх идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a - d)(b - c) < 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

9.55.(20) (ВО 74) Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединённых с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Особые точки разрешается перекрашивать по следующему правилу: на каждом шагу выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через несколько шагов не останется ни одной особой точки.

9.56.(20) (ВО 76) Из дроби m/n разрешается получить любую из трёх дробей $(m - n)/n$, $(m + n)/n$, n/m. Можно ли, используя такие операции, из дроби $1/2$ получить дробь $67/91$?

9.57.(20) (ВО 85) Ученики школьного математического кружка смастерили вычислительную машину, которая четвёрку чисел (a, b, c, d) нажатием кнопки превращает в четвёрку $(a - b, b - c, c - d, d - a)$. Докажите, что если в исходной четвёрке не все числа равны, то после некоторого числа нажатий кнопки получится четвёрка, хотя бы одно из чисел которой больше 1985.

9.58.(20) (ВО 91) На доске выписаны n чисел. Разрешается стереть любые два из них, скажем a и b, и вместо них записать одно число $(a+b)/4$. Эта операция повторяется $n-1$ раз, и в результате на доске остается одно число. Доказать, что если на доске вначале было написано n единиц, то в результате всех операций на доске останется число, не меньше чем $1/n$.

9.59.(20) (ВО 93) Квадратный трёхчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трёхчленов $x^2 f(1+1/x)$ или $(x-1)^2 f(1/(x-1))$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена x^2+4x+3 получить трёхчлен $x^2+10x+9$?

9.60.(15) (ВО 98) На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{1998}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 1998^7?

9.61.(20) (ВО 98) В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

10. ИГРЫ

Математические игры отличаются от обычных тем, что в них можно заранее определить исход игры. В подобных задачах обычный вопрос один и тот же: кто и как выиграет при правильной игре, т. е. при наилучшей стратегии обеих сторон. Далее в условиях задачи это оговариваться не будет.

Для доказательства победы и ничьей используются следующие идеи:

Соответствие. Наличие удачного ответного хода (может обеспечиваться симметрией, разбиением на пары, дополнением числа).

Решение с конца. Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. Очередная позиция является выигрышной, если из неё можно получить ранее определённую проигрышную позицию, и является проигрышной, если любой ход из неё ведет к попаданию в ранее определённую выигрышную позицию.

Передача хода. Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже, чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в неё.

В некоторых задачах стратегию игры указывать не надо, так как исход игры не зависит от игры соперников.

10.1.(10) Двое играют в следующую игру. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

10.2.(10) (ТГ 86) Двое по очереди ломают шоколадку 6×8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

10.3.(10) Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

10.4.(10) На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход можно стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать 2, а если разными — 1. Если последняя оставшаяся на доске цифра — 1, то выиграл первый игрок, если 2 — то второй.

10.5.(10) Двое игроков по очереди расставляют между числами от 1 до 20, выписанными в строчку, «+» и «−». После того, как все места заполнены считается результат. Если он чётен, то выигрывает первый игрок, если нечётен, то — второй.

10.6. а) (10) В строчку написаны 10 единиц. Лёша и Витя по очереди ставят между какими-нибудь соседними числами знак: «+» или «−». Когда между всеми соседними числами поставлен какой-нибудь знак, вычисляется результат. Если полученное число чётное, то выигрывает Лёша, а если нечётное, то — Витя. б) (15) А если ребята ставят между числами либо «+», либо «×». (При вычислении результата сначала выполняются умножения, а потом — сложения.)

10.7.(10) Вася и Петя выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Петя всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 4.

10.8.(10) Двое выписывают шестизначное число, выставляя по очереди по одной цифре, начиная со старшего разряда. Если получившееся число разделится нацело на 7, то выигрывает сделавший последний ход, иначе — начинающий.

10.9.(15) Двое выписывают k-значное число, выставляя по очереди по одной цифре, начиная со старшего разряда. Если число разделится нацело на 11, то выигрывает сделавший последний ход, иначе — другой. Рассмотреть случаи: а) k — чётно; б) k — нечётное, большее 1.

10.10.(15) В одном ящике лежат 15 синих шаров, в другом — 12 белых. Одним ходом каждому разрешается взять три синих шара или два белых. Выигрывает тот, кто берет последние шары.

10.11.(20) Дана клетчатая доска размерами: а) 9×10; б) 10×12; в) 9×11. За ход разрешается вычеркнуть любую горизонталь или любую вертикаль, если в ней к моменту хода есть хотя бы одна невычеркнутая клетка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.12.(20) На доске написаны числа 25 и 35. За ход разрешается дописать ещё одно натуральное число — разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она ещё не встречалась. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Для решения следующих задач необходимо найти симметрию, при которой только что сделанный противником ход не препятствует осуществлению стратегии.

Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причём так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. В этой игре выигрывает первый независимо от размеров стола! Первым ходом он кладет пятак так, чтобы центры монеты и стола совпали. После этого на каждый ход второго игрока начинающий отвечает симметрично относительно центра стола. Отметим, что при такой стратегии после каждого хода первого игрока позиция симметрична. Поэтому если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого. Значит, он побеждает.

10.13.(15) Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. (Цвет слонов значения не имеет.) Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.14.(15) Двое по очереди ставят коней в клетки шахматной доски так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.15.(15) Двое по очереди ставят королей в клетки доски 9×9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.16.(20) а) Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски. Каждым ходом надо побить хотя бы одну непобитую клетку. (Слон бьет и клетку, на которой стоит.) Проигрывает тот, кто не может сделать ход. б) Та же игра, но с ладьями.

10.17.(15) Дана клетчатая доска 10×10. За ход разрешается покрыть любые две соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1×2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.18.(15) В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое число подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.

10.19.(15) Ладья стоит на поле a1. За ход разрешается сдвинуть её на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле h8.

10.20.(15) Имеется две кучки камней по 11 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

10.21.(10) Имеются три кучи камней. Число камней во всех кучах одинаково. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает тот, кто берет последние камни.

10.22.(10) Имеются две кучки камней: в одной — 30, в другой — 20. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

Игра в 10.20–10.22 — это известная игра «Ним».

10.23.(15) (МО 68) На окружности расставлены 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведённых ранее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

10.24.(15) Двое игроков по очереди отрывают лепестки у ромашки, у которой а) 12; б) 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.25.(15) Имеется 10 фишек: 2 белых, 2 чёрных, 2 красных, 2 синих и 2 зелёных. Игроки А и Б ставят по очереди по одной фишке в одной из вершин 10-угольника. Игрок А хочет получить

5 последовательных вершин всех пяти цветов, а игрок Б хочет этому помешать. Игру начинает Б.

10.26.(15) Имеется 8 шаров — по 2 красных, синих, белых и чёрных. Игроки А и Б по очереди прибивают по 1 шару в вершины куба. Игрок А стремится к тому, чтобы нашлась вершина, чтобы в ней и в трёх соседних имелись бы шары всех четырёх цветов, а Б хочет этому помешать.

10.27.(15) На доске написано n минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигравшим считается тот, кто переправит последний минус. Рассмотреть случаи: а) $n = 9$; б) $n = 10$?

10.28.(15) На окружности нарисовано n минусов. Двое по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюсы. Проигравшим считается тот, кто переправит последний минус. Рассмотреть случай: а) $n = 14$; б) $n = 15$?

10.29.(15) Дан прямоугольный параллелепипед с размерами а) $4 \times 4 \times 4$; б) $4 \times 4 \times 3$; в) $4 \times 3 \times 3$, составленный из единичных кубиков. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нем есть хотя бы один не проткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

10.30.(15) Двое по очереди разламывают шоколадку 5×10. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1.

10.31.(15) Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки доски 9×9. Начинающий ставит крестики, его соперник — нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов — это очки, набранные первым игроком. Число строчек и столбцов, где ноликов больше — очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает.

Рассмотрим задачу, которую проще всего решать с конца.

В куче 25 *камней. Игроки берут по очереди* 2, 4 *и* 7 *камней. Проигрывает тот, кому некуда ходить.*

Решение. Случаи 0, 1 камня проигрышны для начинающего. Поэтому случаи 2, 3, 4, 5, 7, 8 камней для начинающего выигрышны: своим ходом он переводит игру в позицию, проигрышную для противника. Аналогично, 6 и 9 камней проигрышны для начинающего и т. д. Легко установить последовательность выигрышных и проигрышных позиций и получить, в частности, ответ: победит начинающий.

10.32. а) (10) Имеется куча из n камней. Двое играющих берут из неё по очереди камни. Каждый может взять 1, 2 или 3 камня. Выигрывает тот, кто берет последние камни. При каком числе камней в куче начинающий выигрывает (т. е. добьется победы, как бы ни играл его партнёр)? б) (15) Та же задача, если в куче n камней, а каждый может взять от 1 до m камней ($m < n$).

10.33.(10) Двое, А и В, играют в такую игру: поочерёдно называют целые положительные числа, причём игрок А называет число не больше 10, игрок В называет число, превышающее число, названное игроком А, но не более, чем на 10 и т. д. Выигрывает тот, кто назовет число 100.

10.34.(15) а) В коробке 27 спичек. Двое играющих берут по очереди 1, 2, 3 или 4 спички. Выигрывает тот, у кого после окончания игры окажется чётное число спичек. б) Каков ответ в более общем случае, когда в коробке находится $2n + 1$ спичка, а брать разрешается любое число спичек от 1 до m?

10.35.(15) На концах клетчатой полоски 1×20 стоит по шашке. За ход разрешается сдвинуть любую шашку в направлении другой на одну или две клетки. (Перепрыгивать шашкой через шашку нельзя.) Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.36.(15) Клетчатая полоска 1×15 занумерована числами $0, 1, \ldots, 14$. Два игрока по очереди передвигают фишку, которая стоит на одной из клеток, влево на 1, 2 или 3 поля. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Кто и при каких начальных положениях фишки выигрывает?

10.37.(15) За ход разрешается взять из коробка с 300 спичками не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.38.(15) Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит 0.

10.39.(15) Имеется две кучки спичек: а) 101 спичка и 201 спичка; б) 100 спичек и 201 спичка. За ход разрешается уменьшить количество спичек в одной из кучек на число, являющееся делителем количества спичек в другой кучке. Выигрывает тот, после чьего хода спичек не остается.

10.40.(15) Король стоит на поле a1. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, или на одно поле вверх, или на одно поле по диагонали вправо вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля на поле h8.

10.41.(15) Конь стоит на поле a1. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или вниз, или на две вверх и на одну вправо или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.42.(20) Ферзь стоит на поле c1. За ход его можно передвинуть на любое число полей вправо, вверх или по диагонали вправо вверх. Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле h8.

10.43.(15) Имеется две кучки камней: в первой — 7 камней, во второй — 5. За ход разрешается брать любое количество камней из одной кучки или поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.44.(15) Имеется две кучки по 11 спичек. За ход можно взять две спички из одной кучки и одну из другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.45.(15) Имеется листок размером 7×7 клеток. Играют двое. За ход можно поставить крестик в любую клетку, если в ней ещё нет крестика, и в соседних с ней (по стороне) клетках тоже нет крестика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Может ли один из игроков играть так, чтобы всегда выигрывать (как бы ни играл другой)?

10.46.(15) Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число от 1 до 9. Выигрывает тот, кто получит число 100.

10.47.(15) Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000.

10.48.(15) Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит 1000.

10.49.(20) Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки (в том числе $1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит 0.

10.50.(20) На доске написано число 31. Лёша и Витя по очереди пишут натуральное число, которое получается при уменьшении имеющегося натурального числа не более чем вдвое. Выигравшим считается тот, после хода которого получилось число 1.

10.51.(20) а) Имеется две кучки по 7 камней. За ход разрешается взять один камень из любой кучки или по камню из каждой кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. б) Кроме ходов, допустимых в пункте а), разрешается перекладывать один камень из первой кучки во вторую.

10.52.(15) (МО 68) Имеются две кучки конфет: в одной — 20 штук, в другой — 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две не обязательно равных кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10.53.(15) (МО 75) Имеется три кучки камней: в первой — 50, во второй — 60, в третьей — 70 камней. Ход состоит в разбиении каждой кучки, состоящей более чем из одного камня, на две, меньшие кучки. Выигрывает тот, после чьего хода во всех кучках будет по одному камню.

10.54.(20) (МО 71) Двое игроков по очереди берут из кучи в 10 миллионов спичек. За ход можно взять из кучи спички в количестве p^n, где p — простое число, n — любое (можно взять 125, 49, 5, 1 и т. д.). Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку.

10.55.(20) (Югославия 83) На трёх крайних справа полях доски $1 \times n$ стоит по фишке. Двое играют в следующую игру: каждый по очереди берет одну из фишек и передвигает её на несколько полей влево. Проигрывает тот, кто не может сделать свой ход.

Передача хода эффективна в задачах, где надо доказать, что один из игроков (обычно первый) всегда может добиться по крайней мере ничьей.

10.56.(10) Двойными шахматами называется игра, отличающаяся от обычных шахмат только тем, что каждый из противников может делать по два хода подряд. Докажите, что при такой игре белые всегда могут выиграть или по крайней мере добиться ничьей.

10.57.(10) Докажите, что в игре «крестики-нолики» на бесконечной доске «нолики» не могут рассчитывать больше, чем на ничью.

10.58.(15) Пусть игра ведётся до 4 знаков подряд. Докажите, что при правильной стратегии крестики выиграют не более чем за 6 ходов.

10.59.(20) Пусть игра ведётся до 3 знаков подряд. Какое наименьшее число клеток должна содержать доска, чтобы начинающий мог выиграть, как бы не играл его противник? (Нарисовать доску (произвольной формы) и доказать минимальность числа клеток.)

10.60.(10) (СПО 80) В 50 коробках лежат 100 конфет. Девочка и мальчик берут поочерёдно по конфете (начинает девочка).

Может ли мальчик добиться того, чтобы последние две конфеты лежали в одной коробке?

10.61.(15) Каждым ходом из лежащих на столе 50 конфет можно взять любое число, строго меньшее половины, или ровно одну конфету. Выигрывает тот, кто взял последнюю конфету.

10.62.(10) Компании A и B получили право освещать столицу шахматной мысли Нью-Васюки, представляющую собой прямоугольную сетку улиц. Они по очереди ставят на неосвещённый перекрёсток прожектор, который освещает весь северо-восточный угол города (от 0° до 90°). Премию О. Бендера получит компания, которой на своём ходе нечего будет освещать.

10.63.(15) В клетки прямоугольника а) $k \times k$; б) $2 \times k$ по очереди ставят прожектора, освещающие все клетки, расположенные не левее и не выше. При этом каждым ходом надо освещать хоть одну новую клетку. Кто проставит прожектор в самый левый верхний угол, проигрывает. Кто может обеспечить себе выигрыш, и как ему следует играть?

10.64.(15) Философы Тун и Бол начали спор, выдвинув по одному тезису каждый. Далее по очереди каждый может либо повторить, без пропуска, абсолютно все свои ранее произнесённые фразы или же повторить только что прослушанную речь другого, добавив к ней одну свою фразу. Проигрывает тот, кто впервые в очередном своём выступлении произнесет более 9 фраз подряд. Кто переспорит?

10.65.(20) Есть несколько яблок и два человека. Они берут по яблоку и начинают есть одновременно. Каждый может взять следующее яблоко только после того, как съел предыдущее. Скорость поедания (в граммах в секунду) одинакова у обоих игроков. Какое яблоко стоит выбрать первому подошедшему к столу, чтобы съесть больше в следующих случаях:

а) три яблока: 300, 400, 500 г; б) 300, 500, 700, 900 г;
в) 300, 600, 700, 800 г; г) 10, 20, 21, 30, 31 г;
д) 100, 201, 202, 203 г; е) 201, 299, 400, 600, 900 г;
ж) a, b, c, d, где $a < b < c < d$ и $d < a + b$.

10.66.(20) 5 ямок расположены в ряд. В каждой лежит по шарику. За ход разрешается переложить все шарики из какой-нибудь ямки в соседнюю справа ямку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (когда все шарики лежат в самой правой ямке).

10.67.(15) (МО 69) Двое по очереди вычёркивают одно число из ряда $1, 2, 3, \ldots, 27$ до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает первый, если не делится — то второй.

10.68.(15) (МО 69) Двое по очереди вычёркивают по 9 любых чисел из ряда $1, 2, 3, \ldots, 101$. После 11 таких вычёркиваний останутся два числа. Затем второй присуждает первому столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Доказать, что первый всегда сможет набрать по крайней мере 550 очков, как бы ни играл второй.

10.69.(15) (МО 69) Два мудреца по очереди вычёркивают из чисел: $0, 1, \ldots, 1024$: первый — 512 чисел, второй — 256 из оставшихся, затем первый — 128 чисел и т. д. На десятом шаге второй зачёркивает 1 число, остаются два. Затем второй мудрец платит первому разницу между этими числами. Как выгоднее играть первому и как второму? Сколько второй уплатит первому, если оба будут играть наилучшим образом?

10.70.(15) (МО 79) Лёша и Витя по очереди отмечают на бесконечной клетчатой бумаге узлы (точки пересечения вертикальных и горизонтальных прямых) так, чтобы после этого все отмеченные узлы лежали в вершинах выпуклого многоугольника. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода.

10.71.(15) (МО 94) На доске 19×94 клеток двое по очереди отмечают квадрат по линиям сетки (любого размера) и закрашивают его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя.

10.72.(20) (МО 99) Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы А или Б (слева направо одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). Игра заканчивается, когда оба сделают по 1999 ходов. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т. е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

10.73.(15) (Югославия 74) На шахматной доске 8×8 стоят 8 белых фишек на первой горизонтали и 8 чёрных — на восьмой. Ходы игроков состоят в перемещении одной из своих фишек по вертикали на одну или несколько клеток вперёд или назад. Нельзя снимать фишки, ставить фишку на клетку, занятую фишкой противника или перепрыгивать через неё. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Доказать, что выигрывают чёрные.

10.74.(20) (Румыния 78) Дан выпуклый многогранник с $n \geqslant 5$ гранями, из каждой вершины которого выходит ровно по три ребра. Каждый из игроков пишет на одной из свободных граней своё имя. Для победы надо написать своё имя на трёх гранях, имеющих общую вершину. Доказать, что выиграет первый игрок.

10.75.(20) (ВО 65) Имеется доска 3×3 клетки и 9 карточек размером в клетку, на которых написаны какие-то числа. Двое играющих по очереди кладут эти карточки на клетки доски. После того, как все карточки разложены, первый считает сумму чисел, стоящих в верхней и нижней строках, а второй — сумму чисел, стоящих в левом и правом столбцах. Выигрывает тот, у кого сумма больше.

10.76.(20) (ВО 66) Написано 20 чисел от 1 до 20. Двое по очереди ставят перед этими числами знак «+» или «−» (знак можно ставить перед любым числом, перед которым он ещё не стоит, включая первое). Игра заканчивается после того, как проставлены все 20 знаков, затем вычисляется результат. Первый хочет добиться, чтобы он был по абсолютной величине как можно меньше, а второй — как можно больше. Какое наибольшее по абсолютной величине значение может обеспечить в итоге второй игрок?

10.77.(15) (ВО 78) Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает её на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Ходить второй раз на поле, где фишка побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить. а) Докажите, что если n чётно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечётно, то выигрывает второй. б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

10.78.(20) (ВО 78) Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m > n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает взявший последнюю спичку в одной из кучек. а) Докажите, что если $m > 2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш. б) При каких α верно следующее утверждение: если $m > \alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш?

10.79.(15) (ВО 82) Каждой вершине куба поставлено в соответствие некоторое неотрицательное действительное число, причём сумма всех этих чисел равна 1. Двое играют в следующую игру. Первый выбирает любую грань куба, второй выбирает другую грань и, наконец, первый выбирает третью грань куба. При этом выбирать грани, параллельные уже выбранным, нельзя. Докажите, что первый игрок может играть так, что число, соответствующее общей вершине трёх выбранных граней, не превосходило $1/6$.

10.80.(15) (ВО 87) Два игрока поочерёдно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p. Правилами игры запрещается писать на доске делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p = 10$, и укажите её. б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p = 1000$.

10.81.(15) (ВО 97) На доске записаны числа $1, 2, \ldots, 1000$. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются два числа. Если их сумма делится на 3, то побеждает первый игрок, если нет — второй.

10.82.(15) На доске написано уравнение $*x^2 + *x + * = 0$. Первый игрок называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо звёздочек. Может ли первый выбрать три числа так, чтобы квадратное уравнение имело разные рациональные корни или второй всегда может ему помешать?

10.83.(15) Дано три равенства: $* = *$, $* + * = *$, $* + * + * = *$. Два игрока по очереди вписывают вместо звёздочек числа. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы все равенства выполнялись.

10.84.(15) (ВО 69) На доске написано уравнение $x^3 + \ldots x^2 + {} + \ldots x + \ldots = 0$. Двое играют в такую игру. Первый ставит на любое из пустых мест целое число, отличное от 0 (положительное или отрицательное). Затем второй ставит целое число на одно из оставшихся мест. Наконец, первый ставит целое число на последнее свободное место. Докажите, что первый может играть так, чтобы независимо от хода второго все три корня получившегося уравнения оказались целыми числами.

10.85.(20) (ВО 77) Написан многочлен

$$x^{10} + *x^9 + *x^8 + \ldots + *x^2 + *x + 1.$$

Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из звёздочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звёздочек, затем снова первый заменяет одну из звёздочек числом и т. д. (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если будет хотя бы один корень — выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого?

10.86.(25) (ВО 72) Двое играют в следующую игру. Один называет цифру, а другой вставляет её по своему усмотрению вместо одной из звёздочек в следующей разности:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} **** \\ **** \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Затем первый называет ещё одну цифру и так далее 8 раз, пока все звёздочки не заменятся на цифры. Тот, кто называет цифры, стремится к тому, чтобы разность получилась как можно больше, а тот, кто их расставляет — чтобы она стала как можно меньше. Докажите, что:

а) второй может расставлять числа так, чтобы получившаяся при этом разность стала бы не больше 4000 независимо от того, какие цифры называл первый;

б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000 независимо от того, куда расставляет эти цифры второй.

10.87.(15) (СО 00) В игре участвуют два игрока: А и Б. Игрок А задает значение одного из коэффициентов a, b или c многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$. Игрок Б указывает значение любого из двух оставшихся коэффициентов. Затем игрок А задает значение последнего. Существует ли стратегия игрока А такая, что как бы ни играл игрок Б, уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три разных действительных решения?

10.88.(20) (ВО 99) В коробке лежит полный набор костей домино. Два игрока по очереди выбирают из коробки по одной кости и выкладывают их на стол, прикладывая к уже выложенной цепочке с любой из двух сторон по правилам домино. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

10.89.(20) (ВО 99) В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причём Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя — либо один, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?

Игры-преследования

10.90.(15) В центре квадратного пруда плавает ученик. Внезапно к вершине квадрата подошёл учитель. Учитель не умеет плавать, но ходит быстрее в 4 раза, чем ученик плавает. Ученик бегает быстрее. Сможет ли он убежать?

10.91.(15) (МО 84) В зоопарке дорожки образуют равносторонний треугольник, в котором проведены средние линии. Из клетки сбежала обезьяна. Её ловят два сторожа. Смогут ли они поймать обезьяну, если все трое будут бегать только по дорожкам, скорости обезьяны и сторожей равны и все они видят друг друга?

10.92.(15) (ВО 69) В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, а в вершинах квадрата — четыре собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки — только по сторонам квадрата. Известно, что волк задирает собаку, а две собаки задирают волка. Максимальная скорость каждой собаки в 1,5 раза больше максимальной скорости волка. Докажите, что собаки имеют возможность не выпустить волка из квадрата.

10.93.(20) (МО 72) Город состоит из 10 бесконечных параллельных проспектов, пересекающих через равные интервалы поперечные улицы. Двигаясь вдоль проспектов и улиц, два полицейских хотят обнаружить гангстера, который прячется за домами. Если гангстер окажется на одной улице или проспекте с каким-либо полицейским, то он обнаружен. Скорость гангстера не более чем в 10 раз превышает скорость полицейских, причём полицейские знают, что он в начальный момент времени находился от них на расстоянии не более 100 кварталов. Докажите, что полицейские смогут обнаружить гангстера.

10.94.(20) (МО 85) В центре квадрата сидит заяц, а в каждой вершине по одному волку. Может ли заяц выбежать из квадрата, если волки могут бегать только по сторонам квадрата с максимальной скоростью, в 1,4 раза большей максимальной скорости зайца?

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

11. ДЕЛИМОСТЬ

11.1. Разложение на множители. Простые и составные числа

Решение задач этой части основано на основной теореме арифметики: каждое натуральное число, кроме единицы, раскладывается в произведение простых сомножителей, причём единственным образом.

Разберём ряд простых задач.

1. *Делится ли* $2^9 \cdot 3$ *на* 6?

Ответ. Да, потому что $6 = 2 \cdot 3$, а 2 и 3 входят в разложение данного числа на простые.

2. *Верно ли, что если натуральное число делится на* 4 *и на* 3, *оно делится на* 12?

Ответ. Да. В разложение на простые множители числа, делящегося на 4, двойка входит по крайней мере два раза. Поскольку число делится и на 3, то в его разложение входит и тройка. Поэтому оно делится на 12.

3. *Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 6, то оно делится на* $24 = 4 \cdot 6$?

Ответ. Нет. Например, число 12. Дело в том, что если число делится на 4, то в его разложение на простые множители по крайней мере дважды входит число 2; из делимости числа на 6 следует, что в его разложении есть 2 и 3. Таким образом, заведомо в его разложение входят две (не три!) двойки и одна тройка, и можно утверждать лишь то, что число делится на 12.

4. *Число* A *не делится на* 3. *Может ли на* 3 *делиться число* $2A$?

Ответ. Нет, поскольку тройка не входит в разложение на простые множители числа $2A$.

5. *Число* A *— чётно. Верно ли, что* $3A$ *делится на* 6?

Ответ. Да, так как 2 и 3 входят в разложение числа $3A$ на простые множители.

6. *Число* $5A$ *делится на* 3. *Верно ли, что* A *делится на* 3?

Ответ. Да, потому что в разложение числа $5A$ на простые множители тройка входит, а в разложение числа 5 — нет.

7. *Число* $15A$ *делится на* 6. *Верно ли, что* A *делится на* 6?

Ответ. Нет. Например, $A = 2$. Дело в том, что тройка, входящая в разложение числа 6, входит и в разложение числа 15. Поэтому можно утверждать лишь то, что в разложении числа A обязательно есть двойка.

11.1.(10) Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

Указание: Среди этих трёх чисел есть хотя бы одно чётное число и одно число, делящееся на 3.

11.2.(10) Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится а) на 30; б) на 120.

11.3.(10) Докажите, что $n^3 - 4n$ делится на 48 при чётном n.

11.4.(10) Обозначим через $\overline{ab}$ число с цифрами a и b. Докажите, что число $\overline{ab} + \overline{ba}$ делится на 11.

11.5.(15) Докажите, что $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ делится на 128 при нечётном n.

11.6.(10) Коля и Петя купили одинаковые беговые лыжи. Сколько стоит одна пара лыж, если Петя уплатил стоимость лыж трёхрублёвыми купюрами, Коля — пятирублёвыми, а всего они дали в кассу меньше 10 купюр?

11.7.(10) Найти такие четыре натуральных числа, что произведение любых трёх из них, сложенное с единицей, делится на четвёртое.

11.8.(15) Найти такие четыре разных целых числа, что сумма любых трёх из них делится на четвёртое.

11.9.(15) Найти n таких разных целых чисел, что произведение любых $n - 1$ из них делится на оставшееся число.

11.10.(10) Доказать, что число $\overline{ababab}$ делится на 7, 13, 37.

11.11.(10) p и q — различные простые числа. Сколько делителей у числа а) pq; б) p^2q; в) p^2q^2; г) p^nq^m?

11.12.(10) Чтобы узнать, является ли число 1601 простым, его стали последовательно делить на 2, 3, 5 и т. д. На каком простом числе можно прекратить испытания?

11.13.(10) p — простое число. Сколько существует натуральных чисел а) меньших p и взаимно простых с ним; б) меньших p^2 и взаимно простых с ним?

11.14.(15) Докажите, что число имеет нечётное число делителей, тогда и только тогда, когда оно точный квадрат.

11.15.(15) Пусть k — число делителей числа n. Доказать, что $k^2 < 4n$.

11.16.(15) а) Существует ли 100 натуральных чисел таких, что их сумма равна их наименьшему общему кратному? б) А если все числа различны?

11.17.(20) Доказать, что наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, 2n$ равно наименьшему общему кратному чисел $n+1$, $n+2, \ldots, 2n$.

11.18.(20) Доказать, что если s — число всех делителей натурального числа n, то произведение всех делителей равно $\sqrt{n^s}$.

11.19.(10) Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причём одинаковые цифры — на одинаковые буквы, а разные — на разные. В итоге у него получилось $АБ \cdot ВГ = ДДЕЕ$. Докажите, что он где-то ошибся.

11.20.(10) Каково наименьшее натуральное n, при котором $n!$ делится на 990?

11.21.(15) Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?

11.22.(15) (Венгрия 25) На сколько нулей оканчивается число (100!)?

11.23.(10) а) Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом? б) (МО 73) А если у числа 600 шестёрок, остальные нули?

11.24.(15) Можно ли число 1998 представить как разность квадратов двух натуральных чисел?

11.25.(10) а) $a+1$ делится на 3. Докажите, что $4+7a$ делится на 3.

б) $2+a$ и $35-b$ делятся на 11. Докажите, что $a+b$ делится на 11.

11.26.(15) Пусть a и b — целые числа. Докажите, что если $a^2+9ab+b^2$ делится на 11, то и a^2-b^2 делится на 11.

11.27.(15) В лес пошли 11 девочек и n мальчиков. Вместе они собрали n^2+9n-2 гриба, причём все они собрали поровну грибов. Кого было больше: мальчиков или девочек?

11.28.(15) Докажите, что если квадрат натурального числа содержит нечётное число десятков, то цифра единиц квадрата равна 6.

11.29.(20) Два двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырёхзначное число, которое делится на их произведение. Найти эти числа.

11.30.(15) Пусть N — произвольное натуральное число, не меньшее 10. Зачеркнем последнюю цифру числа N и к полученному числу прибавим число, равное удвоенной зачёркнутой цифре. Получилось число N_1. Докажите, что либо числа N и N_1 оба делятся на 19, либо оба числа на 19 не делятся.

11.31.(15) Найти все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.

11.32.(10) (СО 97) В середине числа 1996 (т. е. между 19 и 96) вставьте несколько цифр так, чтобы получившееся число делилось на 1997. При этом надо обойтись наименьшим количеством вставленных цифр.

11.33.(20) Пусть $S(A_0)$ — сумма цифр натурального числа A_0. Положим $A_1 = A_0 \cdot S(A_0)$, $A_2 = A_1 \cdot S(A_1)$ и т. д. Укажите все такие A_0, для которых $1 = S(A_k) = S(A_{k+1}) = \ldots$ для некоторого k.

11.34.(15) Сумма цифр трёхзначного числа равна 7. Доказать, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда равны его цифры десятков и единиц.

11.35.(20) Доказать, что выражение $x+1/x$ не является целым числом ни при каком рациональном x, отличном от ± 1.

11.36.(15) Может ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 23?

11.37.(15) Дана последовательность $1, 1, 2, 3, 7, 22, \ldots$, каждый член которой равен произведению предыдущих двух плюс 1. Доказать, что ни один член последовательности не делится на 4.

11.38.(15) Можно ли прямоугольный параллелепипед $2^{10} \times 3^{10} \times 5^{10}$ разрезать на кирпичики $4 \times 5 \times 10$?

11.39.(15) Доказать, что $1+2+2^2+\ldots+2^{1990}$ не делится на 3.

11.40.(10) Есть ли натуральные числа, произведение цифр которых равно 1986?

11.41.(15) Докажите, что произведение 100 последовательных натуральных чисел не может быть 100-й степенью целого числа.

11.42.(15) Найти все числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

11.43.(15) Докажите, что $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121.

Простые и составные числа

11.44.(15) Доказать, что никакое простое число нельзя представить двумя различными способами в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

11.45.(15) Докажите, что сумма n последовательных нечётных натуральных чисел при $n > 1$ является составным числом.

11.46.(15) (СПО 86) Пусть a и b такие числа, что $56a = 65b$. Доказать, что $a + b$ — составное число.

11.47.(15) Вначале на доске написано натуральное число A. Разрешается прибавить к нему один из его делителей, отличных от него самого и 1. С полученным числом разрешается проделать аналогичную операцию и т. д. Докажите, что из числа $A = 4$ можно с помощью таких операций прийти к любому наперёд заданному составному числу.

Одним из интересных свойств простых чисел является то, что в ряду простых чисел встречаются сколь угодно большие пробелы:

11.48. Докажите, что существует такое натуральное n, что числа $n + 1, n + 2, \ldots, n + 1997$ (вместо 1997 может быть любое число): а) (15) составные; б) (20) имеют в качестве делителя число, не равное 1 и являющееся полным квадратом; в) (20) имеют в качестве делителя число, не равное 1 и являющееся m-й степенью (m — произвольное) некоторого числа.

11.49.(20) (МО 97) Докажите, что существует натуральное число, которое при замене любой тройки соседних цифр на произвольную тройку остается составным. Существует ли такое 1997-значное число?

Следующая задача была поставлена и решена Евклидом.

11.50.(15) Существует бесконечно много простых чисел.

Кроме разложения числа на простые множители, часто используется разложение алгебраических выражений на множители (формулы сокращённого умножения). (См. также 11.25–11.27.)

Доказать, что число 9991 — *составное.*

Решение. $9991 = 10000 - 9 = 100^2 - 3^2 = (100 - 3)(100 + 3)$.

Отметим, что обобщением этой задачи являются критерий Эйлера: если натуральное число может быть представлено в виде разности или суммы двух квадратов натуральных чисел более, чем одним способом (считается, что перестановка не дает нового способа), то N — составное число, если же такой способ один, то N — простое (для суммы см. 11.44).

11.51.(10) а) Теорема Софи Жермен. Число $N = n^4 + 4$ — составное при всех натуральных n. б) Докажите, что $N = n^4 + 4m^4$ — составное при всех натуральных m и n.

Доказать, что числа 1001 *и* 973 *составные.*

Решение. $1001 = 1000 + 1 = 10^3 + 1 = (10 + 1)(10^2 - 10 + 1)$; $973 = 1000 - 27 = 10^3 - 3^3 = (10 - 3)(10^2 + 3 \cdot 10 + 3^2)$.

Доказать, что следующие числа составные:

11.52.(10) 3551.

11.53.(10) 8^n+1, 8^n-1.

11.54.(10) $2^{3^{1997}}+1$.

11.55.(10) 2^9+5^{12}.

11.56.(10) $222^{555}+555^{222}$.

11.57.(10) $1977\cdot 1997+100$.

11.58.(20) Числа 117, 171, 711 — все составные, числа 1117 и 1171 — простые, а 1711 и 7111 — составные: $1711=29\cdot 59$, $7111=13\cdot 547$. Докажите, что для любого $n\geqslant 2$ среди чисел, записываемых с помощью n единиц и одной семёрки, найдется хотя бы одно составное число.

11.59. а) (10) (Польша 50) Доказать, что если n — не простое и $n>4$, то $(n-1)!$ делится на n. б) (15) Доказать, что даже $(n-3)!$ делится на n. в) (10) А будет ли всегда $(n-4)!$ делиться на n?

11.60.(20) Теорема Вильсона. Докажите, что число p простое, тогда и только тогда, когда $(p-1)!+1$ делится на p.

Это красивый, но к сожалению, непрактичный критерий — его трудно проверять.

11.61.(15) Верно ли, что n^3+5n-1 простое при любом натуральном n?

11.62.(20) Докажите, что, кроме констант, не существует многочленов $P(n)$ с целыми коэффициентами, значения которых при всех натуральных n — простые числа.

Отметим, что в 1970 году советский математик Ю. В. Матиясевич доказал существование многочлена от 21 переменного с целыми коэффициентами такого, что множество его положительных значений при целых значениях переменных совпадает с множеством простых чисел.

11.63.(15) (МЕО 64) а) Определить натуральные n, при которых 2^n-1 делится на 7. б) (15) Доказать, что ни при каких n число 2^n+1 не делится на 7.

11.64.(20) (МО 71) Докажите, что среди чисел $\left[2^k\cdot\sqrt{2}\right]$ бесконечно много составных ($[x]$ — целая часть x).

11.65.(15) (МО 74) Докажите, что число $10\ldots 01$ ($2^{1974}+2^{1000}-1$ нулей) — составное.

11.66.(15) (МО 75) Натуральные числа a, b, c таковы, что числа $p=b^c+a$, $q=a^b+c$, $r=c^a+b$ простые. Доказать, что хотя бы два из чисел p, q, r равны между собой.

11.67.(20) (МО 83) а) Доказать, что $1^{1983}+2^{1983}+\ldots+1983^{1983}$ делится на $1+2+\ldots+1983$. б) Доказать, что при любом нечётном n $1^n+2^n+\ldots+n^n$ делится на $1+2+\ldots+n$.

11.68.(15) (МО 86) Найти все натуральные числа, непредставимые в виде разности квадратов каких-либо натуральных чисел.

11.69.(15) (МО 95) Докажите, что все числа вида 1007, 10017, $100117, \ldots, 10011\ldots117, \ldots$ делятся на 53.

11.70.(15) (МО 95) Целые числа a, b, c, таковы, что числа $a/b+$ $+b/c+c/a$ и $a/c+c/b+b/a$ тоже целые. Докажите, что $|a|=|b|=|c|$.

11.71.(20) (МО 95) Докажите, что существует бесконечно много таких составных n, что $3^{n-1}-2^{n-1}$ кратно n.

11.72.(15) (СПО 96) Найти все n, для которых 3^n+5^n делится на $3^{n-1}+5^{n-1}$.

11.73.(15) (Польша 55) Доказать, что среди 7 натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью 30, одно и только одно число делится на 7.

11.74.(20) (Польша 64) Доказать, что если три простых числа образуют арифметическую прогрессию, разность которой не делится на 6, то наименьшее из этих чисел равно 3.

11.75.(20) (США 78) Докажите, что любое простое число вида $2^{2^t}+1$ не представимо в виде разности пятых степеней двух натуральных чисел.

11.76.(20) (Чехословакия 71) Пусть $m/n=1+1/2+\ldots+1/1972$, m/n — несократимая дробь. Докажите, что m делится на 1973 (1973 можно заменить на любое простое число).

11.77.(20) (ВО 64) Найдите все нечётные натуральные n, для которых $(n-1)!$ не делится на n^2.

11.78.(15) (ВО 71) Докажите, что для любого натурального n найдется число, составленное из цифр 1 и 2, делящееся на 2^n.

11.79.(20) (ВО 78) Найдите все простые числа p и q, для которых число $(p+1)^q$ является точным квадратом.

11.80.(15) (ВО 80) Найдите все натуральные числа n, для которых число $2^8+2^{11}+2^n$ является квадратом натурального числа.

11.81.(15) (ВО 80) Шестизначное число, записанное шестью отличными от нуля разными цифрами, делится на 37. Докажите, что перестановками цифр этого числа можно получить ещё по крайней мере 23 различных числа, делящихся на 37.

11.82.(15) (ВО 81) Найдите хотя бы одно натуральное число n такое, что каждое из чисел $n, n+1, n+2, \ldots, n+20$ имеет с числом $30030=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ общий делитель, больший единицы.

11.83.(15) (ВО 81) Корни уравнения $x^2 + ax + b + 1 = 0$ являются натуральными числами. Докажите, что $a^2 + b^2$ — составное число.

11.84.(15) (ВО 82) Разложите $2^{1982}+1$ на два натуральных множителя, каждый из которых не меньше 1000.

11.85.(15) (ВО 82) Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются квадратами некоторых чисел. Докажите, что n делится на 8.

11.86.(20) (ВО 85) Докажите, что число $1010\dots101$ (k нулей и $k+1$ единиц, где $k > 3$) является составным.

11.87.(15) (ВО 86) Найдите все натуральные числа, каждое из которых равно квадрату числа всех своих делителей.

11.88.(15) (ВО 86) Десятичная запись натурального числа a состоит из n одинаковых цифр x, числа b — из n одинаковых цифр y, а числа c — из $2n$ одинаковых цифр z. Для любого $n \geqslant 2$ найдите все такие цифры x, y, z, для которых $a^2 + b = c$.

11.89.(15) (ВО 87) Найдите все трёхзначные числа $\overline{abc}$, квадраты которых оканчиваются на $\overline{abc}$.

11.90.(15) (ВО 87) Докажите, что при каждом натуральном n число $1^{1987} + 2^{1987} + \dots + n^{1987}$ не делится на $n+2$. (ср. с 11.39, 11.67).

11.91.(15) (ВО 87) Найти такой набор из пяти различных натуральных чисел, в котором любые два числа взаимно просты, а любые несколько чисел дают в сумме составное число.

11.92.(15) (ВО 89) Докажите, что число $4^{545} + 545^4$ — составное.

11.93.(20) (ВО 89) Натуральное число N имеет ровно 12 делителей (включая 1 и N). Занумеруем их в порядке возрастания: $d_1 < d_2 < \dots < d_{12}$. Известно, что делитель с номером $d_4 - 1$ равен произведению $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)d_8$. Найти N.

11.94.(15) (ВО 93) Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются точными квадратами. Может ли при этом число $5n+3$ быть простым?

11.95.(15) (ВО 94) Найдите все натуральные числа n, каждое из которых является произведением двух простых чисел, а сумма всех делителей числа n, считая 1, но не считая n, равна 1000.

11.96.(15) (ВО 95) Найдите все простые p такие, что число $p^2 + 11$ имеет ровно 6 различных делителей (включая единицу и само число).

11.97.(15) (ВО 95) Докажите, что для любого натурального числа $a_1 > 1$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такая, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$ делится на $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ при всех $k > 2$.

11.98.(15) (ВО 96) Существуют ли три натуральных числа, больших 1 и таких, что квадрат каждого из них, уменьшенный на 1, делится на каждое из остальных?

11.99.(20) (ВО 96) Пусть натуральные числа x, y, p и n таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число n ($n > 1$) нечётное, а число p — нечётное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).

11.100.(20) (ВО 96) Найдите все натуральные n такие, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном k, $k > 1$, выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

11.101.(20) (ВО 97) Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1?

11.102.(20) (МЕО 84) Укажите какую-либо пару натуральных чисел (a, b) такую, что а) $ab(a + b)$ не делится на 7; б) $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ делится на 7^7.

11.103.(20) (МЕО 94) Показать, что существует множество A, состоящее из целых положительных чисел, которое обладает следующим свойством: для каждого бесконечного множества S простых чисел существует целое число $k > 1$, а также существуют два целых положительных числа $m \in A$ и $n \notin A$ таких, что оба являются произведениями k различных элементов множества S.

11.2. Остатки

Разделить a на m (натуральное) с остатком означает представить a в виде $a = km + r$, где $0 \leqslant r < m$. Будем обозначать остаток $r = \text{ост}_m(a)$.

Решение задач этой части основано на двух следующих утверждениях.

11.104.(15) Пусть $r_1 = \text{ост}_m(a_1)$, $r_2 = \text{ост}_m(a_2)$. Докажите, что а) $\text{ост}_m(a_1 + a_2) = \text{ост}_m(r_1 + r_2)$; б) $\text{ост}_m(a_1 \cdot a_2) = \text{ост}_m(r_1 \cdot r_2)$ (в частности, $\text{ост}_m(a^n) = \text{ост}_m(r^n)$).

11.105. Найдите а) (10) $\text{ост}_6(7^{101})$, б) (15) $\text{ост}_7(3^{1989})$, в) (10) $\text{ост}_3(1996^2 + 1997 \cdot 1998 \cdot 1999)$.

Разберём следующую задачу:

Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 для любого n.

Решение. Число n может давать при делении на 3 один из трёх остатков: 0, 1, 2. Рассмотрим три случая. Если n дает остаток 0, то и n^3, и $2n$ делятся на 3 и поэтому $n^3 + 2n$ также делится на 3. Если n дает остаток 1, то n^3 дает остаток 1, $2n$ — остаток 2, а $1 + 2$ делится на 3. Если n дает остаток 2, то n^2 дает остаток 1, n^3 — остаток 2, $2n$ — остаток 1, а $2+1$ делится на 3. Требуемое доказано.

11.106. Составьте таблицу всех возможных остатков квадратов и кубов чисел при делении на: а) (5) 3; б) (5) 4; в) (5) 5; г) (5) 7; д) (5) 9.

11.107.(10) Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n.

11.108.(10) Докажите, что n^2+1 не делится на 3 ни при каком натуральном n.

11.109.(10) Докажите, что n^3+2 не делится на 9 ни при каком натуральном n.

11.110.(10) Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечётном n.

Указание. Докажите, что это число делится и на 3, и на 8.

11.111.(10) а) Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24, если p — простое число и $p > 3$. б) Докажите, что $p^2 - q^2$ делится на 24, если p, q — простые числа, большие 3.

11.112.(10) Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

11.113.(10) a и b — натуральные числа, причём число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что оно делится и на 441.

11.114.(10) Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 — при делении на 2, 2 — при делении на 3, 3 — при делении на 4, 4 — при делении на 5, 5 — при делении на 6.

11.115.(10) Доказать, что любую сумму, не меньшую чем 8 коп., можно выплатить лишь монетами достоинством в 3 коп. и 5 коп.

11.116.(15) a, b, c — натуральные числа, причём $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

11.117.(15) (Ср. с 11.74.) Три простых числа p, q и r, большие 3, образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Докажите, что d делится на 6.

11.118.(20) x, y, z — натуральные числа, причём $x^2+y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 12.

Следующая задача является усилением 5.33.

11.119.(10) Доказать, что из любых пяти целых чисел можно найти три, сумма которых делится на 3.

11.120. Найти последнюю цифру чисел: а) (5) 6^{1997}; б) (5) 9^{1997}; в) (10) 3^{1997}; г) (10) 2^{1997}.

11.121.(5) Докажите, что число $49^{100} - 14^{50}$ кратно 5.

11.122.(5) Доказать, что число $(7^{1968^{1970}} - 3^{68^{70}})/10$ — целое.

11.123.(5) Доказать, что разность $9^{1972} - 7^{1972}$ делится на 10.

11.124.(10) Какой цифрой оканчивается число: а) $9999^{999^{99^{9}}}$, б) $7^{7^{7}}$?

11.125.(10) Найдите последнюю цифру числа $1^2+2^2+\ldots+99^2$.

11.126. Найти две последние цифры чисел

а) (15) $1^3 + 2^3 + \ldots + 99^3$. б) (20) 2^{999}, 3^{999}, $14^{14^{14}}$.

в) (20) Какая последняя ненулевая цифра числа 100!?

11.127.(15) (Польша 52) Доказать, что ни при каком натуральном n число $1 + 2 + \ldots + n$ не может заканчиваться на 2, 4, 7, 9.

11.128.(15) Квадрат целого числа оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами. Какими?

11.129.(20) Определите число цифр в последовательности ненулевых одинаковых цифр, которой может оканчиваться полный квадрат, и найдите наименьший квадрат, который оканчивается на такую максимальную последовательность.

11.130.(20) Каковы три последние цифры числа 7^{9999}?

11.131.(15) Какие остатки может дать 100-я степень целого числа при делении на 125?

11.132.(20) Доказать, что если целое число N взаимно просто с 10, то N^{101} оканчивается теми же тремя цифрами, что и N.

11.133.(20) Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

11.134.(15) При каких натуральных значениях n число $n^5 - n$ делится на 120?

11.135.(15) (Германия) а) Доказать, что остаток от деления простого числа на 30 есть 1 или простое число. б) А при делении простого числа на 60?

11.136.(15) Известно, что числа 1020 и 1127 дают при делении на натуральное число a одинаковые остатки. Найдите число a.

11.137.(15) (МО 81) Натуральное число A при делении на 1981 дает в остатке 35, при делении на 1982 оно дало в остатке также 35. Каков остаток от деления числа A на 14?

11.138.(15) (МО 82) Числа $1, 2, 3, \ldots, 1982$ возводятся в квадрат и записываются подряд в некотором порядке. Может ли полученное многозначное число быть полным квадратом?

11.139.(15) а) Может ли сумма квадратов двух нечётных чисел быть квадратом целого числа? б) А трёх нечётных чисел?

11.140.(15) Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не является полным квадратом.

11.141.(15) Доказать, что сумма квадратов трёх целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

11.142.(15) Докажите, что существует бесконечно много чисел, которые не представимы в виде суммы двух квадратов.

11.143.(15) Докажите, что найдется бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы кубов трёх натуральных чисел.

11.144.(10) Доказать, что если $x^2 + y^2$ делится на 3, x, y — целые, то x и y делятся на 3.

Для простого числа 5 это не так: $3^2+1^2 = 10$ делится на 5, а 3 и 1 не делятся на 5. Вопрос о том, может ли для данного простого p сумма $x^2 + y^2$ делится на p, если ни одно из них не делится на p эквивалентен такому: существует ли такое z, что $z^2 + 1$ делится на p (или $z^2 \equiv 1 \pmod{p}$), говорят также: (-1) — квадратичный вычет по модулю p. Ответ (известный ещё Эйлеру): это возможно для чисел p вида $4k + 1$ $(p = 5, 13, 17, 29, \dots)$ и невозможно для $p = 4k + 3$ $(p = 3, 7, 11, 19, 23, \dots)$. Обобщение этого факта: для каких p и q существует такое z, что $z^2 - q$ делится p, называется *квадратичным законом взаимности Гаусса.*

11.145.(10) Может ли число 5^n+1 делиться на число 5^k-1 для каких-то натуральных n и k?

11.146.(15) Доказать, что $5^{3^n}+7$ делится на 12 при всех натуральных n.

11.147.(15) Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого длины всех рёбер — целые числа, объем — простое число, а площадь поверхности — квадрат целого числа?

11.148.(10) Сумма трёх натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из неё можно выбрать два, разность которых также делится на 9.

11.149.(15) По окончании конкурса бальных танцев, в котором участвовало 7 мальчиков и 8 девочек, каждый (каждая) назвал (назвала) количество своих партнёрш (партнёров): 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

11.150.(15) Про семь чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из чисел делится на 5.

11.151.(15) Некоторые целые числа объявлены хорошими, остальные — плохими. Известно, что если x — хорошее, то $x + 15$

тоже хорошее и что если x — плохое, то $x+6$ тоже плохое. Сколько плохих чисел может быть среди чисел от 1 до 1000? Укажите все варианты и докажите, что других быть не может.

11.152.(15) По кругу стоят 10 корзин. При каких n можно разложить n яблок по корзинам так, чтобы число яблок в соседних корзинах отличались ровно на 1?

11.153.(15) а) p, $p+10$, $p+14$ — простые числа. Найдите p.

б) p, $2p+1$, $4p+1$ — простые числа. Найдите p.

Указание. Рассмотрите остатки от деления на 3.

11.154.(15) p и $8p^2+1$ — простые числа. Найдите p.

11.155.(15) p, $4p^2+1$, $6p^2+1$ — простые числа. Найдите p.

11.156.(15) p и p^2+2 — простые числа. Докажите, что p^3+2 — простое число.

11.157.(10) Доказать, что если одно из чисел 2^n-1 и 2^n+1, где $n>2$, простое, то второе является составным.

11.158.(15) Доказать, что если 2^n+1 — простое число, то n — степень 2.

11.159.(15) а) Существуют ли четыре таких различных натуральных числа, что сумма любых трёх из них есть простое число? б) Существуют ли пять таких чисел?

11.160.(20) Доказать, что P_n-1 и P_n+1, где P_n — произведение первых n простых чисел ($n>1$), не являются полным квадратом.

11.161.(20) Числа p и $2p+1$ простые, $p>3$. Доказать, что число $4p+1$ — составное.

В задачах, где встречаются кубы целых чисел, полезно перебрать остатки от деления на 7 или 9.

11.162.(15) Докажите, что число $100\ldots00500\ldots001$ (в каждой из двух групп по 100 нулей) не является кубом целого числа.

11.163.(15) Докажите, что a^3+b^3+4 не является кубом целого числа ни при каких натуральных a и b.

11.164.(15) Докажите, что число $1967k+3$ не является кубом целого числа ни при каком k.

11.165.(20) Докажите, что число $6n^3+3$ не является шестой степенью целого числа ни при каком натуральном n.

11.166.(15) (Венгрия 11) Доказать, что если p — целое число, большее 1, то 3^p+1 не может делиться на 2^p.

11.167.(20) (ВО 70) На карточках написаны все пятизначные числа от 11111 до 99999 включительно. Затем эти карточки положены в одну цепочку в произвольном порядке. Докажите, что получившееся 444445-значное число не может быть степенью двойки.

11.168.(20) (ВО 74) Среди чисел вида $36^k - 5^l$, где k и l — натуральные числа, найдите наименьшее по абсолютной величине. Докажите, что найденное число действительно наименьшее.

11.169.(15) (ВО 77) Найдите все трёхзначные числа, которые при делении на 37 дают остаток 2, а при делении на 11 — остаток 5.

11.170.(15) (ВО 80) Даны числа $2-1, 2^2-1, \ldots, 2^{n-1}-1$, где n — нечётное число, большее или равное 3. Докажите, что хотя бы одно из данных чисел делится на n.

11.171.(15) (ВО 84) Найдите три последовательных простых числа, сумма квадратов которых является простым числом.

11.172.(20) (ВО 84) Назовем натуральное число абсолютно простым, если оно простое и если при любой перестановке его цифр снова получается простое число. Докажите, что в записи абсолютно простого числа не может содержаться более трёх различных цифр.

11.173.(15) (ВО 92) Целые числа x, y и z таковы, что $(x-y) \times \times (y-z)(z-x) = x+y+z$. Докажите, что число $x+y+z$ делится на 27.

11.3. Сравнения по модулю

Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если они имеют одинаковые остатки при делении на m. Это обозначается так: $a \equiv b \pmod{m}$.

11.174.(5) Докажите, что a делится на m тогда и только тогда, когда $a \equiv 0 \pmod{m}$.

Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a-b$ делится на m.

Решение. Пусть $a \equiv b \pmod{m}$. Обозначим одинаковый для a и b остаток при делении на m через r. Тогда $a = mk_1+r$, $b = mk_2+r$ и $a-b = m(k_1-k_2)$ делится на m.

Обратно, пусть $a-b$ делится на m. Разделим a и b на m с остатком. Получим $a = mk_1+r_1$, $b = mk_2+r_2$. Отсюда $a-b = = m(k_1-k_2)+r_1-r_2$ делится по условию на m. Таким образом, r_1-r_2 делится на m. Так как $|r_1-r_2| < m$, то $r_1 = r_2$.

Эта задача позволяет дать другое определение сравнимости двух чисел: целые числа a и b сравнимы по модулю m, если $a-b$ делится на m.

Заметим, что если $0 \leqslant b < m$, то $a \equiv b \pmod{m}$ равносильно тому, что a делится на m с остатком b. Из этого следует, что язык сравнений более общий, более естественный, более удобный, чем язык остатков. Одно из преимуществ, например, состоит в возможности сравнивать с (-1): например, $7 \equiv -1 \pmod{8}$ (см. 11.176), с которой работать значительно удобнее, чем с остатком (7 в данном случае).

Аналогично остаткам, для сравнений верны следующие важные свойства.

11.175.(15) Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$, $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$ (в частности, $a^n \equiv b^n \pmod{m}$).

11.176.(10) Найдите остаток от деления 7^n на 8.

11.177.(15) Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

11.178.(15) Докажите, что а) $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66. б) $a^n + b^n$ делится на $a + b$, если n — нечётное число.

11.179.(10) Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при нечётном n.

11.180.(15) Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

11.181.(15) Докажите, что среди 51 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 100.

11.182.(15) Назовем число n удобным, если $n^2 + 1$ делится на 1 000 001. Докажите, что среди чисел $1, 2, \ldots, 1\,000\,000$ чётное число удобных.

11.183.(10) Какова 1996-я цифра после запятой в десятичном разложении дроби $1/7 = 0{,}142857\ldots$?

11.184.(10) Положительное целое число делится на 18, а после прибавления 1 делится на 17. Может ли так быть?

11.185.(10) а) Может ли квадрат натурального числа оканчиваться цифрой 2?

б) Можно ли, используя только цифры 2, 3, 7, 8 (возможно, по несколько раз), составить квадрат натурального числа?

11.186.(10) Какое число нужно добавить к числу $(n^2-1)^{1000} \times (n^2+1)^{1001}$, чтобы результат делился на n?

11.187.(15) Найдите остаток от деления числа $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \ldots + 10^{10\,000\,000\,000}$ на 7.

11.188.(15) Сколько существует натуральных чисел n, меньших 10000, для которых $2^n - n^2$ делится на 7?

11.189.(15) (ВО 80) Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получающееся число $192021\ldots7980$ на 1980?

11.190.(15) (МО 55) Найдется ли такое натуральное n, что n^2+n+1 делится на 1955?

11.191.(15) Докажите, что $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133 при любом n.

11.192.(20) (МО 47) Докажите, что а) среди 10; б) среди 16 последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными; в) а если последовательных чисел — 17?

11.193.(20) Пусть n — натуральное число такое, что $n+1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей n делится на 24.

11.194.(20) Дана последовательность $a_1, a_2, \ldots$ натуральных чисел: $a_{n+2}=a_{n+1}a_n+1$ при всех n ($a_1=a_2=1$). Докажите, что a_n-22 — составное число при $n>10$.

11.195.(20) (Англия 76) Доказать, что при любом натуральном n число $19\cdot 8^n+17$ является составным.

11.196.(20) (МО 72) Дана бесконечная последовательность a_1, $a_2, \ldots$, где каждое следующее число получено из предыдущего приписыванием справа любой цифры, кроме 9. Известно, что a_1 — произвольное 10-значное число. Доказать, что в этой последовательности не менее двух составных чисел.

11.197.(20) (МО 70, 78) а) Дано 999-значное число. Известно, что если взять его любые 50 последовательных цифр и вычеркнуть все остальные, то полученное число будет делиться на 2^{50}. (Оно может начинаться с нулей или быть 0.) Докажите, что исходное число делится на 2^{999}.

б) Дано 1000-значное число A. Известно, что любые его 10 идущих подряд цифр образуют число, кратное 2^{10}. Докажите, что число A делится на 2^{1000}.

11.198.(15) (МО 77) а) Существуют ли такие шесть разных натуральных чисел, что сумма любых двух из них делится на их разность? б) А 1000 чисел?

11.199.(15) (МО 82) Найти все натуральные n, для которых $n2^n+1$ кратно 3.

11.200.(15) (ВО 83) Натуральные числа m, n, k таковы, что число m^n делится на n^m, а число n^k делится на k^n. Докажите, что число m^k делится на k^m.

11.201.(20) (ВО 97) Докажите, что для любых натуральных чисел m и n число 2^n-1 делится на число $(2^m-1)^2$ тогда и только тогда, когда n делится на число $m(2^m-1)$.

11.202.(20) (МЕО 78) Пусть m и n — натуральные числа, такие, что $n>m>0$. В десятичной записи группа из трёх последних цифр числа 1978^m совпадает с группой из трёх последних цифр числа 1978^n. Найти m и n так, чтобы сумма $m+n$ была наименьшей.

11.203.(15) (МЕО 86) Пусть d — положительное целое число, отличное от 2, 5 и 13. Доказать, что в множестве $\{2; 5; 13; d\}$ можно найти два различных числа a и b так, что число $ab-1$ не является квадратом целого числа.

11.204.(20) (МЕО 91) Пусть n — целое число, $n > 6$ и $a_1, \ldots,$ a_k — все натуральные числа, которые меньше n и взаимно просты с n. Докажите, что если $a_2-a_1 = a_3-a_2 = \ldots = a_k-a_{k-1} > 0$, то n — либо простое, либо натуральная степень числа 2.

Теорема Дирихле

11.205.(15) Докажите, что простых чисел вида $3k-1$ бесконечно много.

11.206.(15) Докажите, что простых чисел вида $6k-1$ бесконечно много.

Обобщением последних задач является теорема Дирихле.

Теорема Дирихле. В любой бесконечной арифметической прогрессии a, $a+d, a+2d, \ldots$, в которой a взаимно прост с разностью d, содержится бесконечно много простых чисел. (Или функция $y = dx + a$ принимает бесконечно много простых значений, когда x — натурально.)

Китайская теорема об остатках

11.207.(15) Докажите, что среди m членов арифметической прогрессии $a, a+d, \ldots, a+(m-1)d$ (a — целое, d взаимно просто с m) имеется ровно один, делящийся на m.

11.208.(20) Китайская теорема об остатках. Если $m_1, \ldots,$ m_n — попарно взаимно простые числа, $r_1, \ldots, r_n$ — такие числа, что $0 \leqslant r_i < m_i$, то существует такое целое число N, что $N \equiv r_i$ $(\mathrm{mod}\ m_i)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Эта теорема была известна более 2000 лет тому назад в древнем Китае. Приведем одно из следствий этой теоремы.

11.209.(15) Для любых взаимно простых чисел $m_1, \ldots, m_n$ и остатков $r_1, \ldots, r_n$ по модулям $m_1, \ldots, m_n$ найдутся n последовательных чисел $a, a+1, \ldots, a+n-1$ таких, что $a \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $a+1 \equiv r_2 \pmod{m_2}, \ldots,$ $a+n-1 \equiv r_n \pmod{m_n}$.

11.210.(15) а) Найти какие-нибудь три последовательных числа, каждое из которых делится на квадрат некоторого числа, большего 1. б) Докажите, что для любого n существуют n последовательных чисел с таким свойством.

11.211.(20) Найдите наименьшее чётное число a, такое, что $a+1$ делится на 3, $a+2$ — на 5, $a+3$ — на 7, $a+4$ — на 11, $a+5$ — на 13.

11.4. Признаки делимости и другие системы счисления

Напомним, что

$$\overline{a_1 \ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n.$$

11.212.(10) Докажите, что любое натуральное число сравнимо со своей последней цифрой по модулю а) 10, б) 2, в) 5.

11.213.(10) Докажите, что $\overline{a_1 \ldots a_n} \equiv \overline{a_{n-1} a_n} \pmod 4$.

11.214.(10) Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2^n и 5^n.

Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечётна.

Решение. Так как последняя цифра — 6, то возводимое в квадрат число чётно. Раз оно является квадратом, то оно делится и на 4. Следовательно, число, составленное из двух его последних цифр, должно делиться на 4. Все требуемые двузначные числа легко выписать: $16, 36, 56, 76, 96$.

11.215.(15) Предпоследняя цифра квадрата натурального числа — нечётная. Докажите, что его последняя цифра — 6.

11.216.(10) (МО 69) Докажите, что степень двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

11.217.(15) Найдите 100-значное число без нулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр.

11.218.(10) Написать наибольшее целое число: а) в котором все цифры различны, б) которое делится на 4 и все цифры которого различны; написать наименьшее целое число, составленное из всех цифр, которое делится в) на 5, г) на 20.

Докажите, что любое натуральное число сравнимо с суммой своих цифр по модулю а) 3; б) 9.

Решение. $\overline{a_1 \ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$. Так как $10 \equiv 1 \pmod 3$, то $10^k \equiv 1 \pmod 3$. Поэтому

$$a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n \equiv a_1 + \ldots + a_n \pmod 3.$$

Для 9 рассуждения аналогичны.

11.219.(10) Незнайку научили в школе, что число делится на 3 (на 9), если сумма его цифр делится на 3 (на 9). Теперь, он считает, что а) если сумма цифр числа делится на 27, то число делится на 27; б) если число делится на 27, то сумма его цифр делится на 27. Прав ли он?

11.220.(10) Найти цифры сотен и единиц числа $42{*}4{*}$, если известно, что оно делится на 72.

11.221.(10) Сколько имеется четырёхзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97?

11.222.(10) К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

11.223.(10) Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

11.224.(10) Сколькими нулями могут оканчиваться числа вида $9^n + 1$?

11.225.(10) Докажите, что $\overline{a_1a_2\ldots a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}a_1 \pmod{11}$.

Указание. $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

А теперь несколько задач, связанных с этим признаком делимости.

11.226. а) (10) Докажите, что число $111\ldots11$ ($2n$ единиц) — составное.

б) (10) Докажите, что число $\overline{a_1a_2\ldots a_na_n\ldots a_2a_1}$ — составное.

11.227.(15) Пусть a, b, c, d — различные цифры. Докажите, что $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на $\overline{aabb}$.

11.228.(15) A — шестизначное число, в записи которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Докажите, что A не делится на 11.

11.229.(15) Докажите, что разность числа, имеющего нечётное количество цифр, и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

11.230.(15) Докажите, что последние цифры чисел $(1 \cdot 2)/2$, $(2 \cdot 3)/2, \ldots, n(n+1)/2$ повторяются периодически.

11.231.(15) Некоторое двузначное число кратно трём. Если между его цифрами вставить 0 и к полученному трёхзначному числу прибавить удвоенную цифру его сотен, то получится число, в 9 раз большее первоначального. Найти исходное двузначное число.

11.232.(15) Если некоторое четырёхзначное число умножить на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то получится восьмизначное число, у которого последние три цифры нули. Найти все такие числа.

11.233.(15) Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать сколько угодно раз) два числа, одно из которых в 19 раз больше другого?

11.234.(10) Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ также делится на 7.

11.235.(10) Сумма цифр трёхзначного числа равна 7. Докажите, что это число делится на 7 тогда и только тогда, когда две его последние цифры равны.

11.236.(15) а) Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причём $\overline{def} - \overline{abc}$ делится на 7. Докажите, что и само число делится на 7. Сформулируйте и докажите признак делимости на: б) 7, в) 13.

11.237.(15) а) Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причём $\overline{abc} + \overline{def}$ делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37. б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 37.

11.238.(15) Рассматриваются всевозможные семизначные числа с цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, записанными в произвольном порядке. Доказать, что ни одно из этих чисел не делится ни на какое другое из них.

11.239.(10) Можно ли записать точный квадрат, использовав по 10 раз цифры а) 2, 3, 6; б) 1, 2, 3?

11.240.(10) Число 35! равно

$$10333147966386144929{*}66651337523200000000.$$

Найти цифру, заменённую звёздочкой.

11.241.(15) Существует ли такое трёхзначное число $\overline{abc}$, что $\overline{abc} - \overline{cba}$ является квадратом натурального числа?

11.242.(15) Найдите наименьшее число, записываемое одними единицами, делящееся на $333\ldots33$ (в записи 100 троек).

11.243.(15) Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

11.244.(15) Какие три цифры следует вычеркнуть в числе 123456789 так, чтобы получившееся 6-значное число делилось на 72. Доказать, что ответ единственен.

11.245.(15) Верна ли теорема: если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового чисел делится на 9?

11.246.(15) Доказать, что число $11\ldots11$ (81 единица) делится на 81.

11.247.(15) В ряд выписаны в порядке возрастания числа, делящиеся на 9: $9, 18, 27, \ldots$. Под каждым числом этого ряда записана его сумма цифр. а) На каком месте во втором ряду впервые встретится число 81? б) Что встретится раньше: 4 раза подряд число 27 или 1 раз число 36?

11.248.(15) К числу справа приписывают тройки. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

11.249.(20) Докажите, что все числа ряда 10001, 100010001, $1000100010001, \ldots$ являются составными.

11.250.(20) Может ли сумма нескольких первых натуральных чисел (от 1 до n) оканчиваться на 1989?

11.251.(20) Найти все такие двузначные числа, что сумма такого числа и числа с теми же цифрами, записанными в обратном порядке, есть полный квадрат.

11.252.(20) Докажите, что число, состоящее из 3^n единиц, делится на 3^n.

11.253.(20) Найдите все трёхзначные числа, каждая натуральная степень которых оканчивается на три цифры, составляющие первоначальное число.

11.254.(15) (МО 76) Может ли число $n!$ оканчиваться цифрами $19760\ldots0$?

11.255.(20) (ВО 67) Докажите, что существует число, делящееся на 5^{1000} и не содержащее в своей записи ни одного нуля.

11.256.(15) (ВО 73) Докажите, что девятизначное число, в записи которого участвуют все цифры, кроме нуля, и которое оканчивается цифрой 5, не может быть полным квадратом целого числа.

11.257.(15) (ВО 89) Существует ли десятизначное число, делящееся на 11, в записи которого каждая цифра встречается по одному разу?

11.258.(15) (ВО 95) Найдите наименьшее n, при котором число $A = 122\ldots221$ (n двоек) делится на $B = 9\ldots9$ (девять девяток)?

Сумма цифр

11.259.(10) Может ли сумма цифр точного квадрата равняться 1970?

11.260.(15) Доказать, что тысячезначное число, все цифры которого пятёрки, за исключением, быть может, одной, не является полным квадратом.

11.261.(15) У числа 8^{1997} нашли сумму цифр, у результата нашли сумму цифр и т. д. В конце концов получилось однозначное число. Найдите его.

11.262.(15) Докажите, что произведение последней цифры числа 2^n и суммы цифр этого числа, кроме последней, делится на 3.

11.263.(15) Докажите, что если число делится на 99, то сумма его цифр не менее 18.

11.264.(20) Может ли четырёхзначное число с цифрами 4, 6, x, y, записанными в произвольном порядке, быть равно $46(40x + y)$?

11.265.(20) Докажите, что если натуральные числа от 1 до 1967 включительно выписаны подряд в произвольном порядке, то получившееся число не является точным кубом.

11.266.(20) Из 3-значного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 100 раз. Доказать, что в результате получится 0.

11.267.(15) (МО 62) Сумму цифр числа N обозначим $S(N)$. Доказать, что если $S(N) = S(2N)$, то число N делится на 9.

11.268.(15) (МО 70) Докажите, что если натуральное k делится на $9\ldots9$ (9 девяток), то в его записи более 8 цифр отличны от 0.

Существует признак делимости на $9\ldots9$, аналогичный признаку делимости на 9.

11.269.(20) Число делится на $9\ldots9$ (k девяток) тогда и только тогда, когда сумма его граней по k цифр (грани идут справа налево) делится на $9\ldots9$.

Например, 24354 делится на 99, потому что $2 + 43 + 54$ делится на 99, 1111887 делится на 999, так как $887+111+1$ делится на 999.

11.270.(20) (МО 70) У числа 2^{1970} зачеркнули первую цифру и прибавили её к оставшемуся числу. С результатом проделали ту же операцию и т. д. до тех пор, пока не получили 10-значное число. Докажите, что в этом числе есть две одинаковые цифры.

11.271.(20) (МО 71) Дано число 2^k, где $k > 3$. Докажите, что никакое число, полученное из данного перестановкой его цифр, не равно 2^n , где n — любое число, большее k.

11.272.(15) (МО 93) Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Решите уравнения: а) $n + S(n) + S(S(n)) = 1993$; б) $n + S(n) + S(S(n)) + S(S(S(n))) = 1993$.

11.273.(15) (МО 95) Натуральные числа X и Y получены друг из друга перестановкой цифр. Докажите, что числа $5X$ и $5Y$ имеют одинаковые суммы цифр.

11.274.(20) (МО 95) Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и так далее. После 11 таких вычитаний впервые получился нуль. С какого числа начинали?

11.275.(15) (МО 98) Существует ли натуральное число, делящееся на 1998, сумма цифр которого меньше 27?

11.276.(15) (Канада 94) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, ни одна цифра которых не равна 0, и которые делятся на сумму своих цифр.

11.277.(15) (ВО 62) Возьмём любое 1962-значное число, делящееся на 9. Сумму его цифр обозначим через a, сумму цифр числа a через b, сумму цифр b — через c. Чему равно c?

11.278.(15) (ВО 80) Обозначим через $S(n)$ сумму всех цифр натурального числа n. Существует ли такое натуральное n, что $n + S(n) = 1980$?

11.279.(20) (ВО 80) Докажите, что хотя бы одно из любых двух последовательных натуральных чисел представимо в виде $n+S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n.

11.280.(15) (ВО 93) Найдите все натуральные числа n такие, что сумма цифр числа 5^n равна 2^n.

11.281.(15) (ВО 99) В числе A цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9A$?

11.282.(15) (ВО 99) Сумма цифр в десятичной записи натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа $44n$ равна 800. Чему равна сумма цифр числа $3n$?

11.283.(20) (МЕО 75) Пусть A — сумма цифр числа 4444^{4444}, а B — сумма цифр числа A. Найдите сумму цифр числа B.

Другие системы счисления

Иногда бывает полезно записать натуральное число A в другой системе счисления с основанием q: $A = a_nq^n + a_{n-1}q^{n-1} + \ldots + a_1q + a_0 = \overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}_q$, где «цифры» этой системы счисления a_i удовлетворяют условию $0 \leqslant a_i < q$. Основание системы пишут справа внизу. Например, $7_{10} = 11_6$, $12_{10} = 20_6$, $7_{10} = 111_2$. При переводе числа из одной системы в другую используется деление на основание новой системы с остатком, при этом число в новой системе возникает не «слева направо», а «справа налево».

Запишем 250_{10} *в 8-ричной системе счисления.*

$250 = 31 \cdot 8 + 2$, $31 = 3 \cdot 8 + 7$, $3 = 0 \cdot 8 + 3$. Итак, $250_{10} = 372_8$.

Запишем 532_8 *в 7-ричной системе счисления.*

$532_8 = (61\cdot 7)_8 + 3$, $61_8 = (7\cdot 7)_8 + 0$, $7_8 = (7\cdot 1)_8 + 0$, $1 = 0\cdot 7 + 1$. Значит, $532_8 = 1003_7$.

11.284.(10) а) Запишите в 10-тичной системе счисления: 10101_2, 10101_3, 211_4, 113_6, 158_{11}.

б) Запишите в 7-ричной системе счисления: 1000_{10}, 69_{10}, 158_{11}.

11.285.(10) Существует ли система счисления, в которой одновременно:

а) $3 + 4 = 10$ и $3\cdot 4 = 15$, б) $2 + 3 = 5$ и $2\cdot 3 = 11$?

11.286.(15) (Канада 72) а) Докажите, что число 10201 составное в любой системе счисления с основанием больше 2. б) Докажите, что число 10101 составное в любой системе счисления.

Аналоги признаков делимости выглядят так.

11.287.(10) В n-ичной системе счисления запись числа оканчивается цифрой 0 тогда и только тогда, когда это число делится на n.

11.288.(10) В n-ичной системе число делится на $n-1$ тогда и только тогда, когда сумма цифр числа, записанного в n-ичной системе делится на $n-1$.

Например, 527_8 делится на 7, т. к. $5+2+7$ делится на 7.

Теперь мы разберём несколько задач, внешне не имеющих к нашей теме никакого отношения. Однако недесятичные системы счисления естественно возникают при решении этих задач.

Какое наименьшее число гирь необходимо для того, чтобы иметь возможность взвесить любое число граммов от 1 *до* 100 *на чашечных весах, если гири можно класть только на одну чашку весов*?

Решение. Любое число можно записать в двоичной системе счисления. Поэтому для взвешивания любого числа граммов от 1 до 100 достаточно иметь семь гирь с весами: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Шестью гирями обойтись нельзя, так как с их помощью можно взвесить не более $2^6 - 1 = 63$ различных весов (каждая гиря либо участвует, либо не участвует во взвешивании).

Тот же вопрос, если гири разрешается класть на обе чашки весов.

Решение. При решении этой задачи нам понадобится следующее интересное свойство троичной системы счисления: любое натуральное число можно представить в виде разности двух чисел, запись которых в троичной системе счисления содержит только 0 и 1. Для доказательства нужно записать исходное число в троичной системе счисления и построить требуемые числа поразрядно справа налево. При этом если у получившихся чисел в каких-то одноимённых разрядах стоят единицы, то их можно заменить нулями. Ясно, что достаточно иметь 5 гирь с весами $1, 3, 9, 27, 81$, а четырёх гирь явно недостаточно, так как с их помощью можно взвесить не более $3^4 - 1 = 80$ различных весов.

11.289.(15) Докажите, что из набора $0, 1, 2, \ldots, 3^{k-1}$ можно выбрать 2^k чисел так, чтобы никакое из них не являлось средним арифметическим двух других выбранных чисел.

11.290.(15) Докажите, что 2^k чисел с требуемым свойством можно выбрать и из набора $0, 1, 2, \ldots, (3^k - 1)/2$.

11.291.(15) (Ср. с 13.75.) Ребята стоят по кругу. Им надо выбрать водящего, и они считаются следующим образом: первый остается в круге, следующий по часовой стрелке — второй — выходит из круга, третий — остается, четвёртый выходит и т. д. через одного по кругу. Круг сужается до тех пор, пока в нем не остается один человек. Определите, кто останется (на каком месте он стоял вначале, считая от первого по часовой стрелке), если вначале стояло а) 64 человека; б) 1987 человек.

Указание. Запишите число ребят и номер водящего в двоичной системе счисления.

11.292.(20) Вы хотите узнать номер моего телефона, задавая мне вопросы, на которые я буду отвечать только «да» и «нет». Придумайте способ, гарантирующий успех за наименьшее число вопросов (считать, что телефонный номер состоит из произвольных 7 цифр).

11.293.(20) Предположим теперь, что на один из ваших вопросов я могу дать неправильный ответ. Какие тогда вопросы вы будете задавать и какое наименьшее число вопросов вам понадобится, чтобы отгадать номер?

11.294.(20) В колоде 16 карт, пронумерованных сверху вниз. Разрешается снять часть колоды сверху, после чего снятую и оставшуюся части колоды, не переворачивая «врезать» друг в друга. Может ли случиться, что после нескольких таких операций карты окажутся пронумерованными снизу вверх? Если да, то за какое наименьшее число операций это может произойти?

Указание. В трёх последних задачах использовать двоичную систему.

Игра «Ним» (см. 10.20–10.22) состоит в том, что из нескольких куч камней за ход разрешается взять любое количество, но только из одной кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Оказывается, выигрышная стратегия формулируется с помощью двоичной системы счисления.

Выпишем двоичные записи количеств камней в кучках друг под другом так, чтобы одноимённые разряды находились в одном столбце (см. ниже). Вычислим теперь чётность числа единиц в каждом разряде.

1	1	0	0	1	0	1	1-я куча
		1	1	1	1	0	2-я куча
	1	0	1	1	1	1	3-я куча
н	ч	н	ч	н	ч	ч	

Наше утверждение состоит в том, что выигрышными являются те и только те позиции, в которых количество единиц в каждом разряде чётно (позиция, изображённая на рисунке — проигрышная).

Для доказательства этого необходимо показать, что

1) Завершающая позиция игры — выигрышная.
2) Любой ход из выигрышной позиции ведет в проигрышную.
3) Из любой проигрышной позиции за один ход можно попасть в какую-нибудь выигрышную.

11.295.(20) Докажите эти утверждения.

12. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

12.1. Наибольший общий делитель. Линейные уравнения

Наибольшим общим делителем двух чисел называется наибольшее число, на которое делится каждое из чисел (обозначение — НОД). *Наименьшим общим кратным* двух чисел называется наименьшее число, которое делится на каждое из этих чисел (обозначение — НОК).

Выполняется следующее тождество: $\text{НОД}(a,b)\cdot\text{НОК}(a,b) = ab$.

Чтобы найти НОД и НОК, достаточно выписать разложения чисел на простые множители и взять их «пересечение» (т. е. каждый простой множитель берётся в меньшей из степеней) и «объединение» (соответственно, в большей).

Однако в случае больших чисел удобнее использовать алгоритм Евклида. Он основан на следующих утверждениях:

12.1.(5) $\text{НОД}(a;b) = \text{НОД}(a\pm b;b)$.

Выполнив деление с остатком a на b, получим $a = bq_0 + r_1$.

12.2.(5) НОД$(a; b) =$ НОД(b, r_1).

Суть алгоритма Евклида состоит в следующем. Пусть a, b — целые числа, $a \geqslant b > 0$, требуется найти НОД$(a; b)$. Выполнив деление с остатком a на b, получим равенство $a = bq_0 + r_1$. Если $r_1 \neq 0$, то выполнив деление с остатком b на r_1, получим, что $b = r_1q_1 + r_2$. Затем выполняется деление с остатком r_1 на r_2 и т. д. В результате повторных делений получим систему равенств

$$\begin{gathered} a = bq_0 + r_1, \quad b = r_1q_1 + r_2, \quad r_1 = r_2q_2 + r_3, \ldots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \quad r_{n-1} = r_nq_n, \end{gathered} \tag{1}$$

где $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n > 0$. Из 12.2 последний ненулевой остаток r_n является НОД$(a; b)$.

12.3. Найти, используя алгоритм Евклида: а) (5) НОД$(607; 477)$, б) (5) НОД$(343; 246)$, в) (5) НОД$(6494; 6303)$.

12.4.(5) Сократите дробь: а) $\dfrac{3953}{871}$, б) $\dfrac{6059}{1241}$, в) $\dfrac{6821}{2147}$, г) $\dfrac{10027}{32671}$.

Отметим, что алгоритм Евклида может быть применён также для нахождения наибольшего общего делителя многочленов и других объектов более общей природы.

12.5.(10) Найти наибольшее значение НОД$(2n + 3, n + 7)$.

12.6.(10) Найти НОД$(2^{30} - 1, 2^{40} - 1)$.

12.7.(15) Докажите, что m и n взаимно просты, тогда и только тогда, когда $2^m - 1$ и $2^n - 1$ тоже взаимно просты.

12.8. а) (10) Найти наибольший общий делитель следующих чисел: 11111111 и $111\ldots111$ (100 раз повторяется единица).

б) (15) Найдите НОД чисел, состоящих из n единиц и m единиц.

12.9.(15) Доказать, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

12.10.(20) Найти все целые n, при которых $\frac{19n+17}{7n+11}$ — целое число.

12.11.(15) Доказать, что дробь $\frac{21n+17}{14n+3}$ не является целым числом при всех натуральных n.

12.12.(15) (ТГ 98) а) Докажите, что если для некоторых натуральных a и b верно, что НОК$(a; a + 5) =$ НОК$(b; b + 5)$, то $a = b$. б) Может ли при натуральных a, b и c выполняться равенство НОК$(a; b) =$ НОК$(a + c; b + c)$?

12.13.(15) (МО 00) НОД$(m; n) = 1$, где m и n натуральные. Каково наибольшее возможное значение НОД$(m + 2000n; n + 2000m)$?

12.14.(15) (ВО 61) a, b, p — любые целые числа. Докажите, что найдутся такие взаимно простые k, l, что $ak + bl$ делится на p.

12.15.(15) (ВО 63) Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что наибольший общий делитель чисел $a+b$ и a^2+b^2 равен 1 или 2.

12.16.(25) (ВО 65) Даны два взаимно простых числа p и q. Целое число n называется хорошим, если его можно представить в виде $n = px + qy$, где x и y — целые неотрицательные числа, и плохим — в противном случае. а) Докажите, что существует такое целое число c, что из двух целых чисел n и $(c-n)$ всегда одно хорошее, а другое — плохое. б) Сколько всего плохих неотрицательных чисел?

12.17.(20) (ВО 78) Докажите, что ни при каком натуральном m число $1978^m - 1$ не делится на $1000^m - 1$.

12.18.(15) (ВО 94) Натуральные числа a и b такие, что число $(a+1)/b + (b+1)/a$ является целым. Докажите, что НОД$(a;b)$ не превосходит $\sqrt{a+b}$.

12.19.(15) (ВО 95) Натуральные числа m и n таковы, что

$$\text{НОК}(m;n) + \text{НОД}(m;n) = m + n.$$

Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

12.20.(20) (ВО 97) Найдите все такие тройки (m,n,l) натуральных чисел, что $m+n = (\text{НОД}(m;n))^2$, $m+l = (\text{НОД}(m;l))^2$, $l+n = (\text{НОД}(l;n))^2$.

12.2. Линейные уравнения

Рассмотрим линейное уравнение

$$ax + by = c, \tag{2}$$

где a, b, c — ненулевые целые числа.

12.21.(10) Если c не делится на НОД$(a;b)$, то уравнение (2) в целых числах не имеет решения.

Если $d = \text{НОД}(a;b) \neq 1$, то на него все коэффициенты уравнения (2) можно сократить (предполагается, что решение у (2) есть). Поэтому далее будем рассматривать случай взаимно простых a и b, т. е. НОД$(a;b) = 1$.

12.22.(15) Пусть $x = x_0$ и $y = y_0$ удовлетворяют уравнению (2). Докажите, что $x = x_0 + bk$, $y = y_0 - ak$ с целым параметром k задают все решения уравнения (2).

Итак, основной проблемой уравнения (2) является нахождение частного решения x_0, y_0. Разберём несколько примеров.

Решить: $2x + 9y = 50$. Здесь частное решение легко подбирается $x_0 = 25$, $y_0 = 0$, поэтому общее решение: $x = 25+9k$, $y = -2k$.

Решить: $37x+5y=232$. Решаем это уравнение относительно того из неизвестных, при котором наименьший (по модулю) коэффициент: $y=232-37x/5$. Подставляя вместо x числа 0, 1, 2, 3, 4 (остатки при делении на 5), мы получим частное решение $x_0=1$, $y_0=39$, тогда общее решение $x=1+5k$, $y=39-37k$.

Решить: $19x-15y=3 \quad (*)$. Здесь использовать предыдущий способ затруднительно (придётся подставлять 14 значений y). Поэтому мы приведем универсальный метод поиска частного решения. Из задачи 12.26 следует существование m и l таких, что $19l-15m=1$. Тогда $x_0=3l$, $y_0=3m$ будет частным решением нашего уравнения. Построим m и l явно. Из алгоритма Евклида имеем: $19=15\cdot 1+4$, $15=4\cdot 3+3$, $4=3\cdot 1+1$. Из последнего равенства: $1=4-3\cdot 1$, подставляя $3=15-4\cdot 3$ (из второго равенства), получим $1=4-(15-4\cdot 3)=4\cdot 4-15\cdot 1$. Наконец, подставляя $4=19-15\cdot 1$ (из первого равенства), получим $1=4(19-15)-15\cdot 1=4\cdot 19-5\cdot 15$. Итак, $l=4$, $m=5$, $x_0=12$, $y_0=15$.

Другим универсальным методом является использование цепных дробей.

Последовательность равенств (1) можно записать в виде равносильной цепочки

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{r_1}{b},\quad \frac{b}{r_1}=q_1+\frac{r_2}{r_1},\quad \frac{r_1}{r_2}=q_2+\frac{r_3}{r_2},\quad \ldots \\ \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=q_{n-1}+\frac{r_n}{r_{n-1}},\quad \frac{r_{n-1}}{r_n}=q_n. \tag{3}$$

Поставим теперь задачу выразить отношение a/b через одни только числа $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n$. На основании равенств (3) находим:

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ddots \\ +\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}} \tag{4}$$

В этом равенстве q_0 — целое число, q_1, q_2, $\ldots$, q_n — целые положительные числа. Выражение такого вида, как правая часть равенства (4), называется конечной цепной дробью и сокращённо обозначается $|q_0, q_1, \ldots, q_n|$.

12.23. Разложите в цепную дробь следующие дроби:

а) (5) 2,71828; б) (5) 103993/33102; в) (5) 99/100; г) (5) 355/113.

Выражения

$$\delta_0 = q_0, \quad \delta_1 = q_0 + \frac{1}{q_1}, \quad \delta_2 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}, \quad \ldots$$

называются подходящими дробями порядка $0, 1, 2, \ldots$ соответственно. Если подходящую дробь δ_k свернуть в обыкновенную не сокращая, получим равенство $\delta_k = P_k/Q_k$.

12.24.(15) а) Дробь P_k/Q_k несократима. б) Имеет место равенство: $P_n/Q_n - P_{n-1}/Q_{n-1} = (-1)^{n-1}/(Q_n Q_{n-1})$.

12.25.(10) Пусть a, b — целые положительные взаимно простые числа, P_{n-1}/Q_{n-1} — предпоследняя подходящая дробь разложения a/b в цепную дробь. Покажите, что диофантово уравнение $ax - by = 1$ имеет частное решение $x_0 = (-1)^{n-1}Q_{n-1}$, $y_0 = (-1)^{n-1}P_{n-1}$, т. е. $ax_0 - by_0 = 1$.

12.26.(10) Пусть a, b, c — целые положительные числа, a и b взаимно просты, P_{n-1}/Q_{n-1} — предпоследняя подходящая дробь разложения a/b в цепную дробь. Докажите, что все целые решения диофантова уравнения $ax - by = c$ получаются по формулам $x = (-1)^{n-1}cQ_{n-1} + bk$, $y = (-1)^{n-1}cP_{n-1} + ak$, где k — любое целое число.

В частности, для уравнения $(*)$ имеем

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \quad \delta_2 = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}} = \frac{5}{4},$$

$$\delta_3 = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{19}{15} = \frac{a}{b}.$$

Так как $\delta_2 = 5/4$, то $x_0 = (-1)^2 \cdot 4 = 4$, $y_0 = (-1)^2 \cdot 5 = 5$, а общее решение — $x = 12 + 15k$, $y = 15 + 19k$ (k — любое целое число).

12.27. Найдите все целые решения уравнений:

а) (10) $19x - 15y = -1$; б) (10) $23x - 17y = 11$;

в) (10) $53x - 47y = 11$; г) (10) $35x - 18y = 3$;

д) (10) $85x - 71y = 5$; е) (10) $41x - 11y = 7$.

Существует много текстовых задач на такие уравнения.

12.28.(15) Имеются контейнеры двух видов: по 190 кг и по 170 кг. Можно ли полностью загрузить ими грузовик грузоподъёмностью 3 т?

12.29.(15) Один мастер делает на длинной ленте пометки синим карандашом через каждые 36 см, а другой — красным через каждые 25 см, начиная с того же места. Может ли какая-нибудь синяя пометка оказаться на расстоянии 1 см от какой-нибудь красной?

12.30.(15) Ученик решает задание из 20 задач. За верно решённую задачу ему ставят 8 баллов, за неверно решённую — (-5) баллов, за задачу, которую не брался решать — 0 баллов. Сколько задач он брался решать, если в сумме он получил 13 баллов?

12.31. а) (15) От прямоугольника 324×141 мм отрезают несколько квадратов со стороной 141 мм, пока не останется прямоугольник, у которого длина одной стороны меньше 141 мм. От полученного прямоугольника опять отрезают квадраты со стороной, равной длине его меньшей стороны и т. д. Какова длина стороны последнего квадрата?

б) (15) Найдите a и b, чтобы при таком разрезании прямоугольника $a \times b$ получились квадраты шести разных размеров.

12.32.(15) Найти две обыкновенные дроби — одну со знаменателем 8, другую со знаменателем 13, чтобы они не были равны, но разность между большей и меньшей из них была как можно меньше.

12.33.(15) С помощью циркуля и линейки разделить данный угол в 19° на 19 равных частей.

12.34.(15) Даны углы 36° и 25°. Постройте угол 1°.

12.35.(15) Сколько точек с целочисленными координатами, удовлетворяющими неравенствам $x < 0$ и $y > 0$, лежит на прямой $8x - 13y + 11 = 0$?

12.36.(15) a и b — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что уравнение $ax + by = ab$ не имеет решений в натуральных числах.

12.37.(15) У продавца есть 100-граммовые гирьки и консервные банки весом по 450 г. Как с их помощью отвесить на чашечных весах 2,5 кг сахара за один раз, используя наименьшее количество гирек и банок в общей сложности?

12.38.(15) Решить в целых числах уравнение $2x + 3y + 5z = 11$.

12.39.(15) На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Может ли кладовщик отпустить 140 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика?

12.40.(20) (ТГ 84) 175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев. Докажите, что на трёх шалтаев и одного болтая рубля не хватит. (Они стоят целое число копеек.)

12.41.(20) (МО 67, 84) Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 1997? Если да, найти наименьшее.

12.3. Нелинейные уравнения и системы уравнений

Одной из популярных идей решений уравнений в целых числах является *ограничение перебора.* Для этого может быть использовано, например, разложение на множители.

Решить уравнение: $xy + x - 3y = 4$.

Решение. Уравнение приводится к виду $(x - 3)(y + 1) = -7$, а -7 можно разложить в произведение двух множителей только двумя способами: $-7 = -1 \cdot 7$ и $-7 = 1 \cdot (-7)$. Отсюда получаем ответ: $\{(-4; 0), (2; 6), (4; -8), (10; -2)\}$.

Другим способом решения этого уравнения является *выражение x через y*: $x = (3y-4)/(y+1) = 3-7/(y+1)$. Так как $7/(y+1)$ должно быть целым числом, то $(y + 1)$ может быть равно только $1, -1, 7, -7$.

Ограничить перебор можно *преобразованием левой части уравнения к сумме неотрицательных функций*:

Решить: $5x^4 + 10x^2 + 2y^6 + 4y^3 = 6$.

Решение. Уравнение приводится к виду $5(x^2+1)^2+2(y^3+1)^2 = 13$. Отсюда имеем $5(x^2 + 1)^2 \leqslant 13$, а так как $(x^2 + 1)^2$ — целое число, то (x^2+1) может быть только равен $0, 1, -1$. Легко видеть, что только $x = 0$ возможен. Тогда $(y^3 + 1)^2 = 4$ и $y = 1$.

Если относительно одного из неизвестных уравнение является квадратным, то ограничить перебор можно, используя *неотрицательность дискриминанта*:

Решить: $10x + y = x^2 + y^2 - 13$.

Решение. Относительно x это уравнение — квадратное: $x^2 - 10x+(y^2-y+13) = 0$. Условием существования решения является $D/4 = 25 - y^2 + y - 13 \geqslant 0$, т. е. $-3 \leqslant y \leqslant 4$. Таким образом, достаточно перебрать случаи $y = 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$.

Ответ. $(-5, -3), (5, 4)$.

Другой идеей является *сравнение левой и правой частей уравнения по какому-то модулю* (*или сравнение остатков*):

Решить: $x^2 + y^2 = 4z - 1$.

Решение. Так как $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$ (см. 11.106), то $x^2 + y^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod 4$, а $4z - 1 \equiv -1 \pmod 4$. Ответ. Решений нет.

Решить в целых числах: $3^m + 7 = 2^n$.

Решение. Если $m > 0$, то левая часть $3^m + 7 \equiv 1 \pmod 3$, значит, если решение есть, то n чётно, т. е. $n = 2k$. Тогда $3m = 2^{2k} - 7 = 4^k - 7$. Но $4k - 7 \equiv 1 \pmod 4$, значит, если решение есть, то и m должно быть чётным, т. е. $m = 2p$. Итак, в результате имеем $3^{2p} = 2^{2k} - 7$, или $7 = 2^{2k} - 3^{2k} = (2^k - 3^p)(2^k + 3^p)$. Отсюда $2^k + 3^p = 7$, $2^k - 3^p = 1$, т. е. $m = 2$, $n = 4$. При $m = 0$ получаем второй ответ: $n = 3$.

Решить в целых числах уравнения:

12.42.(5) $(2x + y)(5x + 3y) = 7$.

12.43.(5) $x^2 - y^2 = 31$.

12.44.(10) $xy = x + y + 3$.

12.45.(10) $6x^2 + 5y^2 = 74$.

12.46.(10) $x^2 = 14 + y^2$.

12.47.(10) $x^2 - 7y = 10$.

12.48.(10) $x^2 - 3y^2 = 8$.

12.49.(10) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 7$.

12.50.(10) (МО 45) $xy + 3x - 5y = -3$.

12.51.(10) (Польша 50) $y^3 - x^3 = 91$.

12.52.(10) (ВО 87) $xy = 20 - 3x + y$.

12.53.(10) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.

12.54.(15) $x^2 + y^2 = x + y + 2$.

12.55.(15) $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$.

12.56.(15) $15x^2 - 7y^2 = 9$.

12.57.(15) $19x^2 + 28y^2 = 729$.

12.58.(15) $x^2 + y^2 = 9x + 1$.

12.59.(15) $x^2 + 4x - 8y = 11$.

12.60.(15) $x^2 + 5xy - y^2 = 6$.

12.61.(15) $x^2 - 3y = 17$.

12.62.(15) $x^2 - y^2 = 1988$.

12.63.(15) $x^2 + y^2 = 1995$.

12.64.(15) $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

12.65.(15) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$

12.66.(20) $x^3 + 3 = 4y(y + 1)$.

12.67.(20) $2x^2 - 5y^2 = 7$.

12.68.(20) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$.

12.69.(20) $\sqrt{x - 1/5} + \sqrt{y - 1/5} = \sqrt{5}$.

12.70.(20) $1! + 2! + \ldots + x! = y^2$.

12.71.(20) $\dfrac{xy}{z} + \dfrac{xz}{y} + \dfrac{yz}{x} = 3$.

12.72.(15) (МО 41) $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

12.73.(15) (МО 54) $x^2 + 1954 = y^2$.

12.74.(15) (МО 55) $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

12.75.(15) (МО 67) $19x^3 - 17y^2 = 50$.

12.76.(15) (МО 83) $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

12.77.(15) (МО 84) $19x^3 - 84y^2 = 1984$.

12.78.(20) (МО 49) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

12.79.(20) (Польша 66) $x^4 + 4y^4 = 2(z^2 + 4u^4)$.

12.80.(20) (США 76) $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$.

12.81.(20) (США 79) $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599$.

12.82.(15) (ВО 64) Решите при n радикалах ($n \geqslant 2$):

$$\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}}}{1964} = y.$$

12.83.(20) (ВО 78) $\begin{cases} x^2 - y^3 = 7z^4, \\ z^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$

12.84.(15) (ВО 85) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$.

12.85.(15) (ВО 86) $7(x + y) = 3(x^2 - xy + y^2)$.

12.86.(15) (ВО 91) $\begin{cases} xz - 2yt = 8, \\ xt + yz = 1. \end{cases}$

12.87.(15) (ВО 93) $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$.

12.88.(15) (ВО 93) $x^5 - y^5 = 1993$.

12.89.(15) (ВО 97) $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$.

12.90.(25) (Германия 73) $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$.

12.91.(25) (ВО 67) $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

12.92.(15) Найдите 7 решений в целых числах уравнения $y^2 = 6(x^3 - x)$.

12.93.(15) Найдите по крайней мере 1997 решений уравнения $y^2 = x^2 + x^3$ в целых числах.

12.94.(15) (СПО 66) Сколько целочисленных решений имеет уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$?

12.95.(15) (МО 94) Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах.

12.96.(15) (Канада 69) Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 - 8c = 6$ не имеет решений в целых числах.

12.97.(20) (ВО 68) Докажите, что уравнение $x^2 + x + 1 = py$ имеет решение в целых числах (x, y) для бесконечного числа простых p.

12.98.(20) (МЕО 82) Дано уравнение $x^3 - 3xy^3 + y^3 = n$. Докажите, что а) если натуральное n таково, что данное уравнение имеет целое решение, то оно имеет не менее трёх целых решений, б) при $n = 2981$ целых решений нет.

Показательные уравнения

12.99.(15) $1 + 2^x + 2^{2x} + \ldots + 2^{yx} = 1992$.
12.100.(15) $6^x = y^2 + y - 2$.
12.101.(15) $3^x + 1 = 2^y$.
12.102.(20) $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.
12.103.(20) $x^y = y^x$.
12.104.(15) (ТГ 84) $2^x + 7 = y^2$.
12.105.(15) (США 77) $2^x + 1 = y^2$.
12.106.(20) (МО 78) $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.

Уравнения в цифрах

В задачах на цифры перебор ограничен тем, что цифр всего 10. Но в конкретных задачах и этот перебор можно обычно сузить.

Решить в цифрах уравнения:

12.107.(10) а) $(x + y)^3 = \overline{xyx}$, б) $(x + y + z)^3 = \overline{xyz}$.

12.108.(10) $1/(x + y + z) = \overline{0{,}xyz}$.

12.109.(15) (Польша 62) Найти трёхзначное число такое, что число, записанное теми же цифрами в той же последовательности, но в другой системе счисления с основанием, отличным от 10, было вдвое больше исходного числа.

Уравнения в натуральных числах

12.110.(10) Летит над лесом стая сороконожек и трёхголовых драконов. У них всего 26 голов и 298 ног. У каждой сороконожки ровно одна голова. Сколько ног у трёхголового дракона?

12.111.(10) Пять участников олимпиады стали её победителями, набрав по 15, 14 и 13 баллов и заняв соответственно I, II и III места. Сколько участников завоевали каждое призовое место, если вместе они набрали 69 баллов?

12.112.(10) (ВО 92) При стрельбе по мишени спортсмен выбивал только по 8, 9 и 10 очков. Всего он, сделав более 11 выстрелов, выбил 100 очков. Сколько выстрелов сделал спортсмен и какие были попадания?

12.113.(15) Найти все натуральные числа x, y, z, которые взаимно просты и сумма любых двух из них делится на третье.

12.114.(20) (МО 70) Во всех клетках таблицы 100×100 стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знаки во всех клетках одной строки или же во всех клетках одного столбца. Можно ли, пользуясь только этими операциями, получить 1970 минусов?

12.115.(20) (Румыния) Три группы рыбаков поймали 113 рыб. На каждого рыбака первой группы пришлось по 13 рыб, на каждого из второй группы — по 5 рыб, третьей группы — по 4 рыбы. Сколько рыбаков в каждой группе, если всего их — 16?

12.116.(20) (Болгария 65) Тройка чисел 1, 2, 3 обладает тем свойством, что произведение любых двух из этих чисел, увеличенное на 1, делится на третье число. Найдите все тройки натуральных чисел, обладающие этим свойством.

12.117.(15) (ВО 85) Из одинаковых кубиков составлен параллелепипед. Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, покрасили. Оказалось, что у половины всех кубиков окрашена хотя бы одна грань. У скольких кубиков имеются окрашенные грани?

12.118.(20) (ВО 87) Дядька Черномор каждый вечер из 33 богатырей назначает на дежурство 9 или 10 по своему усмотрению. Через какое наименьшее число дней может оказаться, что каждый из богатырей выходил на дежурство одинаковое число раз?

Решить в натуральных числах уравнения:

12.119.(10) $x + 1/(y + 1/z) = 10/7$.

12.120.(15) $xyz = x + y$.

12.121.(15) $x + y + z = xyz$.

12.122.(15) $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$.

12.123.(20) а) $1/x + 1/y + 1/z = 1$. б) Что добавится, если решать в целых числах?

12.124.(20) (МО 66) $\begin{cases} x + y = zt, \\ z + t = xy. \end{cases}$

12.125.(20) (СО 97) $\begin{cases} ab + cd = 34, \\ ac - bd = 19. \end{cases}$

12.126.(20) (Болгария) $3^x + 5 = 2^y$.

12.127.(20) (ВО 78) $\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz, \\ x^2 = 2(y + z). \end{cases}$

12.128.(20) (ВО 78) $x^x + y^y = z^z$.

12.129.(20) (ВО 81) $x^3 - y^3 = xy + 61$.

12.130.(15) (ВО 84) $2^x - 2^y = 1984$.

12.131.(15) (ВО 88) $x^2 - 51y^2 = 1$.

12.132.(15) (ВО 89) $7^x - 3 \cdot 2^y = 1$.

12.133.(15) (Италия 95) $x^2 + 615 = 2^y$.

12.134.(20) (ВО 88) Доказать, что уравнение $x - y + z = 1$ имеет бесконечно много решений среди таких попарно различных натуральных чисел x, y, z, что произведение любых двух из них делится на третье.

12.135.(15) (ВО 91) Существуют ли различные нечётные натуральные числа k, l и m такие, что выполняется равенство $1/1991 = 1/k + 1/l + 1/m$?

12.136. Найдите хотя бы одно решение в натуральных числах уравнений

а) (15) (ВО 77) $x^2 + y^3 = z^2$, б) (15) (ВО 88) $x^3 + y^4 = z^5$.

Конечно или нет множество их решений в натуральных числах?

12.137.(15) (МО 98) Найдется ли решение в натуральных числах у уравнения $28a + 30b + 31c = 365$?

12.138.(15) (МО 98) Пусть a, b, c такие, что $28a + 30b + 31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$.

12.139.(20) (США 92) Найдите все такие наборы натуральных чисел a, b, m и n (m взаимно просто с n), что $(a^2 + b^2)^m = (ab)^n$.

Уравнения в простых числах

Решить в простых числах:

12.140.(15) $x^y + 1 = z$.

12.141.(20) (ВО 80) $x^2 + y^3 = z^4$.

12.142.(15) (ВО 92) $2^{x+1} + y^2 = z^2$.

Общие уравнения второй степени с двумя неизвестными

Важный пример диофантова уравнения (уравнения в целых числах) дает теорема Пифагора, связывающая длины катетов и гипотенузы: $x^2 + y^2 = z^2$.

Одна из троек, самая простая, широко известна $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$. Если x_0, y_0, z_0 — пифагорова тройка, то легко видеть, что kx_0, ky_0, kz_0, при любом k также будут пифагоровы. Найдем все такие тройки.

12.143.(20) Докажите, что все решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в целых числах имеют вид $x = 2kmn$, $y = k(m^2 - n^2)$, (либо $x = k(m^2 - n^2)$, $y = 2kmn$), $z = k(m^2 + n^2)$, где k, m, n — целые.

(Чтобы исключить дублирование троек, достаточно выбирать числа m и n взаимно простыми и разной чётности.)

Аналогично можно решить другие, близкие уравнения, например, $x^2 + Ay^2 = z^2$, где A — натуральное, а также (с помощью комплексных чисел) найти некоторые решения уравнений $x^2+y^2 = z^3$, $x^2 + y^2 = z^4$ и т. д.

Общий случай уравнений 2-й степени с двумя неизвестными

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где a, b, c, d, e, f — целые, сводится с помощью замены переменных к решению уравнения вида

$$x^2 - Ay^2 = C,$$

где A и C целые. Оно может не иметь решения (см. 12.48), иметь конечное число решений (см. 12.71) или бесконечное множество решений. Например, если это уравнение при $A > 0$ и иррациональном $\alpha = \sqrt{A}$ имеет хотя бы одно решение, то оно имеет их бесконечное множество, которое образуется из решения уравнения

$$x^2 - Ay^2 = 1.$$

Можно показать, что решение данного уравнения при $A > 0$ и иррациональном $\sqrt{A}$ всегда есть и имеет вид $(\pm x_n, \pm y_n)$, где

$$\begin{aligned} x_n =& \frac{1}{2}\left[(x_0 + y_0\sqrt{A})^n + (x_0 - y_0\sqrt{A})^n\right], \\ y_n =& \frac{1}{2\sqrt{A}}\left[(x_0 + y_0\sqrt{A})^n - (x_0 - y_0\sqrt{A})^n\right], \end{aligned}$$

а $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ — наименьшее решение ($x_0 + \sqrt{A}y_0$ — наименьшее). Практически x_0 и y_0 ищутся подбором. Отметим, что при A, равном квадрату целого числа, это уравнение имеет решениями только $x_0 = \pm 1$, $y_0 = 0$. Такие же решения имеет уравнение при A целом и отрицательном (при $A = -1$ ещё есть решения $x_0 = 0$, $y_0 = \pm 1$).

Например, уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет решения

$$\begin{aligned} x_n =& \frac{1}{2}\left[(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n\right], \\ y_n =& \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n\right]. \end{aligned}$$

Сравнивая характер решений уравнений 1-й и 2-й степени, можно установить, что решения уравнения 1-й степени (когда они существуют) образуют арифметические прогрессии, а решения уравнений 2-й степени (когда их бесконечно много) расположены вблизи членов геометрической прогрессии. Другими словами, в случае 2-й степени пары целых чисел-решений встречаются значительно реже, чем пары целых чисел-решений уравнения 1-й степени. Это не случайно. Оказывается, что уравнения с двумя неизвестными степени выше 2-й могут иметь только конечное число решений, за редкими исключениями.

13. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА. ТЕОРЕМЫ ФЕРМА И ЭЙЛЕРА

13.1.(10) а) Записать с помощью четырёх цифр — двоек, знаков действий и, быть может, скобок, числа $0, 1, 2, \ldots, 9, 10$; б) Можно ли так записать число 7?

13.2.(10) Написать число 100: а) шестью одинаковыми цифрами, б) девятью разными значащими цифрами.

13.3.(10) Написать число 9 десятью различными цифрами.

13.4.(15) Сколько раз входит двойка в разложение на простые множители произведения: а) $(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n-1)2n$; б) (1984!)?

13.5.(10) В выражении $1:2:3:4:5:6:7:8:9$ расставить скобки так, чтобы результат был а) минимальным, б) максимальным.

13.6.(10) Все двузначные числа, не оканчивающиеся нулем, выписывают одно за другим так, что каждое следующее начинается с той же цифры, которой оканчивается предыдущее. Получается некоторое многозначное число. Из всех многозначных чисел, которые можно получить таким образом, выбирают наименьшее и наибольшее. Найти их сумму.

13.7.(10) (МО 54) Из числа $1234567\ldots5657585960$ вычеркнуть 100 цифр так, чтобы оставшееся число было: а) наименьшим; б) наибольшим.

13.8.(10) При сложении двух целых чисел ученик по ошибке поставил во втором слагаемом лишний 0 на конце и получил в сумме 6641 вместо 2411. Определить слагаемые.

13.9.(15) Четыре последовательных целых числа являются цифрами тысяч, сотен, десятков, единиц некоторого четырёхзначного числа. Насколько увеличится это число, если его цифры написать в обратном порядке?

13.10.(10) Найдите а) $x^2+(1/x)^2$, б) $x^3+(1/x)^3$, если $x+1/x=3$.

13.11.(10) Докажите, что если число $x + 1/x$ — целое, то и число $x^2 + (1/x)^2$ — целое.

13.12. Докажите, что суммы а) (10) (Бразилия 83) $M = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$, б) (10) $N = 1/n + \ldots + 1/(n+m)$, в) (10) $K = 1/3 + \ldots + 1/(2n+1)$ не являются целыми числами ни при каких n и m, больших 1.

13.13.(10) Найдите все простые числа, которые нельзя записать в виде суммы двух составных.

13.14.(15) 13 различных натуральных чисел дают в сумме 92. Найти эти числа.

13.15.(15) Пусть n-е простое число равно p_n. Докажите, что если $n \geqslant 12$, то $p_n > 3n$.

13.16.(15) Существует ли такое целое число, которое при зачёркивании первой цифры уменьшается: а) в 57 раз; б) в 58 раз?

13.17.(15) Некоторое число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, то число удвоится. Найти наименьшее такое число.

13.18.(15) Докажите, что число $11\ldots1122\ldots22$ (состоящее из 100 единиц и 100 двоек) есть произведение двух последовательных целых чисел.

13.19.(15) Сто человек ответили на вопрос: «Будет ли новый президент лучше прежнего?» Из них a человек считают, что будет лучше, b — что будет такой же и c — что будет хуже. Других ответов не было. Социологи построили два показателя «оптимизма» опрошенных: $m = a + b/2$, $n = a - c$. Оказалось, что $m = 40$. Чему в этом случае равняется n?

13.20.(15) В классе имеется a_1 учеников, получивших в течение года хотя бы одну двойку, a_2 учеников, получивших не менее двух двоек, ..., a_k учеников, получивших не менее k двоек. Сколько всего двоек в этом классе? (Предполагается, что ни один ученик не получил более чем k двоек.)

13.21.(15) Взяли 100 чисел. Среди их всевозможных произведений по два числа оказались 1000 отрицательных. Сколько среди исходных чисел было нулей?

13.22.(15) Найдите наибольшее отношение трёхзначного числа к сумме его цифр.

13.23.(20) В некотором десятичном числе $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{10}}$ первая цифра a_1 равна числу нулей в записи этого числа, вторая цифра a_2 — числу единиц, третья — числу двоек и т. д., последняя a_{10} — числу девяток в записи этого числа. Найдите это число.

13.24.(20) Даны две группы подряд расположенных натуральных чисел, в каждой по k чисел. При каких k эти группы чисел можно, изменив порядок, подписать одну под другой так, что, сложив стоящие друг под другом числа, получим снова k натуральных чисел, идущих подряд?

13.25.(20) Компьютер может производить одну операцию: брать среднее арифметическое двух целых чисел (если оно целое). Даны три числа: m, n и 0, причём m и n взаимно просты и $m < n$. Докажите, что с помощью компьютера из них можно получить любое целое число от 1 до n.

13.26.(20) (Венгрия 49, Польша 61) Докажите, что натуральное число можно представить в виде суммы двух или более последовательных натуральных чисел тогда и только тогда, когда это число не является целой степенью числа 2.

13.27.(20) Сколькими способами число 1971 можно представить как сумму нескольких последовательных натуральных чисел?

13.28.(10) Квадрат числа состоит из цифр 0, 2, 3, 5. Найти его.

13.29.(10) Докажите, что а) $1996^2 + 1996^2 \cdot 1997^2 + 1997^2$ — квадрат целого числа; б) $1991 \cdot 1993 \cdot 1995 \cdot 1997 + 16$ — тоже квадрат целого числа.

13.30.(10) (Венгрия 26, МО 41) Доказать, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел, сложенное с 1, есть точный квадрат.

13.31.(15) Доказать, что являются точными квадратами все числа а) 16; 1156, 111556 и т. д. (в середину предыдущего числа вставляется число 15), б) 49, 4489, 444889 и т. д. (в середину вставляется число 48).

13.32.(15) Доказать, что числа 1331, 1030301, 1003003001, ... (каждый раз удлиняются группы нулей) являются полными кубами.

13.33.(15) Доказать, что если из $11\ldots1$ (2000 единиц) вычесть $22\ldots2$ (1000 двоек), то в результате получится полный квадрат.

13.34.(15) Может ли сумма 999 последовательных натуральных чисел быть кубом натурального числа?

13.35.(15) Доказать, что если каждое из двух чисел есть сумма квадратов двух целых чисел, то их произведение также есть сумма двух квадратов.

13.36.(15) Может ли сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел быть равна сумме четвёртых степеней двух последовательных натуральных чисел?

13.37.(15) Найти все натуральные числа N такие, что первые несколько цифр N^2 составляют число N.

13.38.(15) (Ср. с 5.74.) Докажите, что существует полный квадрат, начинающийся с любой комбинации цифр.

13.39.(20) Целые числа a, b и c таковы, что $ab+bc+ca=0$. Доказать, что abc можно представить в виде произведения квадрата целого числа на куб целого числа.

13.40.(10) Каково наибольшее число квартир в стоквартирном доме, у которых сумма цифр номера одинакова?

13.41.(15) Сумма цифр некоторого натурального числа A равна B, сумма цифр числа B равна C. Известно, что сумма чисел A, B и C равна 60. Чему равно число A? Уверены ли Вы, что нашли все решения?

13.42.(15) На каждом километре шоссе между сёлами Ёлкино и Палкино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано, сколько километров до Ёлкино, а на другой — до Палкино. Боря заметил, что на каждом столбе сумма всех цифр равна 13. Каково расстояние от Ёлкино до Палкино?

13.43.(15) (МО 76) Существует ли такое натуральное число n, что сумма цифр числа n^2 равна 100?

13.44.(15) (МО 80) Найти наибольшее пятизначное число A, у которого четвёртая цифра больше пятой, третья — больше суммы четвёртой и пятой, вторая больше суммы третьей, четвёртой и пятой, а первая больше суммы остальных.

13.45.(20) Докажите, что существует число, сумма цифр квадрата которого более, чем в 1000 раз превышает сумму цифр самого числа.

13.46.(20) (МО 71) Дано 29-значное число $\overline{a_1 \ldots a_{29}}$ $(a_1 \neq 0)$. Известно, что для всякого k цифра a_k встречается в его записи a_{30-k} раз (например, если $a_{10}=7$, то цифра a_{20} встречается 7 раз). Найти сумму цифр этого числа.

13.47. (МО 71) а) (15) Докажите, что сумма цифр числа K не более, чем в 8 раз превосходит сумму цифр числа $8K$.

б) (20) Докажите, что сумма цифр числа N превосходит сумму цифр числа $5^5 \cdot N$ не более, чем в 5 раз.

13.48.(15) (МО 46) Докажите, что выражение $x^5+3x^4-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$ не равно 33 ни при каких целых x и y.

13.49.(15) (МО 47) Сколько цифр у числа 2^{100}?

13.50.(20) (МО 57) Разбить 1957 на 12 целых положительных слагаемых $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ так, чтобы произведение $a_1!\,a_2!\ldots a_{12}!$ было минимальным.

13.51.(15) (МО 73) Из некоторого четырёхзначного числа вычитают число, составленное из тех же цифр, но расположенных в обратном порядке. Может ли получиться число 1008?

13.52.(20) (МО 74) Докажите, что в десятичной записи чисел $2^n + 1974^n$ и 1974^n содержится одинаковое количество цифр.

13.53.(15) (МО 83) Найти наименьшее натуральное число, начинающееся с цифры 4 и уменьшающееся в 4 раза от перестановки этой цифры в конец числа.

13.54.(15) (МО 94) Вся семья выпила по одинаковой чашке кофе с молоком, причём Катя выпила четверть налитого по чашкам молока и шестую часть налитого кофе. Сколько человек в семье?

13.55.(15) (МО 94) Ученик не заметил знак умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в 7 раз больше их произведения. Найдите эти числа (и докажите, что ответ единственный).

13.56.(20) (МО 94) Найти наибольшее натуральное число, не оканчивающееся 0, которое при вычёркивании одной (не первой) цифры уменьшится в целое число раз.

13.57.(15) (МО 95) Натуральное число умножили на произведение всех его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

13.58.(15) (МО 96) По кругу расставлены цифры $1, 2, \ldots, 9$ в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трёхзначное число. Найдите сумму всех 9 таких трёхзначных чисел. Зависит ли она от порядка, в котором расставлены цифры?

13.59.(20) (МО 96) Можно ли выкинуть из произведения $1! \times \times 2! \cdot \ldots \cdot 100!$ один из 100 факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа?

13.60.(20) (МО 99) Петин счёт в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счёта, если других денег у него нет?

13.61.(15) (МО 00) В вершинах куба расставлены натуральные числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что обязательно найдутся две диаметрально противоположные вершины, числа в которых отличаются не более чем на единицу.

13.62.(15) (МО 00) Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел?

13.63.(15) (МО 00) В строку выписано 23 натуральных числа (не обязательно различных). Докажите, что между ними можно так расставить скобки, знаки сложения и умножения, что значение полученного выражения будет делиться на 2000 нацело.

13.64.(15) (США 98) Докажите, что для любых целых a, b, c можно найти натуральное n такое, что $n^3 + an^2 + bn + c$ — не точный квадрат.

13.65.(15) (СО 99) Найти наименьшее целое положительное число, половина которого — полный квадрат, одна треть — полный куб, одна пятая — полная пятая степень.

13.66.(15) (СО 00) Может ли число, оканчивающееся на 1999, быть квадратом натурального числа?

13.67.(15) (ТГ 91) На экране компьютера вначале стоит число 123. Каждую минуту число увеличивается на 102, программист Федя может в любой момент изменять порядок цифр числа, находящегося на экране. Может ли он добиться того, чтобы число всегда оставалось трёхзначным?

13.68.(15) (ВО 64) Докажите, что $m(m+1)$ не является степенью целого числа ни при каком натуральном m.

13.69.(15) (ВО 64) Найдите наибольший полный квадрат такой, что после вычёркивания двух его последних цифр получается снова полный квадрат. (Предполагается, что хотя бы одна из вычёркиваемых цифр — не нуль.)

13.70.(15) (ВО 66) Существуют ли такие натуральные числа x и y, для которых $x^2 + y$ и $y^2 + x$ — квадраты целых чисел?

13.71.(20) (ВО 69) Четыре различных целых трёхзначных числа, начинающихся с одной и той же цифры, обладают тем свойством, что их сумма делится на три из них без остатка. Найдите эти числа.

13.72.(15) (ВО 74) Найдите все натуральные числа n и k такие, что n^n имеет k цифр, а k^k имеет n цифр.

13.73.(20) (ВО 74) Найдите все трёхзначные числа A, обладающие следующим свойством: среднее арифметическое всех чисел, получающихся из числа A различными перестановками его цифр, равно A.

13.74.(15) (ВО 77) Найдите трёхзначное число, которое уменьшается в 7 раз после зачёркивания в нем средней цифры.

13.75.(20) (ВО 79) (Ср. с 11.291.) Натуральные числа от 1 до 1979 в порядке возрастания записаны по кругу в направлении движения часовой стрелки. Отправляясь от 1, двигаемся по часовой стрелке и зачёркиваем каждое второе из чисел из не зачёркнутых ранее. В итоге останется одно число. Что это за число?

13.76.(15) (ВО 80) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого есть пятая степень, а пятая часть которого есть квадрат.

13.77.(15) (ВО 80) Обозначим через $P(n)$ произведение всех цифр натурального числа n. Может ли последовательность (n_k), заданная рекуррентной формулой $n_{k+1} = n_k + P(n_k)$ и своим первым членом $n_1 \in \mathbb{N}$, оказаться неограниченной?

13.78.(15) (ВО 81) Пусть n — натуральное число, большее 9, все цифры которого нечётны. Может ли n быть квадратом натурального числа?

13.79.(20) (ВО 81) Скажем, что число обладает свойством $P(k)$, если оно разлагается в произведение k последовательных натуральных чисел, больших 1. а) Найдите такое k, для которого некоторое число N обладает одновременно свойствами $P(k)$ и $P(k+2)$. б) Докажите, что чисел, обладающих одновременно свойствами $P(2)$ и $P(4)$, не существует.

13.80.(15) (ВО 82) Найдите такое четырёхзначное число, что первые две его цифры одинаковы, следующие две цифры также одинаковы, а само это число является квадратом натурального числа.

13.81.(15) (ВО 84) Найдите все натуральные числа n, такие, что сумма цифр десятичной записи числа 2^n равна 5.

13.82.(15) (ВО 84) Чему равно максимальное значение разности трёхзначного числа и суммы его цифр? Для какого трёхзначного числа достигается максимум? Чему равно минимальное положительное значение этой разности?

13.83.(15) (ВО 84, ТГ 89) Десятичная запись числа 2^{1984} содержит m цифр, а десятичная запись числа 5^{1984} содержит n цифр. Чему равна сумма $m+n$?

13.84.(20) (ВО 84) Цифры $x \neq 0$ и y таковы, что при любом $n \geqslant 1$ число $x \ldots x6y \ldots y4$ (n цифр x и y) — квадрат некоторого целого числа. Найдите все такие x и y.

13.85.(15) (ВО 85) Найдите такое четырёхзначное число, которое в 4 раза меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

13.86.(20) (ВО 85) На бесконечном клетчатом листе со стороной клетки 1 разрешается делать разрезы только по линиям сетки. Докажите, что при любом целом $m > 12$ можно вырезать прямоугольник площади, большей m, из которого нельзя вырезать прямоугольник площади m.

13.87.(15) (ВО 87) Найдите наименьшее натуральное число, которое увеличивается в 5 раз при перестановке последней цифры на первое место.

13.88.(15) (ВО 92) Существует ли такое четырёхзначное число, что ни при какой замене любых трёх цифр на любые три не получится числа, делящегося на 1992.

13.89.(15) (ВО 99) По кругу выписаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до N ($N \geqslant 2$) так, что у любых двух соседних чисел есть одинаковая цифра. Найдите наименьшее возможное значение N.

13.90.(20) (МЕО 76) Определите наибольшее число, являющееся произведением нескольких натуральных чисел, сумма которых равна 1976.

13.91.(20) (МЕО 77) Пусть a и b — натуральные числа. При делении $a^2 + b^2$ на $a + b$ имеем частное q и остаток r. Найти все пары (a, b), для которых $q^2 + r = 1977$.

13.92.(25) (ВО 67) Натуральное число k обладает таким свойством: если n делится на k, то и число, записываемое теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке, делится на k. Докажите, что k — делитель числа 99.

13.93.(25) (ВО 82) а) Пусть m и n — натуральные числа. Докажите, что если для некоторых неотрицательных целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ число $2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_n}$ делится на $2^m - 1$, то $n \geqslant m$.

б) Существует ли натуральное число, делящееся на $11\ldots1$ (m единиц) и имеющее сумму цифр, меньшую чем m?

13.94.(35) (ВО 77) Будем называть $2n$-значное число особым, если оно само является точным квадратом, и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами (при этом второе n-значное число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно 0, а первое не может начинаться с 0).

а) Найдите все двузначные и четырёхзначные особые числа.

б) Возможны ли шестизначные особые числа? (Докажите, что их нет или приведите пример такого числа.)

в) Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

г) Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

д) Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число.

Малая теорема Ферма

Рассмотрим возможность сокращения (деления) сравнений. Утверждение о сокращении является леммой теоремы Ферма.

Лемма. Пусть $ka \equiv kb \pmod{m}$, k и m взаимно просты. Тогда $a \equiv b \pmod{m}$.

Доказательство. Поскольку $ka \equiv kb \pmod{m}$, то $ka - kb = k(a-b)$ делится на m. Так как k и m взаимно просты, то $a-b$ делится на m, т. е. $a \equiv b \pmod{m}$.

На примерах легко убедиться, что требование взаимной простоты k и m необходимо. Действительно, $5 \cdot 3 \equiv 5 \cdot 7 \pmod{10}$, но при этом $3 \not\equiv 7 \pmod{10}$.

Однако верно следующее утверждение:

13.95.(15) Пусть $ka \equiv kb \pmod{kn}$. Тогда $a \equiv b \pmod{n}$.

Теперь всё готово к доказательству малой теоремы Ферма.

Теорема. Пусть p — простое число, и A не делится на p. Тогда $A^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Доказательство. Рассмотрим $p-1$ число: $A, 2A, \ldots, (p-1)A$. Покажем, что среди них нет двух чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на p. Действительно, если $kA \equiv nA \pmod{p}$, то $k \equiv n \pmod{p}$ (см. лемму) — а это невозможно при разных натуральных k и n, меньших p. Значит, среди остатков при делении на p этих $p-1$ чисел встречаются ровно по одному разу все числа от 1 до $p-1$. Поэтому, перемножив все числа, получим

$$A \cdot 2A \cdot 3A \cdot \ldots \cdot (p-1)A \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) \pmod{p},$$

то есть, $(p-1)! \cdot A^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$. Так как p — простое число, то $(p-1)!$ и p взаимно просты. Поэтому, вновь воспользовавшись результатом леммы, получим $A^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Для p — простого числа и любого целого A имеем: $A^p \equiv A \pmod{p}$.

Найти остаток от деления

13.96. а) (10) 2^{100} на 101, б) (10) 3^{102} на 101.

13.97.(15) Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

13.98.(15) Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.

13.99.(15) Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.

13.100.(15) Докажите, что $30^{239} + 239^{30}$ — составное.

13.101.(15) Пусть p — простое число. Докажите, что $(a+b)^p \equiv \equiv a^p + b^p \pmod p$ для любых целых a и b.

13.102.(20) Сумма трёх чисел a, b и c делится на 30. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ также делится на 30.

13.103.(20) Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что а) $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$, б) $(p^q + q^p)/pq$ — чётное число, если $p, q \neq 2$.

13.104.(15) Пусть p — простое число, и a не делится на p. Докажите, что найдется натуральное b, для которого $ab \equiv 1 \pmod p$.

13.105.(20) Пусть n — натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо $n^8 + 1$, либо $n^8 - 1$ делится на 17.

13.106.(20) а) Пусть p — простое число, отличное от 3. Докажите, что число $1\ldots1$ (p единиц) не делится на p. б) Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что число $1\ldots1$ ($p-1$ единица) делится на p.

13.107.(20) Докажите, что для любого простого p разность

$$111\ldots11222\ldots22333\ldots33\ldots888\ldots88999\ldots99 - 123456789$$

(в первом числе каждая ненулевая цифра написана p раз) делится на p.

Теорема Эйлера

Функция $\varphi(m)$, сопоставляющая каждому натуральному числу m количество натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с ним, называется *функцией Эйлера*.

13.108.(15) Окружность разделена 20 точками на 20 равных частей. Сколько можно построить различных замкнутых ломаных из 20 равных звеньев с вершинами в этих точках? (Две ломаные, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.)

13.109.(10) Пусть p — простое и α — целое положительное число. Покажите, что $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. (Ср. с 11.13.)

13.110.(15) Докажите, что функция φ мультипликативна, т. е. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ для любых целых положительных взаимно простых m и n.

13.111.(10) Пусть $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение натурального числа m. Докажите, что $\varphi(m) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \times \times (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \ldots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})$.

13.112.(15) Теорема Эйлера. Пусть a — целое число, взаимно простое с целым положительным m. Докажите, что $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

13.113.(15) Проверьте, что для составного числа 341 имеем $2^{341} \equiv 2 \pmod{341}$.

13.114.(15) Составное число n, такое, что для каждого целого числа a выполняется сравнение $a^n \equiv a \pmod{n}$, называется абсолютно псевдопростым. Докажите, что число 561 абсолютно псевдопростое.

13.115. Докажите, что а) число (15) $2^{131} - 1$ делится на 263, б) (20) число $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}, но не делится на 3^{n+2}.

13.116.(20) Докажите, что если $z^2 \equiv -1 \pmod{p}$, p — простое и $z > 1$, то $p = 4k + 1$. (См. обсуждение после 11.144.)

13.117.(20) (Канада 83) Докажите, что для любого простого p существует бесконечно много чисел вида $2^n - n$, делящихся на p.

13.118.(20) (МО 73) На концах отрезка стоит по 1. На первом шаге между ними ставится их сумма 2, на втором — между соседними числами ставится их сумма (получится 1–3–2–3–1) и т. д. 1 000 000 раз. Сколько раз в результате будет написано число 1973?

13.119.(25) (Болгария 79) Докажите, что у уравнения $x^2 + 5 = y^3$ нет решений в целых числах.

КОМБИНАТОРИКА И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

14. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько разных комбинаций с заданным условием можно составить из заданных объектов. Большинство задач решается с помощью двух основных правил — *правила суммы* и *правила произведения*.

14.1. Правила суммы и произведения

Правило суммы: Если объект A можно выбрать m способами, а объект B — n способами, то выбор «либо A, либо B», можно сделать $m+n$ способами.

Правило произведения: Если объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары $(A; B)$ в указанном порядке можно сделать mn способами.

Разберём следующие задачи.

Из города А в город Б ведут две дороги, из А в Г — четыре дороги, из Б в В — три дороги, из Г в В — пять дорог. а) Сколько различных дорог ведет из А в В через Б? б) Сколько вообще разных дорог из А в В?

Решение. а) По правилу произведения $2 \cdot 3 = 6$. б) Рассмотрим два случая: путь проходит через Б и через Г. В первом случае по правилу произведения имеем $2 \cdot 3 = 6$, а во втором — $4 \cdot 5 = 20$ дорог. По правилу суммы получим $20 + 6 = 26$ дорог.

Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

Решение. Выберем одну кость. Это можно сделать 28 способами. При этом в семи случаях эта кость будет «дублем» (числа на половинках одинаковы), а в 21 случае — костью с разными числами на половинках. В первом случае вторую кость можно выбрать 6 способами, и по правилу произведения имеем $7 \cdot 6 = 42$ выбора. Во втором случае вторую кость можно выбрать 12 способами (по 6 на каждую половинку), и по правилу произведения имеем $21 \cdot 12 = 252$ выбора. Значит, по правилу суммы получаем $42 + 252 = 294$ способа выбора пары.

14.1.(10) Сколько имеется двузначных чисел, у которых

а) среди цифр есть хоть одна пятёрка?

б) цифра десятков меньше цифры единиц?

в) цифра десятков больше цифры единиц?

14.2.(15) Подряд выписаны все целые числа от 1 до 100. Сколько раз в этой записи встречаются цифры: а) 0, б) 1, в) 3?

14.3.(15) Сколько среди целых чисел от 10 до 1000 таких,

а) в записи которых встречаются ровно три одинаковые цифры?

б) у которых каждая последующая цифра больше предыдущей?

в) у которых сумма цифр равна 9?

14.4.(10) Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

14.5.(10) Есть 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

14.6.(10) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова а) «камзол»; б) «здание»?

14.7.(10) Бросают игральную кость с шестью гранями и запускают волчок, имеющий 8 граней. Сколькими различными способами могут они упасть?

14.8.(10) На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с неё? А если спуск и подъём происходят по разным путям?

14.9.(10) На ферме есть 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами его можно сделать ещё раз?

14.10.(10) Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата — белый и чёрный? А если нет ограничений на цвет выбранных квадратов?

14.11.(10) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

14.12.(10) Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может сделать этот выбор?

14.13.(10) Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну — на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

14.14.(10) Из трёх экземпляров учебника алгебры, семи экземпляров учебника геометрии и семи экземпляров учебника тригонометрии надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

14.15.(10) В магазине есть 6 экземпляров романа «Рудин», 3 — романа «Дворянское гнездо» и 4 — романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

14.16.(10) Решите предыдущую задачу, если, кроме того, в магазине есть 3 тома, в которые входят «Рудин» и «Отцы и дети».

14.17.(10) В корзине — 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко, и апельсин. Когда Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если апельсин?

14.18.(15) Имеются три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами могут они упасть? Та же задача, если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1.

14.19.(15) Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в чёрный, либо часть в белый и часть в чёрный. Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они ни переворачивались.)

14.20.(15) Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковые цифры?

14.2. Размещения, перестановки, сочетания

Пусть дано множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$, состоящее из n разных элементов. *Выборкой объёма* r называется множество $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}\}$, содержащее r элементов исходного. Элементы выборки могут быть как разными, так и одинаковыми (например, можно рассмотреть выборку вида $\{a_1, \ldots, a_1\}$).

Выборки, у которых элементы могут быть одинаковыми и порядок существенен (т. е. выборки разные, даже если они различаются только порядком) называются *размещениями с повторением.* Число их обозначают $\overline{A}_n^r$ и $\overline{A}_n^r = n^r$. (Это легко следует из правила произведения: на первом месте могут быть n элементов, на втором — также n элементов, ..., на r-м — n элементов.)

Выборки, у которых все элементы разные, а порядок по-прежнему существенен, называются *размещениями* (*без повторений*). Их число обозначают A_n^r и $A_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1) = n!/(n-r)!$.

Размещения без повторения при $r = n$ называются *перестановками.* (Такие выборки различаются только порядком элементов.) Их число обозначают P_n и $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$. ($0!$ принято считать равным 1.)

Выборки, у которых все элементы разные, а порядок несущественен, называются *сочетаниями* (*без повторений*) из n элементов по r. (Такие выборки отличаются только составом элементов, но не порядком.) Их число обозначают

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Эта формула следует из того, что из каждого сочетания можно сделать $r!$ перестановок, а число этих сочетаний C_n^r и по правилу произведения $r! \cdot C_n^r = A_n^r$.

Буквы азбуки Морзе образуются как последовательность точек и тире. Сколько различных букв можно образовать, если использовать коды, содержащие 5 *символов*?

Решение. Исходное множество в этой задаче состоит из двух элементов: точки и тире. Так как используется пять символов, то выборка содержит пять элементов, которые могут повторяться. Таким образом, число различных выборок, каждая из которых представляет какую-нибудь букву, равно $2^5 = 32 = \overline{A}_2^5$.

Сколькими способами в футбольной команде (11 *человек*) *можно выбрать капитана и его заместителя*?

Решение. Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, всего есть $11 \cdot 10 = 110 = A_{11}^2$ разных вариантов выбора.

Сколькими способами можно выложить в ряд красный, чёрный, синий и зелёный шарики?

Решение. На первое место можно положить любой из четырёх шариков, на второе — любой из трёх оставшихся, на третье — любой из двух оставшихся, а на четвёртое — последний оставшийся шарик. Итак, ответ: $4! = 24 = P_4$.

В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

Решение. Каждая авиалиния соединяет два города. В качестве первого города можно взять любой из 20 городов (город A), а в качестве второго — любой из 19 оставшихся (город B). Перемножив эти числа, получаем $20 \cdot 19 = 380$. Однако при этом подсчёте каждая авиалиния учтена дважды (первый раз, когда в качестве первого города был выбран город A, а второго — город B, а второй раз — наоборот). Таким образом, число авиалиний равно $380 : 2 = 190 = C_{20}^2$.

Отметим, что подобная задача обсуждается и в главе «Графы» при подсчёте числа рёбер полного графа.

14.21.(10) Сколькими способами можно выбрать три разные краски из пяти?

14.22.(10) а) Сколькими способами можно составить трёхцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов? б) А если одна из полос должна быть красной?

14.23.(10) Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, испанского и немецкого? (Каждый словарь позволяет осуществлять двухсторонний перевод.)

14.24.(10) На сколько больше словарей придётся издать, если число различных языков равно 10?

14.25.(15) Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (52 листа) по одной карте каждой масти? То же самое при условии, что среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, то есть двух королей, двух десяток и т. д.

14.26.(15) Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт по одной карте каждой масти так, чтобы карты красных мастей и карты чёрных мастей образовывали пары (например, девятки пик и треф и валеты бубен и червей)?

14.27.(10) Сколькими способами 5 девушек и 3 юноши могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

14.28.(10) Сколькими способами можно послать 6 писем, если для их передачи можно послать трёх курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

14.29.(10) Сколько существует различных семизначных телефонных номеров?

14.30.(10) Сколько существует различных телефонных номеров, если считать, что каждый номер содержит не более 7 цифр (телефонный номер может начинаться с 0)?

14.31.(10) Пусть буквы некоторой азбуки образуются как последовательность точек, тире и пробелов. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 5 символов?

14.32.(10) Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если в каждом номере нет повторяющихся цифр?

14.33.(10) Сколько существует разных исходов эксперимента, связанного с n бросаниями монеты? (Исходы двух экспериментов считаются разными, если очерёдность выпадения гербов в этих экспериментах не совпадает с очерёдностью выпадения цифр.)

14.34.(10) Сколько существует таких перестановок семи учеников, при которых три определённых ученика находятся рядом друг с другом?

14.35.(15) На собрании должны выступить пять человек: А, Б, В, Г и Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, а) что Б не должен выступать до того, как выступит А; б) что А должен выступить непосредственно перед Б.

14.36.(15) а) Сколькими способами можно посадить за круглый стол пять мужчин и пять женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?б) А если они садятся не за стол, а на карусель, и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими.

14.37.(15) Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? Во скольких случаях ровно один туз? Во скольких случаях не менее двух тузов? Ровно два туза?

14.38.(10) На железнодорожной станции имеется m светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, жёлтый и зелёный?

14.39.(10) В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства (наибольшее число зубов равно 32)?

14.40.(15) В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к паровозу, а трое — спиной к паровозу, остальным троим безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

14.41.(10) В местком избраны 9 человек. Сколькими способами из них можно выбрать председателя, заместителя председателя, секретаря и культорга?

14.42.(10) Сколькими способами из состава конференции, на которой присутствует 52 человека, можно избрать делегацию, состоящую из 5 человек?

14.43.(15) Автомобильные номера состоят из одной, двух или трёх букв и четырёх цифр. Найти число таких номеров, если используются 32 буквы русского алфавита.

14.44.(15) Сколькими разными способами можно расставить 30 томов на книжной полке, чтобы: а) тома 1 и 2 стояли рядом; б) тома 3 и 4 рядом не стояли?

14.45.(15) Сколько различных аккордов можно взять на 10 выбранных клавишах рояля, если каждый аккорд содержит от 3 до 10 звуков?

14.46.(15) Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и 5 членов некоторой комиссии. Сколько разных комиссий может быть составлено?

Числа C_n^r обладают рядом замечательных свойств. Эти свойства можно доказывать по-разному. Иногда удобно использовать формулу для C_n^r. Однако часто удается получить доказательство комбинаторными соображениями. Основная идея состоит в подсчитывании числа комбинаций некоторого вида и разбиении этих комбинаций на непересекающиеся классы.

14.47.(15) $C_n^r = C_n^{n-r}$.

14.48.(15) $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$.

14.49.(15) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

14.50.(20) $C_n^n + \ldots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}$.

14.51.(20) $\left(C_n^0\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

14.52.(15) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

14.53.(20) $n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \times$ $\times (n-(n-1))^m = 0$.

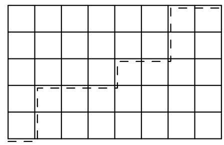
С числами C_n^r связана формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n.$$

14.54.(15) Докажите формулу бинома Ньютона.

Разберём ещё задачу, в решении которой возникают числа сочетаний.

План города имеет схему, изображённую на рисунке. На всех улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вправо» или «вверх». Сколько разных маршрутов, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний?



Решение. Для удобства назовем улицей отрезок изображённой сетки, соединяющий два соседних узла. Ясно, что каждый маршрут содержит ровно 13 улиц, причём 8 из них расположены по горизонтали, а 5 — по вертикали. Сопоставим каждому маршруту последовательность букв Г и В следующим образом: при прохождении «горизонтальной» улицы маршрута будем дописывать в последовательность букву Г, а при прохождении «вертикальной» улицы — букву В. Например, маршруту, выделенному на рисунке, соответствует последовательность

ГВВГГГВГГВВГГ.

Каждая последовательность содержит 13 букв — 8 букв Г и 5 букв В. Вычислим количество таких последовательностей. Последовательность однозначно задается набором из 5 мест, на которых в ней стоят буквы В (или набором из 8 мест, на которых стоят буквы Г). Пять мест из 13 можно выбрать C_{13}^5 способами. Поэтому число возможных последовательностей, а значит, и число возможных маршрутов, равно C_{13}^5.

Понятно, что в прямоугольнике $m \times n$ совершенно аналогичные рассуждения приводят к ответу C_{m+n}^m (или, что тоже самое, C_{m+n}^n).

14.3. Перестановки и сочетания с повторениями. Комбинированные задачи

Рассмотрим такие выборки из множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, в которые элемент a_1 входит n_1 раз, a_2 — n_2 раз, …, a_k — n_k раз. Тогда общий объём выборки равен

$$m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Набор натуральных чисел $(n_1, \ldots, n_k)$ будем называть *составом выборки.* Например, $\{A, A, C, B, A, C\}$ — выборка состава $(3, 1, 2)$ из множества $\{A, B, C\}$.

Число различных выборок одного состава называется числом *перестановок* из m элементов с заданным числом повторений $n_1, \ldots, n_k$. Это число вычисляется по формуле:

$$p_m(n_1, \ldots, n_k) = \frac{m!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}.$$

Число различных составов выборки объёма m, образованной из k групп одинаковых элементов, равно

$$\overline{C}_k^m = C_{k+m-1}^m = \frac{(k+m-1)!}{m!\,(k-1)!}$$

и называется числом *сочетаний с повторениями* из m элементов по k.

Требуется составить расписание отправления поездов на различные дни недели. При этом необходимо, чтобы три дня отправлялись по два поезда в день, два дня — по одному поезду в день, два дня — по три поезда в день. Сколько можно составить различных расписаний?

Решение. Число поездов, отправляемых в день (числа 1, 2, 3) — это три группы одинаковых элементов, из которых составляется выборка. При этом в расписании на неделю число 1 повторяется два раза, число 2 повторяется три раза и число 3 повторяется два раза. Число разных расписаний равно $p(2, 3, 2) = 7!/(2!\,3!\,2!) = 210$.

Шесть ящиков занумерованы числами от 1 *до* 6. *Сколькими способами можно разложить по этим ящикам* 20 *одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?*

Решение. Выложим шары в ряд. Для определения расклада наших шаров по шести ящикам разделим ряд пятью перегородками на 6 групп: первая группа для первого ящика, вторая — для второго и т. д. Таким образом, число вариантов раскладки шаров по ящикам равно числу способов расположения пяти перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 19 мест (между 20 шарами — 19 промежутков). Поэтому число их возможных расположений равно C_{19}^5.

Шесть ящиков занумерованы числами от 1 *до* 6. *Сколькими способами можно разложить по этим ящикам* 20 *одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?*

Решение 1. Рассмотрим ряд из 25 предметов: 20 одинаковых шаров и 5 одинаковых перегородок, расположенных в любом порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу раскладки шаров по ящикам: в первый ящик попадают шары, расположенные левее первой перегородки, во второй — расположенные между первой и второй перегородками и т. д. (Между какими-то перегородками шаров может и не быть.) Поэтому число раскладок шаров по ящикам равно числу различных рядов из 20 шаров и 5 перегородок, т. е. C_{25}^{5} (ряд определяется теми пятью местами из 25, на которых стоят перегородки).

Решение 2. Сопоставим каждому расположению 20 шаров расположение 26 шаров без пустых ящиков, добавив в каждый ящик по одному шару. Число таких расположений вычислялось в предыдущей задаче. Оно равно C_{25}^{5}.

14.55.(10) Сколькими способами 12 пятаков можно разложить по пяти различным кошелькам так, чтобы ни один кошелёк не оказался пустым?

14.56.(10) Сколькими способами переплётчик может переплести 12 одинаковых книг в красный, зелёный или синий переплёты?

14.57.(10) Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 различных бусин на 8 частей (резать можно только между бусинами)?

14.58.(10) 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь число голосов, поданных за каждое предложение?

14.59.(10) У мамы а) 2 яблока и 3 груши; б) m яблок и n груш; в) 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

14.60.(10) В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? Сколькими способами можно купить 8 открыток? А 8 разных открыток?

14.61.(10) Сколькими способами можно расставить белые фигуры (два коня, два слона, две ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

14.62.(10) Поезд с n пассажирами делает m остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между этими остановками? Та же задача, если учитывается лишь число пассажиров, вышедших на данной остановке.

14.63.(15) Сколькими способами можно разбить $m+n+p$ предметов на три группы так, чтобы в одной было m, в другой — n, а в третьей — p предметов?

14.64.(15) Сколько разных браслетов можно сделать из 5 изумрудов, 6 рубинов и 7 сапфиров (все камни одного вида одинаковы), если в браслет входят все 18 камней?

14.65.(10) Сколько различных комбинаций букв можно получить из букв слова «МИССИСИПИ»?

14.66.(15) Сколько различных наборов по 8 пирожных в каждом можно составить, используя 4 сорта пирожных?

14.67.(15) Лифт с 7 пассажирами останавливается на 10 этажах. На каждом этаже может выйти определённое число пассажиров (от 0 до 7). Сколько может быть различных способов освобождения лифта? (Способы различаются только числом людей, вышедших на данном этаже.)

14.68.(15) При игре в бридж между четырьмя игроками распределяется колода карт в 52 листа по 13 карт каждому игроку. Сколько существует различных способов раздать карты?

14.69.(15) Сколькими способами можно m белых и n чёрных шаров ($m > n$) разложить в ряд так, чтобы никакие два чёрных шара не лежали рядом?

14.70.(15) 12 ученикам даны 2 варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда так, чтобы у сидящих рядом были разные варианты, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

14.71.(15) На книжной полке стоят книги по математике и по логике — всего 20 книг. Доказать, что наибольшее количество вариантов комплекта, содержащего 5 книг по математике и 5 книг по логике, возможно в том случае, когда число книг на полке по каждому предмету равно 10.

В урне m белых и n чёрных шаров. Сколькими способами можно выбрать из урны r шаров, из которых белых будет k штук? (Считается, что шары каждого цвета различны, например, пронумерованы.)

Решение. k белых шаров из m белых шаров можно выбрать C_m^k способами, а оставшиеся $r-k$ чёрных шаров из группы в n штук — C_n^{r-k} способами. При этом каждому способу выбора k белых шаров соответствует C_n^{r-k} разных способов выбора чёрных. Значит, общее число разных выборок — $C_m^k C_n^{r-k}$.

Бусы — это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

Решение. Представим себе на время, что бусы нельзя поворачивать. Тогда их можно сделать 13! различными способами. Но любое расположение бусин и 12 вариантов, получающихся из него поворотами — один и тот же вариант бус. Следовательно общее число способов — (12!).

Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Решение. Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых 6-значных чисел, определим количество 6-значных чисел, не обладающих нужным свойством. Так как это в точности те числа, в записи которых встречаются только нечётные цифры, то их количество, очевидно, равно $5^6 = 15\,625$. Всего 6-значных чисел 900 000. Поэтому количество 6-значных чисел, обладающих указанным свойством, равно $900\,000 - 15\,625 = 884\,375$.

Основным моментом при решении этой задачи был переход к дополнению: подсчёт «ненужных» вариантов вместо подсчёта «нужных».

14.72.(10) У англичан принято давать детям несколько имён. Сколькими способами можно назвать ребёнка, если общее число имён равно 300, а ему дают не более трёх имён?

14.73.(15) Несколько человек садятся за круглый стол. Будем считать, что два способа рассадки совпадают, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколькими разными способами можно посадить четырёх человек? А семь человек? Во скольких случаях два данных человека из семи оказываются соседями? Во скольких случаях данный человек (из семи) имеет двух данных соседей?

14.74.(15) Из десяти роз и восьми георгинов нужно составить букет, содержащий две розы и три георгина. Сколько можно составить различных букетов?

14.75.(15) В колоде 36 карт, из них четыре туза. Сколькими способами можно сделать выбор шести карт так, чтобы среди них было два туза?

14.76.(20) Из колоды, содержащей 52 карты (из них 4 туза), вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт будет хотя бы один туз?

14.77.(15) Комплексная бригада состоит из двух маляров, трёх штукатуров и одного столяра. Сколько различных бригад можно создать из рабочего коллектива, в котором 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров?

14.78.(15) Сколько окружностей можно провести через 10 точек, из которых никакие четыре не лежат на одной окружности и никакие три не лежат на одной прямой, если каждая окружность проходит через три точки?

14.79.(15) Сколькими способами из колоды в 52 карты (из них 4 туза и 4 короля) можно вынуть 6 карт, содержащих туза и короля одной масти?

14.80.(15) В теннисном турнире участвуют 10 мужчин и 6 женщин. Сколькими способами можно составить четыре смешанные пары?

14.81.(15) У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого — 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого? Та же самая задача, но меняются две книги одного на две книги другого.

14.82.(15) а) У отца есть 5 различных книг, которые он дарит своим 8 сыновьям. Сколькими способами можно это сделать?

б) А если каждый получает не более одной книги?

14.83.(20) Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать? А сколькими способами можно составить команду из четырёх человек для участия в эстафете $100 + 200 + 400 + 800$?

14.84.(15) Имеется n абонентов телефонной сети. Сколькими способами можно одновременно соединить три пары?

14.85.(15) Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

14.86.(15) Сколько ожерелий можно составить из семи бусинок разных размеров (надо использовать все 7 бусинок)?

14.87.(15) Сколько ожерелий можно составить из пяти одинаковых бусинок и двух большего размера?

14.88.(20) Компания из 7 юношей и 10 девушек танцует. Если в каком-то танце участвуют все юноши, то сколько имеется вариантов участия девушек в этом танце? Сколько имеется вариантов, если учитывать лишь то, какие девушки остались неприглашёнными? Решить те же вопросы, если относительно двух девушек можно с уверенностью сказать, что они будут приглашены на танец?

14.89.(20) Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых? Та же задача, если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов.

14.90.(15) На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

14.91.(15) Есть 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько комбинаций для выбора нескольких птиц таких, что среди выбранных были и куры, и утки, и гуси?

14.92.(15) Сколькими способами из группы в 7 мужчин и 4 женщин, можно выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин?

14.93.(15) Сколько 4-значных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра может встречаться несколько раз?

14.94.(15) Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если каждая из них может повторяться несколько раз?

14.95.(15) Сколько 4-значных чисел, можно составить из цифр $0, 1, \ldots, 7$ если а) в каждом числе содержится ровно одна цифра 1; б) в каждом числе содержится цифра 1 и все цифры числа различны?

14.96.(15) На полке находятся $m+n$ различных книг, из которых m в чёрных переплётах, а n — в красных. Сколько существует перестановок этих книг, при которых книги в чёрных переплётах занимают первые m мест? Сколько положений, в которых все книги в чёрных переплётах стоят рядом?

14.97.(15) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы? В группу могут входить $1, 2, \ldots, 15$ человек. Та же задача для случая выбора из n человек.

14.98.(20) Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Сколько делителей (включая 1 и q) имеет число $q = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые натуральные числа. Чему равна их сумма?

14.99.(20) а) Найти число, которое делится на 2 и 9 и имеет (включая 1 и само число) 14 делителей. б) Доказать, что если заменить 14 делителей на 15, то задача имеет несколько решений, а при замене 14 на 17 решений нет.

14.100.(15) Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется ровно один раз?

14.101.(15) Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из этих 17 не могут быть выбраны вместе?

14.102.(15) Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка вмещает все 20 книг? Сколькими способами можно надеть 5 разных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?

14.103.(15) В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

14.104.(15) У мужа 12 знакомых — 5 женщин и 7 мужчин, а у жены — 7 женщин и 5 мужчин. Сколькими способами можно составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 — жена?

14.105.(15) На каждом борту лодки сидят по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для лодки, если из 31 кандидата 10 хотят сидеть на левом борту лодки, 12 — на правом, а для 9 безразлично, где сидеть?

14.106.(15) В урне лежат жетоны с числами $1, 2, \ldots, 10$. Из неё вынимают три жетона. Во скольких случаях сумма написанных на них чисел равна 9? Не меньше 9?

14.107.(15) Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были все четыре масти?

14.108.(15) Сколькими способами можно в течение трёх дней выбирать по 6 участников из хора в 10 человек так, чтобы каждый день состав хора были разным?

14.109.(15) Сколькими способами человек, имеющий 6 друзей может в течение 20 дней приглашает к себе 3 из них так, что компания ни разу не повторяется?

14.110.(15) Трое юношей и две девушки выбирают место работы. В городе — 3 завода, где нужны рабочие в литейные цеха (туда берут лишь мужчин), 2 ткацкие фабрики (туда берут только женщин) и 2 фабрики, где требуются и мужчины, и женщины. Сколькими способами могут они распределиться между предприятиями?

14.111.(15) Сколько слов, содержащих по 5 букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать, т. е. такие слова, как «пресс» или «ссора», не допускаются?

14.112.(15) Для премий на олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги.

Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвует 20 человек и никому не дают двух книг сразу? Та же задача, если никому не дают двух экземпляров одной и той же книги, но могут быть вручены две или три различные книги.

14.113.(20) Берутся домино от $(0, 0)$ до (n, n). Показать, что число домино с суммой очков $n - r$ равно числу домино с суммой очков $n + r$ и это число равно $(2n - 2r + 3)/4$. Найти общее число всех домино.

14.114.(15) Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

14.115.(15) Сколькими способами можно выбрать из 16 лошадей шестёрку для запряжки так, чтобы неё вошли три лошади из шестёрки $ABCA'B'C'$, но ни одна из пар AA', BB', CC'?

14.116.(15) Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слова, в которые входят 4 различных согласных и 3 различных гласных? Во скольких из этих слов никакие две согласные не стоят рядом?

14.117.(20) а) Компания из 10 супружеских пар, разбивается на 5 групп по 4 человека для лодочной прогулки. Сколькими способами можно разбить их так, чтобы в каждой лодке оказались двое мужчин и двое женщин? б) Во скольких случаях данный мужчина окажется в одной лодке со своей женой? в) Во скольких случаях данные двое мужчин окажутся в одной лодке со своими жёнами?

14.118.(15) Сколько есть таких шестизначных чисел, что сумма трёхзначного числа, образованного первыми тремя цифрами, и трёхзначного числа, образованного последними тремя цифрами, меньше 1000.

14.119.(15) Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 чёрных шашек на чёрных полях шахматной доски?

14.120.(15) Сколькими способами можно переставить буквы слова «Юпитер» так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

14.121.(15) Сколькими способами можно переставить буквы слова «пастух» так, чтобы между двумя гласными были две согласные буквы?

14.122.(15) Сколькими способами можно переставить буквы слова «логарифм» так, чтобы 2-е, 4-е и 6-е места были заняты согласными буквами?

14.123.(15) Сколькими способами можно выбрать из слова «логарифм» две согласные и одну гласную букву? А если среди выбранных букв есть буква «ф»?

Следующий цикл задач связан с формулой включений и исключений. Через $A \cup B$ обозначим объединение множеств A и B, через $A \cap B$ — пересечение множеств A и B, а через $n(A)$ — число элементов конечного множества A. Тогда легко доказать следующие формулы:

14.124.(10) а) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;

б) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - (B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

С помощью индукции эту формулу можно распространить на k элементов:

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + \ldots + n(A_k) - \\ - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_{k-1} \cap A_k) + \\ + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + \\ + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k). \end{aligned}$$

14.125.(10) В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом и 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекается математикой?

14.126.(10) 25% учащихся одного класса ходили в поход, а 75% этого класса были на экскурсии, причём все были в походе или на экскурсии. Сколько процентов учащихся класса были и в походе и на экскурсии?

14.127.(10) На конференцию собрались 100 математиков. Среди них 85 человек знают английский язык, 80 — знают испанский, 75 — немецкий. Сколько участников конференции заведомо знают все три языка?

14.128.(15) Каждый из работающих в отделе человек знает хотя бы один иностранный язык: 6 знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский; 4 знают английский и немецкий, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Только французский?

14.129.(15) На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром — 38 человек, с ветчиной — 42 человека, и с сыром, и с колбасой — 28 человек, и с колбасой, и с ветчиной — 31 человек, и с сыром, и с ветчиной — 26 человек. Все три вида бутербродов взяли 25 человек, а несколько человек вместо бутербродов захватили с собой пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

14.130.(15) Среди абитуриентов, сдавших вступительные экзамены, оценку «5» по математике получили 48 человек, по физике — 37, по русскому языку — 42, по математике или физике — 75, по математике или русскому языку — 76, по физике или русскому языку — 66, по всем трём предметам — 4. Сколько человек получили хотя бы одну пятёрку? Сколько среди них получивших только одну пятёрку?

14.131.(15) Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых данные два элемента a и b не стоят рядом? Данные три элемента a, b, c не стоят рядом (в любом порядке)? Никакие два из элементов a, b, c не стоят рядом?

14.132.(15) В комнате площадью 6 м^2 постелены на полу три ковра произвольной формы площадью 3 м^2 каждый. Докажите, что какие-то два из этих ковров налегают друг на друга по площади, не меньшей 1 м^2. Как изменится ответ, если в той же комнате положить 4 ковра площадью 2 м^2 каждый?

В некоторых задачах такого типа дается мало данных, поэтому ответ получается неоднозначный: «от» и «до».

14.133.(15) Ваня, Петя и Оля решили 10 олимпиадных задач. Петя из этих задач решил 7, Оля — 8 задач, а Ваня — 9 задач. Назовем задачу лёгкой, если её решили все трое. Сколько лёгких задач было среди десяти решённых?

14.134.(15) Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 — синюю, 75 — зелёную. Сколько кубиков имеют грани всех трёх цветов?

14.135.(20) На первом курсе 80% студентов сдали экзамен по математике, 85% — по физике, 90% — по химии и 98% — по истории. Какая часть всех студентов первого курса успешно сдала все экзамены?

14.136.(20) (МО 81) За круглым столом сидят n человек. Разрешается любых двоих людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее число таких перестановок надо сделать, чтобы в результате любые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

14.137.(20) (МО 85) Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?

14.138.(20) (МО 86) В кодовом замке — ровно три кнопки с номерами 1, 2, 3. Известно, что код, открывающий замок, трёхзначен. Какое наименьшее число раз надо нажать на кнопки замка, чтобы он наверняка открылся? (Замок открывается, как только подряд и в правильном порядке нажаты все три цифры его кода.)

14.139.(15) (Польша 60) Из цифр $1, 2, 3, \ldots, 9$ составлены все четырёхзначные числа, не содержащие повторяющихся цифр. Найти сумму этих чисел.

14.140.(15) (Польша 61) Лёша написал 6 писем 6 различным людям и заготовил 6 конвертов с их адресами. Сколькими способами можно вложить письма в конверт, чтобы ни одно письмо не попало тому лицу, которому оно адресовано?

14.141.(20) (Польша 62) Сколькими способами множество, состоящее из n предметов, можно разделить на два множества?

14.142.(20) (Польша 70) Сколькими способами множество из 12 элементов, можно разбить на 6 множеств, каждое из которых содержит по 2 элемента?

14.143.(20) (Польша 71) Доступ к сейфу имеют 11 членов комиссии. Каким наименьшим числом замков надо снабдить сейф для того, чтобы при определённом наборе ключей любые шесть членов комиссии, собравшись вместе, могли его открыть, а любых 5 членов было бы недостаточно? Указать, как распределить ключи от сейфа с минимальным числом замков между членами комиссии.

14.144.(15) (Чехословакия 73) Сколько разных пар непересекающихся подмножеств имеет множество, состоящее из n элементов?

14.145.(15) (Нью-Йорк 74) Докажите, что для любых $n \geqslant k$ наибольший общий делитель чисел $C_n^k, C_{n+1}^k, \ldots, C_{n+k}^k$ равен 1.

14.146.(15) (Югославия 74) Найти все n, для которых при каком-то $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ имеет место равенство $2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$.

14.147.(20) (Югославия 77) Для каждого n определите, сколько есть троек натуральных чисел, сумма которых равна $6n$.

14.148.(20) (Болгария 80) Докажите, что число способов, которыми из набора $1, 2, \ldots, 49$ можно выбрать шестёрку различных чисел так, чтобы хотя два из них были последовательными, равно $C_{49}^6 - C_{44}^6$.

14.149.(20) (Австралия 82) а) Докажите, что C_{2m}^m делится на $m+1$. б) Найти наименьшее k, для которого $C_{2n}^{n+m} \cdot k$ делится на $n+m+1$ при всех $n \geqslant m$.

14.150.(15) (США 82) Докажите, что для любого n верно, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = (C_{2n}^n)^2.$$

14.151.(20) (СО 99) Сколькими способами из чисел $1, 2, \ldots, 11$ можно выбрать несколько чисел так, чтобы среди выбранных не было трёх идущих подряд чисел?

14.152.(20) (ВО 64) В выражении $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ для указания порядка действий расставляют скобки и результат записывают в виде дроби:

$$\frac{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}{x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_{n-k}}}$$

(при этом каждая из букв $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ стоит либо в числителе дроби, либо в знаменателе). Сколько различных выражений можно таким образом получить при всевозможных способах расстановки скобок?

14.153.(20) (ВО 66) На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $ABCD$, стороны которого лежат на линиях сетки, причём AD в k раз больше AB (k — целое). Рассматриваются все пути, проходящие по линиям сетки и кратчайшим образом ведущие из A в C. Докажите, что путей, в которых первое звено лежит на AD, в k раз больше, чем таких, в которых первое звено лежит на AB.

14.154.(20) (ВО 70) Из цифр 1 и 2 составили пять n-значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в m разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Докажите, что $2/5 \leqslant m/n \leqslant 3/5$.

14.155.(20) (ВО 75) Докажите, что из цифр 1 и 2 можно составить 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно и каждые два из которых различаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах.

14.156.(15) (ВО 83) В языке племени Абба две буквы. Известно, что никакое слово этого языка не является началом другого слова. Может ли словарь языка этого племени содержать 3 четырёхбуквенных, 10 пятибуквенных, 30 шестибуквенных и 5 семибуквенных слов?

14.157.(20) (ВО 98) Назовем десятизначное число интересным, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?

14.158.(15) (МЕО 87) Пусть $p_n(k)$ — число перестановок множества из n ($n > 0$) элементов, имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите, что $p_n(1) + 2p_n(2) + \ldots + np_n(n) = n!$

14.159.(15) (МЕО 89) Докажите, что множество $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ можно представить в виде объединения попарно непересекающихся множеств A_i ($i = 1, 2, \ldots, 117$) таких, что каждое из множеств

A_i содержит 17 элементов, и $S_1 = S_2 = \ldots = S_{117}$, где S_i — сумма всех чисел множества A_i.

14.160.(25) (МО 68) На окружности радиуса 1 отмечена точка O, и из неё циркулем делается засечка по часовой стрелке радиусом a. Из полученной точки делается ещё одна засечка, и так повторяется 1968 раз. Сколько различных дуг при этом может получиться? (Рассматриваются только дуги, не содержащие других засечек.)

14.161.(30) (ВО 76) Дано натуральное число n. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k \geqslant n$) назовем универсальной для данного n, если из неё можно получить вычёркиванием части членов любую перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$ (т. е. любую последовательность из n чисел, в которую каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ входит по одному разу). Например, последовательность $(1, 2, 3, 1, 2, 1, 3)$ является универсальной для $n = 3$, а $(1, 2, 3, 2, 1, 3, 1)$ не универсальна, так как из неё никаким вычёркиванием нельзя получить перестановку $(3, 1, 2)$.

а) Приведите пример универсальной последовательности из n^2 членов.

б) Приведите пример универсальной последовательности из $n^2 - n + 1$ членов.

в) Докажите, что любая универсальная последовательность состоит не менее чем из $n(n + 1)/2$ членов.

г) Докажите, что при $n = 4$ самая короткая универсальная последовательность состоит из 12 членов.

д) Попробуйте найти для данного n как можно более короткую универсальную последовательность.

14.162.(30) (ВО 77) Имеется 1000 билетов с номерами 000, $001, \ldots, 999$ и 100 ящиков с номерами $00, 01, \ldots, 99$. Билет можно опустить в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычёркиванием одной из цифр. Докажите, что

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее чем в 40 ящиков;

в) нельзя разложить все билеты менее чем в 50 ящиков.

г) Пусть билеты имеют 4-значные номера (от 0000 до 9999) и билет разрешается опускать в ящик, номер которого можно получить из номера билета вычёркиванием каких-либо двух цифр. Докажите, что все 4-значные билеты можно разложить в 34 ящика.

д) Какой минимальный набор ящиков потребуется для k-значных билетов ($k = 4, 5, \ldots$)?

15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Как и комбинаторика, этот раздел сейчас не входит в школьную программу. Однако нам представляется, что эти разделы являются важным элементом математического образования. Отметим также, что они входят в школьную программу многих зарубежных стран, о чем можно судить по приведённым здесь задачам из олимпиад этих стран.

Множество всех равновозможных простейших событий назовём *пространством элементарных событий. Вероятностью* события A назовём отношение числа тех элементарных событий, при которых событие A происходит, к числу всех возможных элементарных событий. Таким образом, если событие A происходит в m из n возможных случаев, его вероятность $P(A)$ выразится дробью

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

В задачах, где число всех возможных элементарных событий конечно, число элементарных событий, благоприятных событию A, может быть найдено непосредственно.

В классе, состоящем из 20 *учеников,* 15 *человек занимаются в математическом кружке. Какова вероятность, что наудачу выбранный ученик окажется членом математического кружка*?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что наудачу выбранный ученик является членом математического кружка. Тогда число элементарных событий, благоприятных событию A, равно 15. Число всех элементарных событий в данном случае равно 20. Значит, искомая вероятность равна $P(A) = 15/20 = 3/4$.

Бросают две игральные кости. Что более вероятно: *то, что сумма очков на выпавших гранях равна* 11 *или то, что сумма очков на выпавших гранях равна* 4?

Решение. Поставим в соответствие исходу эксперимента упорядоченную пару чисел (x, y), где x — число очков, выпавших на первой кости, а y — на второй. Пространство всех элементарных событий состоит из множества пар (x, y), где x и y принимают значения от 1 до 6. Число таких пар равно 36. Событию A, состоящему в том, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна 11, благоприятны 2 элементарных события, которым соответствуют пары $(6, 5)$ и $(5, 6)$. Событию B, состоящему в том, что сумма очков, выпавшая на двух костях, равна 4, благоприятны 3 элементарных события, которым соответствуют пары $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,2)$. Вероятности событий A и B равны соответственно $P(A) = 2/36 = 1/18$ и $P(B) = 3/36 = 1/12$, и, следовательно, событие B более вероятно.

15.1.(10) Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует первому числу месяца? (Год считается невисокосным.)

15.2.(10) Какова вероятность того, что наудачу выбранное число от 1 до 12 окажется делителем числа 12? (Единица считается делителем любого числа.)

15.3.(15) Каковы вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число делится на 3?

15.4.(10) Найти вероятность того, что наудачу выбранный член последовательности $U_n = n^2 + 1$ $(n = 1, 2, \dots, 10)$ делится на 5.

15.5.(10) В урне 10 белых шаров и 3 красных. Какова вероятность вынуть из урны красный шар?

15.6.(20) Монету бросают три раза. Какое из событий более вероятно: событие A — все три раза выпала цифра, или событие B — два раза выпала цифра и один раз герб? Подсчитать вероятности этих событий.

15.7.(15) Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна 7?

15.8.(15) Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях чётная?

15.9.(15) При перевозке 100 деталей, из которых 10 были забракованы, утеряна одна стандартная деталь. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая деталь оказалась а) стандартной; б) бракованной.

15.10.(20) В семье трое детей. Какова вероятность, что все они мальчики? (Предполагается, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми.)

В некоторых случаях для непосредственного подсчёта вероятности события удобно использовать формулы комбинаторики.

Найти вероятность того, что все учащиеся в группе, состоящей из 40 *человек, родились в разные дни года.* (*Считать, что ни у кого не было днём рождения 29 февраля.*)

Решение. Все исходы эксперимента — различные выборки по 40 из исходного множества объёма 365. При этом выборка может содержать одинаковые элементы (так как любой день может быть днем рождения нескольких человек). Значит, пространство элементарных событий содержит 40^{365} разных выборок. Благоприятным событиям будут соответствовать выборки, не содержащие одинаковых элементов. Таких выборок A_{365}^{40}. Итак, искомая вероятность равна $P(A) = A_{365}^{40}/40^{365}$.

15.11.(10) В урне n белых и m красных шаров. Какова вероятность того, что наудачу взятые два шара окажутся красными?

15.12.(10) Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры и, помня только, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность, что он набрал нужные цифры?

15.13.(15) К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых 50 спелых. Покупатель выбирает два арбуза. Какова вероятность, что оба арбуза спелые?

15.14.(15) В урне n белых, m чёрных и k красных шаров. Наудачу вынимаются три шара. Какова вероятность того, что все они будут разного цвета?

15.15.(15) В экзаменационный билет входят 4 вопроса программы, насчитывающей 45 вопросов. Абитуриент не знает 15 вопросов программы. Какова вероятность, что он вытянет билет, где все вопросы ему известны?

15.16.(15) На карточках написаны целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма цифр, написанных на этих карточках, будет равна 10?

15.17.(15) В соревновании участвуют 10 человек. Трое судей независимо друг от друга перенумеровывают их в порядке, отражающем их успехи в соревновании по мнению судей. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей. В какой доле случаев соревнования победитель будет определён?

Решить задачи, используя формулу числа перестановок с заданным числом повторений.

15.18.(20) Какова вероятность, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы а, а, а, н, н, с, получится слово «ананас»?

15.19.(20) На ряд, состоящий из семи мест, случайным образом садятся семь учеников. Найти вероятность того, что три определённых ученика окажутся рядом.

15.20.(20) На полке случайно расставлены четыре книги по алгебре и три книги по геометрии. Какова вероятность того, что книги по каждому предмету стоят рядом?

15.21.(20) Найти вероятность того, что при игре в бридж (четырём игрокам из колоды карт в 52 листа раздаются по 13 карт) каждый игрок получит по одному тузу.

15.22.(20) Пусть при 10-кратном бросании монеты 5 раз выпали гербы и 5 раз — цифры. Какова вероятность того, что все гербы выпали при первых 5 бросаниях?

Из 15 строительных рабочих 10 — штукатуры, а 5 — маляры. Наудачу отбирается бригада из 5 рабочих. Какова вероятность того, что среди них будет 2 маляра и 3 штукатура?

Решение. Пространство элементарных событий состоит из всех выборок различного состава объёма 5 из множества объёма 15. Число таких выборок равно C_{15}^5. Благоприятным событиям соответствуют выборки, содержащие трёх маляров и двух штукатуров. Трёх маляров из пяти можно выбрать C_5^3 способами, а двух штукатуров (совершенно независимо от предыдущего выбора) C_{10}^2 способами. Значит, число выборок, соответствующих благоприятным событиям, равно $C_5^3 C_{10}^2$. Итак, искомая вероятность равна $P(A) = C_5^3 C_{10}^2 / C_{15}^5$.

В общем случае вероятность получить выборку объёма $k + r$, где k элементов принадлежат одной группе, состоящей из n элементов, а r — другой, состоящей из m элементов, определяется формулой

$$P(A) = \frac{C_m^r C_n^k}{C_{m+n}^{r+k}}.$$

15.23.(15) В ящике имеются 15 деталей, 5 из которых окрашены. Извлекаются 5 деталей. Найти вероятность того, что 4 из них окрашены, а 1 — нет.

15.24.(15) В партии из N деталей n стандартных. Наудачу отбираются m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных k стандартных.

15.25.(20) Какова вероятность главного выигрыша в «Спортлото» (угадать 6 номеров из 48)? Какова вероятность угадать 5; 4; 3 номера из 48?

15.26.(20) Какова вероятность получения одного туза, туза и короля при сдаче 6 карт из колоды в 52 листа?

15.27.(20) Есть шесть билетов в театр, четыре из которых на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трёх выбранных билетов два будут на места первого ряда?

15.28.(20) В соревнованиях по футболу участвуют 20 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 10 команд. Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

15.29.(15) Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма выпавших за время бросания очков не превысит 12. Какая общая сумма очков будет наиболее вероятной?

15.30.(20) В сумке находятся шесть красных и восемь зелёных мячей. Случайно вынимают пять из них и помещают в красную коробку, а остальные девять — в зелёную. Какова вероятность, что количество красных мячей в зелёной коробке плюс количество зелёных мячей в красной не является простым числом?

15.31.(20) Шахматист A в трёх партиях с B и C должен не проиграть в каких-либо двух партиях подряд. При какой последовательности противников: B, C, B или C, B, C шахматист имеет больше шансов на успех, если в среднем из 10 партий он проигрывает B каждые 6 партий, а C — каждые 7 партий.

15.32.(15) (Бельгия 80) Каждая из двух урн содержит белые и чёрные шары — всего 25. Из каждой урны наугад вынимают по шару. Зная, что вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54, найти вероятность того, что оба вынутые шары окажутся чёрными.

15.33.(15) (Венгрия 70) Какова вероятность того, что среди 5 вытянутых номеров лото имеются по крайней мере найдутся два отличающихся на 1 числа?

15.34.(20) (Англия 73) Учителю и ученикам задаются вопросы. Вероятность того, что ответ учителя будет правильным, равна α, а вероятность правильного ответа ученика равна β (для мальчика) и γ (для девочки). Вероятность того, что ответ случайно выбранного ученика совпадает с ответом учителя, равна $1/2$. Найти отношение числа мальчиков к числу девочек.

15.35.(20) (США 83) В правильном n-угольнике ($n \geqslant 6$) наугад выбираются две тройки различных вершин. Какова вероятность того, что два треугольника, с вершинами в выбранных тройках, не пересекаются?

15.36.(20) (Германия 78) Вокруг правильного $2n$-угольника описана окружность. Тройка разных его вершин называется односторонней, если существует полуокружность, на которой лежат эти вершины (концы полуокружности принадлежат ей). Какова вероятность того, что случайно выбранная тройка вершин окажется односторонней?

15.37.(20) (Бразилия 82, Австралия 83) В урне находятся n белых и m чёрных шаров, рядом с урной — ящик с большим количеством чёрных шаров. Производится следующая операция: из урны наугад вынимается пара шаров; если они одноцветны, то чёрный шар из ящика перекладывается в урну; если они разноцветны, то белый шар возвращается в урну и так до тех пор, пока в урне не останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?

15.38.(20) (Австралия 82) Игрок A бросает монету $n+1$ раз, а игрок B — n раз. Какова вероятность того, что в итоге у A выпадет больше «орлов», чем у B?

15.39.(20) (Нью-Йорк 76) Строка $(i_1, \ldots, i_n)$, где $n > 3$, составлена из первых n натуральных чисел, расположенных в случайном порядке. Какова вероятность того, что при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливо неравенство $i_k \geqslant k - 3$?

15.40.(15) (СО 00) В передаче «Поле Чудес» ведущий разыгрывал приз следующим образом. играющему показывали три шкатулки, в одной из которых находился приз. Играющий указывал на одну их шкатулок, после чего ведущий открывал одну из двух оставшихся шкатулок, которая оказывалась пустой. После этого играющий мог либо настаивать на первоначальном выборе, либо сменить его и выбрать третью шкатулку. В каком случае его шансы возрастают? (Возможны три варианта ответа: обе шкатулки равноправны, лучше сохранить первоначальный выбор, лучше его изменить. Ответ обосновать.)

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

16. НЕРАВЕНСТВА

Неравенства довольно часто встречались в предыдущих задачах. Сама по себе эта тема достаточно широка, здесь мы коснемся лишь некоторой её части.

16.1. Числовые неравенства

Вот типичный вопрос из этой серии.

(ВО 68) *Какое число больше*: 31^{11} *или* 17^{14}?

Решение. Выписать оба этих числа, конечно, можно — в каждом из них не более 20 цифр. Однако этот путь решения вопроса очень трудоёмок и не увенчается успехом в других, более трудных задачах. Попробуем по-другому:

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}.$$

Вот такая цепочка неравенств сразу дает нам результат: 31^{11} меньше, чем 17^{14}. Единственное, что нам было необходимо для решения — это подметить, что числа 31 и 17 находятся «рядом» со степенями двойки.

16.1. Что больше а) (10) 5^{300} или 3^{500}, б) (10) 2^{700} или 5^{300}, в) (10) 2^{300} или 3^{200}, г) (10) 2^{40} или 3^{28}, д) (10) 5^{44} или 4^{53}, е) (15) 7^{92} или 8^{91}?

16.2.(10) Докажите, что $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Разберём более сложную задачу:

Доказать, что $4^{79} < 2^{100} + 3^{100} < 4^{80}$.

Решение. Так как $2\cdot 3^{100} > 2^{100}+3^{100}$, то достаточно доказать, что $4^{80} > 2\cdot 3^{100}$ или $\left(4^4/3^5\right)^{20} = (256/243)^{20} > 2$. Легко проверить, что $256/243 > 1+1/20$. Тогда из неравенства Бернулли (см. 16.31) $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, имеем

$$(256/243)^{20} > (1+1/20)^{20} \geqslant 2.$$

Для доказательства второго неравенства покажем, что $3^{100} > 4^{79}$. Для этого нужно доказать, что $4^{80}/3^{100} < 4$. Это следует из того, что

$$\frac{4^{80}}{3^{100}} = \left(\frac{256}{243}\right)^{20} < \left(\frac{19}{18}\right)^{20} = \left(\frac{361}{324}\right)^{10} < \left(\frac{9}{8}\right)^{10} = \\ = \left(\frac{81}{64}\right)^{5} < \left(\frac{9}{7}\right)^{5} = \frac{59049}{16807} < 4.$$

Как видим, метод состоит, в упрощении «сложного» выражения вроде $4^{80}/3^{100}$.

16.3. Какое из чисел больше:

а) (15) $1234567 \cdot 1234569$ или 1234568^2,

б) (15) $1975/1987$ или $19751976/19871988$,

в) (15) $1234567890/2345678901$ или $1234567891/2345678903$?

16.4.(15) Что больше:

$$\frac{1\overbrace{0\ldots0}^{1984}1}{1\underbrace{0\ldots0}_{1985}1} \quad \text{или} \quad \frac{1\overbrace{0\ldots0}^{1985}1}{1\underbrace{0\ldots0}_{1986}1}\,?$$

16.5.(15) Что больше: $1234567/7654321$ или $1234568/7654322$?

16.6.(15) Какая дробь больше:

$$\frac{1\overbrace{6\ldots6}^{1997}}{\underbrace{6\ldots6}_{1997}4} \quad \text{или} \quad \frac{1\overbrace{9\ldots9}^{1997}}{\underbrace{9\ldots9}_{1997}5}\,?$$

16.7. Не пользуясь калькулятором, выясните, какое число больше:

а) (15) (СО 97) $\left|\left|\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}\right| - \sqrt{3}\right| - \sqrt[3]{5}$ или 0,01,

б) (15) $\sqrt{1969} + \sqrt{1971}$ или $2\sqrt{1970}$.

16.8.(15) Какое число больше: 100^{100} или $50^{50} \cdot 150^{50}$?

16.9.(15) Что больше: $(1{,}01)^{1000}$ или 1000?

16.10. Докажите, что:

а) (15) $1/2 - 1/3 + 1/4 \ldots - 1/99 + 1/100 > 1/5$,

б) (15) $\left(1 + \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt[3]{3}\right)\ldots\left(1 + \sqrt[11]{3}\right) > 1991$.

16.11.(15) (почти шутка) Если к числу 100 применить 99 раз операцию «факториал», то получится число A. Если к числу 99 применить 100 раз операцию «факториал», то получится число B. Какое из этих чисел больше?

16.12.(15) Какое число больше:

$$\frac{1}{5001}+\frac{1}{5002}+\ldots+\frac{1}{5100} \quad \text{или} \quad \frac{1}{49}?$$

16.13.(15) Найдите наибольшее из чисел 5^{100}, 6^{91}, 7^{90}, 8^{85}.

16.14.(25) Рассмотрим число

$$\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100}.$$

Докажите, что оно: а) меньше 1/10; б) меньше 1/12; в) больше 1/15.

16.15.(15) (МО 84) Докажите, что $\sin 1 < \log_3\sqrt{7}$.

16.16.(10) (ВО 75) Докажите, что $\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8 \geqslant 4{,}4$.

16.17.(10) (ВО 75) Докажите, что $1/2-1/3+1/4\ldots-1/999+1/1000<2/5$.

16.18.(15) (ВО 78) Какое из двух чисел больше: $1978^{1976}\times 1976^{1978}$ или $1977^{2\cdot 1977}$?

16.19.(20) (ВО 84) Какое из чисел больше: 2/201 или ln(1,01)?

16.20.(15) (ВО 86) Докажите, что $1/3<\sin(\pi/9)<7/20$.

16.2. Доказательство неравенств

Одним из методов доказательства является удачно выбранное алгебраическое преобразование, которое сводит неравенство к очевидному типа $x^2 \geqslant 0$. При этом часто используется метод выделения полного квадрата.

Доказать неравенство: $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$.

Решение. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = {}^1\!/_2((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2) \geqslant 0$.

16.21.(10) Докажите, что при любых a, b, c выполняется неравенство $(a^2/4)+b^2+c^2 \geqslant ab-ac+2bc$.

16.22.(10) $a^2+b^2+c^2+d^2-ab-cd-bc-d+2/5 \geqslant 0$.

16.23.(15) k, l, m — натуральные числа. Докажите, что $2^{k+l}+2^{k+m}+2^{l+m}<2^{k+l+m+1}-1$.

16.24.(15) $a+b+c=0$. Докажите, что $ab+bc+ca \leqslant 0$.

Теперь разберём замечательную идею, позволяющую доказывать некоторые симметричные неравенства (она также связана с разложением на множители).

Лемма. Если $a \geqslant b$, $x \geqslant y$, то $ax+by \geqslant ay+bx$.

Доказательство. Действительно, $ax+by-ay-bx=(a-b)\times(x-y) \geqslant 0$.

Комментарий. Если, например, f — некоторая возрастающая функция, то $(a-b)(f(a)-f(b)) \geqslant 0$ для любых a и b — это переформулировка определения возрастающей функции.

Эта идея применяется, например, так:

(ВО 85) *Докажите, что неравенство* $x^6/y^2 + y^6/x^2 \geqslant x^4 + y^4$ *выполняется при любых* x *и* y.

Решение. Обозначим $x^2 = a$, $y^2 = b$. Тогда

$$\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} - x^4 - y^4 = \frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{b} - a^2 - b^2 = \frac{(a-b)a^2}{b} + \frac{(b-a)b^2}{a} = \\ = (a-b)\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) = \frac{(a-b)(a^3-b^3)}{ab} \geqslant 0.$$

Ещё раз подчеркнем, что числа $a-b$ и a^3-b^3 имеют один знак.

16.25.(15) $x, y > 0$. Докажите, что $\sqrt{x^2/y} + \sqrt{y^2/x} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

16.26.(10) $a, b, c \geqslant 0$. Докажите, что

$$2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2.$$

В задачах, где встречается натуральное число n, часто используется индукция. При этом если в неравенстве есть сумма, то наиболее употребительной является следующая схема: пусть даны последовательности a_1, $a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, причём $a_1 \geqslant b_1$ (база); $a_k - a_{k-1} \geqslant b_k - b_{k-1}$ при любом $k \in \mathbb{N}$ (переход). Тогда $a_n \geqslant b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Схема следует из следующего наблюдения:

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) \geqslant \\ \geqslant b_1 + (b_2 - b_1) + \ldots + (b_n - b_{n-1}) = b_n.$$

Докажите, что при любом n $1 + 1/\sqrt{2} + \ldots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}$.

Решение. База очевидна. Переход: $1 + 1/\sqrt{2} + \ldots + 1/\sqrt{n} < < 2\sqrt{n-1} + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}$, так как $1/\sqrt{n} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = = 2/(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$.

16.27.(10) Докажите, что $1+1/\sqrt{2}+\ldots+1/\sqrt{n} > 2(\sqrt{n+1}-1)$.

16.28.(15) Докажите, что $1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/n^2 < 1$.

Если в неравенстве есть произведение, то используется аналогичная схема:

Пусть $a_1 \geqslant b_1 > 0$ (база), $a_k/a_{k-1} \geqslant b_k/b_{k-1} > 0$ при всех $k \leqslant n$ (переход). Тогда $a_n \geqslant b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Докажите, что при всех n *верно неравенство* $n^n > (n+1)^{n-1}$.

Решение. $a_n = n^n$, $b_n = (n+1)^{n-1}$. База легко проверяется при $n = 1, 2$. Чтобы доказать индукционный переход, достаточно показать, что

$$a_k/a_{k-1} = k^k/(k-1)^{k-1} \geqslant b_k/b_{k-1} = (k+1)^{k-1}/k^{k-2}$$

или, что то же самое, $k^{2k-2} \geqslant (k^2-1)^{k-1}$, т. е. $(k^2)^{k-1} \geqslant (k^2-1)^{k-1}$, что, очевидно, верно.

Докажите неравенства:

16.29. а) (10) $n! \geqslant 2^n$ при $n \geqslant 4$; б) (10) $2^n \geqslant 2n$.

16.30.(15) При каких n верно неравенство $2^n \geqslant n^3$?

16.31.(15) Неравенство Бернулли. $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, при $n \in \mathbb{N}$, $x > -1$.

В более общем виде это неравенство выглядит так:

$(1+x)^b < 1+xb$, при $0 < b < 1$, $x \neq 0$, $x > -1$; $(1+x)^b > 1+xb$, при $b > 1$ и $b < 0$, $x \neq 0$, $x > -1$ (b и x — действительные числа).

Есть и другое обобщение неравенства Бернулли:

Если $x_i > -1$ и все x_i имеют один и тот же знак, то

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Важным методом доказательства неравенств является применение «замечательных неравенств». Наиболее известным является *неравенство Коши* или *неравенство о средних.*

Определение. Пусть $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$. *Средним арифметическим* чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется число

$$A(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

их *средним геометрическим* — число

$$G(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n},$$

а *средним гармоническим* — число

$$H(a_1, \ldots, a_n) = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Наконец, их *среднее квадратическое* — число

$$S_2(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Тогда имеет место неравенство (*неравенство Коши*)

$$\min(a_1, \ldots, a_n) \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant S_2 \leqslant \max(a_1, \ldots, a_n),$$

причём если среди этих неравенств хотя бы одно строгое, то и все они строгие.

Приведём ещё ряд неравенств.

Неравенство Коши–Буняковского:

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2).$$

Оно имеет важную геометрическую интерпретацию: если $\vec{A} = (a_1,\ldots,a_n)$, $\vec{B}=(b_1,\ldots,b_n)$, то $\vec{A}\cdot\vec{B} \leqslant |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|$.

Неравенство Чебышева: если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, то

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+\ldots+b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1+\ldots+a_nb_n}{n}.$$

Неравенство Гёльдера: если $p,q>0$ и $1/p+1/q=1$, то

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n \leqslant \left(a_1^p+\ldots+a_n^p\right)^{1/p}\left(b_1^q+\ldots+b_n^q\right)^{1/q}.$$

Неравенство Минковского:

$$\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1+b_1)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2}.$$

Это неравенство также имеет геометрическую интерпретацию: если $\overrightarrow{XY}=(a_1,\ldots,a_n)$, $\overrightarrow{YZ}=(b_1,\ldots,b_n)$, то $|\overrightarrow{XY}|+|\overrightarrow{YZ}| \geqslant |\overrightarrow{XZ}|$, поэтому его часто называют *неравенством треугольника.*

Наиболее общим является *неравенство Иенсена*: пусть на $[a;b]$ задана функция $f(x)$, производная которой $f'(x)$ не возрастает (т. е. f выпукла вверх), тогда для точек $x_1,\ldots,x_n$ на этом отрезке и положительных чисел $p_1,\ldots,p_n$ с суммой $p_1+\ldots+p_n=1$ верно, что

$$f(p_1x_1+\ldots+p_nx_n) \geqslant p_1f(x_1)+\ldots+p_nf(x_n).$$

Неравенство Юнга: для любых положительных x, y, α, β, где $1/\alpha+1/\beta=1$ имеет место неравенство

$$x^\alpha/\alpha+y^\beta/\beta \geqslant xy.$$

($f(x)=x^\alpha/\alpha$ и $g(x)=x^\beta/\beta$ называют *двойственными по Юнгу функциями*).

16.32.(10) Докажите, что при любых a, $b>0$, для которых $a+b=1$, верно неравенство $(a+1/a)^2+(b+1/b)^2 \geqslant 25/2$.

16.33.(10) Сумма нескольких чисел равна единице. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

16.34.(10) Докажите, что при любых положительных a и b

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a+nb}{n+1}.$$

16.35.(10) При любых x_1, x_2, x_3 имеет место неравенство:

$$(x_1/2+x_2/3+x_3/6)^2 \leqslant x_1^2/2+x_2^2/3+x_3^2/6.$$

16.36.(15) Для любых углов α, β, γ, заключённых между 0 и π, выполнено неравенство:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant 3\sin((\alpha+\beta+\gamma)/3).$$

Указание. Воспользуйтесь неравенством Иенсена.

16.37.(15) Докажите для $a, b > 0$ неравенство

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}.$$

Указание. Воспользуйтесь неравенством Юнга.

Далее приведем задачи на использование разных методов доказательства.

16.38.(15) Известно, что a, b, c — положительные числа и $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Докажите, что $a + b > c$.

16.39.(20) Докажите, что ни при каких положительных a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства $a(1-b) > 1/4$; $b(1-c) > 1/4$; $c(1-a) > 1/4$.

16.40.(15) Докажите, что если a и b отличны от нуля, то $(a+b)^{50} < 2^{50}(a^{50} + b^{50})$.

16.41.(20) Докажите, что при любом значении x выполнено неравенство $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$.

16.42.(15) Докажите, что для любых положительных a, b верно неравенство

$$\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{ab}{a^2+b^2} \geqslant \frac{5}{2}.$$

Следующий цикл задач связан с числом e.

16.43.(15) Докажите, что $2 < (1 + 1/n)^n < 3$ для любого натурального $n > 1$.

16.44.(15) Что больше а) $(1{,}001)^{1000}$ или 2; б) 1000^{1000} или 1001^{999}?

16.45.(20) Докажите, что при $m > n$ а) $(1+1/m)^m > (1+1/n)^n$; б) $(1+1/m)^{m+1} > (1+1/n)^{n+1}$.

Из этой задачи следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e \approx 2{,}71828$.

16.46.(15) (Польша 62) Докажите, что $\sqrt[n+1]{n+1} \leqslant \sqrt[n]{n}$, если $n > 2$.

Ряд задач на числовые неравенства значительно легче решать в общем виде. Например, решение задачи: «Что больше, 100^{300} или $(300!)$?» — следует из более общего неравенства:

16.47.(15) Докажите, что при всех $n > 6$ выполнено неравенство $(n/3)^n < n! < (n/2)^n$.

Следующее неравенство является усилением 16.47.

16.48.(20) $(n/e)^n < n! < n(n/e)^n$ при $n > 6$.

Для доказательства тригонометрических неравенств часто применяются неравенства $\sin x < x$ при $x > 0$ и $\operatorname{tg} x > x$ при $0 < x < \pi/2$.

16.49.(15) Если $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, то а) $\alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta$, б) $\operatorname{tg}\alpha - \alpha < \operatorname{tg}\beta - \beta$.

16.50.(20) (МО 82) Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + a^2bc + b^2ac + c^2ab \geqslant 0.$$

16.51.(15) (МО 83) Докажите, что при любых $x, y > \sqrt{2}$

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 > x^2 + y^2.$$

16.52.(15) (МО 83) Докажите, что при любом x и натуральном n

$$x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \ldots - x^3 + x^2 - x + 1 \geqslant 1/2.$$

16.53.(20) (МО 97) Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leqslant 1.$$

16.54.(20) (МО 97) Действительные числа $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$ таковы, что $a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3$, $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1$, $a_1 \leqslant b_1$. Докажите, что $a_3 \leqslant b_3$.

16.55.(10) (Венгрия 13) Доказать, что $(n!)^2 > n^n$ при $n > 2$.

16.56.(15) (Венгрия 35) Пусть b_1, $b_2, \ldots, b_n$ — некоторая перестановка положительных чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Доказать, что $a_1/b_1 + a_2/b_2 + \ldots + a_n/b_n \geqslant n$.

16.57.(10) (Польша 50) Если a, b, c положительны и $abc = 1$, то $a + b + c \geqslant 3$.

16.58.(10) (Польша 51) Если сумма положительных a, b, c равна 1, то $1/a + 1/b + 1/c \geqslant 9$.

16.59.(15) (Чехословакия 59) Если действительные числа a, b, c удовлетворяют неравенствам $a+b+c > 0$, $ab+bc+ca > 0$, $abc > 0$, то эти числа положительные.

16.60.(15) (Бельгия 79) Расставить числа $x = (a+b)(c+d)$, $y = (a + c)(b + d)$, $z = (a + d)(b + c)$ в порядке возрастания, если известно, что $a < b < c < d$.

16.61.(15) (Польша 63) Докажите, что для любых a, b, $c > 0$

$$a + b + c \leqslant \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}.$$

16.62.(20) (Польша 64) Докажите, что если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ и $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ $(n \geqslant 2)$, то

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) < n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

16.63.(20) (Нью-Йорк 75) Докажите, что для среднего арифметического $A = (a+b)/2$ и среднего геометрического $B = \sqrt{ab}$ любых положительных $a \neq b$ справедливы оценки

$$B < \frac{(a-b)^2}{8(A-B)} < A.$$

16.64.(20) (Югославия 76) Докажите, что для любых a, b, c, больших 1:

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

16.65.(15) (Австрия 71) Докажите, что для любых положительных a, b, c

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

16.66.(20) (США 80) Докажите, что для любых a, b, $c \in [0;1]$

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

16.67.(15) (ВО 62) a, b, c, d — положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10.$$

16.68.(20) (ВО 68) Наборы $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ — перестановки чисел $1, 1/2, \ldots, 1/n$, при этом $a_1 + b_1 \geqslant a_2 + b_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n + b_n$. Докажите, что $a_m + b_m \leqslant 4/m$ для всех m от 1 до n.

16.69.(20) (ВО 68) Последовательность $a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяет следующим условиям: $a_1 = 0$, $|a_2| = |a_1 + 1|, \ldots, |a_n| = |a_{n-1} + 1|$. Докажите, что $(a_1 + \ldots + a_n)/n \geqslant -1/2$.

16.70.(15) (ВО 69) a, b, c, d — положительные числа. Докажите, что из неравенств $a+b < c+d$, $(a+b)(c+d) < ab+cd$, $(a+b)cd < ab(c+d)$ хотя бы одно неверно.

16.71.(15) (ВО 73) Докажите, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, то

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$

16.72.(15) (ВО 75) Докажите, что для положительных a, b, c имеет место неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

16.73.(20) (ВО 78) Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, где $0 < a < b$. Докажите, что

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2 n^2}{4ab}.$$

16.74.(20) (ВО 78) Рассмотрим числа $a_1, \ldots, a_n$. Положим $b_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)/k$, $C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2$, $D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2$. Докажите неравенства $C \leqslant D \leqslant 2C$.

16.75.(15) (ВО 79) Докажите, что для любых чисел $x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[0; 1]$, выполняется неравенство $(x_1 + \ldots + x_n + 1)^2 \geqslant 4(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$.

16.76.(15) (ВО 81) Докажите, что если положительные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^3 + y^3 = x - y$, то $x^2 + y^2 < 1$.

16.77.(15) (ВО 81) Про числа a и b известно, что неравенство $a\cos x + b\cos 3x > 1$ не имеет решений. Докажите, что $|b| \leqslant 1$.

16.78.(15) (ВО 82) Докажите, что для всех положительных значений x выполнено неравенство:

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

16.79.(10) (ВО 82) Докажите, что для любых значений α, β и γ хотя бы одно из трёх чисел $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\gamma\cos\alpha$ не больше $1/2$.

16.80.(15) (ВО 82, Бельгия 76 для b и c) Числа a, b, c лежат в интервале $(0; \pi/2)$ и удовлетворяют равенствам: $\cos a = a$, $\sin(\cos b) = b$, $\cos(\sin c) = c$. Расположите эти числа в порядке возрастания.

16.81.(15) (ВО 84) Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство $(a+b)^2/2 + (a+b)/4 \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

16.82.(15) (ВО 84) Докажите, что при всех действительных $x > 0$, $y > 0$ и при всех α справедливо неравенство $x^{\sin^2\alpha} \cdot y^{\cos^2\alpha} < x + y$.

16.83.(15) (ВО 85) Укажите все пары (x, y), для которых $|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y \leqslant 0$.

16.84.(20) (ВО 86) Докажите, что для каждого натурального n справедливо неравенство

$$|\sin 1| + |\sin 2| + \ldots + |\sin(3n-1)| + |\sin 3n| > 8n/5.$$

16.85.(20) (ВО 86) Докажите, что для любых положительных чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \ldots + \frac{n}{a_1 + \ldots + a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

16.86.(15) (ВО 87) Положительные числа a, b, c, A, B, C удовлетворяют условиям $a + A = b + B = c + C = k$. Докажите, что $aB + bC + cA \leqslant k^2$.

16.87.(20) (ВО 87) Докажите, что при любом натуральном значении n справедливо неравенство $(2n+1)^n \geqslant (2n)^n + (2n-1)^n$.

16.88.(10) (ВО 90) Докажите, что для любого t справедливо неравенство $t^4 - t + 1/2 > 0$.

16.89.(10) (ВО 91) Пусть a, b, c — неотрицательные числа, такие, что $a+b+c = 1$. Докажите, что $(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant 8(1-a) \times \times (1-b)(1-c)$.

16.90.(10) (ВО 92) Докажите, что $a^2+ab+b^2 \geqslant 3(a+b-1)$ при всех a и b.

16.91.(15) (ВО 92) Докажите, что для положительных a, b, c: $a^4 + b^4 + c^2 \geqslant 2\sqrt{2}abc$.

16.92.(10) (ВО 95) Докажите, что если $a^2+b^2+ab+bc+ca < 0$, то $a^2 + b^2 < c^2$.

16.93.(15) (МЕО 95) Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

16.94.(30) (ВО 69) Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} > n/4.$$

16.3. Текстовые задачи

16.95.(10) Давным-давно 9 одинаковых книг стоили 11 рублей с копейками, а 13 таких книг стоили 15 рублей с копейками. Сколько стоила одна книга?

16.96.(10) 9 кг ирисок стоит дешевле 10 рублей, а 10 кг тех же ирисок дороже 11 рублей. Сколько стоит 1 кг ирисок?

16.97.(10) Три мальчика вместе купили мяч. Сумма денег, вложенных каждым из них, не превосходит половины суммы, вложенной двумя остальными. Сколько денег вложил каждый, если мяч стоил 6 рублей?

16.98.(10) Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причём все семеро собрали разное число грибов. Докажите, что есть 3 грибника, которые вместе собрали не меньше 50 грибов.

16.99.(10) Саша, Маша и Наташа собирали грибы. Саша собрал в 3 раза больше грибов, чем Маша, и в 5 раз больше, чем

Наташа. Сколько грибов собрали все ребята вместе, если в их общей корзине оказалось меньше 40 грибов?

16.100.(15) (Старинная задача.) Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка — булочку, то они потратят вместе на одну копейку меньше, чем если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка — пирожок. Известно, что мальчиков больше, чем девочек. На сколько?

16.101.(15) На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующие 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие пять чисел были написаны на доске? Можно ли таким способом получить следующие 10 чисел: 12, 13, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 20?

16.102.(15) Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше — доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

16.103.(15) В банк кладётся 1000 руб. В каком случае спустя 10 лет вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы один раз в год или если он начисляет 5/12% один раз в месяц?

16.104.(15) Автобус считается переполненным, если в нем едет более 50 пассажиров. Два инспектора ГИБДД остановили колонну автобусов. Инспектор Подберёзовиков подсчитал процент переполненных автобусов, а Подосиновиков — процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах. У кого процент больше?

16.105.(20) Какое наименьшее число участников в математическом кружке, если известно, что девочки составляют в нем: а) меньше 50%, но больше 40%; б) больше 2,9%, но меньше 3,1%; в) меньше 44%, но больше 43%?

16.106.(15) Али-Баба пришёл в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук. Полный сундук золота весит 200 кг, полный алмазов — 40 кг, а пустой — ничего не весит. Килограмм золота стоит 20 динаров, а 1 кг алмазов — 60. Сколько денег может выручить Али-Баба за сокровища, если он может унести не более 100 кг?

16.107.(20) (МО 59) Доказать, что в любом шестизначном числе можно переставить цифры так, чтобы сумма первых трёх цифр нового числа отличалась от суммы вторых трёх цифр меньше, чем на 10.

Следующая задача — «игровой» вид задачи линейного программирования.

16.108.(20) Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья — за 13 минут, выпить кастрюлю молока за 14 минут, а Карлсон может сделать это за 6, 6 и 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они могут покончить с завтраком, состоящим из торта, банки варенья и кастрюли молока?

16.109.(15) При каких n существуют положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие равенствам $x_1 + \ldots + x_n = 3$, $1/x_1 + \ldots + 1/x_n = 3$?

16.110.(15) Докажите, что для любых натуральных m и n, больших 1, хотя бы одно из чисел $\sqrt[n]{m}$ и $\sqrt[m]{n}$ не превосходит $\sqrt[3]{3}$.

16.111.(15) Найти три числа, каждое из которых равно квадрату разности двух других.

16.112.(15) Числа $x_1, \ldots, x_5$ неотрицательны и $x_1 + \ldots + x_5 = 1$. Найдите наибольшее значение величины $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$.

16.113.(15) (ВО 65) а) Каждое из чисел $x_1, \ldots, x_n$ может независимо от остальных принимать значение 1, 0 или -1. Какое наименьшее значение может иметь сумма всевозможных попарных произведений этих n чисел? б) Какое наименьшее значение может принимать сумма всевозможных попарных произведений n чисел $x_1, \ldots, x_n$, каждое из которых по абсолютной величине не превосходит единицы?

16.114.(15) (ВО 70, Югославия 76) Докажите, что если произведение трёх положительных чисел равно 1, а их сумма строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1.

16.115.(20) (ВО 72) Сумма положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ равна 1. Пусть s — наибольшее из чисел

$$x_1/(1 + x_1),\ \ x_2/(1 + x_1 + x_2),\ \ \ldots,\ \ x_n/(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Найти наименьшее возможное значение s. При каких $x_1, \ldots, x_n$ оно достигается?

16.116.(15) (ВО 83) Величины α и β двух острых углов удовлетворяют равенству $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)$. Докажите, что $\alpha + \beta = \pi/2$.

16.117.(20) (ВО 84) По кругу записаны $n \geqslant 3$ натуральных чисел так, что для каждого числа отношение суммы его соседей к нему — натуральное число. Докажите, что сумма всех таких отношений: а) не меньше $2n$; б) меньше $3n$.

16.118.(30) (ВО 76) На окружности расположены n действительных чисел, сумма которых равна нулю. Одно из этих чисел равно 1.

а) Докажите, что есть два соседних числа, различающихся не менее чем на $4/n$.

б) Докажите, что есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $8/n^2$.

в) Оценку, предложенную в пункте б), можно улучшить. Попробуйте заменить в ней число 8 каким-нибудь бо́льшим числом так, чтобы утверждение этой задачи по-прежнему выполнялось для всех натуральных чисел.

г) Докажите, что для $n = 30$ на окружности есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $2/113$. Приведите пример набора из 30 чисел на окружности, в котором ни одно число не отличается от среднего арифметического двух своих соседей более чем на $2/113$.

17. МНОГОЧЛЕНЫ, УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В задачах на многочлены часто используются тождества

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$
$$x^{2m+1} + y^{2m+1} = (x+y)(x^{2m} - x^{2m-1}y + \ldots - xy^{2m-1} + y^{2m}),$$

а также формула бинома Ньютона (см. 14.54).

В задачах, связанных с корнями уравнений, важна следующая теорема.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - x_0$ равен числу $P(x_0)$.

Для нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов можно использовать алгоритм Евклида так же, как и в случае с числами. Наконец, приведем теорему Виета.

Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ имеет корни $x_1, \ldots, x_n$. Тогда

$$x_1 + \ldots + x_n = -a_{n-1}/a_n,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}/a_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_0/a_n.$$

17.1.(10) В выражении $(2 - 3x + x^2)^{1966}(2 + 3x + x^2)^{1997}$ привели подобные члены. Найдите сумму коэффициентов полученного многочлена.

17.2.(10) Докажите, что все рациональные корни многочлена $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами являются целыми.

17.3.(15) Докажите, что если многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения, то все его коэффициенты рациональны.

17.4.(15) Найдется ли многочлен, у которого один из коэффициентов равен $1/1992$, а значения во всех целых точках — целые?

17.5.(15) Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ по модулю больше $1/2$.

17.6.(15) Уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет три различных корня. Докажите, что $p < 0$.

17.7.(15) При каком a многочлены $x^4 + ax^2 + 1$ и $x^3 + ax + 1$ имеют общий корень?

17.8.(15) Докажите, что если многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами принимает при четырёх значениях x значение 7, то он не может принимать значение 14 ни при каком целом x.

17.9.(15) Числа p и q различны. Известно, что можно подобрать такое число x, что $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + qx + p = 0$. Найдите $p + q$.

17.10.(20) Используя тождество

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc),$$

найдите общую формулу для решения кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$.

Примечание. Результат этой задачи позволяет решить любое уравнение третьей степени (т. е. получить *формулу Кардано*). Уравнение $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$ сводится к уравнению задачи заменой $y = x - A/3$.

17.11.(20) Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что

а) $p(0) = 19$, $p(1) = 85$, $p(2) = 1985$; б) $p(1) = 19$, $p(19) = 85$?

17.12.(15) (СО 97) При каком a график функции $f(x) = x^4 + x^3 + ax$ имеет ось симметрии, параллельную оси Oy?

17.13.(15) (СО 97) График квадратного трёхчлена $y = x^2 + px + q$ касается графика прямой $y = 2x + p$. Докажите, что все такие квадратные трёхчлены имеют одно и то же наименьшее значение. Найдите это наименьшее значение.

17.14.(15) (СО 97) Известно, что уравнение $x^3 + px^2 + q = 0$, где q отлично от нуля, имеет три различных целых корня, абсолютные величины двух из которых являются простыми числами. Найдите корни этого уравнения.

17.15.(20) (СО 97) Найдите многочлен с целыми коэффициентами, наименьшее значение которого на всей прямой равняется а) $-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$.

Решите уравнения и системы уравнений.

17.16.(15) $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y, \\ x^{1980} + y^{1980} = 1. \end{cases}$

17.17.(15) (МО 37) $\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$

17.18.(15) (МО 55) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$

17.19.(15) (МО 75) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$.

17.20.(15) (МО 84) $\dfrac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} + x^2 - 4 = 0$.

17.21.(15) (МО 85) $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$.

17.22.(15) (МО 85) $\sqrt{x - y + z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

17.23.(15) (МО 85) $\dfrac{x - 49}{50} + \dfrac{x - 50}{49} = \dfrac{49}{x - 50} + \dfrac{50}{x - 49}$.

17.24.(15) (ВО 83) $\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. \end{cases}$

17.25.(20) (ВО 92) $\begin{cases} (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = 1 + y^7, \\ (1 + y)(1 + y^2)(1 + y^4) = 1 + x^7. \end{cases}$

17.26.(15) (СО 97) $\begin{cases} \dfrac{x - y}{1 - xy} = \dfrac{1 - 3x}{3 - x}, \\ \dfrac{x + y}{1 + xy} = \dfrac{1 - 2y}{2 - y}. \end{cases}$

17.27.(15) (СО 97) Решите при всех положительных a, b

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{b^2}{y^2} = 8(y^4 - x^4), \\ ax - by = x^4 - y^4. \end{cases}$$

17.28.(15) (МО 91) Докажите, что если многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами принимает при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, то он не имеет целых корней.

17.29.(20) (МО 52) Докажите, что если при любом положительном p оба корня уравнения $ax^2 + bx + c + p = 0$ действительны и положительны, то $a = 0$.

17.30.(20) (МО 73) Дан многочлен с целыми коэффициентами. В трёх целых точках он принимает значение 2. Докажите, что ни в какой целой точке он не принимает значение 3.

17.31.(20) (МО 81) Дан многочлен $P(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным 1. Если x — целое, то $P(x)$ — целое, кратное p (p — натуральное число). Докажите, что $n!$ делится на p.

17.32.(20) (МО 83) Докажите, что $4^m - 4^n$ делится на 3^{k+1} тогда и только тогда, когда $m - n$ делится на 3^k.

17.33.(20) (МО 94) Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $(P(x))^n$, $n > 1$ положительные?

17.34.(20) (МО 94) Докажите, что в любой многочлен $P(x)$, степень которого больше 1, можно подставить такой многочлен $Q(x)$, чтобы многочлен $P(Q(x))$ разлагался в произведение многочленов, отличных от констант. (Все многочлены с целыми коэффициентами.)

17.35.(20) (МО 94) Для каких многочленов $Q(x)$ верно следующее утверждение: «Для любого многочлена $P(x)$ из того, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет корней, следует, что уравнение $P(P(x)) = Q(x)$ также не имеет корней»?

17.36.(20) (МО 96) Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ ненулевой степени с целыми коэффициентами, старший из которых положителен, и любого k найдется такое m, что числа $P(m)$, $P(m+1), \ldots, P(m+k)$ — составные.

17.37.(25) (МО 96) Найдите многочлен с целыми коэффициентами а) 4-й степени, имеющий корнем число $\sqrt[4]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[4]{2-\sqrt{3}}$; б) 5-й степени, имеющий корнем число $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$. в) Докажите существование многочлена с целыми коэффициентами степени n, имеющего корнем число $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[n]{2-\sqrt{3}}$.

17.38.(20) (МО 97) Пусть $1 + x + \ldots + x^{n-1} = F(x)G(x)$, где F и G — многочлены, коэффициенты которых — нули и единицы ($n > 1$). Докажите, что один из многочленов $F(x)$, $G(x)$ представим в виде $(1 + x + \ldots + x^{k-1})T(x)$, где T — также многочлен с коэффициентами 0 и 1 ($k > 1$).

17.39.(15) (МО 99) Известно, что $(a + b + c)c < 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

17.40.(15) (МО 00) Пусть $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение

$$f(f(f(f(f(x))))) = 0.$$

17.41.(15) (Польша 51, ВО 71) Найдите условие на коэффициенты трёхчленов $x^2 + mx + n$ и $x^2 + px + q$, при котором между корнями каждого из них будет заключён корень другого.

17.42.(15) (Польша 52) Найдите необходимые и достаточные условия на a, b, c при которых уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

17.43.(15) (Польша 55) Найдите условия на a, b, c при которых уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три разных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию.

17.44.(20) (Польша 57, Венгрия 62) Докажите, что трёхчлен $ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при любом целом значении x тогда и только тогда, когда $2a$, $a + b$, и c — целые числа.

17.45.(15) (Болгария 61) Найдите все пары действительных чисел p и q, для которых многочлен $x^4 + px^2 + q$ имеет четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

17.46.(20) (Румыния 62) При каких ограничениях на целые числа p и q: а) многочлен $x^2 + px + q$ принимает при всех целых x чётные (нечётные) значения; б) многочлен $x^3 + px + q$ принимает при всех целых x значения, делящиеся на 3?

17.47.(20) (Польша 63) Докажите, что многочлен $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ не представим в виде произведения двух многочленов меньших степеней с целыми коэффициентами.

Отметим, что такие многочлены называются неприводимыми над целыми числами. Справедлива следующая теорема: если многочлен с целыми коэффициентами неприводим над целыми числами, то он неприводим и над рациональными числами. Обобщением 17.47 является *критерий Эйзенштейна*: если многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет целые коэффициенты и существует такое простое p, что $a_1, \ldots, a_n$ делятся на p, a_0 не делится на p и a_1 не делится на p^2, то многочлен $P(x)$ неприводим над рациональными числами.

17.48.(20) (Польша 65) Докажите, что если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px - 1 = 0$, где p нечётно, то при любом целом $n \geqslant 0$ числа $x_1^n + x_2^n$ и $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ — целые и взаимно простые.

17.49.(20) (Польша 66) Докажите, что если два кубических многочлена с целыми коэффициентами имеют общий иррациональный корень, то они имеют ещё один общий корень.

17.50.(15) (Англия 67) Докажите, что если корнями многочлена $x^2 + px + 1$ являются числа a и b, а корнями многочлена $x^2 + qx + 1$ — числа c и d, то справедливо равенство $(a - c)(b - c) \times (a + d)(b + d) = q^2 - p^2$.

17.51.(15) (Польша 68) Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами, принимающий при трёх разных целых x значения, равные по абсолютной величине 1, не имеет целых корней.

17.52.(15) (Германия 70) Докажите, что при всех $\alpha, \beta \neq 0$ корни x_1, x_2, x_3 многочлена $\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$ удовлетворяют соотношению $(x_1 + x_2 + x_3)(1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3) = -1$.

17.53.(15) (Нью-Йорк 73, Бельгия 81) Докажите, что для любого n многочлен $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ делится на многочлен x^2+x+1.

17.54.(20) (Нью-Йорк 75) Найти все многочлены $P(x)$, для которых $P(0) = 0$ и верно тождество $P(x) \equiv (P(x + 1) + P(x - 1))/2$.

17.55.(15) (Румыния 75) Для заданных действительных чисел p и q найдите все значения, которые многочлен x^2+px+q принимает на отрезке $[-1; 1]$.

17.56.(20) (США 77) Пусть a и b — два из четырёх корней многочлена $P(x) = x^4 + x^3 - 1$. Докажите, что ab — корень многочлена $Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

17.57.(15) (Болгария 80) Докажите, что для корней x_1, x_2 многочлена $x^2 + px + 1/(2p^2)$, где $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, выполнено неравенство $x_1^4 + x_2^4 \geqslant 2 + \sqrt{2}$.

17.58.(15) (Венгрия 83) Многочлен с неотрицательными коэффициентами $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + 1$ имеет n действительных корней. Докажите, что $P(2) \geqslant 3^n$.

17.59.(15) (Болгария 84) Многочлен $ax^n - ax^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-2}x^2 - n^2bx + b$ имеет ровно n положительных корней. Докажите, что все корни равны между собой.

17.60.(15) (США 85) Пусть $p(x)$ — многочлен пятой степени с 5 разными целыми корнями. Какое наименьшее число ненулевых коэффициентов он может иметь?

17.61.(20) (ВО 62) Докажите, что не существует целых чисел a, b, c, d таких, что выражение $ax^3 + bx^2 + cx + d$ равно 1 при $x = 19$ и равно 2 при $x = 62$.

17.62.(20) (ВО 62) x, y, z — произвольные попарно неравные целые числа. Докажите, что $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ делится на $5(y - z)(z - x)(x - y)$.

17.63.(15) (ВО 63) Найдите такие вещественные числа a, b, p, q, чтобы равенство $(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20} = (x^2+px+q)^{10}$ выполнялось при любых x.

17.64.(15) (ВО 64) Пусть a, b, n — натуральные числа и при любом натуральном k $(k \neq b)$ число $a - k^n$ делится без остатка на $b - k$. Докажите, что $a = b^n$.

17.65.(20) (ВО 69) Каково наименьшее натуральное число a, для которого найдется квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом a, имеющий два разных положительных корня, меньших 1?

17.66.(15) (ВО 72) а) Пусть a, m, n — натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что если $a^m + 1$ делится на $a^n + 1$, то m делится на n. б) Пусть a взаимно просто с натуральным b. Докажите, что если $a^m + b^m$ делится на $a^n + b^n$, то m делится на n.

17.67.(15) (ВО 73) Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет вещественных корней.

17.68.(20) (ВО 73) Действительные числа a, b, c таковы, что для всех чисел x, удовлетворяющих условию $-1 \leqslant x \leqslant 1$, выполнено $|ax^2+bx+c| \leqslant 1$.Докажите, что при всех значениях x выполнено также $|cx^2 + bx + a| \leqslant 2$.

17.69.(20) (ВО 76) По трём прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

17.70.(15) (ВО 77) Уравнение $x^4+ax^3+bx+c = 0$ имеет четыре различных корня. Докажите, что $ab < 0$.

17.71.(15) (ВО 78) Пусть $f(x) = x^2 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального числа $m > 1$ числа m, $f(m), f(f(m)), \ldots$ попарно взаимно просты.

17.72.(15) (ВО 81) Коэффициенты a, b, c уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ по модулю не превосходят 1980. Может ли это уравнение иметь корень, больший 1981?

17.73.(15) (ВО 81) Вычислите коэффициент при x^{100} в многочлене $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})^3$ после приведения всех подобных членов.

17.74.(20) (ВО 81) а) Найдите наименьшее возможное значение многочлена $P(x, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$. б) Докажите, что этот многочлен нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов от переменных x, y.

17.75.(20) (ВО 82) На координатной плоскости Oxy нарисовали график функции $y = x^2$. Потом оси координат стёрли — осталась только парабола. Как при помощи циркуля и линейки восстановить оси координат и единицу длины?

17.76.(15) (ВО 84) Учитель написал на доске квадратный трёхчлен $x^2+10x+20$, после чего по очереди каждый из учеников увеличил или уменьшил на 1 либо коэффициент при x, либо свободный член, но не оба сразу. В результате на доске оказался квадратный трёхчлен $x^2+20x+10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трёхчлен с целыми корнями?

17.77.(20) (ВО 85) В каком наибольшем числе целых точек квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, у которого $a > 100$, может принимать значения, по модулю не превосходящие 50?

17.78.(15) (ВО 86) Найдите многочлен с целыми коэффициентами, такой, чтобы число $\alpha = \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ было его корнем.

17.79.(20) (ВО 86) Многочлен $P(x)$ назовем допустимым, если все его коэффициенты равны 0, 1, 2 или 3. Для данного натурального n найдите число всех допустимых многочленов, удовлетворяющих условию $P(2) = n$.

17.80.(15) (ВО 88) Многочлен $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ принимает целые значения при $x = -1, 0, 1, 2$. Докажите, что этот многочлен принимает целые значения при всех целых x.

17.81.(15) (ВО 89) Докажите, что ни при каком значении c уравнение $x(x^2-1)(x^2-10) = c$ не может иметь 5 целых корней.

17.82.(10) (ВО 89) Корни уравнения $x^2+px+q = 0$, у которого $p+q = 198$, являются целыми числами. Найдите эти корни.

17.83.(15) (ВО 91) Известно, что многочлен $2x^3-60x^2+ax$ принимает в трёх последовательных целых точках три последовательные целые значения. Найдите эти значения.

17.84.(15) (ВО 94) Докажите, что при любых ненулевых числах a, b, c хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2+2bx+c = 0$ и $bx^2+2cx+a = 0$ имеет корень.

17.85.(15) (ВО 94) Найдите все целые a, при которых уравнение $x^2+ax+a = 0$ имеет целый корень.

17.86.(15) (ВО 94) Существует ли квадратный трёхчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами?

17.87.(15) (ВО 94) Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если он по модулю меньше 1000 и $P(19) = P(94) = 1994$.

17.88.(20) (ВО 97) Существуют ли действительные числа a, b и c такие, что каждое из уравнений $ax^2+bx+c=0$ и $(a+1)x^2+$ $+(b+1)x+(c+1)=0$ имеет по паре целых корней?

17.89.(20) (ВО 97) Рассматриваются разные квадратные трёхчлены вида x^2+px+q, где p, q — целые, $0<p<1998$, $0<q<1998$. Каких трёхчленов среди них больше: имеющих целые корни или не имеющих действительных корней?

17.90.(20) (МЕО 76) Пусть $P_1(x)=x^2-2$, $P_k(x)=P_1(P_{k-1}(x))$ $(k=2,3\ldots)$. Докажите, что для любого n все корни уравнения $P_n(x)=x$ вещественны и различны.

17.91.(20) (МЕО 85) Пусть $0\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_n$ — целые числа. Докажите, что у многочлена $(1+x)^{i_1}+(1+x)^{i_2}+\ldots+(1+x)^{i_n}$ количество нечётных коэффициентов не меньше, чем у многочлена $(1+x)^{i_n}$.

17.92.(20) (МЕО 87) Пусть $f(x)=x^2+x+p$, $p\in\mathbb{N}$. Докажите, что если $f(0), f(1), \ldots, f([\sqrt{p/3}])$ — простые числа, то все числа $f(0), f(1), \ldots, f(p-2)$ также простые.

17.93.(20) (МЕО 93) Пусть $P(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, где n — целое число, большее 1. Доказать, что $P(x)$ нельзя представить в виде произведения двух многочленов положительной степени с целыми коэффициентами.

17.94.(30) (ВО 77) Рассмотрим многочлены от x со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена P и Q коммутируют, если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ тождественно равны (т. е. после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду все коэффициенты совпадают).

а) Для каждого числа α найдите все многочлены Q степени не выше трёх, коммутирующие с многочленом $P(x)=x^2-\alpha$.

б) Пусть P — многочлен степени 2, k — натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени k, коммутирующего с P.

в) Найдите многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом P степени 2.

г) Многочлены R и Q коммутируют с одним и тем же многочленом P степени 2. Докажите, что они коммутируют между собой.

д) Докажите, что существует бесконечная последовательность многочленов $P_2, P_3, \ldots, P_k, \ldots$, где P_k — многочлен степени k, в которой любые два многочлена коммутируют и многочлен P_2 имеет вид $P_2(x)=x^2-\alpha$.

18. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И СУММЫ

18.1.(10) Дед Мороз пришёл на занятие математического кружка с мешком конфет, занумерованных натуральными числами. За минуту до полуночи он дает детям конфету №1. За полминуты до полуночи он её забирает и даёт детям конфеты №2 и №3. За четверть минуты он отдаёт конфеты №№4–7, а №2 и №3 забирает, за $^1/_8$ минуты — забирает конфеты №№4–7 и отдаёт конфеты №№8–15, и т. д. Сколько конфет будет у ребят, когда наступит полночь? (Новый год неотвратимо наступит.)

18.2.(15) На концах отрезка стоят единицы. На каждом шаге между каждыми двумя соседними числами пишется их сумма. Найдите сумму всех чисел, стоящих на отрезке после 10 шагов.

18.3.(15) Дрожжевые грибки при благоприятных условиях размножаются с большой скоростью, увеличиваясь в объёме в 2 раза за каждую минуту. В колбу поместили 1 гриб, который заполнил её за 30 минут. За сколько минут заполнят колбу помещённые в неё два гриба?

18.4.(15) Бактерии имеют такой закон развития: каждая живет 1 час и каждые полчаса порождает одну новую (всего — 2 за свою жизнь). Каково потомство одной бактерии через 6 часов после её рождения?

18.5.(20) Частица на прямой за первую секунду делится пополам и половинки расходятся в противоположные стороны на расстояние 1 от прежнего положения. За следующую секунду образовавшиеся частицы снова делятся пополам и половинки расходятся в противоположные стороны на расстояние 1 от прежних положений. Сталкиваясь, любые две частицы уничтожаются (например, через 2 сек останутся только 2 частицы). Сколько частиц останется через 129 секунд?

18.6.(15) Найти a_{1986} для последовательности $\{a_n\}$, заданной условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_{k+2} = a_{k+1}/a_k$.

18.7.(15) Последовательность $\{a_n\}$ задана так: $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 1 + 1/a_k$. Найдите число, которое меньше всех членов последовательности с чётными номерами и одновременно больше всех её членов с нечётными номерами.

18.8.(15) Сколько положительных чисел есть среди первых 100 членов последовательности $\sin 1^\circ, \sin 10^\circ, \sin 100^\circ, \ldots$?

18.9.(15) Докажите, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}.$$

18.10.(15) Вычислите сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1989\cdot 1990}$$

и докажите, что

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{1990^2}<\frac{1989}{1990}.$$

18.11.(15) Найдите сумму $1/2!+2/3!+\ldots+(n-1)/n!$.

18.12.(15) Среди первых 100 натуральных чисел взяты такие 50 чисел, сумма которых равна 2525, и сумма никаких двух из них не равна 101. Найдите сумму квадратов выбранных чисел.

18.13.(15) Можно ли разбить натуральные числа на два множества так, чтобы ни одно из них не содержало никакой бесконечной арифметической прогрессии?

18.14.(15) Докажите, что в любой бесконечной возрастающей арифметической прогрессии из натуральных чисел встретится число, начинающееся цифрами 10.

18.15.(20) Пусть $\sin x=3/5$. Докажите, что $5^{25}\sin 25x$ — целое число, не делящееся на 5.

18.16.(20) Какое максимальное число непересекающихся заборов можно построить в городе, где n домов, если каждый забор огораживает хотя бы один дом и никакие два забора не огораживают одну и ту же совокупность домов?

18.17.(20) (СО 97) Бесконечная последовательность чисел получается почленным сложением двух геометрических прогрессий. Может ли она начинаться с таких чисел: а) 1, 1, 3, 5; б) 1, 2, 3, 5; в) 1, 2, 3, 4?

18.18.(20) (СО 97) При каком наибольшем n найдется n семизначных чисел, являющихся последовательными членами одной геометрической прогрессии?

18.19.(15) (СО 99) Известно, что каждое из уравнений $x^2+ax+b=0$ и $x^2+bx+a=0$ имеет два различных корня и эти четыре корня в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите a и b.

18.20.(15) (СО 00) Докажите, что существуют арифметические прогрессии произвольной длины, состоящие из попарно взаимно простых натуральных чисел.

18.21.(20) (МО 66) Докажите, что те натуральные k, для которых число $k^k + 1$ делится на 30, образуют арифметическую прогрессию. Найти её.

18.22.(15) (МО 71) В колбе находятся n бактерий, и в неё попадает вирус. В 1-ю минуту вирус уничтожает 1 бактерию, и сразу же после этого и вирус, и оставшиеся бактерии делятся пополам. Во 2-ю минуту новые 2 вируса уничтожают 2 бактерии, а затем и вирусы, и оставшиеся бактерии снова делятся пополам, и т. д. Наступит ли такой момент времени, когда не останется ни одной бактерии?

18.23.(15) (МО 74) Существует ли такая последовательность натуральных чисел, чтобы любое натуральное число можно было представить единственным образом в виде разности двух чисел этой последовательности?

18.24.(15) (МО 77) Последовательность натуральных чисел задана так: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = [1{,}5x_n]$. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много а) нечётных чисел; б) чётных чисел.

18.25.(15) (МО 77) Последовательность натуральных чисел задана так: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = [1{,}5x_n]$. Докажите, что последовательность $y_n = (-1)^{x_n}$ непериодична.

18.26.(15) (МО 93) Найдите x_{1000}, если $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, и при любом натуральном n число x_n — наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$.

18.27.(15) (МО 94) Докажите, что бесконечная последовательность x_n, определяемая условиями $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, периодическая, начиная с некоторого места, а) в том б) и только в том случае, если x_1 рационально.

18.28.(25) (МО 97) Рассмотрим степени пятёрки: 1, 5, 25, 125, 625, ... Образуем последовательность их первых цифр: 1, 5, 2, 1, 6, ... Докажите, что любой кусок этой последовательности, записанный в обратном порядке, встретится в последовательности первых цифр степеней двойки (1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, ...).

18.29.(20) (Пекин 64) Последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет неравенствам $a_n^2 < a_n - a_{n+1}$. Докажите, что для любого n имеет место оценка $a_n < 1/n$.

18.30.(15) (Венгрия 68) Докажите, что не существует такой последовательности натуральных чисел, в которой не все члены равны и каждый член, начиная со второго, равен среднему гармоническому предшествующего и последующего членов. (Средним гармоническим a и b называется число $2ab/(a + b)$.)

18.31.(10) (Канада 69) Найдите сумму $1 \cdot 1! + \ldots + n \cdot n!$.

18.32.(15) (Нью-Йорк 74) Для последовательности

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}$$

найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

18.33.(15) (Югославия 76) Найдите $a_1 + \ldots + a_{99}$, где

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$$

18.34.(15) (Австрия 80) Возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots$ удовлетворяет условиям $a_1 = 1$ и $a_{n+1} \leqslant 2n$. Докажите, что для любого n существуют члены a_p и a_q этой последовательности, для которых справедливо равенство $a_p - a_q = n$.

18.35.(20) (Финляндия 80) Последовательность $\{a_n\}$ задана так: $a_0 = 1/2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-1}^2/n$ $(k = 1, \ldots, n)$. Докажите, что $1 - 1/n < a_n < 1$.

18.36.(20) (Финляндия 80) Найдите цифры, стоящие в разрядах единиц и десятых в десятичной записи числа $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980}$.

18.37.(20) (США 80) Для заданного $n \geqslant 3$ найти наибольшее возможное число возрастающих арифметических прогрессий из трёх членов, которые могут быть выбраны из какого-либо набора, содержащего ровно n разных чисел.

18.38.(20) (Югославия 81) Числа 1, 9, 8, 1 — четыре первых члена последовательности, в которой каждый из последующих членов равен последней цифре суммы четырёх предшествующих ему членов. Могут ли в этой последовательности встретиться числа 1, 2, 3, 4, идущими подряд?

18.39.(15) (Франция 82) Пусть все члены последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — натуральные числа. Докажите, что существует пара номеров $p < q$, для которых справедливы неравенства $a_p \leqslant a_q$ и $b_p \leqslant b_q$.

18.40.(15) (ВО 61) Докажите, что для любых трёх бесконечных последовательностей натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$; $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ найдутся такие номера p и q, что $a_p \geqslant a_q$, $b_p \geqslant b_q$, $c_p \geqslant c_q$.

18.41.(20) (ВО 62) Даны натуральные числа $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$. Известно, что $a_1 > a_0$, $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1, \ldots, a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. Докажите, что $a_{100} > 2^{99}$.

18.42.(20) (ВО 62) Про числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ известно, что $a_0 = a_n = 0$ и что $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geqslant 0$ при всех натуральных $k \leqslant n-1$. Докажите, что все a_k неположительны.

18.43.(20) (ВО 63) Дана бесконечная арифметическая прогрессия, члены которой — целые положительные числа. Один из них — полный квадрат. Докажите, что прогрессия содержит бесконечно много полных квадратов.

18.44.(20) (ВО 63) В концах диаметра окружности стоят единицы. Каждая из получившихся полуокружностей делится пополам, и в её середине пишется сумма чисел, стоящих в концах (первый шаг). Затем каждая из четырёх получившихся дуг делится пополам, и в её середине пишется число, равное сумме чисел, стоящих в концах дуги (второй шаг). Такая операция проделывается n раз. Чему равна сумма всех записанных чисел?

18.45.(15) (ВО 67) Какое наибольшее число членов может иметь последовательность натуральных чисел, каждый член которой, начиная с третьего, равен модулю разности двух предыдущих и любой её член не превосходит 1967?

18.46.(15) (ВО 68) Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ образована по правилу $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + 1/a_1, \ldots$, $a_n = a_{n-1} + 1/a_{n-1}$. Докажите, что $a_{100} > 14$.

18.47.(20) (ВО 76) Натуральные числа x_1 и x_2 меньше 10 000. Исходя из них строится последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где

$$x_{k+1} = \min_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} |x_i - x_j|\,.$$

(т. е. каждое следующее число равно наименьшему из модулей разностей между предыдущими числами). Докажите, что обязательно $x_{21} = 0$.

18.48.(15) (ВО 79) Убывающая последовательность x_n положительных чисел такова, что при любом натуральном n

$$x_1 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \ldots + \frac{x_{n^2}}{n} \leqslant 1.$$

Докажите, что при любом натуральном n $x_1 + x_2/2 + \ldots + x_n/n \leqslant 3$.

18.49.(20) (ВО 81) Найти все последовательности натуральных чисел (a_n) такие, что $a_n \leqslant 1/(n\sqrt{n})$ при любом n и при любых различных m и n $a_m - a_n$ делится на $m - n$.

18.50.(15) (ВО 82) В последовательностях (a_n) и (b_n) каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, причём $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Сколько есть чисел, встречающихся как в первой, так и во второй последовательностях?

18.51.(20) (ВО 83) Будут ли периодическими последовательности (α_n) и (β_n), состоящие соответственно из последних цифр целых чисел $[(\sqrt{10})^n]$ и $[(\sqrt{2})^n]$? (Здесь $[x]$ — целая часть числа x.)

18.52.(20) (ВО 85) Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задается правилами: $a_{2n} = a_n$ при $n \geqslant 1$ и $a_{4n+1} = 1$, $a_{4n+3} = 0$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.

18.53.(15) (ВО 94) Дана последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$, в которой a_1 не делится на 5 и для всякого n имеет место равенство $a_{n+1} = a_n + b_n$, где b_n — последняя цифра числа a_n. Докажите, что последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

18.54.(15) (ВО 95) Могут ли числа 1, 2 ..., 100 быть членами двенадцати геометрических прогрессий?

18.55.(20) (ВО 97) Последовательность натуральных чисел (a_i) такова, что для всех $i \neq j$ НОД$(a_i, a_j) =$ НОД(i, j). Докажите, что $a_i = i$ для всех i.

18.56.(20) (ВО 97) Дан набор, состоящий из 1997 чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0.

18.57.(20) (МЕО 79) Пусть p и q — натуральные числа такие, что $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots - 1/1318 + 1/1319 = p/q$. Докажите, что число p делится на 1979.

18.58.(30) (ВО 78) Докажите, что существует такая бесконечная ограниченная последовательность x_n, что для любых разных m и k выполнено

$$|x_m - x_k| \geqslant \frac{1}{|m-k|}.$$

Ответы, указания, решения

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. СЮЖЕТНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ (НАХОЖДЕНИЕ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ)

1.1. Аня в белом платье, Валя — в голубом, Галя — в зелёном, Надя — в розовом.

1.2. Олег, Юра, Володя, Миша, Саша.

1.3. Алёша — на трамвае, Боря — на автобусе, Витя — на троллейбусе.

1.4. Иванов — слесарь, Борисов — токарь, Семёнов — сварщик.

1.5. Молоко — в кувшине, лимонад — в бутылке, квас — в банке, вода — в стакане.

1.6. Боре 4 года, Володе 1 год, Диме 5 лет.

1.7. А — одессит, Б — парижанин, В — киевлянин, Г — туляк, Д — римлянин, Е — москвич.

1.8. Фамилия машиниста — Смит. Получившаяся таблица приведена на рисунке.

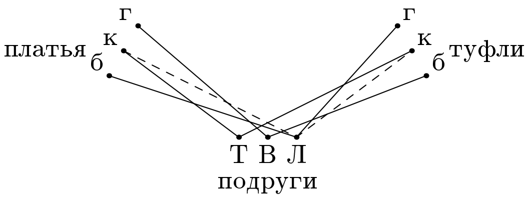
	Машинист	*Кондуктор*	*Кочегар*	*Лос-Анджелес*	*Омаха*	*Чикаго*
Смит	+	−	−	−	+	−
Джонсон	−	+	−	−	−	+
Робинсон	−	−	+	+	−	−

К 1.8

1.9. Ясно, что у Лиды голубые туфли, у Тамары — красные туфли и, следовательно, красное платье, тогда у Лиды — белое платье, у Вали — голубое.

1.10. Владимир преподает литературу в Туле, Игорь — физику в Калуге, Сергей — математику в Рязани.

1.11. Борисов и Васильев — капитан и майор артиллерии, Александров и Григорьев — лейтенанты танковых войск.



К 1.9

1.12. Обозначим за A утверждение «А смотрит телевизор», за B — «В смотрит телевизор», и т. д., а за A', B', и т. д. — их отрицания. Тогда условие 1 отбрасывает AB', 2 — $D'E'$, 3 — BC и $B'C'$, 4 — $C'D$ и CD', 5 — $A'E$ и DE'. Подходит единственная комбинация $A'B'CDE'$. Итак, телевизор смотрят C и D.

1.13. Если a: $Д < А$, b: $Д < Б$, c: $Д < В$, d: $Д < Г$, а a', b', c', d' — отрицания этих утверждений, то условиями отбрасываются: $a'bc'$, $a'b'c$, bd', $a'cd$, abd. Остаются варианты: $ab'cd$, $ab'cd'$, $ab'c'd$, $ab'c'd'$, $a'b'c'd$, $a'b'c'd'$. Во всех вариантах присутствует b': $Д > Б$, т. е. Дарья старше Беллы.

1.14. В — президент, Б — вице-президент, Д — секретарь.

1.15. Да, сказал.

1.16. Да. Обозначим через B, T и M утверждения «Человек купается в бассейне», «Человек имеет телевизор» и «Человек — маляр», а через B', T', M' — их отрицания. Тогда, по первому утверждению, есть человек, для которого верно TM', а по второму — нет людей, для которых верно BTM'. Значит, есть человек, для которого верно $B'TM'$. Но тогда для этого человека верно $B'T$, т. е. он имеет телевизор, но не купается в бассейне.

1.17. Четыре: 1, 2, 4 и 6.

1.18. Николаев — бухгалтер, Михайлов — кассир, Львов — секретарь.

1.19. Три карточки (Б, 4 и 5).

1.20. Достаточно извлечь один шар из урны с табличкой «○●». Если он белый, то в этой урне белые шары, а чёрные в урне «○○». Если он чёрный, то в этой урне чёрные шары, а белые — в урне «●●».

1.21. Единственная комбинация урн с табличками и шариками, при которой двое первых могли определить цвет шариков оставшихся, а третий не мог, выглядит так, как показано на рисунке. У первого остался чёрный шарик, у второго — чёрный, у третьего — белый.

Ящик	*1*	*2*	*3*	*4*
Табличка	●●○	●○○	●●●	○○○
Содержимое	●●●	●●○	○○○	●○○

К 1.21

1.22. Пусть у меня надет зелёный колпак. Тогда второй мудрец, видя перед собой красный и зелёный колпаки, должен рассуждать так: «Если у меня надет зелёный колпак, то первый должен был выйти сразу, значит, у меня на голове красный колпак, поэтому второй мудрец должен был выйти. Но так как он не выходит, значит, у меня на голове — красный колпак». Следовательно, у меня красный колпак.

1.23. У второго — 3, у первого — 4. Первый мудрец в первый раз сказал: «Не знаю» — тогда у него не 1. (Если бы на его карточке было число 1, то у 2-го — 2, и 1-й должен был сказать: «Знаю».) Второй сказал: «Не знаю», — тогда у него не 2 (и не 1). Первый во второй раз сказал: «Не знаю», — у него не 3 (и не 2, и не 1). Второй сказал: «Знаю», — значит, на его карточке — число 3, а на карточке первого мудреца — 4.

1.24. B — гидролог, C — радист, D — врач, E — биолог, F — синоптик, H — механик.

1.25. Борисов набрал 6 очков: 1 лещ и 1 окунь, Семёнов — 5 очков: 1 судак, Левин — 4 очка: 2 окуня, Петров — 3 очка: 3 ерша. У Петрова и Борисова на двоих 9 очков, и у Петрова улов наибольший, значит, у него 3 рыбы — ерша, тогда у Борисова — 6 очков и, следовательно, Левин и Семёнов набрали 5 и 4 очка. Но Семёнов набрал не менее 5 очков (он поймал судака), поэтому у него ровно 5 очков, а у Левина — 4. Поскольку Борисов поймал не более 2 рыб, то у него — лещ и окунь. Следовательно, улов Левина — 2 окуня.

1.26. 28 долларов. Рассматриваются все разделения 20 на три части. Из условий можно получить, что дочерей 5, и есть только один вариант расходов для них: $13+4+3$, $11+5+4$, $10+6+4$, $9+7+4$, $9+6+5$.

1.27. Пятое. Если у E должно быть самое меньшее 11 баллов, то у B — 15, C — 13, D — 12. По 4-му виду у A — 4, у E — 5, у C — 3, у D — 2, тогда у B — 1.

1.28. 9 ребусов. Однозначный ответ. Составим сначала таблицу соответствия числа решённых ребусов и очков.

Ребусы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Очки	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91

К 1.28

Определим теперь число девушек. В условии упомянуто три имени, значит, их не менее трёх.

Случай 1. Девушек было трое. Тогда Лена в первый вечер получила $100 - 21 - 28 = 51$ очко, что невозможно.

Случай 2. Девушек было пятеро. Тогда очки в первый вечер могли распределиться только так: $100 = 21 + 28 + 21 + 15 + 15$, и всего было решено 29 ребусов. Поэтому будет вечер, за который решат не более 17 ребусов ($18 \cdot 4 > 71 = 100 - 29$), что невозможно. Действительно, если все будут «передавать» свои ребусы тому, кто решил больше всех, сумма очков будет только увеличиваться. Но, когда у у остальных останется по 1 ребусу, у него будет не более 13 ребусов, т. е. общая сумма очков станет не более $91 + 1 + 1 + 1 + 1 < 100$, хотя она увеличивалась.

1.	$91 + 3 + 3 + 3$	19 реб.
2.	$78 + 15 + 6 + 1$	21 реб.
3.	$66 + 28 + 3 + 3$	22 реб.
4.	$78 + 10 + 6 + 6$	22 реб.
5.	$55 + 36 + 6 + 3$	23 реб.
6.	$66 + 21 + 10 + 3$	23 реб.
7.	$55 + 21 + 21 + 3$	24 реб.
8.	$28 + 21 + 45 + 6$	25 реб.
9.	$28 + 21 + 36 + 15$	26 реб.

К 1.28

Случай 3. Девушек было шесть или больше. Тогда будет вечер, в который решено не более 16 ребусов ($17 \cdot 6 = 102$). Пользуясь рассуждением о «передаче» ребусов, получим, что сумма очков в этот вечер не более $66 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 < 100$.

Итак, девушек четыре. Составим ещё одну таблицу — варианты разложения 100 в сумму четырёх чисел из первой таблицы.

Построим также таблицу набранных за каждый вечер очков.

Таня	28			
Света	21			
?				
Лена	x			6

К 1.28

Заметим, что поскольку больше 26 ребусов никто не решил, варианты 1 и 2 не могут стоять ни в строках, ни в столбцах таблицы. Значит, очки Лены могли распределяться по вечерам только по вариантам 4, 5 и 8 (должно быть слагаемое 6).

Случай 1. Очки Лены распределены по варианту 4. Тогда, чтобы всего было 100 ребусов, в остальных строках должен быть вариант 9. Заметим, что в том столбце, куда попало число 78 из 4-й строки, тоже вариант 4 (других вариантов с этим числом нет). Но тогда в одну из строк 1–3 из этого столбца попадает число 10, которого нет в варианте 9. Противоречие.

Случай 2. Очки распределены по варианту 5. Тогда $x = 36$ (в первой колонке — вариант 8 или 9, а ни 3, ни 55 в этих вариантах не содержится). В этом случае в 1-й колонке вариант 9 — 26 ребусов, во 2-й и 3-й — не более 24 ребусов (числа 3 и 55 не появляются в вариантах с числом ребусов, большим 24), в 4-й — не более 25. Таким образом, всего ребусов не более $26 + 24 + 24 + 25 = 99$.

Итак, очки Лены распределены по варианту 8, т. е. x равен 21, 28 или 45. Но поскольку в первом столбце вариант 8 или 9, x равен 6, 15, 36 или 45. Следовательно, Лена в первый вечер набрала 45 очков, разгадав 9 ребусов.

2. ИСТИННЫЕ И ЛОЖНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ. РЫЦАРИ, ЛЖЕЦЫ, ХИТРЕЦЫ

2.1. Первый — девочка, второй — мальчик.

2.2. 0 или 1000. **2.3.** Добрыня Никитич. **2.4.** Афродита.

2.5. Оля — I, Мария — II, Поля — III, Нина — IV.

2.6. Серёжа — I место, Надя — II, Коля — III, Ваня — IV, Толя — V.

2.7. Андреев приехал из Рославля, Борисов — из Ельни, Васильев — из Гагарина, Григорьев — из Вязьмы, Данилов — из Ярцева.

2.8. Например, «Меня зовут Коля». **2.9.** Ложно. **2.10.** Ложно.

2.11. «Меня съест Ваш ручной лев». Это утверждение не истинно и не ложно.

2.12. Воробьёв: биология, химия, история. Орлов: биология, история, математика. Синицын: биология, химия, математика (перебор всех комбинаций).

2.13. Васильев: 10 рыб, Тимофеев: 9 рыб, Борисов: 7 рыб. (Вначале перебором выясняются истинные высказывания: Тимофеев — 2 и 4, Васильев и Борисов — 2 и 3.)

2.14. Чёрный «Бьюик». **2.15.** Смит. **2.16.** Убийца — Этьен.

2.17. 6. **2.18.** Предпоследнее.

2.19. 1974. Первое и второе утверждения не могут быть верными одновременно, поскольку тогда последняя цифра числа

$A + 51$ — 2, а квадраты могут оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6, 9. По тем же причинам не могут одновременно выполняться второе и третье утверждение. Поэтому $A + 51 = p^2$, $A - 38 = q^2$, откуда $89 = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$. При натуральных p и q получаем лишь одно решение: $p - q = 1$, $p + q = 89$, или $p = 45$, $q = 44$.

2.20. Ложно. Третье утверждение. $a_1 = 9$, $b_1 = 2$, $a_2 = 17$, $b_2 = 6$.

2.21. 35 (верны 1 и 4), 46 (верны 2 и 4), 74 (верны 3 и 4).

2.22. Соня. **2.23.** Третий подсудимый. **2.24.** Нет.

2.25. Любой человек (логик, судья и т. д.), кроме первого и второго подсудимого.

2.26. Веня и Женя.

2.27. Петров — серьёзен, Сидоров — шутник.

2.28. а) понедельник и четверг; б) среда и воскресенье; в) понедельник и среда.

2.29. Первый — Гек, второй — Чук, день недели — вторник.

2.30. Пусть физиков-лжецов L, тогда всего лжецов — $2L$. Из условия следует, что лжецов k, т. е. $k = 2L$.

2.31. Бобчинский. Вычёркивая два равносильных утверждения, мы не меняем чётности числа верных среди оставшихся, а вычёркивая два противоположных утверждения, мы меняем чётность.

2.32. Упырь — В. **2.33.** Не следует.

2.34. А — сумасшедший человек, В — нормальный упырь.

2.35. А — упырь.

2.36. А — нормальный упырь, В — сумасшедший человек.

2.37. «Я — сумасшедший или я — упырь».

2.38. Любой вопрос, ответ на который меняется со временем, например: «Который час?»

2.39. «Кто вы — рыцарь или лжец?»

2.40. Любой вопрос, на который известен правильный ответ.

2.41. Лжецом. **2.42.** Нет.

2.43. «Эта дорога ведёт в ваш город?»

2.44. «Вы живёте в этом городе?»

2.45. А — рыцарь, В — лжец. **2.46.** Один.

2.47. Ответили бы утвердительно Вы на вопрос: «У Вас дома есть ручной крокодил?»

2.48. К, Р — лжецы, М — рыцарь.

2.49. Р — рыцарь. (Вначале докажите, что К — лжец.)

2.50. 4 человека, 2 лжеца (1-й и 3-й).

2.51. а) 1-й и 2-й — рыцари, 3-й и 4-й — лжецы. 4-й может быть только лжецом (из сравнения с 1-м), тогда 1-й — рыцарь. 3-й может быть тогда только лжецом, а 2-й — рыцарем.

б) При $n = 2k$: k — рыцарей, и k — лжецов, при $n = 2k + 1$ возможны ответы: 1. задача не имеет решения; 2. $k+1$ — путешественник или хитрец, тогда первые k — рыцари, последние k — лжецы, и т. д.

2.52. а) Все — лжецы. Если есть рыцарь, то рыцари сидят по двое, а лжецы сидят по одному, между рыцарями. б) При $n \neq 3k$ все лжецы, при $n = 3k$ два ответа: все лжецы или k лжецов и $2k$ рыцарей.

2.53. а) 5 рыцарей. б) Ситуация совпадает с 2.52, п. б.

2.54. Покажем, что наименьшее число лжецов равно 8. Разобьём все места в президиуме на 8 групп так, как показано на рисунке *а*. Если лжецов меньше 8, то в какой-то из этих групп сидят одни рыцари. Значит, человек, сидящий в этой группе на месте, помеченном звёздочкой, лжёт, так как все его соседи рыцари. Полученное противоречие показывает, что лжецов не меньше 8.

На рисунке *б* показано, как рассадить в президиуме 8 лжецов так, чтобы выполнялось условие задачи.

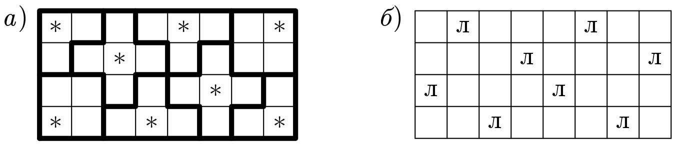
2.55. К — лжец, М — хитрец, Р — рыцарь. Пусть К — хитрец, тогда М — рыцарь, Р — лжец, что невозможно, значит, К — лжец.

2.56. А — рыцарь, В — лжец, С — хитрец.

2.57. Если К говорит правду, то М — правдолюбец, поэтому К — не правдолюбец, но сказал правду, поэтому он хитрец. Пусть К лжёт, тогда М говорит правду и не правдолюбец, значит М — хитрец.

2.58. А — лжец, В — хитрец, С — рыцарь.

2.59. Задать А и В вопрос: «Имеется среди С и D хитрец?» Если оба ответят: «Да», то они рыцари и среди С и D есть хитрец. Тогда 3-й вопрос А: «Является ли С хитрецом?» Если А и В отвечают: «Нет», то среди С и D нет хитреца, тогда 3-й вопрос С: «Является



К 2.54

ли А хитрецом?». Наконец, если А и В дают разные ответы, то среди С и D опять нет хитреца.

2.60. Поставим всех присутствующих на собрании в одну шеренгу, занумеруем их и спросим каждого о его правом соседе (начиная с первого). Пусть n — минимальное число, при котором n-й сказал о своём соседе, что он хитрец. Тогда пару $(n, n+1)$ выведем из цепочки и спросим $(n-1)$-го о его новом соседе и т. д. Следовательно, в каждой из пар не меньше одного хитреца, поэтому в цепочке рыцарей больше, чем хитрецов, в частности, последний в цепочке всегда рыцарь. Если в цепочке больше одного человека, то двое последних — рыцари, и достаточно задать последнему $k-2$ вопроса об остальных. Всего вопросов будет $k-1+k+2=2k-3$. Если цепочка состоит из одного человека, то т. к. в каждой из отброшенных пар по одному хитрецу (иначе хитрецов было бы больше). Достаточно задать вопрос про одного из пары, всего вопросов не больше $k-1+k/2=3k/2-1$.

2.61. В деревню А.

2.62. За два вопроса надо выяснить, с кем разговариваем (см. 2.40). Затем ещё за два (за один, если это рыцарь) вопроса — где находится.

2.63. $F = 8$. При $F = 0$ можно указать на любого человека, сидящего за столом. При $F \neq 0$ разобьём всех сидящих за столом на непустые группы подряд сидящих рыцарей и подряд сидящих хитрецов; число этих групп обозначим через $2k$ (k групп рыцарей и k групп хитрецов). Число людей в i-й группе рыцарей обозначим через w_i, а в i-й группе хитрецов — через f_i ($1 \leq i \leq k$). Тогда $w_1+\ldots+w_k+f_1+\ldots+f_k=30$ и $f_1+\ldots+f_k \leq F$. Рассмотрим последовательность подряд идущих ответов «рыцарь» и последнего человека x, про которого так говорят. Группа из w_i рыцарей дает такую последовательность длины не менее w_i-1, при этом x — действительно рыцарь. Если же x — хитрец и находится в i-й группе хитрецов, то длина такой последовательности ответов не более f_i-1. Значит, при $\max(w_i) > \max(f_i)$ можно утверждать, что последний человек, который назван рыцарем в самой длинной последовательности ответов «рыцарь», действительно рыцарь. Так как

$$\max(w_i) \geqslant (30-f_1-\ldots-f_k)/k \geqslant (30-F)/k,$$
$$\max(f_i) \leqslant (f_1+\ldots+f_k)-k+1 \leqslant F-k+1,$$

то когда неравенство $(30-F)/k > F-k+1$ выполняется при всех k от 1 до F, можно указать на рыцаря, сидящего за столом. Это неравенство равносильно $k^2-(F+1)k+30-F>0$. Оно верно для всех k, если $D=(F+1)^2-4(30-F)<0$, т. е. при $F<-3+\sqrt{128}\approx$ $\approx 8{,}31$. Итак, $F\leqslant 8$.

2.64. Нет. Если два человека сделали одно и то же утверждение, то они либо оба лжецы, либо оба рыцари. Так как на острове есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь, то либо все рыцари сделали первое утверждение, а все лжецы второе, либо наоборот. В первом случае и рыцарей, и лжецов — чётное число, а во втором и тех, и других — нечётное число. Значит, число аборигенов обязательно чётно.

2.65. 1/2. Пусть x — доля рыцарей. Рассмотрим другой круг, в котором все лжецы станут рыцари, а все рыцари — лжецами; в нем доля рыцарей равна $1-x$. В этом круге путешественник услышит то же самое, так как правдивость любого аборигена изменилась, но изменилась правдивость соседа, о котором он говорит. Поскольку путешественник сумел найти долю рыцарей, эта доля в обоих кругах одинакова, т. е. она равна 1/2.

3. ПЕРЕЛИВАНИЕ

3.1. Продолжим таблицу примера:

3 л	1	1	0	3	0	3	2
5 л	5	0	1	1	4	4	5

За 1 шаг до конца получено 4 л, а на последнем ходу — 2 л.

3.2. 9 и 12 имеют общий делитель 3. Легко видеть, что любой объём, который можно отмерить этими сосудами, кратен 3.

3.3.

7	0	7	0	7	2	2	0	7	0	7	4	4	0	7	0	7	6	6	0	7	1
12	0	0	7	7	12	0	2	2	9	9	12	0	4	4	11	11	12	0	6	6	12

3.4.

5	0	0	5	0	3	3	5
8	0	8	3	3	0	8	6

3.5.

7	0	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6
5	0	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5

3.6.

3	0	3	3	4
5	0	0	5	5
9	9	6	1	0

3.7.

4	0	4	0	4	0	4	3	3	0	4	0	4	2	2	0	4	0
9	0	0	4	4	8	8	9	0	3	3	7	7	9	0	2	2	6

3.8.

3	0	3	0	3	0	3	2	2	0	3	0
7	0	0	3	3	6	6	7	0	2	2	5
10	10	7	7	4	4	1	1	8	8	5	5

3.9.

9	9	4	4	0	9	8	8
5	0	5	0	4	4	5	0
$a > 13$	$a-9$	$a-9$	$a-4$	$a-4$	$a-13$	$a-13$	$a-8$

3.10.

12	12	4	4	9	9	1	1	6
8	0	8	3	3	0	8	6	6
5	0	0	5	0	3	3	5	0

3.11.

$a > 10$	$a-5$	$a-5$	$a-10$	$a-10$	$a-1$	$a-1$	$a-6$	$a-6$
9	0	5	5	5	9	1	1	6

3.12.

7 л	0	0	4	4	4	4	7	0	1	1	5	5	7	7	0	0	4	4	7	0	1	1	5	5	7	0	2	2	6
7 л	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4 л	0	4	0	4	0	4	1	1	0	4	0	4	2	0	0	4	0	4	1	1	0	4	0	4	2	2	0	4	0

3.13.

7 в	6	3	3	7	5	5
6 в	4	4	6	2	2	5
3 в	0	3	1	1	3	0

3.14. $(22, 14, 12) \longrightarrow (8, 28, 12) \longrightarrow (8, 16, 24) \longrightarrow (16, 16, 16)$.

3.15. $(11, 7, 6) \longrightarrow (4, 14, 6) \longrightarrow (4, 8, 12) \longrightarrow (8, 8, 8)$.

3.16. Одновременно пустим те и другие часы. Когда пройдет 7 минут, начнём варить яйцо. Через 4 минуты 11-минутные часы остановятся. Перевернем их и будем варить яйцо ещё 11 минут.

3.17. Одинаково во всех случаях.

3.18. Одинаково. Молока доливалось $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ стакан.

3.19. Нельзя. Доказательство по индукции.

3.20. Нет. После n-го разбавления концентрация сиропа станет $0{,}9^n$. Но $0{,}9^n \neq 0{,}5$ ни при каком n $(0{,}9^7 < 0{,}5 < 0{,}9^6)$.

3.21. 3/16 л. Слив обе бутылки в одну большую ёмкость, получим, что в растворах одинаковой концентрации должно быть 5/8 частей из первой бутылки и 3/8 частей из второй. Но 3/8 от 0,5 — это 3/16.

3.22. Сольём кислоту из литровой и двухлитровой банок в банку 3а. Теперь имеются две трёхлитровые банки с кислотой разных концентраций, причём если смешать эти кислоты в соотношении 1 : 1, то получится именно та концентрация, которая получилась бы при сливании кислоты из всех начальных банок. Смешаем кислоты в этой пропорции. Для этого отольём кислоту из банки 3 в банки 1 и 1а. Перельём содержимое банок 1 и 1а в банки 2 и 2а соответственно. Теперь дольём в банки 2 и 2а кислоты из банки 3а. Теперь там раствор нужной концентрации. Слив содержимое банки 3 в банку 3а, мы добьёмся того, что вся кислота имеет одну концентрацию. Разлив содержимое банки 2 по банкам 1а и 3а, мы выполним требование задачи.

3.23. По 0,5 л кофе. После переливания с нечётным номером в сосудах будет по 0,5 л кофе. Доказательство по индукции. Пусть после $(2k-1)$-го переливания будет по 0,5 л, тогда после $2k$-го переливания: $0{,}5+0{,}5/(2k+1)=(k+1)/(2k+1)$. После $(2k+1)$-го переливания: $(k+1)/(2k+1)-(k+1)/(2k+1)\cdot 1/(2k+2)=1/2$.

3.24. Пусть в первом сосуде — $(2/3+p)$ л, где $-2/3\leqslant p\leqslant 1/3$, тогда во втором будет $(1/3-p)$ л. После переливания в этих сосудах будет $(1/3+p/2)$ л и $(2/3-p/2)$ л, а затем $(2/3+p/4)$ л и $(1/3-p/4)$, и т. д. После 100 переливаний: $(2/3+p/4^{50})$ л и $(1/3-p/4^{50})$ л и $p/4^{50}<1/1000$. Заметим, что если переливать не $1/2$, а $1/n$ воды, имеющейся в сосуде, то в сосудах после большого числа переливаний с большой точностью будет налито $n/(2n-1)$ л и $(n-1)/(2n-1)$ л.

3.25. Нет. В результате всех переливаний будет перелито $a=k(2-\sqrt{2})+l\sqrt{2}$ л, где k и l — целые. Если $l-k\neq 0$, a — иррационально, если же $l=k$, то $a=2k$ — чётное число, т. е. $a\neq 1$.

3.26. Только при $n=2^k$. Если общее количество воды 1, то перед последним переливанием было: $(1/2,1/2)$. Если перед m-м переливанием было $(x/2^a,y/2^b,\ldots,z/2^c)$ в стаканах, то перед $(m-1)$-м переливанием — либо
$$(x/2^{a+1},x/2^{a+1},y/2^b,\ldots z/2^c)$$
(второй стакан опустел), либо
$$(x/2^{a+1},x/2^{a+1}+y/2^b,\ldots z/2^c)$$
(переливаем из второго в первый). Так как все знаменатели имеют вид 2^k, то по индукции имеем $n=2^k$.

3.27. Пусть в сосудах A, B и C соответственно a, b и c литров воды, причём $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c$. Достаточно несколькими переливаниями добиться того, что в одном из сосудов станет менее a литров воды (повторяя такую процедуру, мы сможем уменьшить количество воды в одном сосуде до 0). Разделим b на a с остатком: $b=ad+r$, $0\leqslant r<a$. Будем выливать воду из B и C в A (в A будет становиться $2a,2^2a,\ldots,2^ka$ литров воды) так, чтобы из B вылить как раз da литров; тогда в B останется $r<a$ литров. Так действовать можно — ведь d, как каждое натуральное

число, можно и притом единственным образом представить в виде суммы некоторых чисел 1, 2, $2^2, \ldots, 2^k, \ldots$ Соответствующие порции воды нужно брать из B, остальное — из C. (При этом из C выливается не больше воды, чем из B, поэтому воды в C хватит.)

3.28. 6/7, 5/7, 4/7, 3/7, 2/7, 1/7, 0 литров. Проверим, что указанные числа служат ответом: после разливания молока первым гномом (по 1/7 каждому из остальных) получается точно то же распределение, но со сдвигом на одного гнома, а сумма $(1 + 2 + 3 + \ldots + 6)/7$ равна как раз 3. Докажем, что других ответов нет.

Пусть x — наибольшее количество молока, оказавшееся за время переливаний у какого-либо гнома $Г$, когда пришла его очередь разливать. Тогда после очередного цикла из 7 «разливаний» (их можно неограниченно продолжать, так что $Г$ можно считать первым в цикле) у $Г$ накопится не более, чем $6x/6 = x$ л; причём равенство возможно, лишь если каждый из 6 других гномов наливает $Г$ ровно по $x/6$ л. Итак, из условия следует, что каждый гном разливает одно и то же количество x молока и после получения k порций у него в кружке налито $kx/6$ л ($k = 1, 2, \ldots, 6$); x находится из условия, что всего молока — 3 л.

3.29. Достаточно, например, налить во все стаканы, кроме одного, по 100 г, а в оставшийся — 200 г. Общее количество молока тогда будет $100 \cdot 29 + 300 = 3100$ г, и в каждом стакане должно получиться $3100/30 = 310/3$ г. Но после переливания с номером n количество молока в каждом стакане умноженное на 2^n — целое число. Значит, $2^n \cdot 310/3$ должно быть целым, что невозможно.

4. ВЗВЕШИВАНИЕ

4.1. г) При каждом взвешивании монеты делятся на три группы, из которых две (одного числа) кладутся на чашки весов. Взвешиванием определяется, в какой из трёх групп находится фальшивая монета. Ясно, что следует так выделять эти три группы, чтобы они как можно меньше отличались по численности друг от друга.

Пусть $m(n)$ — наименьшее число взвешиваний, за которое можно решить задачу. Докажем, что если $3^{k-1} < n \leqslant 3^k$, то $m(n) = k$. Сначала покажем, что $m(n) > k - 1$, т. е. $k - 1$ взвешиваний недостаточно. В самом деле, каждое взвешивание приводит к одному из трёх результатов: $Л = П$, $Л < П$, $Л > П$ ($Л$ и

Π — грузы на левой и правой чашках весов). Записывая результаты $k-1$ взвешиваний, мы получим одну из 3^{k-1} возможных последовательностей. Но $n > 3^{k-1}$, поэтому найдутся два разных расположения фальшивой монеты, приводящих к одной и той же последовательности результатов взвешиваний, и мы не сможем её выделить.

Теперь докажем с помощью математической индукции, что $m(n) < k+1$, т. е. k взвешиваний достаточно. При $k = 1$ утверждение верно, так как $m(2) = m(3) = 1$. Пусть утверждение доказано для всех $n \leqslant 3^k$, и докажем, что для всех $n(3^{k+1})$ оно также верно, т. е. $m(n) < k+2$. Представим n в виде $n = 3n_1 + r$, $0 \leqslant r \leqslant 2$. Если $r = 0$, то при первом взвешивании положим на чашки весов по n_1 монет. Тогда достаточно доказать неравенство $m(n_1) < k+1$. Поскольку $n_1 \leqslant 3^k$, то по предположению индукции это неравенство верно. Если $r = 1$, то снова положим на чашки весов по n_1 монет, тогда на следующем шаге фальшивую монету нужно будет выделять либо из n_1 монет, либо из $n_1 + 1$ монет. Но $n = 3n_1 + 1 \leqslant 3^{k+1}$, откуда $n_1 < n_1 + 1 \leqslant 3^k$ и по предположению индукции $m(n_1) < k+1$, $m(n_1+1) < k+1$. Аналогично, если $r = 2$, то положим на чашки весов по $n_1 + 1$ монет и опять используем предположение индукции. Доказательство закончено.

При решении задачи можно использовать троичную систему счисления, в которой числа записываются с помощью трёх цифр: 0, 1 и 2. Занумеруем монеты числами от 0 до $n-1$ и запишем их номера в троичной системе. Пусть $3^{k-1} < n \leqslant 3^k$, тогда в этой записи будет не более k цифр (считаем, что их ровно k, заполняя недостающие разряды нулями). Процедуру взвешивания организуем так, чтобы i-м взвешиванием узнать i-ю цифру справа в троичной записи номера фальшивой монеты. Например, разбив все монеты на три группы в соответствии с их первой справа цифрой (т. е. с тем, какой остаток дает их номер при делении на 3), мы одним взвешиванием сможем определить, какая из групп содержит фальшивую монету.

4.2. Обозначим монеты (и их веса) через a, b, c, d. Первым взвешиванием сравним веса a и b. Пусть $a \neq b$ (например, $a < b$). Тогда монеты c и d настоящие, а фальшивая находится среди a и b. Чтобы найти её, взвесим монеты a и c. Если $a = c$ то фальшивая монета — b, и она более тяжёлая, так как $a < b$. Если же $a \neq c$, то фальшивая монета — a, причём снова можно определить, легче она настоящей или тяжелее. Аналогично поступаем и в том случае, если после первого взвешивания $a = b$, т. е. фальшивая монета находится среди c и d. Однако теперь нам не удастся, вообще говоря, выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета. В самом деле, если $a = b$, то для расположения фальшивой монеты остается 4 разных возможности, в то время как 1 взвешивание может иметь лишь 3 разных исхода.

4.3. а) Разобьём монеты на три группы по четыре в каждой и обозначим монеты (и их веса) через a_1, a_2, a_3, a_4, $b_1, \ldots, b_4$, $c_1, \ldots, c_4$. Сравним первым взвешиванием вес $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ и $b_1 + b_2 + b_3 + b_4$. Пусть $a_1 + \ldots + a_4 < b_1 + \ldots + b_4$. Тогда фальшивая монета находится среди монет групп a и b, а монеты группы c настоящие, поэтому $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$. Сравним вторым взвешиванием веса $3c + a_1$ и $a_2 + a_3 + b_1 + b_2$. Возможны случаи:

Случай 1. $3c + a_1 < a_2 + a_3 + b_1 + b_2$. Отсюда если фальшивая монета легче настоящей, то это a_1, если же тяжелее, то это b_1 или b_2 (вспомним результат первого взвешивания). Итак, фальшивая монета находится среди a_1, b_1, b_2. Тогда третьим взвешиванием сравним веса $a_1 + b + 1$ и $2c$. Если $a_1 + b_1 < 2c$, то, a_1 — фальшивая. Если $a_1 + b_1 < 2c$, то b_1 — фальшивая. Если же $a_1 + b_1 = 2c$, то фальшивая монета — это b_2.

Случай 2. $3c + a_1 > a_2 + a_3 + b_1 + b_2$. Если фальшивая монета тяжелее настоящей, то это должна быть a_1, что противоречит результату первого взвешивания. Если же фальшивая монета легче, это либо a_2, либо a_3. Выделяем третьим взвешиванием из a_2 и a_3 более лёгкую (фальшивую) монету.

Случай 3. $3c + a_1 = a_2 + a_3 + b_1 + b_2$. Тогда фальшивая монета находится среди a_4, b_3, b_4, и её можно выделить 3-м взвешиванием аналогично случаю 1.

Вернёмся к первому взвешиванию и рассмотрим случай, когда $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$. Тогда фальшивая монета находится среди монет c_1, c_2, c_3, c_4 и мы приходим к задаче выделения фальшивой монеты из четырёх двумя взвешиваниями (см. 4.2). В данном случае эту задачу решим иначе с тем, чтобы выяснить, легче или тяжелей фальшивая монета по сравнению с настоящей (см. решение 4.2). Именно, сравним веса $c_1 + c_2$ и $a + c_3$. Если $c_1 + c_2 = a + c_3$, то сразу можно заключить, что фальшивая монета — c_4 (последним взвешиванием можно узнать, легче ли она, чем настоящие). Если же $c_1 + c_2 \neq a + c_3$, то фальшивая монета находится среди c_1, c_2, c_3, и мы выделяем её аналогично предыдущему.

б) Если число монет k удовлетворяет неравенству

$$(3^{n-1} - 3)/2 < k \leqslant (3^n - 3)/2,$$

то наименьшее число взвешиваний равно n.

4.4. Допустим, что в первом взвешивании на чашки весов положили по 4 монеты и наблюдается равновесие. Тогда фальшивая монета находится среди остальных 5 монет, причём может быть как легче, так и тяжелее настоящей монеты. Всего, таким образом, имеется $2 \cdot 5 = 10$ вариантов. Но оставшиеся 2 взвешивания могут иметь лишь $3^2 = 9$ различных исходов. Если же в первом взвешивании на чашки весов положили по 5 монет, то в случае неравновесия ($\mathit{Л} \neq \mathit{П}$) снова останется 10 вариантов. Действительно, если фальшивая монета легче, то она находится среди 5 монет на левой чашке, если тяжелее — то среди 5 монет на правой чашке.

4.5. Обозначим 13 монет (и их веса) через $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$, а настоящую монету — через b. Сравним первым взвешиванием веса $\mathit{Л}_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ и $\mathit{П}_1 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + b$. Если установилось равновесие, то фальшивая монета — среди a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}. Сравним вторым взвешиванием $a_{10} + a_{11}$ и $a_{12} + b$. Пусть $a_{10} + a_{11} = a_{12} + b$, тогда a_{13} — фальшивая, и остается 3-м взвешиванием узнать, легче она или тяжелее настоящей. Если $a_{10} + a_{11} < a_{12} + b$, то для 3-го взвешивания возьмём a_{10} и a_{11}. Тогда в случае равновесия фальшивой монетой является a_{12}, причём она тяжелее настоящей. Если $a_{10} < a_{11}$, то фальшивая монета — a_{10}, если же $a_{10} > a_{11}$ — то это a_{11}, причём в обоих этих случаях она легче. Случай $a_{10} + a_{11} > a_{12} + b$ разбирается аналогично.

Вернёмся к первому взвешиванию. Пусть теперь $\mathit{Л}_1 > \mathit{П}_1$. Тогда для второго взвешивания возьмём $\mathit{Л}_2 = a_1 + a_2 + a_6 + a_7 + a_8$ и $\mathit{П}_2 = a_9 + 4b$ (монеты a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13} настоящие, поэтому будем обозначать их одинаково — b). Допустим, $\mathit{Л}_2 = \mathit{П}_2$. Тогда последним взвешиванием сравним a_3 и a_4. Если $a_3 = a_4$, то фальшивая монета — a_5, если $a_3 > a_4$, то это a_3, если же $a_3 < a_4$, то это a_4. Во всех трёх случаях фальшивая монета тяжелее.

Аналогично, в случае $\mathit{Л}_2 > \mathit{П}_2$ берем для третьего взвешивания a_1 и a_2, а в случае $\mathit{Л}_2 < \mathit{П}_2$ — a_6 и a_7 и, рассуждая так же, выделяем фальшивую монету. Здесь снова удается выяснить, легче она или тяжелее. Случай $\mathit{Л}_1 < \mathit{П}_1$ разбирается аналогично.

4.6. Имеется $(7 \cdot 6)/2 = 21$ вариантов расположения двух фальшивых монет на 7 местах. Поскольку в результате двух взвешиваний может получиться один из 9 исходов, то двух взвешиваний может не хватить: $21 > 9$. Докажем, что трёх взвешиваний достаточно. Положим на весы 6 монет, по 3 на каждую чашку. Если весы уравновесились, то одна фальшивая монета находится на одной чашке весов, вторая — на другой. Чтобы выделить по фальшивой монете из каждой тройки, достаточно двух взвешиваний. Если же при первом взвешивании одна чашка перевесила, то на ней монеты настоящие, и тогда нам нужно выделить две фальшивые монеты из остальных четырёх монет с помощью двух взвешиваний.

4.7. Занумеруем монеты числами от 1 до 6. Будем записывать слева от тире номера монет на левой чашке весов, справа — на правой.

Первое взвешивание: $1, 2, 3$ — $4, 5, 6$, второе: $1, 2, 4$ — $3, 5, 6$. Если при каком-то взвешивании равновесие нарушилось, то на чашке, которая перевесила, две монеты из трёх — фальшивые, на другой чашке все монеты настоящие. Докажем, что в этом случае для выделения фальшивых монет достаточно ещё двух взвешиваний. Пусть фальшивые монеты находятся, скажем, среди монет $1, 2, 3$. Из них можно образовать три пары: $(1, 2)$; $(2, 3)$; $(1, 3)$. Сравним пары $(1, 2)$ и $(1, 3)$ с парой настоящих монет $(4, 5)$. Пара, которая перевесит — «фальшивая». Если же в обоих случаях равновесие, то фальшивые монеты — 2 и 3.

Если при первых двух взвешиваниях (троек монет) равновесие ни разу не нарушилось, то две монеты «фальшивой» пары при обоих взвешиваниях находились на разных чашках весов. Значит, «фальшивыми» могут быть лишь 5 пар: $(1, 5)$; $(1, 6)$; $(2, 5)$; $(2, 6)$; $(3, 4)$. Сравним вес пар $(1, 5)$ и $(2, 6)$, а затем вес пар $(1, 6)$ и $(2, 5)$. Если одна из этих пар перевесит, то она «фальшивая», в случае равновесия при обоих взвешиваниях фальшивые монеты — 3 и 4.

4.8. Будем обозначать веса монет $a_1, \ldots, a_6$. Первым взвешиванием сравним a_1 и a_2.

Случай 1. $a_1 = a_2$. Тогда монеты 1 и 2 настоящие. Сравним монеты 3 и 4. Если $a_3 = a_4$, фальшивые монеты — 5 и 6. Если $a_3 < a_4$, одна из фальшивых монет — 3, а вторая находится среди 4, 5 и 6 (она выделяется сравнением a_4 и a_5). Случай $a_3 > a_4$ аналогичен.

Случай 2. $a_1 < a_2$. Монета a_1 — фальшивая. Вторая фальшивая монета выделяется сравнениями монет 2 и 3 и монет 4 и 5 (если при одном из взвешиваний неравенство — более лёгкая монета фальшивая, иначе фальшивая монета — 6).

Случай $a_1 > a_2$ аналогичен случаю 2.

4.9. Первое взвешивание: $1, 2, 3$ — $4, 5, 6$, второе: $1, 2, 4$ — $3, 5, 6$.

Если в каждом из взвешиваний равенство, то фальшивые монеты — $(1; 2)$ или $(5; 6)$. Сравнив монеты 1 и 2, находим пару фальшивых.

Если в одном из взвешиваний равенство, а в другом — неравенство (например, в первом равенство, а во втором перевесила правая чашка), то фальшивые монеты — $(1; 3)$, $(2; 3)$, $(4; 5)$ или $(4; 6)$, причём первая монета пары более лёгкая. Сравним монеты 1 и 2. Если будет неравенство, то более лёгкая из них — фальшивая, а вторая фальшивая — 3. Если же будет равенство, то одна из фальшивых — монета 4, а вторая — более тяжёлая среди 5 и 6.

Если в этих взвешиваниях будет одинаковый знак (например, правая чашка оба раза перевесила), то пара фальшивых — $(1; 5)$, $(2; 5)$, $(1; 6)$ или $(2; 6)$ (первая монета пары более лёгкая). Взвесив монеты 1 и 2, найдём фальшивую среди них (это более лёгкая). Вторая фальшивая — более тяжёлая среди 5 и 6.

Наконец, если знак будет различный, то пара фальшивых монет — $(3; 4)$.

4.10. Заметим, что в каждом столбике одна из двух монет фальшивая, другая — настоящая. Обозначим монеты в столбиках a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2. Сравним первым взвешиванием монеты $a_1 + b_1$ и $a_2 + c_1$. Пусть, например, $a_1 + b_1 < a_2 + c_1$. Отсюда следует, что $a_1 < a_2$; $b_2 \leqslant c_1$. Сравним вторым взвешиванием $a_1 + b_2$ и $b_1 + c_1$. Возможны случаи:

1) $a_1 + b_2 < b_1 + c_1$. Так как a_1 — фальшивая монета, то $b_1 < b_2$, а поскольку $b_2 \leqslant c_1$, то c_1 — настоящая монета, c_2 — фальшивая.

2) $a_1 + b_2 > b_1 + c_1$. В этом случае b_2 — настоящая, а b_1 — фальшивая. Но тогда c_1 — фальшивая.

3) $a_1 + b_2 = b_1 + c_1$. Здесь b_1 — фальшивая, а b_2 и c_1 — настоящие. Если же при первом взвешивании оказалось $a_1 + b_1 = a_2 + c_1$, то $a_1 = c_1 = b_2$ и $b_1 = a_2 = c_2$. Взвешивая затем монеты a_1 и a_2, выделяем фальшивую, т. е. находим все три фальшивые монеты.

4.11. Занумеруем мешки числами от 1 до 10. Возьмём из мешка №1 одну монету, из №2 — две, ..., из №10 — десять, и определим их общий вес. Пусть он равен P. Если все монеты — настоящие, то они весят $10 + 20 + \ldots + 100 = 550$ г. Избыток $P - 550$ совпадает, очевидно, с номером мешка, в котором находятся фальшивые монеты.

4.12. Снова занумеруем мешки и возьмём одну монету из мешка №1, две монеты — из №2, четыре — из №3, ..., 2^9 монет — из мешка №10 и найдем их общий вес P. Если бы все монеты были настоящие, то они весили бы $10(1 + 2 + \ldots + 2^9) = 10(2^{10} - 1) = 10230$ г. По избытку веса $d = P - 10230$ можно определить, из каких мешков взяты фальшивые монеты: избыток d, равен числу фальшивых (более тяжёлых) монет. Запишем это число в двоичной системе. Двоичные разряды, в которых стоят 1, указывают, какие степени числа 2 в сумме дают d, и тем самым — в каких мешках находятся фальшивые монеты. Например, если $d = 59$, то в двоичной записи d имеет вид 111011. Значит, фальшивые монеты лежат в мешках №№1, 2, 4, 5, 6.

4.13. Нужно взвесить остальные 20 монет; если весы покажут чётное число грамм, то взятая монета фальшивая, а если нечётное, то настоящая. Если масса фальшивой монеты a, то остальные весят при взятой фальшивой монете $10a + 10(a + 1)$, а при взятой настоящей: $11a + 9(a + 1) = 20a + 9$.

4.14. Занумеруем мешки числами от 1 до 11. При первом взвешивании положим на левую чашку весов по одной монете из первых 10 мешков, а на правую — 10 монет из 11-го мешка. Пусть масса одного груза больше массы другого груза на d г. При втором взвешивании на левую чашку положим одну монету из мешка №1, 2 — из №2, ..., 10 — из №10 — всего 55 монет. На правую чашку положим 55 монет из мешка №11. Пусть масса одного груза больше массы другого на m г. Если фальшивые монеты находятся в одном из первых 10 мешков, то, очевидно, $m = Nd$, где N — номер мешка с фальшивыми монетами. Если же фальшивые монеты находятся в мешке №11, то фальшивая монета отличается от настоящей на $d/10$ г и $m = 55d/10 = 5{,}5d$. Итак, если $N = m/d$ — число целое, то N — номер мешка с фальшивыми монетами; если же $m/d = 5{,}5$, то фальшивые монеты находятся в мешке №11.

4.15. Два взвешивания. Рассмотрим случаи $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$. В первом из них разобьём монеты на 3 кучки по k монет в каждой. Если при взвешивании двух кучек весы будут в равновесии, то фальшивая — в третьей кучке. Тогда взвешивая третью кучку с одной из двух, определим тяжелее или легче фальшивая. А если при взвешивании двух кучек весы не будут в равновесии, то все монеты в третьей кучке настоящие. Далее сравниваем одну из кучек с третьей, в которой все монеты настоящие. В случае $n = 3k + 1$ разбиваем на кучки k, k и $k + 1$ монет, а в случае $n = 3k + 2$ на кучки k, $k + 1$ и $k + 1$ монет. Далее аналогично первому случаю двумя взвешиваниями определяем легче или тяжелее фальшивая монета.

4.16. Да. Взвесим две группы по 500 монет. Возможны 2 случая:

1) Одна из чашек перевесила. Значит, фальшивые есть и все они в одной чашке. Разобьём, например, более тяжёлую группу на две по 250 монет и сравним их (второе взвешивание). Если одна из чашек перевесила, то фальшивые монеты среди этих 500, и, значит, тяжелее. Если чашки в равновесии, то либо фальшивые среди оставшихся 500 (и легче настоящих), либо они разделились. Тогда одну из групп в 250 монет делим пополам и сравниваем их (третье взвешивание). Если весы в равновесии, то имеет место первый случай, если нет — второй.

2) При первом взвешивании чашки в равновесии. Значит фальшивых монет 0 или 2. Разбиваем одну из групп на две по 250. Если чашки опять в равновесии, то на чашках чётное число фальшивых, а так как их не более одной, то их нет вовсе. Если же одна из чашек перевесила, то фальшивых монет 2 и ровно одна лежит на одной из чашек. Разделив одну из групп пополам, мы третьим взвешиванием узнаем, тяжелее или легче фальшивая монета.

4.17. Первым взвешиванием эксперт, взвешивая монеты №1 и №8, убеждает суд в том, что монета №1 — фальшивая, а №8 — настоящая. Вторым взвешиванием он кладёт эти монеты на левую чашку весов, а на правую — №2 и №3. Левая чашка перевесит, и это убедит суд в том, что №2 и №3 — фальшивые. Далее эксперт положит на левую чашку монеты №1, 2, 3, 8, а на правую — №4, 5, 6, 7 и аналогично докажет, что монеты с 4-й по 7-ю также фальшивые. Чтобы идентифицировать и настоящие монеты тоже, эксперт должен действовать более тонко. Именно, при втором взвешивании ему следует положить на левую чашку монеты №8, 2, 3, а на правую — №1, 9, 10. Правая чашка перевесит, и это доказывает, что монеты №2, 3 — фальшивые, а №9, 10 — настоящие. Затем на левую чашку нужно положить №8, 9, 10, 4, 5, 6, 7, а на правую — №1, 2, 3, 11, 12, 13, 14 и рассуждать аналогично.

4.18. Уравновесим груз гирями. Затем груз уберем, оставив гири на другой чашке весов, и заменим груз таким новым набором гирь, чтобы снова весы оказались в равновесии. Груз весит столько, сколько весит этот набор.

4.19. а) Взвешиваем 1 и 2, 3 и 4 камни. Затем сравниваем массы двух более лёгких и двух более тяжёлых камней двумя взвешиваниями. Всего 4 взвешивания. б) 7 взвешиваний. в) Отделяем n

взвешиваниями n более лёгких и n более тяжёлых камней. Затем за $n-1$ взвешивание в «лёгкой» группе определяем самый лёгкий, а в «тяжёлой» — самый тяжёлый камень. Всего $n+2(n-1)=3n-2$ взвешивания.

4.20. За 63 взвешивания найдем самый тяжёлый камень. Из 6 камней, которые взвешивались с самым тяжёлым, определяем за 5 взвешиваний самый тяжёлый.

4.21. Не всегда, поскольку разных исходов взвешивания — $2\cdot 2=4$ (равенства быть не может, поскольку все пакеты имеют различный вес), а вариантов расположения их по весу — $3!=6$.

4.22. За четыре взвешивания определяем самый лёгкий и самый тяжёлый (см. 4.19, п. а), а затем сравниваем два средних пакета.

4.24. Взвесим какие-нибудь два шара, а затем — один из них и один из оставшихся. Поскольку масса пары шаров определяет состав пары, то массы всех шаров будут найдены.

4.25. Зная сумму масс любых двух гирь, легко определить массу каждой гири в отдельности. Поэтому, выбирая любые две пары гирь, взвешиваем каждую пару.

4.26. Проверки нужно организовать таким образом, чтобы в результате каждой следующей проверки число возможных вариантов расположения радиоактивных шаров уменьшалось примерно вдвое. Обозначим шары $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Вначале число таких вариантов, очевидно, равно $10\cdot 9/2=45$. Поскольку $2^5<45\leqslant 2^6$, то менее чем шестью проверками обойтись нельзя. Покажем, что 6 проверок достаточно.

Для первой проверки следует взять шары x_1, x_2, x_3 (а не $x_1, \ldots, x_5$, как могло бы показаться). В самом деле, если эта проверка даст отрицательный результат, то оба радиоактивных шара находятся среди шаров x_4, $x_5, \ldots, x_{10}$, и тогда число возможных вариантов сокращается до $7\cdot 6/2=21$, что близко к половине от 45. Допустим, первая проверка показывает, что среди x_1, x_2, x_3 есть радиоактивный шар. Тогда проверим шар x_1 (в случае отрицательного результата число вариантов уменьшится до 15). Если шар x_1 радиоактивен, то другой радиоактивный шар мы сможем найти «делением пополам» среди остальных шаров за 4 проверки ($9<2^4$). Если же шар x_1 не радиоактивен, то проверим шар x_2, и дальнейший ход рассуждений ясен.

Если из первой проверки среди x_1, x_2, x_3 нет радиоактивного шара, то нам нужно выделить два радиоактивных шара из шаров

$x_4, \ldots, x_{10}$ с помощью 5 проверок. Рассуждая аналогично, берем для проверки шары x_4 и x_5, и т. д.

4.27. За три взвешивания. Известно, что, имея верные весы, мы можем за одно взвешивание найти более лёгкую фальшивую монету среди трёх настоящих. Занумеруем монеты от 1 до 9.

Сравним на первых весах кучки из монет 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8. Если весы не в равновесии, то найдены верные весы. Зная, какие весы верные, определим фальшивую монету за два взвешивания. Если весы в равновесии, то сравним на вторых весах кучки из монет 1–3 и 5–7. Если весы не в равновесии, то найдены верные весы и три монеты, среди которых есть фальшивая. За одно взвешивание определим эту монету. Если весы в равновесии, то или первые весы верные и 9-я монета фальшивая, или вторые весы верные и фальшивая среди 4, 8, 9.

Сравним на вторых весах 4-ю и 8-ю. Если весы не в равновесии, то мы нашли фальшивую монету. Иначе возможны варианты: вторые весы верные — тогда 4-я и 8-я настоящие, а 9-я фальшивая; первые весы верные, тогда фальшивая 9-я. Итак, в любом случае фальшивая 9-я.

Докажем, что фальшивую монету нельзя найти за два взвешивания. Пусть мы сделали два взвешивания. Можно считать, что каждый раз мы клали на левую и правую чашки весов монет поровну (иначе взвешивание бессмысленно). Пусть оба раза весы были в равновесии. Если хотя бы один раз мы клали на весы меньше 8 монет, то любая из оставшихся монет может быть фальшивой. Значит, оба раза надо класть по 4 монеты на каждую чашку. Пусть одни из весов не в равновесии. Тогда любая из 4 монет на более лёгкой чашке может быть фальшивой. Противоречие.

4.28. Решим сначала более простую задачу. Пусть банкир разрешает класть на весы монеты не более одного раза. Из какого наибольшего числа монет можно выделить более лёгкую за k взвешиваний? Если при каком-то взвешивании на чаше весов будет больше одной монеты, то из них выделить фальшивую не удастся (второй раз взвешивать монету нельзя!). Поэтому при каждом взвешивании на чаши кладётся по одной монете. Если весы не в равновесии, то фальшивая очевидна. А если в равновесии, то количество подозрительных монет уменьшится на 2. Значит, при k взвешиваниях можно выделить фальшивую из $2k + 1$ монет.

В исходной задаче, пусть при первом взвешивании на чашах лежат по s монет. Если весы не в равновесии, то, как было показано, $s \leqslant 2(n-1) + 1 = 2n - 1$. Если весы в равновесии, то

№ взв.	—	**1**	**2**	—	**3**	—	**4**	—	**5**	—	**6**	**7**	—	**8**	—
I фл	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	17	17	34	34	85
II фл	0	1	1	2	2	4	4	8	8	17	17	17	0	34	0
III фл	0	0	1	0	2	0	4	0	8	0	0	17	17	17	0

К 4.30

получаем исходную задачу для монет, не попавших на весы, и $n-1$ взвешивания. Поэтому, если обозначить через $f(n)$ ответ исходной задачи, то $f(n) = f(n-1) + 2(2n-1)$. Значит, $f(n) = 2(2n-1) + \ldots + 2 \cdot 3 + f(1)$, а $f(1) = 3$, откуда $f(n) = 2n^2 + 1$.

4.29. Отложим интересующую нас монету и положим на чаши весов оставшиеся 98 монет, разделив их на две группы, по 49 монет в каждой. Докажем, что если стрелка покажет нечётное число граммов, то отложенная монета фальшивая, а если чётное, то настоящая. Вычтем из веса каждой монеты вес настоящей монеты. Получим 99 целых чисел, каждое из которых либо равно 0, либо нечётно. По условию задачи суммарный вес всех данных монет равен весу 99 настоящих монет, поэтому сумма всех получившихся нечётных чисел равна 0, т. е. их чётное число. Следовательно, число фальшивых монет чётно.

Если отложенная монета фальшивая, то на чашах весов находится нечётное число фальшивых монет и, значит, на одной чаше весов лежит нечётное число фальшивых монет, а на другой — чётное. Значит, вес одной чаши отличается от веса чаши с 49 настоящими монетами на нечётное число граммов, а вес другой — на чётное число. Итак, веса грузов, положенных на чаши, отличаются на нечётное число граммов, и, значит, стрелка покажет нечётное число граммов. Если отложенная монета настоящая, то аналогично получаем, что стрелка покажет чётное число.

4.30. Сначала за пять взвешиваний получим в одной фляге 17 л молока, а две другие сделаем пустыми. Затем за два взвешивания наполним 17 литрами оставшиеся пустые фляги, получим сливанием 34 л (без взвешивания), восьмым взвешиванием ещё 34 л и, наконец, сольём вместе 34 л, 34 л и 17 л. Это решение можно записать в виде таблицы.

4.31. 1, 3, 9, 27 кг (троичная система счисления).

4.32. Возьмём обычные весы со стрелкой и будем класть на них наши гири по одной, пока стрелка впервые не покажет вес, больший 500 г. Так как последняя положенная нами гиря весит не больше 500 г, то на весах будет лежать не более 1 кг. По условию оставшиеся гири весят не более 500 г. Значит, общий вес не превосходит 1500 г. Три гири по 500 г, очевидно, удовлетворяют условию задачи.

4.33. 1, 2, 4, 8, 16, 32. Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_6$ — массы гирь. Ясно, что $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. Если $x_k = 2^{k-1}$ при всех $k \leqslant m$, то $x_{m+1} = 2^m$, так как наибольшая масса, которую можно взвесить с помощью гирь $1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, равна $2^m - 1$.

4.34. Можно. Разобьём гирьки на пары: 18 пар гирек первого типа, сумма масс в каждой паре равна 38 г и 32 пары гирек второго типа, сумма масс гирек в каждой паре равна 139 г.

4.35. а) Сумма гирь с чётным и нечётным весом равна 10 100. б) Разобьём гирьки на пары: $(1, 2)$, $(3, 4), \ldots, (197, 198)$, $(200, 201)$. В одну группу возьмём гири весом $1, 4, 5, 8, \ldots$, а в другую — парные им гири: $2, 3, 6, 7, \ldots$. (В половине пар более лёгкие гири войдут в первую группу, а в другой половине туда войдут более тяжёлые.)

4.36. Можно. Две гирьки, сумма масс которых равна 31 г, назовем парой. Наш набор распадается на 15 пар и одну гирю массой 31 г. Так как убрали только 10 гирек, не менее 5 пар остались нетронутыми. Возьмём 5 нетронутых пар и положим их на одну чашку весов. Они весят $5 \cdot 31 = 155$ г, а поскольку общая масса оставшихся гирь равна ${}^2/_3 \cdot (1 + \ldots + 30) = 310$ г, то, положив остальные гири на другую чашку весов, получим равенство, т. к. их масса равна $310 - 155 = 155$ г.

4.37. Есть k натуральных чисел, выражающих массы k гирек нашего набора. Если любое из этих чисел убрать, то сумма остальных будет чётным числом. Отсюда все k чисел имеют одинаковую чётность. Если все они нечётны, то k нечётно. Если все k чисел чётны, сократим их на наибольшую возможную степень двойки и, повторив предыдущие рассуждения для полученного нового набора, получим, что опять k — нечётное число.

4.38. Сначала положим на чашки весов по одному кубику. Если эти кубики имеют неравную массу, то положим их на одну чашку весов. Тогда про каждую пару из оставшихся 18, можно сказать, положив её на другую чашку весов, сколько в ней дюралевых кубиков.

Пусть теперь в первом взвешивании было получено равенство. Положим эти кубики на левую чашку весов, а остальные будем попарно класть на правую. Если весы при взвешивании останутся в равновесии, то кубики на правой чашке такие же, какие и на левой. При некотором взвешивании не будет равновесия, т. к. не все кубики одинаковы. По результатам этого взвешивания можно сразу определить тип всех ранее взвешенных кубиков (если перевесила чашка с новыми кубиками, то они алюминиевые, если нет — дюралевые). Теперь построим пару, в которой кубики различны. Для этого возьмём кубики с правой чашки и сравним их друг с другом. Если они одинаковые, то один из них и любой кубик из первой пары составляют пару различных кубиков, а если разные — они сами образуют такую пару. Теперь можно подсчитать число дюралевых кубиков среди ещё невзвешенных так, как в первом случае. Нетрудно видеть, что общее число взвешиваний в этом случае равно 11.

4.39. Доказать вначале, что разность масс любых двух гирь чётна, а затем — что она делится на любую степень двойки.

4.40. $n = 3k$, $n = 3k+2$ ($k \geqslant 1$). Вес всех n гирь равен $n(n+1)/2$. Чтобы можно разложить на три кучи одинакового веса необходимо $n = 3k$ или $n = 3k + 2$. Для доказательства достаточности непосредственно проверим при $n = 3, 5, 6, 8$. Общий случай сводится к этим, так как 6 последовательных чисел легко разбить на 3 пары так, что суммы чисел в каждой паре одинаковы.

4.41. Набор гирь 26, 25, 24, 22, 19 и 11 удовлетворяет условию. Если выбрано 7 гирь, то сумма масс любых четырёх гирь из этих семи будет меньше 98 (брать одновременно гири 26, 25, 24 и 23 нельзя). Но существует 98 разных наборов из семи гирь по 1, 2, 3 и 4 гири. Поэтому массы каких-то двух наборов будут совпадать. Теперь удалив из этих наборов общие гири, получим два разных набора одной массы.

4.42. Необходимо класть гири парами, причём более лёгкую гирю на перевешивающую чашку.

4.43. При $k = 1$ или $k = 2$. Если на левой чашке лежат гири $a_1, \ldots, a_k$ общей массы P, а на правой гири $b_1, \ldots, b_k$ общей массой S, то из условия следует, что $0 < P - S \leqslant 2(a_i - b_i)$ при каждом i. Складывая k таких неравенств, получаем $k(P-S) \leqslant 2(P-S)$, т. е. $k \leqslant 2$.

4.44. Назовем гирю несущественной, если, убрав её, можно разбить оставшиеся на k равных по массе групп. Пусть существенных гирь меньше k. Докажем по индукции, что при любом k масса несущественной гири кратна k^n, т. е. делится на сколь угодно большое число, а значит, равна 0. Для $n = 1$ масса всех гирь делится на k и без несущественной гири делится на k, значит, масса убранной несущественной гири делится на k. Пусть масса несущественной гири кратна k^n. Тогда, так как существенных гирь меньше k, то есть группа, все гири в которой несущественные (иначе несущественных гирь было бы не меньше, чем групп). Масса групп из несущественных гирь кратна k^n, всего групп k, а масса любых двух таких групп одинакова. Значит, масса всех гирь кратна k^{n+1} как до того, как убрана несущественная гиря, так и после. Следовательно, масса несущественной гири кратна k^{n+1}.

4.45. Пусть m_i — массы гирек, x_i — массы шариков. Тогда $(m_1-m_2)+(m_2-m_3)+\ldots+(m_9-m_{10})+(m_{10}-m_1) = 0$. Заметим, что величины в скобках по модулю равны массам шариков. Перенесем все отрицательные величины в правую часть с противоположным знаком, получим: $x_{i_1} + \ldots + x_{i_k} = x_{i_{k+1}} + \ldots + x_{i_{10}}$.

4.46. Обозначим массы кусочков в порядке возрастания: m_1, $m_2, \ldots, m_9$. Налево положим 1-й, 3-й, 5-й и 7-й кусочки, а направо — 2-й, 4-й, 6-й и 8-й. Тогда

$$m_1 + m_3 + m_5 + m_7 \leqslant m_2 + m_4 + m_6 + m_8.$$

А если налево добавить 9-й кусочек, то

$$m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9 > m_2 + m_4 + m_6 + m_8.$$

Следовательно, достаточно разрезать 9-й кусочек.

4.47. Бронзовые гирьки весят не меньше, чем $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ г, а железные — не больше, чем $11+12+\ldots+19 = 135$ г. Если бы хотя бы одно из этих неравенств было строгим, то вес железных гирек превышал бы вес бронзовых гирек менее чем на 90 г. Значит, бронзовые гирьки весят 45 г, а железные — 135 г, а это возможно только если девять самых лёгких гирек — бронзовые, а девять самых тяжёлых — железные. Поэтому золотая гирька весит 10 г.

4.48. Будем ранее взвешенный сахар сыпать на чашку B, отмеряемый сахар сыпать на чашку A, а гирьку $\mathit{Г}$ иногда класть на чашку B. Тогда получим такую схему взвешиваний:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	2	4	8	16	31	63	125	250	500
B	$\mathit{Г}$	$1+\mathit{Г}$	$3+\mathit{Г}$	$7+\mathit{Г}$	$15+\mathit{Г}$	31	$62+\mathit{Г}$	125	250	500

Можно дать другую схему уравновешиваний, если класть гирю и на чашку A. Покажем, что меньше, чем десятью уравновешиваниями, обойтись нельзя. В самом деле, за одно уравновешивание вес только что отмеренного сахара может быть самое большее равен весу сахара, отмеренного ранее, плюс 1 грамм. Тогда за 9 уравновешиваний можно отмерить самое большее 511 г.

4.49. Пусть k — масса самой тяжёлой гири, а m — число гирь массы 1. Тогда $m \geqslant k$. В любой момент массы гирь на двух чашках отличаются не более чем на k. Поэтому, после того как будут положены на весы все гири массы, большей 1, чашки можно уравновесить добавлением гирь единичной массы.

4.50. Можно. Заметим, что при любом натуральном n, десять гирь массами $n + 1$ г, $n + 2$ г, …, $n + 10$ г можно разделить на пять групп так, чтобы в каждую группу попали две гири общей массой $2n + 11$ граммов:

I	*II*	*III*	*IV*	*V*
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$
$n+10$	$n+9$	$n+8$	$n+7$	$n+6$

Распределим так сначала по пяти группам так, как требуется в условии задачи, гири от 16 г до 25 г (эти значения масс получаются при $n = 15$). Затем распределим гири массами 26–35 г ($n = 25$), 36–45 г ($n = 35$), …, 1976–1985 г ($n = 1975$). После этого оставшиеся гири массами от 1 г до 15 г распределим по имеющимся группам так, как показано в таблице:

I	*II*	*III*	*IV*	*V*
1	2	3	4	5
10	7	9	6	8
13	15	12	14	11

4.51. Восемь квадратов последовательных натуральных чисел — $x^2, (x+1)^2, \ldots, (x+7)^2$ можно разбить на две группы, по 4 числа в каждой, так, что суммы чисел в каждой группе будут равны друг другу. Это можно сделать, например, следующим образом: x^2, $(x+3)^2$, $(x+5)^2$, $(x+6)^2$ и $(x+1)^2$, $(x+2)^2$, $(x+4)^2$, $(x+7)^2$. Полагая $x = 8k + 1$, где $k = 0, 1, \ldots, 124$ мы получим четвёрки гирь для одной и для другой группы.

4.52. При $n = 8$. Нетрудно проверить, что из набора семи гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 5 г, 8 г, 13 г и 21 г нельзя выделить две пары гирек, уравновешивающие друг друга.

Покажем, что в любом наборе из 8 гирек такие пары найдутся. Из 8 гирек можно составить $8 \cdot 7/2 = 28$ разных пар (пары разные, если каждая из них содержит хотя бы одну гирьку, не содержащуюся в другой паре), а число разных положительных разностей весов гирек не более 20 (так как наименьшая из них равна 1, а наибольшая — 20). Итак, по крайней мере 8 разностей повторяются. Однако часть из этих повторяющихся разностей порождается равенствами вида $a - b = b - c$, где $a > b > c$ —

веса гирек. Такие тройки (a, b, c) со средним членом b назовем плохими. Если есть две плохие тройки с общим членом (a_1, b, c_1) и (a_2, b, c_2), то $a_1 + c_1 = a_2 + c_2$. Следовательно, плохих троек не больше, чем возможных средних членов, а поскольку наибольшее и наименьшее число не могут быть ими, то таких троек не более 6. Остается не менее двух повторяющихся разностей. Если одна из них порождена плохой тройкой, не вошедшей в число ранее рассмотренных, то её средний член совпадает со средним членом одной из них, т. е. $a_1 - b = b - c_1$ и $a_2 - b = b - c_2$, откуда $a_1 + c_1 = a_2 + c_2$. Если же ни одна из оставшихся разностей не порождена плохой тройкой, то совпадающим разностям соответствуют две не имеющие общего элемента пары гирек. Тогда $p - q = r - s$ и $p + s = q + r$.

4.53. Занумеруем яблоки в порядке неубывания весов и положим в k-й пакет яблоки с номерами k и $301 - k$. Для любых двух пакетов получаем, что в одном из них — яблоки с весами a и b, в другом — с весами c и d, где $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Имеем: $a + d \leqslant c + 2b \leqslant 1{,}5c + 1{,}5b$ и $b + c \leqslant d + 2a \leqslant 1{,}5a + 1{,}5d$ что и требовалось.

4.54. Нет. Пусть у нас есть гири A, B, C, D, E. Всего имеется $5! = 120$ разных способов упорядочивания этих гирь. А при условии $m(A) < m(B) < m(C)$ существует $5!/3! = 20$ разных способов упорядочивания весов. Поэтому если на какой-то вопрос получен отрицательный ответ, то этот вопрос может исключить не более 20 вариантов. Значит, первые пять вопросов могут исключить не более $20 \cdot 5 = 100$ вариантов. Каждый из следующих четырёх вопросов может исключить не более половины из оставшихся вариантов. То есть, после шестого вопроса может остаться не менее 10 вариантов, …, после девятого вопроса может остаться по крайней мере два варианта. Итак, при любой последовательности из девяти задаваемых вопросов найдется последовательность ответов, которой удовлетворяет по крайней мере два варианта упорядочивания весов гирь.

4.55. Пусть массы гирь $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$. а) Будем ставить гири так: на левую чашку m_1, затем на правую m_2, на левую m_3, на правую m_4 и т. д. При этом последовательность результатов взвешиваний будет такой: $LRLRLR\ldots$ Это вытекает из такого простого утверждения.

Лемма. Если $0 < m_1 < \ldots < m_k$, то из двух сумм $m_1 + m_3 + \ldots$ и $m_2 + m_4 + \ldots$ (содержащих все k данных чисел) больше та, в которую попадает наибольшее число m_k.

Для её доказательства надо при чётном k сложить неравенства

$$m_1 < m_2, m_3 < m_4, \ldots, m_{k-1} < m_k,$$

а при нечётном k —

$$m_1 > 0, m_3 > m_2, \ldots, m_k > m_{k-1}.$$

Эта же лемма, но в применении к отрезку $m_l < m_{l+1} < \ldots < m_{k-1} < m_k$, состоящему из $k-l+1$ чисел, пригодится в решении пункта б).

б) Удобно описать порядок расстановки гирь, соответствующий данному слову из букв L и R, начиная с конца слова. Поставим все гири с чётными номерами на одну чашку, с нечётными — на другую, причём самую тяжёлую гирю m_n поставим на левую или правую чашку в соответствии с последней буквой данного слова; затем, переходя от каждой буквы слова к предыдущей, будем снимать самую тяжёлую из оставшихся гирь, если должна произойти смена буквы (L на R или R на L), и самую лёгкую — если не должна. При этом каждый раз остается отрезок из (занумерованных подряд) гирь, которые, чередуясь, стоят на одной и другой чашке; к нему применима лемма.

5. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

5.1. В русском алфавите 33 буквы. **5.5.** 367.

5.9. Пусть яблок каждого сорта не более 26, тогда всего яблок в ящике не более $26 \cdot 4 = 104$, а по условию их 105. Противоречие.

5.10. Верно. **5.12.** 7. **5.13.** а) 3; б) 5; в) 5; г) 3. **5.14.** 75.

5.15. Пусть при окраске использовано $n \leqslant 9$ разных цветов, тогда, поскольку $82 > 9 \cdot 9 \geqslant n \cdot 9$, по обобщённому принципу Дирихле найдутся 10 кубиков одного цвета.

5.16. Если во всех школах будет разное число компьютеров, то всего компьютеров будет не меньше, чем $0 + 1 + \ldots + 6 = 21 > 20$.

5.18. Нельзя. **5.19.** Верно.

5.20. Минимальное n, при котором $200 < n(n-1)/2$, легко найти: $n = 21$.

5.21. 14. **5.22.** $15 \cdot 14/2 = 105 > 100$.

5.1. Принцип Дирихле и делимость целых чисел

5.23. При делении на n всего может получиться n различных остатков: $0, 1, \ldots, n-1$.

5.24. Если у двух чисел одинаковые остатки (при делении на n), то их разность делится на n.

5.25. Среди трёх чисел найдутся два одинаковой чётности.

5.26. Доказательство можно провести по индукции.

5.27. Двузначное число с одинаковыми цифрами делится на 11.

5.28. Рассмотрим 1999 чисел:

$$1,\ 11,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots11}_{1999}.$$

Среди них есть два с одинаковыми остатками при делении на 1998. Их разность — искомое число.

5.29. Аналогично 5.28, существует число вида $11\ldots1\cdot10^k$, делящееся на 1997, но 10^k и 1997 взаимно просты.

5.30. Среди чисел вида 1996, 19961996, ..., 19961996...1996 (1998 повторений) есть два с одинаковыми остатками при делении на 1997. Далее действуем как в 5.28.

5.31. Можно. Доказать, что существует две разные степени 4, дающие одинаковые остатки при делении на 10, 100 или 1000.

5.32. Можно. Рассмотрим 10^4 степеней числа 3: $3, \ldots, 3^{10^4}$. Разных ненулевых остатков при делении на 10^4 будет 10^4-1, а чисел — 10^4. Значит, существуют такие m и n $(m>n)$, что 3^m-3^n делится на 10^4. $3^m-3^n=3^n(3^{m-n}-1)$. Так как 3^n и 10^4 взаимно просты, то $3^{m-n}-1$ делится на 10^4, т. е. $3^{m-n}-1=10^4k$, $3^{m-n}=10^4k+1$, что и требовалось доказать.

5.33. При делении на 3 есть три остатка: 0, 1, 2. Так как $7 = 3\cdot2+1$, то найдутся три числа, дающие один остаток.

5.34. в) Рассмотрим n сумм: $a_1,\ a_1+a_2, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_n$. Ненулевых остатков $n-1$, поэтому найдутся 2 суммы с одинаковым остатком. Их разность — тоже сумма.

5.35. Среди $n+1$ чисел $m, m^2, \ldots, m^{n+1}$ есть два с одинаковым остатком при делении на n. Их разность $m^l-m^t=m^t(m^{l-t}-1)$ делится на n, значит, $m^{l-t}-1$ делится на n, т. к. m и n взаимно просты.

5.36. Любые два из девяти чисел отличаются не более чем на 8, значит, их общие простые множители могут быть только 2, 3, 5, 7. Среди 9 чисел 4 или 5 чётные, а из нечётных на 3 делится не более одного. Если чётных чисел 4 или среди нечётных лишь одно делится на 3, т. е. одно нечётное, не делящееся на 3, 5, 7, т. е. взаимно простое с остальными. Если чётных — 5 (1-е, 3-е, 5-е, 7-е, 9-е) и среди нечётных 2 делятся на 3 (2-е и 8-е), то 4-е или 6-е делится на 5. Это число не делится также на 2 и 3, а от остальных отличается не более чем на 5.

5.37. Для равных чисел все очевидно. Пусть $a_1 \neq a$. Рассмотрим 100 чисел: $a_1, a_2, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots, a_1+\ldots+a_{99}$. Одно из них или же разность двух из них делится на 100, т. к. это число больше 0 и меньше 200, оно в точности равно 100.

5.38. Среди первых двадцати из данных чисел найдутся два, у которых последняя цифра десятичной записи равна 0. Хотя бы у одного из этих двух чисел перед 0 стоит цифра, не равная 9. Пусть N — это число, s — сумма его цифр. Тогда числа N, $N+1, \ldots, N+9$, $N+19$ содержатся среди данных 39 и имеют суммы цифр s, $s+1,\ldots$, $s+10$. Но среди 11 последовательных чисел хотя бы одно делится на 11.

5.2. Принцип Дирихле и дополнительные соображения

5.39. Если бы каждый мог купить магнитофон, то в сумме было бы не менее $5 \cdot 320 = 1600$ долларов.

5.40. Произведение чисел во всех группах $9! > 71^3$.

5.41. От противного. Тогда на 5 полках не более $3+4\cdot39 = 159$.

5.42. Верно.

5.43. $29 = 35 - 1 - 2 - 3 = 7 \cdot 4 + 1$.

5.44. Разобьём числа от 10 до 99 на пары $(10, 89), \ldots, (49, 51)$ так, что сумма чисел в паре была равна 100. Есть 10 чисел без пары: $50, 91, \ldots, 99$ и 40 пар, т. е. всего 50 клеток.

5.45. Разобьём всех людей на 50 пар, сидящих друг напротив друга.

5.46. $30 - 1 = 29 = 2 \cdot 14 + 1$.

5.47. Для одноклассников Пети есть 29 вариантов числа друзей: от 0 до 28. Но, если кто-то дружит со всеми, то у всех не меньше одного друга. Поэтому либо есть такой, кто дружит со всеми, либо есть такой, кто не дружит ни с кем. В обоих случаях остается 28 вариантов: либо от 1 до 28, либо от 0 до 27. Самый дружелюбный дружит с Петей, а самый недружелюбный — нет. После перевода этих двоих в другой класс у оставшихся одноклассников будет разное число друзей. Повторяя эти рассуждения 14 раз, переведем в другой класс 14 пар, в каждой из которых один Петин друг. Итак, друзей у Пети 14.

5.48. Рассмотрим 20 самых старших ребят. Если самому младшему исполнилось 14 лет, то им всем не меньше $14 \cdot 20 = 280$. Если самому младшему меньше 14 лет, то 11 оставшимся вместе меньше 154, тогда на долю 20 старших ребят приходится не меньше $434 - 154 = 280$.

5.49. 3. Так как $253 : 23 = 11$, то ребят по 12 и 13 лет должно быть мало. Минимальное их количество 3 и 2 человека, тогда 10-летних — 18, а 11-летних — 11.

5.50. 8. Пусть на первом курсе x экзаменов, тогда на втором — не меньше $x+1$, на третьем — не меньше $x+2$, на четвёртом — не меньше $x+3$. На пятом — $3x$, тогда на четвёртом не больше $3x-1$ и т. д. Тогда $7x+6 \leqslant 31 \leqslant 13x-6$, откуда $x=3$. Значит, на 4-м курсе от $x+3=6$ до $3x-1=8$ экзаменов. Легко проверить, что если экзаменов 6 или 7, их общее количество меньше 31.

5.51. Суммы чисел могут меняться от -6 до $+6$, т. е. всего 13 значений. Строк в квадрате 6, столбцов 6, диагоналей 2. Всего 14.

5.52. Количество наборов (различных) из трёх оценок равно $4^3 = 64$.

5.53. Докажем, что существует кружок, каждый человек которого посещает ещё хотя бы один кружок. Если бы такого кружка не было, т. е. существовал ученик в любом кружке, который не посещает более одного кружка, то учеников будет не меньше, чем кружков. Но кружков 33, а учеников 32. Противоречие. Значит, существует кружок, каждый ученик которого посещает ещё хотя бы один кружок. Рассмотрим этот кружок. Он с другими кружками пересекает либо по одному ученику с тремя кружками, либо по двум ученикам с одним из оставшихся кружков и по одному ученику с другим кружком. Отсюда следует, что найдётся такой кружок, который пересекается с рассмотренными ровно по одному ученику.

5.54. 26. По условию по 2, 3, 4 и 5 задач мог придумать только один человек.

5.55. 29. Из первого условия рядов не более 29, из второго — не менее 29.

5.56. Рассмотрим двух учеников, которые не дружат между собой. Тогда из оставшихся 23 учеников каждый дружит с кем-то из них.

5.57. Если менее 15 учеников учится в одном классе, то возможных классов тогда не менее 5. Выбирая из каждого класса либо по двое, либо по одному, найдем 10 человек не в одном классе.

5.58. Назовем уровнем людоеда число людоедов, в желудке которых он находится. По условию людоедов одного уровня не может быть более 9. Пусть в любой «матрёшке» не более 11 людоедов, тогда всего людоедов не более $9 \cdot 11 = 99$ (по принципу Дирихле).

5.59. Занумеруем кружки числами от 1 до 5 и вместо каждого пионера будем рассматривать тот набор кружков (подмножество множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$) который состоит из посещаемых им кружков. Осталось разбить 32 подмножества указанного множества на 10 наборов так, чтобы в каждом из наборов из любых двух множеств этого набора одно содержалось в другом. В качестве таких наборов рассмотрим следующие:

$$[\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}], \ [\{5\}, \{1,5\}, \{1,3,5\}],$$
$$[\{2\}, \{2,5\}, \{1,2,5\}, \{1,2,3,5\}], \quad [\{2,3\}, \{2,3,4\}], \quad [\{3,4\}, \{3,4,5\}],$$
$$[\{3\}, \{1,3\}, \{1,3,4\}, \{1,3,4,5\}], \quad [\{3,5\}, \{2,3,5\}], \quad [\{4,5\}, \{1,4,5\}],$$
$$[\{4\}, \{1,4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,4,5\}] \quad \text{и} \quad [\{2,4\}, \{2,4,5\}, \{2,3,4,5\}].$$

5.60. Сложив 10 сумм, получим $2(1 + 2 + \ldots + 10) = 110$. Если бы последние цифры у десяти сумм были все разные, то при их сложении получилось бы число, оканчивающееся на 5.

5.61. Вариантов числа знакомых всего 10: от 0 до 9. Но 9 и 0 знакомых одновременно быть не могут.

5.62. Число матчей каждой команды может быть от 0 до 9. Но 0 и 9 матчей одновременно быть не может.

5.63. Пусть в первый день ученик решил a_1 задач, за первые два — a_2, за первые 77 дней (11 недель) a_{77} задач. ($a_{77} \leqslant 12 \cdot 11 = 132$). Рассмотрим 154 числа: $a_1, \ldots, a_{77}$, $a_1 + 20, \ldots, a_{77} + 20$. Эти числа не превосходят $132 + 20 = 152$, значит, среди них есть два равных. Так как $a_1, \ldots, a_{77}$ различны, то найдутся такие l и k, что $a_k = a_l + 20$ или $a_k - a_l = 20$.

5.64. $k + 1$ с номерами $k + 1, \ldots, 2k + 1$. Пусть можно выбрать $(k + r)$ карточек с $r > 1$ и n — наибольшее число, написанное на этих карточках. Рассмотрим разности между n и остальными числами. Этих разностей $(k + r - 1)$ и по ним должны быть написаны числа на оставшихся $2k + 1 - (k + r)$ карточках, т. е. $k + r - 1 \leqslant 2k + 1 - k - r = k - r + 1$, или $r \leqslant 1$.

5.65. Разделим каждое из 101 числа на максимальную степень двойки, которая содержится в разложении этого числа на простые множители. Получим 101 нечётное число. Среди них есть два равных. Тогда из соответствующих чисел большее делится на меньшее, т. к. они различаются степенью двойки.

5.66. Всего 6 друзей могут посетить 22 сеанса. Если в одном кинотеатре они побывали на всех сеансах (т. е. на 11), то в остальных кинотеатрах посетили тоже 11 сеансов, значит, хотя бы в одном кинотеатре побывали только на одном сеансе, т. е. кто-то из них в этом кинотеатре не был. Противоречие.

5.67. Найдутся 6 десятков, что в один из них попадёт группа не менее чем из 6 чисел, в другой — не менее чем из 5 и т. д. В какой-то десяток попадёт хотя бы одно из заданных чисел. Цифры единиц у чисел одного десятка различны, поэтому, взяв число из последней группы, затем из последней (с другой цифрой единиц) и т. д., получим искомые 6 чисел.

5.68. Неверно. Можно найти даже 33 числа с данным условием.

5.69. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. Рассмотрим n разностей: $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$. Они различны и меньше $2n$. Среди $2n + 1$ чисел: $a_1, \ldots, a_{n+1}, a_2 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ есть два равных. Так как числа разные, то найдутся l и k такие, что $a_k = a_l - a_1$ или $a_1 + a_k = a_l$.

5.70. $366 \cdot 100 \cdot 270 = 9\,882\,000$.

5.71. Предположим противное. Пусть есть n-й знак, после которого две дроби не совпадают ни в одной позиции. Но цифр 10, а дробей — 11. Противоречие.

5.72. Разобьём полуинтервал $[0; 1)$ на m промежутков длиной $1/m$. Рассмотрим числа $\{k\alpha\}$ $(k = 0, \ldots, m)$, где $\{x\}$ — дробная часть x. Тогда по принципу Дирихле хотя бы одному из промежутков принадлежит по крайней мере два наших числа $\{k_1\alpha\}$ и $\{k_2\alpha\}$. Тогда

$$1/m > |\{k_1\alpha\} - \{k_2\alpha\}| = |k_1\alpha - [k_1\alpha] - k_2\alpha + [k_2\alpha]| = \\ = |(k_1 - k_2)\alpha - ([k_1\alpha] + [k_2\alpha])|.$$

Осталось положить $q = k_1 - k_2$, $p = [k_1\alpha] - [k_2\alpha]$ $(k_1 > k_2)$.

5.73. Намотаем прямую на барабан, длина окружности которого равна 1. Тогда все ямы совместятся, а прыжок будет изображаться на окружности дугой длины $\sqrt{2}$. Покажем, что найдутся k и l такие, что следы k-го и $(k + l)$-го прыжка удалены друг от друга менее чем на 0,01. Разделим окружность на 101 равные дуги, тогда длина каждой меньше 0,01. Если мы возьмём 102 прыжка, то хотя бы в одну из дуг попадает 2 прыжка: k-й и $(k + l)$-й. После l прыжков новый, $(k+2l)$-й, след блохи сдвинется на расстояние меньше 0,01. Ясно, что, сделав несколько раз по l следующих прыжков, блоха попадет в яму (т. к. перемещаясь на расстояние, меньшее 0,01, нельзя перепрыгнуть яму шириной 0,01).

5.74. а) Нужно найти n и k, для которых $999 \cdot 10^k < 2^n < 10^{k+3}$, или $k + \lg 999 < n \lg 2 < k + 3$. Задача сводится к 5.73 с длиной прыжка $\lg 2$ и шириной ямы $3 - \lg 999$. Осталось лишь показать, что $\lg 2$ — иррациональное число. Если это не так, то $\lg 2 = m/n$, т. е. $10^m = 2^n$. Сравнивая число двоек и пятёрок в разложении на простые множители, находим $m = n = 0$. Противоречие.

5.75. Хвастает. Пусть есть последовательность $\{a_n\}$ Построим новую последовательность по следующим правилам: $b_1 = 1$, $b_{n+1} = a_{b_n}$. Покажем, что все $\{b_n\}$ различны. Если $b_k = b_l$, $(k > l > 1)$, то $a_{b_{k-1}} = a_{b_{l-1}}$, тогда $b_{k-1} = b_{l-1}$ (так как все члены последовательности $\{a_n\}$ различны). Продолжая далее, в конце получим $b_{k-l+1} = b_1$, т. е. $a_{b_{k-l}} = 1$. Противоречие. Значит, есть бесконечно много k, для которых $b_{k+1} > b_k$ (иначе она убывала бы, начиная с некоторого места, что невозможно) или $a_{b_k} > b_k$.

5.76. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{70}$ и таких двух чисел нет. Тогда три множества $\{a_1, \ldots, a_{70}\}$; $\{a_1+4, \ldots, a_{70}+4\}$ и $\{a_1+9, \ldots, a_{70}+9\}$ не пересекаются. Мы получили 210 различных чисел не превышающих $200 + 9 = 209$.

5.77. Нет. Если удастся увезти камни на 7 трёхтонках, то хотя бы на одну придётся нагрузить не меньше 8 камней ($7 \cdot 7 = 49 < 50$). Но даже 8 самых лёгких камней нельзя погрузить на машину, ибо $370 + 372 + \ldots + 384 = 3016 > 3000$.

5.78. Докажите, что в одной из групп разность между числом согласных и числом гласных не больше 1.

5.79. Пусть у всех 20 детей нет общего деда (в противном случае утверждение очевидно). Докажем, что в этом случае у учеников есть не более трёх различных дедов. Действительно, пусть у одного ученика деды А и Б, а у другого — А и В. Тогда если какой-то ученик имеет деда Г, то вторым его дедом может быть только А. Значит, у всех учеников есть общий дед.

Далее, найдётся пара дедов, у которых количество их общих внуков не более 6 (если это не так, то каждая из трёх пар имеет по меньшей мере 7 внуков, и всего их по меньшей мере 21). Тогда третий дед имеет не менее $20 - 6 = 14$ внуков.

5.80. Разобьём остатки от деления на 100 на группы: $\{0\}$, $\{1, 99\}, \ldots, \{49, 51\}$, $\{50\}$. Тогда групп 51, а чисел 52. Значит, два числа попадут в одну группу. Они и будут искомыми.

5.81. Фиксируя $a_1 \in X = \{a_1, \ldots, a_n\}$, рассмотрим подмножества, содержащие a_1. Их число равно числу подмножеств множества $\{a_2, \ldots, a_n\}$, т. е. 2^{n-1}. Значит, $k \geqslant 2^{n-1}$. Если же выбрано более 2^{n-1} подмножеств X, то разобьём подмножества X на 2^{n-1} пар, объединяя в пару подмножество и его дополнение. По принципу Дирихле хотя бы два таких подмножества составляют пару и потому не пересекаются, т. е. $k = 2^{n-1}$.

5.82. Если n — число элементов в X и каждое из $A_1, \ldots, A_{50}$ содержит более $n/2$ элементов, то число всех элементов этих множествах превышает $50(n/2) = 25n$. По принципу Дирихле есть элемент, принадлежащий не менее, чем 26 выбранным подмножествам. Аналогично доказывается, что при любом $k < 50$ среди множеств $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ можно выбрать не менее $[k/2] + 1$ множеств, содержащий общий элемент. Возьмём элемент, принадлежащий не менее чем 26 множествам. Выбросим эти 26 множеств из рассмотрения. Найдётся элемент, принадлежащий не менее 13 из 24 оставшихся множеств. Выбросим и эти 13 из рассмотрения. Найдётся элемент принадлежащий не менее 6 из 13 оставшихся. Для оставшихся 5 множеств найдётся элемент, принадлежащий по крайней мере трём из них. Наконец, найдётся элемент, принадлежащий последним двум множествам. Итак, 5 элементов найдено.

5.83. Рассмотрим 19 разностей $a_{20} - a_{19}, \ldots, a_2 - a_1$. Если среди них нет четырёх одинаковых чисел, то их сумма будет больше 70.

5.84. Пусть $X = A \cup B$ и $5 \in A$. Доказательство от противного. Тогда $3 \in B$, $7 \in B$. Одно из чисел 4 и 6 принадлежит B. Рассматривая $4 \in B$, получим $8 \in B$, $2, 6, 9 \in A$ и 1 не может принадлежать ни A, ни B. Противоречие. Аналогично рассматривается случай $6 \in B$.

5.85. Рассмотрим любое множество A из данных 1978 множеств. Оно пересекается с каждым из остальных 1977 множеств, поэтому существует элемент $a \in A$, принадлежащий не менее 50 из этих множеств. (Если каждый из 40 элементов A принадлежит не более, чем 49 множествам, то всего не более $40 \cdot 49 = 1960$ множеств, отличных от A.) Докажем, что a, принадлежащий A, $A_1, \ldots, A_{50}$ принадлежит и любому B из данных 1978 множеств. Пусть $a \notin B$. Тогда B имеет с каждым из A, $A_1, \ldots, A_{50}$ общие элементы, которые отличны от a, и, значит, различны (т. к. любые 2 из множеств A, $A_1, \ldots, A_{50}$ пересекаются только по a). Поэтому B содержит не менее 51 элемента, что невозможно, значит $a \in B$.

5.86. Рассмотрим $2n$ чисел: a_1, $a_2, \ldots, a_n$, $k - a_1, \ldots, k - a_n$. Так как $2n > m$, то хотя бы два из них дают при делении на m одинаковые остатки. Так как a_l дают разные остатки, то и $k - a_l$ дадут разные остатки, поэтому эти два числа будут вида $a_i, k - a_j$. Тогда разность $a_i + a_j - k$ делится на m.

5.87. Хотя бы в одном из 7 подмножеств не менее 15 чисел ($7 \cdot 14 = 98 < 100$). Для каждой пары $a > b$ из этого подмножества рассмотрим разность $a - b$. Тогда разностей всего не менее $15 \times$ $\times\, 14/2 = 105$, и среди них найдутся одинаковые (разность может принимать не более 99 значений $1, 2, \ldots, 99$). Пусть для двух пар $a > b$, $c > d$ выполнено $a - b = c - d$, $a + d = b + c$. При $a = d$ ($b = c$) имеем $2a = b + c$ ($a + d = 2b$).

5.88. 655 чисел. Рассмотрите числа вида $3k + 1$, $k = 0, \ldots, 654$ (разность любых двух из них кратна 3, а сумма — нет). Большего количества чисел выбрать нельзя, иначе нашлись бы два числа, отличающиеся на 1 или на 2, и их сумма делилась бы на их разность.

5.89. 50 чисел $(2, \ldots, 2)$ удовлетворяют условию задачи. А 49 чисел (или меньше) можно разбить на 7 групп по 7 чисел, сумма каждой не больше 14, а общая сумма $s \leqslant 7 \cdot 14 = 98$.

5.90. В каждом размере каких-то сапог меньше: правых или левых. Выпишем эти типы сапог по размерам. Какой-то тип, например, левый, повторится по крайней мере дважды, например, в 41 и 42 размерах. Но так как количество левых сапог в этих размерах суммарно не меньше 100, то мы имеем не менее 100 годных пар обуви в этих размерах.

5.91. Пусть это не так. Отметим для каждой пары мальчиков (всего 21 пара) момент, когда они встречались: $t_1 < t_2 < \ldots < t_{21}$ (неравенства строгие, так как трое одновременно не встречались). К моменту t_1 к киоску должны явиться двое, в интервале $(t_1; t_2)$ — ещё один и т. д. Это в сумме дает 22 прихода мальчиков к киоску, а их всего $3 \cdot 7 = 21$.

5.92. а) Решение 1. Каждая пара членов комиссии могла встретиться не более чем на одном заседании. На каждом заседании было $C_{10}^2 = 45$ пар. Так как было 40 заседаний, то из членов комиссии можно образовать не меньше $1800 = 45 \cdot 40$ пар. Но из 60 (или меньше) человек можно образовать не больше $C_{60}^2 = 60 \cdot 59/2 < 1800$ пар.

Решение 2. Пусть число N членов комиссии не больше 60. Тогда, так как $10 \cdot 40/N > 6$, то найдётся человек, побывавший по крайней мере на семи заседаниях. Все люди, с которыми он встречался — разные и их общее число $7 \cdot 9 > 59$.

5.93. 43 числа: 2–44. Если вычеркнуть меньше 43 чисел, то хотя бы одна тройка $(k, 89 - k, k(89 - k))$, где $2 \leqslant k \leqslant 43$, состоит из невычеркнутых чисел.

5.94. Индукция по m: при $m = 1$ утверждение верно. Пусть оно верно для $m = k - 1$ ($k \geqslant 2$). Докажем его для $m = k$. Рассмотрим любое множество A, состоящее из $2k+1$ чисел, не больших $2k-1$ по модулю. Если среди них найдутся $2k - 1$ чисел, не превосходящих по модулю $2k - 3$, то всё ясно. В противном случае в A содержатся хотя бы три из чисел $2k-1$, $2k-2$, $-2k+1$, $-2k+2$, поэтому в A входят либо числа $2k-1$ и $-2k+1$, либо $2k-2$ и $-2k+2$ и ровно одно из чисел $\pm(2k-1)$ (пусть это $2k-1$, иначе перейдём к противополжным). В первом случае рассмотрим $2k$ пар

$$(1, 2k-2), (2, 2k-3), \ldots, (k-1, k) \text{ и}$$
$$(0, -2k+1), (-1, -2k+2), \ldots, (-k+1, -k).$$

Хотя бы одна пара состоит из чисел, входящих в A. Она вместе с $-2k+1$ (для пар первой группы) или $2k-1$ (второй) образуют искомую тройку.

Во втором случае аналогично рассмотрим $2k-1$ пар

$$(0, 2k-2), (1, 2k-3), \ldots, (k-2, k) \text{ и}$$
$$(-1, -2k-2), (-2, -2k+3), \ldots, (-k, -k+1).$$

Эти пары не содержат не более двух элементов A ($k-1$ и $2k-1$), поскольку $-2k+1$ не входит в A. Поэтому найдётся пара, состоящая из элементов A.

5.95. Обозначим через N_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$, количество номеров, начинающихся с цифры i. Достаточно доказать, что при некотором k выполняется неравенство $N_k > 11$. Предположим, что это неверно, т. е. $N_i \leqslant 11$ при всех $i = 1, 2, \ldots, 9$. Тогда сумма $N_1 + \ldots + N_9$ не превосходит 99, что противоречит условию, так как общее количество номеров равно количеству спортсменов, т. е. равно 100.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

К 5.96

5.96. Учеников, которые учатся лучше большинства своих друзей, назовем хорошими. Пусть x — число хороших учеников, k — число друзей у каждого ученика. Лучший ученик класса является лучшим в k парах друзей, а любой другой хороший ученик — не менее чем в $[k/2] + 1 \geqslant (k+1)/2$ парах (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Поэтому хорошие ученики являются лучшими не менее чем $k + (x-1)(k+1)/2$ парах. Это число не может превышать числа всех пар друзей в классе, равного $30k/2 = 15k$. Отсюда $k + (x-1)(k+1)/2 \leqslant 15k$, или $x \leqslant 1 + 28k/(k+1)$. Заметим далее, что $(k+1)/2 \leqslant 30 - x$ (число учеников, лучше которых учится наихудший из хороших, не превышает $30 - x$) или $k \leqslant 59 - 2x$.

Из этих неравенств следует, что $x \leqslant 1 + 28(59-2x)/(60-2x)$, или $x^2 - 59x + 856 \geqslant 0$. Наибольшим целым x, удовлетворяющим неравенству и условию $x \leqslant 30$, является $x = 25$. Покажем, что x

может равняться 25. Занумеруем учеников от 1 до 30 в порядке ухудшения успеваемости и расположим номера в таблице 6×5, как показано на рисунке. Пусть два ученика — друзья, если их номера расположены либо в соседних строках и в разных столбцах; либо в одном столбце, причём один из номеров находится в нижней строке; либо в верхней строке.

5.97. Заметим, что существует всего 2^m способов присвоения названий улицам. Назовем их для краткости раскрасками. Оценим количество раскрасок, которые можно получить с помощью переименований из раскраски, для которой все улицы красные. Раскраска, полученная после серии переименований, не зависит от порядка, в котором эти переименования были произведены. Кроме того, если два раза переименовать улицы, выходящие из одной и той же площади, то все улицы сохранят свои прежние названия. Наконец, если провести n переименований, по одному для каждой площади, то каждая улица будет переименована два раза и поэтому сохранит своё название. Значит, можно получить не более $2^n - 1$ раскрасок. Аналогично, если все улицы были синими, то с помощью переименований можно получить не более $2^n - 1$ раскрасок. В сумме получается не более $2(2^n - 1) < 2^{n+1} \leqslant 2^m$ раскрасок, значит, какую-то раскраску нельзя получить с помощью переименований из раскраски, для которой все улицы названы одинаково.

5.98. Объединим учеников в группы по фамилиям и в группы по именам (возможны группы, состоящие из одного человека — например, ученик без однофамильцев). Каждый войдёт в две группы — по фамилии и по имени. Из условия задачи следует, что в классе ровно 11 групп. Действительно, есть группы, состоящие из $1, 2, \ldots, 11$ человек, поэтому групп не меньше 11, но $1+2+\ldots+11 = 66 = 2 \cdot 33$, т. е. мы уже сосчитали каждого ученика дважды, значит, больше групп нет.

5.99. Обозначим искомое число через k_n. Предположим, что в множестве X выбраны k_n трёхэлементных подмножеств, любые два из которых имеют ровно один общий элемент. Возможны три случая.

Случай 1. Никакой элемент множества X не входит более чем в два трёхэлементных множества. Пусть одно из множеств есть $\{a; b; c\}$. Тогда любое из оставшихся множеств пересекается с множеством $\{a; b; c\}$, причём среди этих оставшихся множеств не более одного множества содержит элемент a, не более одного — элемент b и не более одного — элемент c. Поэтому всего множеств не более $1 + 3 \cdot 1 = 4$, т. е. $k_n \leqslant 4$.

Случай 2. Существует элемент множества X, входящий в три трёхэлементных множества, но никакой элемент множества X не входит более чем в три трёхэлементных множества. Тогда, если $\{a; b; c\}$ — одно из множеств, то любое из оставшихся множеств пересекается с ним, причём не более двух из этих оставшихся множеств содержит элемент a, не более двух — элемент b и не более двух — элемент c. Поэтому всех множеств не более $1 + 3 \cdot 2 = 7$, т. е. $k_n \leqslant 7$.

Случай 3. Существует элемент a множества X, принадлежащий по крайней мере четырём трёхэлементным множествам. Тогда все остальные элементы этих четырёх множеств различны, а любое из оставшихся множеств также должно содержать элемент a (иначе такое множество имело бы по одному различному общему элементу с каждым из четырёх множеств, т. е. содержало бы по меньшей мере 4 элемента). Итак, имеем $1 + 2 \cdot k_n \leqslant n$, т. е. $k_n \leqslant [(n-1)/2]$.

Для $n = 1, 2, 3, 4, 5$ имеем $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_4 = 1$, $k_5 = 2$. Пусть $n = 6$. Тогда ни один элемент не принадлежит сразу трём множествам, иначе их объединение состояло бы из 7 элементов. Поэтому имеет место случай 1, и $k_6 \leqslant 4$. С другой стороны, существует пример четырёх множеств: если $X = \{a; b; c; d; e; f\}$, то трёхэлементными подмножествами могут быть $\{a; b; c\}$, $\{c; d; e\}$, $\{e; f; a\}$, $\{b; d; f\}$. Итак, $k_6 = 4$. Пусть $n \in \{7; 8; \ldots; 16\}$. Тогда в случае 3 количество множеств не превосходит $[(16-1)/2] = 7$; если же имеет место случай 1 или 2, то это количество также не превосходит 7. С другой стороны, если множество X среди своих элементов содержит 7 элементов a, b, c, d, e, f, g, то существует пример 7 трёхэлементных подмножеств: $\{a; b; c\}$, $\{c; d, e\}$, $\{e; f; a\}$, $\{b; d; f\}$, $\{a; g; d\}$, $\{b; g; e\}$, $\{c; g; f\}$. Итак, $k_n = 7$ при $n = 7, 8, \ldots, 16$. Наконец, если $n \geqslant 17$, то в любом из случаев 1, 2, 3 справедлива оценка $k_n \leqslant [(n-1)/2]$, причём эта оценка достигается при следующем выборе трёхэлементных подмножеств: один из элементов является общим для всех множеств, а остальные элементы (кроме, быть может, одного в случае чётного n) разбиваются на пары и образуют с общим элементом требуемые подмножества. Итак, $k_n = [(n-1)/2]$ при $n \geqslant 17$.

5.100. Эта задача, по внешнему виду алгебраическая, имеет чисто комбинаторное решение, основанное на принципе Дирихле. Сначала найдем количество разных наборов целых чисел $(y_1, \ldots, y_q)$ таких, что $0 \leqslant y_i \leqslant q$ для всех $i \in \{1, \ldots, q\}$. Так как число может принимать $q+1$ значение, а количество чисел равно q, существует $(q+1)^q$ таких наборов. Теперь рассмотрим наборы чисел $(b_1, \ldots, b_p)$, где $b_j = a_{j_1}y_1 + \ldots + a_{j_q}y_q$ и найдем количество различных наборов указанного вида при $0 \leqslant y_i \leqslant q$.

Пусть r_j — количество коэффициентов, равных 1, среди чисел a_{ij} в j-м уравнении. Тогда количество коэффициентов, равных (-1), среди них не более чем $q - r_j$, значит, $(r_j - q)q \leqslant b_j \leqslant r_j q$ и каждое b_j, может принимать не более чем $q^2 + 1$ различных значений, т. е. количество таких наборов не больше чем $(q^2+1)^p$. Так как

$$(q+1)^q = (2p+1)^{2p} = (4p^2+4p+1)^p > (4p^2+1)^p = (q^2+1)^p,$$

то каким-то двум наборам $(y_1, \ldots, y_q)$ и $(z_1, \ldots, z_q)$ соответствует один и тот же набор чисел $(b_1, \ldots, b_p)$ (согласно принципу Дирихле), т. е. выполняется равенство

$$a_{i_1}y_1 + \ldots + a_{i_q}y_q = a_{i_1}z_1 + \ldots + a_{i_q}z_q = b_i \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

Рассмотрим теперь набор чисел $(y_1, \ldots, y_q)$, где числа $x_j = y_j - z_j$. Он удовлетворяет заданной в условии однородной системе: не все числа x_j равны 0, так как выбранные наборы различны, и все x_j удовлетворяют неравенству $|x_j| \leqslant q$.

5.101. Пусть заключение задачи не выполняется. Заметим, что одна из стран представлена в обществе не менее чем 330 членами: если бы каждая делегация состояла не более чем из 329 членов, то всего в обществе было бы не больше чем $329 \cdot 6 = 1974$ члена (в силу принципа Дирихле). Расположим номера учёных этой страны в порядке возрастания: a_1, $a_2, \ldots, a_{330}, \ldots$. Согласно сделанному предположению, учёные с номерами $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{330} - a_1$ представляют оставшиеся 5 стран. Среди них не менее 66 представляют одну страну; пусть это учёные с номерами $b_1, \ldots, b_{66}$. Тогда учёные с номерами $b_2 - b_1, \ldots, b_{66} - b_1$ представляют оставшиеся 4 страны. Среди них не меньше 17 учёных представляют одну страну: пусть их номера $c_1, \ldots, c_{17}$. Тогда учёные с номерами $c_2 - c_1, \ldots, c_{17} - c_1$ представляют оставшиеся три страны. Из них аналогично найдем 5 учёных, представляющих две страны, а затем двух представителей одной страны, разность номеров которых не может быть номером учёного ни одной из стран. Противоречие.

5.102. $n = 217$. Пусть A_p — множество чисел из S, делящихся на p, т. е. $A_p = S \cap pN$, и $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$. Легко видеть, что $|A_2| = 140$, $|A_3| = 93$, $|A_5| = 56$, $|A_7| = 40$. Аналогично, $|A_6| = |A_2 \cap A_3| = 46$, $|A_{10}| = |A_2 \cap A_5| = 28$, $|A_{14}| = |A_2 \cap A_7| = 20$, $|A_{15}| = |A_3 \cap A_5| = 18$, $|A_{21}| = |A_3 \cap A_7| = 13$,

$|A_{35}| = |A_5 \cap A_7| = 8$; $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 9$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = 6$, $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 4$, $|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 2$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 1$. Согласно формуле включений-исключений

$$|A| = |A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 140 + 93 + 56 + 40 - \\ - 46 - 28 - 20 - 18 - 13 - 8 + 9 + 6 + 4 + 2 - 1 = 216.$$

В силу принципа Дирихле среди любых 5 чисел множества A найдутся два числа, которые попадают в одно множество A_p ($p = 2, 3, 5, 7$). Эти два числа не могут быть взаимно просты. Значит, $n > 216$. Множество A содержит 4 простых числа $\{2, 3, 5, 7\}$ и 212 составных. Из чисел множества S, не принадлежащих A, составными являются ровно восемь: 11^2, $11 \cdot 13$, $11 \cdot 17$, $11 \cdot 19$, $11 \cdot 23$, 13^2, $13 \cdot 17$, $13 \cdot 19$. Итак, множество S содержит в точности 220 составных чисел и 60 несоставных (включая 1 и 59 простых).

Пусть T — произвольное множество чисел, удовлетворяющих условиям $T \subset S$, $|T| = 217$. Докажем, что в T обязательно найдётся 5 попарно взаимно простых чисел. Пусть это не так. Тогда T содержит максимум 4 несоставных числа (1 и три простых), иначе из них можно было бы составить искомую пятёрку. Тогда множество T содержит минимум $217 - 4 = 213$ составных чисел, а множество $S \setminus T$ — максимум $220 - 213 = 7$ составных чисел. Значит, T обязано содержать целиком хотя бы одну из 8 перечисленных ниже пятёрок, в каждой из которых все числа попарно взаимно просты:

$$\{2\cdot 23, 3\cdot 19, 5\cdot 17, 7\cdot 13, 11\cdot 11\}, \quad \{2\cdot 29, 3\cdot 23, 5\cdot 19, 7\cdot 17, 11\cdot 13\},$$
$$\{2\cdot 31, 3\cdot 29, 5\cdot 23, 7\cdot 19, 11\cdot 17\}, \quad \{2\cdot 37, 3\cdot 31, 5\cdot 29, 7\cdot 23, 11\cdot 19\},$$
$$\{2\cdot 41, 3\cdot 37, 5\cdot 31, 7\cdot 29, 11\cdot 23\}, \quad \{2\cdot 43, 3\cdot 41, 5\cdot 37, 7\cdot 31, 13\cdot 17\},$$
$$\{2\cdot 47, 3\cdot 43, 5\cdot 41, 7\cdot 37, 13\cdot 19\}, \quad \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}.$$

5.3. Принцип Дирихле в геометрии

5.103. Возьмём на плоскости произвольную точку и проведем через неё прямые, параллельные данным. Они разделят плоскость на $2n$ углов, в сумме дающих $360°$. Поэтому один из этих углов не превосходит $180°/n$.

5.104. Если все углы меньше $51°$, то сумма всех углов меньше $7 \cdot 51° = 357°$.

5.105. Увеличить число вершин n-угольника можно только разрезав его на $(n + 1)$-угольник и треугольник (для этого разрез должен проходить через точки на двух соседних рёбрах). Поэтому таких разрезов можно сделать не более 99 (иначе появится

100 треугольников), т. е. нельзя получить многоугольник с более чем 103 вершинами. Значит, общее число фигур не может превысить $99 \cdot 101 = 9999$ (по 99 штук $3, 4, 5, \ldots, 103$-угольников). Поэтому после 9999 разрезов заведомо будет 100 одинаковых фигур.

5.106. Нельзя. Цифра a образует 9 пар (с каждой из 9 остальных цифр). Чтобы для всех этих пар нашлась сторона 45-угольника, занумерованная соответствующими цифрами, необходимо поставить a по крайней мере в пяти его вершинах. Так как цифр всего 10, то для их размещения нужно 50 мест. Отметим, что при чётном n, числа $0, \ldots, n$ можно расставить в вершинах $(n+1)(n+2)/2$-угольника так, чтобы для каждой пары нашлась сторона с соответствующими числами на концах.

Точки

5.107. Разрежем квадрат на 16 квадратов 1×1. Квадратов 16, а дырок 15.

5.108. а) Разрежем ковёр на 100 размером 1 м на 1 м. б) Разрежем ковёр на 81 квадрат со стороной 1,1 м (и остаток). Хотя бы один из них не будет проеден во внутренних точках. Отрезав от такого квадрата каёмку шириной 0,05 м, получим требуемый коврик.

5.109. Среди пяти точек найдутся три, абсциссы которых все либо чётны, либо нечётны. (Если две чётны и две нечётны, то всего точек не больше четырёх.) Среди этих точек найдутся две с ординатами одинаковой чётности.

5.110. Разделим газон на 9 равных треугольников со стороной 1 м.

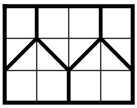
5.111. Разделим квадрат на 25 квадратиков со стороной 1 см, а каждый такой квадратик можно заключить в круг радиуса 1 см.

5.112. Разделим треугольник на 4 равных правильных треугольника со стороной 0,5 м.

5.113. Средние линии правильного треугольника со стороной 1 разбивают его на четыре правильных треугольника со стороной 0,5. Поэтому в одном из них лежат по крайней мере две данные точки, причём эти точки не могут попасть в вершины треугольника. Расстояние между этими точками меньше 0,5.

5.114. Пусть в роще n деревьев. Опишем вокруг каждого дерева круг радиуса 5 м. По условию эти круги не пересекаются и расположены в круге радиуса $215 + 5 = 220$ м. Значит, площадь большого круга не меньше суммарной площади маленьких. Решив неравенство $220^2\pi \geqslant \pi 5^2 n$, получаем $n \leqslant 44^2 = 1936$.

5.115. На одной стороне квадрата отложим 48 отрезков длиной 20 м каждый, причём между соседними отрезками оставим промежуток в 0,6 м, и два крайних отрезка по 5,9 м каждый. На второй стороне квадрата отложим 95 отрезков длины 10 м каждый, разделённых промежутками длины, большей 0,5 м каждый. Тогда на участке окажется $48 \cdot 95 = 4560$ прямоугольников, разделённых полосами, шириной, большей 0,5. Так как деревьев всего 4500 и ни одно из деревьев не может попасть больше, чем в один прямоугольник, то найдутся прямоугольники (даже не меньше 60), на которых нет деревьев.



К 5.116

5.116. Разрежем прямоугольник на пять фигур, как показано на рисунке. По принципу Дирихле в одну из них попадут по крайней мере две точки, а расстояние между любыми двумя точками каждой из этих фигур не превосходит $\sqrt{5}$.

5.117. Пусть A — одна из данных точек. Если все остальные точки лежат в круге S_1 радиуса 1 с центром A, то доказывать больше нечего. Пусть теперь B — данная точка, лежащая вне круга S_1, т. е. $AB > 1$. рассмотрим круг S_2 радиуса 1 с центром B. Среди точек A, B и C, где C — любая из данных точек, найдутся две на расстоянии меньше 1, причём это не могут быть точки A и B. Поэтому круги S_1 и S_2, содержат все данные точки, т. е. один из них содержит не менее 13 точек.

5.118. Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник, внутри которого расположены все точки, и пусть A — любая вершину многоугольника. Соединим её со всеми оставшимися точками. Если углы больше 30°, то получим 4 угла, больших 30°, откуда угол A больше 120°. Но углы при всех вершинах выпуклого многоугольника не более 120°.

5.119. Разрежем данный квадрат на 25 одинаковых квадратиков со стороной 0,2. В один из них попадает не меньше трёх точек. Радиус описанной окружности квадрата со стороной 0,2 равен $1/(5\sqrt{2}) < 1/7$, поэтому его можно накрыть кругом радиуса 1/7.

5.120. Разобьём круг на 6 равных секторов (с вершиной в центре круга). Тогда в каждый сектор попадёт не больше, чем по точке (ибо расстояние между любыми двумя точками одного сектора не больше 1). Если бы в каждый сектор попало бы по точке, то нашлись бы две точки, угол между радиус-векторами которых был не больше 60° и, следовательно, расстояние между ними не больше 1. Итак, можно выбрать не более, чем 5 точек.

5.121. Разобьём деревья на 2500 четвёрок, объединив каждую четвёрку в квадрат. В каждой такой четвёрке нельзя срубить более 1 дерева. С другой стороны, можно срубить все деревья, растущие в левых верхних углах квадратов, образованных нашими четвёрками деревьев. Поэтому наибольшее число деревьев, которые можно срубить, равно 2500.

5.122. Среди пяти точек есть две (обозначим их A и B), что оставшиеся три точки C_1, C_2, C_3 лежат по одну сторону прямой AB. Пусть $\angle AC_1B < \angle AC_2B < \angle AC_3B$. Тогда C_1 лежит вне окружности, проходящей через точки A, B и C_2, а точка C_3 — внутри неё.

5.123. Проведя через центр квадрата прямые, параллельные его сторонам, разобьём квадрат на четыре квадратика. Какие-то две из пяти точек лежат в одном из этих квадратиков, и расстояние между ними не превосходит длины диагонали этого квадратика.

Отрезки, прямые

5.124. Пусть составить нельзя, тогда есть 2 отрезка длиной не менее 0,1 м, 3-й отрезок длиной не менее 0,2 м, 4-й — не менее 0,3 м, 5-й — не менее 0,5 м, 6-й — не менее 0,8 м и 7-й не менее $0{,}5 + 0{,}8 = 1{,}3$ м. Противоречие.

5.125. Пусть через точку (какую-то) проходит не более 10 прямых. Тогда на них лежит 100 точек, и есть прямая, содержащая не менее 10 точек, и вместе с выбранной — 11 точек. Любая точка, не лежащая на этой прямой, соединена со всеми точками этой прямой, и прямых не менее 11.

5.126. Пусть сумма длин хорд не меньше, докажем, что тогда найдётся диаметр, пересекающий по крайней мере $k + 1$ хорду. Так как длина дуги, стягиваемой хордой, больше длины этой хорды, то сумма длин дуг, стягиваемых данными хордами, больше k. Если к этим дугам добавим дуги, симметричные им относительно центра окружности, то сумма длин всех рассматриваемых дуг будет больше $2k$. Поэтому найдётся точка, которую покрывает по крайней мере $k + 1$ из этих дуг. Диаметр, проведённый через эту точку, пересекает по крайней мере $k + 1$ хорду.

5.127. Пусть l_1 — произвольная прямая, перпендикулярная l. Обозначим длины проекций i-го отрезка на прямые l и l_1 через

a_i и b_i соответственно. Так как длина каждого отрезка равна 1 то $a_i + b_i \geqslant 1$. Поэтому

$$(a_1 + \ldots + a_{4n}) + (b_1 + \ldots + b_{4n}) \geqslant 4n.$$

Пусть для определённости $a_1 + \ldots + a_{4n} \geqslant b_1 + \ldots + b_{4n}$. Тогда $a_1 + \ldots + a_{4n} \geqslant 2n$. Все данные отрезки проецируются на отрезок длины $2n$ на прямой l. Если бы проекции отрезков на эту прямую не имели общих точек, то выполнялось бы неравенство $a_1+\ldots+a_{4n} < 2n$. Полученное противоречие доказывает, что на l есть точка, в которую проецируются точки по крайней мере двух отрезков. Тогда перпендикуляр к ней в этой точке и является искомой прямой.

5.128. Совместим данные окружности и посадим в фиксированную точку одной из них маляра. Будем вращать эту окружность и поручим маляру красить ту точку окружности, мимо которой он проезжает, всякий раз, когда какая-либо отмеченная точка лежит на отмеченной дуге. Нужно доказать, что после полного оборота часть окружности останется неокрашенной. Конечный результат работы маляра будет такой же, как если бы ему поручили на i-м обороте красить окружность, когда i-я отмеченная точка лежит на одной из отмеченных дуг, и сделали бы 100 оборотов. Так как в этом случае при каждом обороте окрашивается меньше 1 см, после 100 оборотов будет окрашено меньше 100 см. Поэтому часть окружности останется неокрашенной.

5.129. При переходе из клетки в соседнюю прямая пересекает либо вертикальную, либо горизонтальную линию сетки. (Дважды эти линии она пересечь не может.) Внутри прямоугольника $19 + 29 = 48$ линий сетки. Значит, прямая не может пересечь более 49 клеток.

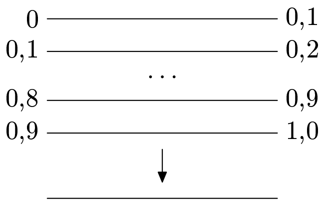
5.130. Спроецируем все окружности на сторону AB квадрата $ABCD$. Проекцией окружности длины l является отрезок длиной l/π. Поэтому сумма длин проекций всех данных окружностей равна $10/\pi$. Так как $10/\pi > 3 = 3AB$, то на отрезке AB есть точка, принадлежащая проекциям по крайней мере четырёх окружностей. Перпендикуляр к AB, проведённый через эту точку, пересекает по крайней мере четыре окружности.

5.131. $2n$-угольник имеет $2n(2n-3)/2 = n(2n-3)$ диагоналей. Легко проверить, что диагоналей, параллельных данной стороне, не более $n-2$. Поэтому всего диагоналей, параллельных сторонам, не более $2n(n-2)$. А так как $2n(n-2) <$

$< n(2n-3)$, то найдётся диагональ, не параллельная ни одной из сторон.

5.132. К краю шахматной доски 8×8 прилегает 28 полей. Проведем 28 отрезков, соединяющих центры соседних крайних полей. Каждая прямая может пересекать не более двух таких отрезков, поэтому 13 прямых могут пересекать не более 26 отрезков, т. е. найдутся по крайней мере два отрезка, не пересекающихся ни с одной из 13 проведённых прямых. Поэтому 13 прямыми нельзя разбить шахматную доску так, чтобы в каждой части лежало не более одной отмеченной точки, так как оба конца отрезка, не пересекающегося с прямыми, лежат в одной части.

5.133. Разрежем отрезок на 10 отрезков длиной 0,1 и, сложив их стопочкой, спроецируем на такой же отрезок (см. рис.). Так как расстояние между любыми двумя окрашенными точками не равно 0,1, то окрашенные точки соседних отрезков не могут проецироваться в одну точку. Поэтому ни в одну точку не могут проецироваться окрашенные точки более чем пяти отрезков. Значит, сумма длин проекций окрашенных отрезков (равная сумме их длин) не превосходит $5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$.



К 5.133

5.134. а) Можно. Пусть O — центр правильного пятиугольника $ABCDE$. Тогда круги, вписанные в углы AOC, BOD, COE, DOA и EOB, являются искомыми.

б) Нельзя. Рассмотрим для каждого из четырёх кругов угол, образованный касательными к нему, проходящими через точку O. Так как каждый из этих углов меньше $180°$, в сумме они дают меньше $2 \cdot 360°$. Поэтому найдётся точка плоскости, покрытая не более чем одним из этих углов. Луч, проведённый через эту точку, пересекает не более одного круга.

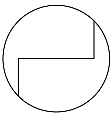
5.135. Данные прямые не могут пересекать соседние стороны квадрата $ABCD$, так как иначе образуются не два четырёхугольника, а треугольник и пятиугольник. Пусть прямая пересекает стороны BC и AD в точках M и N. Трапеции $ABMN$ и $CDNM$ имеют равные высоты, поэтому их площади относятся как средние линии, т. е. MN делит отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD, в отношении $2:3$. Точек, делящих средние линии квадрата в отношении 2 : 3, имеется ровно 4. Так как данные 9 прямых проходят через эти 4 точки, то через одну из точек проходят по крайней мере три прямые.

5.136. Из условия следует, что в каждой строке и каждом столбце стоит ровно по одной ладье. Если в каком-либо квадрате $n \times n$ ладьи отсутствуют, то в оставшихся строках стоят ровно $n-1$ ладей и в оставшихся столбцах также ровно $n-1$ ладей. Значит, общее число ладей не превосходит $2n-2$. Противоречие.

Круги, многоугольники, площадь

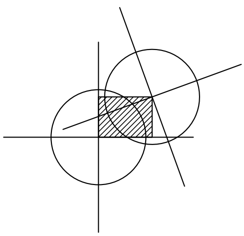
5.137. Каждый из меньших треугольников не может накрывать более одной вершины большего треугольника.

5.138. Может (см. рис.).



К 5.138

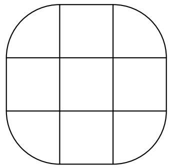
5.139. Пусть S — площадь части плоскости, покрытой 7 многоугольниками, M_1 — сумма площадей многоугольников, M_2 — сумма площадей всех пересечений двух многоугольников. Тогда с помощью формулы включений и исключений можно доказать, что $S \geqslant M_1 - M_2$, т. е. $4 \geqslant 7 - M_2$, откуда $M_2 \geqslant 3$. Так как из 7 многоугольников можно образовать $7 \cdot 6/2 = 21$ пару, площадь общей части одной из пар не меньше $M_2/21 \geqslant 1/7$.



К 5.140

5.140. Для каждого креста рассмотрим круг радиуса $1/(2\sqrt{2})$ с центром в центре креста. Докажем, что если пересекаются два таких круга, то пересекаются и сами кресты. Расстояние между центрами пересекающихся равных кругов не превосходит их удвоенного радиуса, поэтому расстояние между центрами соответствующих им крестов не превосходит $1/\sqrt{2}$. Рассмотрим прямоугольник, заданный перекладинами первого креста и центром второго (см. рис.). Одна из перекладин второго креста проходит через этот прямоугольник, поэтому она пересекает первый крест, так как длина перекладины равна $1/\sqrt{2}$, а длина диагонали прямоугольника не превосходит $1/\sqrt{2}$. В круге конечного радиуса можно разместить лишь конечное число непересекающихся кругов радиуса $1/(2\sqrt{2})$.

5.141. Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, удалённых от квадратика со стороной 1 на расстояние не больше 1 (см. рис.). Ясно, что круг радиуса 1, центр которого расположен вне этой фигуры, не пересекается с квадратиком. Площадь такой фигуры равна $\pi + 5$. Центр нужного круга должен также находиться на расстоянии больше 1 от сторон большого квадрата, т. е. внутри квадрата со стороной 13. Ясно, что 20 фигур площадью $\pi + 5$ не могут покрыть квадрат со стороной 13, так как $20(\pi + 5) < 13^2$. Круг с центром в непокрытой точке обладает требуемым свойством.



К 5.141

5.142. Заметим сначала, что точка X принадлежит кольцу с центром O тогда и только тогда, когда точка O принадлежит такому же кольцу с центром X. Поэтому достаточно доказать, что если построить кольца с центрами в данных точках, то одну из точек рассматриваемого круга покроет не менее 10 колец. Рассматриваемые кольца лежат внутри круга радиуса $16 + 3 = 19$, площадь которого равна 361π. Но $9 \cdot 361\pi = 3249\pi$, а суммарная площадь колец равна $650 \cdot 5\pi = 3250\pi$.

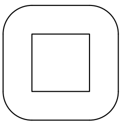
5.143. Нет. Две вершины большого квадрата не могут быть покрыты одним маленьким, так как расстояние между вершинами не меньше 1,5, а наибольшее расстояние между точками единичного квадрата равно длине его диагонали, т. е. $\sqrt{2} < 1{,}5$. Поэтому для покрытия большого квадрата требуется не меньше четырёх единичных квадратов (по числу его вершин).

5.144. Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки. Пусть он имеет k вершин. Если $k = 102$, то этот 102-угольник можно разбить на 100 треугольников диагоналями, выходящими из одной вершины.

Если же $k < 102$, то внутри k-угольника лежит $102 - k$ точек. Соединим одну из внутренних точек с вершинами k-угольника. При этом получим k треугольников. С остальными внутренними точками проделаем следующую операцию. Если эта точка лежит строго внутри одного из полученных ранее треугольников, то соединим её с вершинами этого треугольника. Если точка лежит на общей стороне двух треугольников, то соединим её с вершинами этих треугольников, противолежащими общей стороне. После каждой такой операции в обоих случаях число треугольников увеличивается на 2. В результате всего получится $k + 2(102 - k - 1) = 204 - k - 2$ треугольников. Так как $k < 102$, то $204 - k - 1 > 102 - 2 = 100$. Сумма площадей треугольников разбиения меньше 1, а их количество не меньше

100, поэтому площадь хотя бы одного из них не превосходит 1/100.

5.145. Докажем, что если площадь треугольника больше 1, и он расположен в круге радиуса 1, то он содержит центр круга. Поскольку площадь треугольника больше 1, а стороны не больше 2 (2 — диаметр круга), то все его высоты больше 1. Но треугольник — пересечение трёх полос, края которых параллельны сторонам, а ширина равна соответствующей высоте треугольника, а поскольку оба края каждой полосы пересекают круг и её ширина больше 1, она содержит центр круга (внутренней точкой). Тогда и треугольник содержит центр круга. Следовательно, если два треугольника с площадью, большей 1, лежат в круге, то они содержат центр круга, а стало быть, пересекаются.



К 5.146

5.146. Центр круга диаметра 1, целиком помещающегося внутри прямоугольника, должен быть расположен на расстоянии, большем 1/2, от любой из сторон прямоугольника, т. е. внутри «рамки». Площадь «рамки» равна $19 \cdot 24 = 456$. Кроме того, центр круга должен быть расположен на расстоянии, большем 1/2, от контура любого из квадратов, т. е. вне фигурки, показанной на рисунке. Она имеет площадь $3+\pi/4$, поэтому даже если эти фигурки не пересекаются и не задевают рамку, их суммарная площадь равна $120(3+\pi/4) = 360+30\pi < 360+30\cdot 3{,}2 = 456$. Итак, этими фигурками покрыть прямоугольник площади 456 нельзя и, следовательно, найдётся круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним квадратом.

5.147. Решим эту задачу для произвольного выпуклого n-угольника площади S и периметра P. Пусть даны стороны этого многоугольника $a_1, \ldots, a_n$ $(a_1 + \ldots + a_n = P)$. Рассмотрим прямоугольник площади S с основанием P, высота его равна, очевидно S/P. Разрежем теперь этот прямоугольник вертикальными отрезками на n прямоугольников с основанием $a_1, \ldots, a_n$ и приложим каждый из получившихся прямоугольников к соответствующей стороне внутри. Некоторые прямоугольники будут налезать друг на друга, некоторые будут «вылезать» за пределы данного многоугольника, и поэтому, поскольку их общая площадь равна S, а площадь многоугольника тоже S, не покроют его целиком. Любая непокрытая точка может служить центром требуемого круга радиуса S/P.

5.148. Обозначим данные фигуры через $\Phi_1, \ldots, \Phi_{1975}$, фигуры, дополняющие их до квадрата, соответственно через $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_{1975}$.

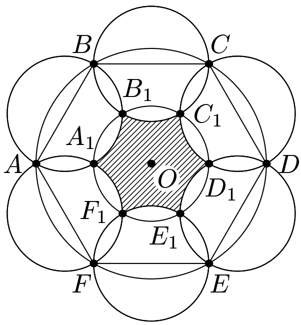
Пусть S_i и S'_i — площади фигур Φ_i и Φ'_i $(i = 1, \ldots, 1975)$, тогда $S_i + S'_i = S$. По условию $S_1 + \ldots + S_{1975} > 1974S$, поэтому

$$S'_1 + \ldots + S'_{1975} = (S - S_1) + (S - S_2) + \ldots + (S - S_{1975}) = \\ = 1975S - (S_1 + \ldots + S_{1975}) < 1975S - 1974S = S.$$

Итак, сумма площадей дополняющих фигур меньше площади квадрата и, значит, найдётся точка M квадрата, не принадлежащая ни одной из этих фигур. Тогда точка M принадлежит каждой из фигур Φ_i, т. е. является искомой.

Заметим, что в квадрате площадью S можно расположить 1975 фигур $\Phi_1, \ldots, \Phi_{1975}$, сумма площадей которых равна $1974S$ и таких, что у этих фигур не будет ни одной общей точки. В самом деле, из рассуждений, приведённых в решении задачи, следует, что достаточно, чтобы фигуры $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_{1975}$ сумма площадей которых равна S, полностью покрывали квадрат. В качестве таких фигур можно взять фигуры, образующие произвольное разбиение квадрата на 1975 непересекающихся фигур. Их дополнения — фигуры $\Phi_1, \ldots, \Phi_{1975}$ — и будут искомыми фигурами.

5.149. Пусть O — центр данного круга радиуса 2. Впишем в окружность, являющуюся его границей, правильный шестиугольник $ABCDEF$ (см. рис.). Его сторона равна 2. С центрами в серединах сторон этого шестиугольника построим шесть кругов радиусом 1. Окружности, являющиеся границами этих кругов, пересекаются в точках A, B, C, D, E, F, а также в точках A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 — вершинах правильного шестиугольника со стороной 1. Шесть построенных кругов покроют лишь часть круга радиуса 2: фигура, закрашенная на рисунке, останется непокрытой. Но её, как легко видеть, можно покрыть кругом радиуса 1 с центром в точке O. Итак, круг радиуса 2 можно полностью покрыть семью кругами радиуса 1.



К 5.149

Покажем, что шестью кругами радиуса 1 круг радиуса 2 не может быть покрыт. Так как круг радиуса 1 может покрыть не больше $1/6$ окружности радиуса 2, то вся эта окружность не может быть покрыта менее чем шестью кругами радиуса 1. При этом она может быть покрыта ими единственным способом, который указан на рисунке. Но тогда точка O останется непокрытой, так что требуется по крайней мере ещё один, седьмой, круг.

Сферы, кубы и т. д.

5.150. Для каждой точки рассмотрим диаметрально противоположную ей. Так как суша занимает более половины площади планеты, найдутся две такие точки на суше.

5.151. Среди чисел 1–6 есть 5 пар соседних чисел: $(1;2), \ldots,$ $(5;6)$. Каждая такая пара может быть написана либо на двух соседних гранях куба, либо на двух противоположных. Но пар противоположных граней у куба 3. Значит, по крайней мере две такие пары занимают соседние грани. Лёша прав.

5.152. Суммы номеров на концах рёбер могут принимать значения от $1+2=3$ до $7+8=15$ — всего 13 различных значений. Покажем, что из сумм 3, 4, 5 и 6 одна получиться не может. Допустим, что среди сумм есть такие: $1+2=3$, $1+3=4$, $1+4=5$. Тогда 6 получить нельзя, так как числа 1 и 5, 2 и 4 находятся на разных рёбрах. Аналогично, из сумм 12, 13, 14 и 15 одна получиться не может.

5.153. Если у многогранника n граней, то каждая его грань может иметь от 3 до $n-1$ сторон, а, значит, менее n различных сторон.

5.154. Можно. Разобьём куб на $13^3 = 2197$ кубиков с ребром 1.

5.155. Проведем через центр планеты и любую пару астероидов плоскость П. Проведем ось планеты, перпендикулярную плоскости П. Она пересекает ось планеты в «полюсах» A и B. Тогда наблюдатели в A и B видят вместе лишь $37-2=35$ астероидов (или меньше, если на П есть ещё астероиды), а потому один из них видит менее 18 астероидов.

5.4. Окраска плоскости и её частей. Таблицы

5.156. Возьмём равносторонний треугольник со стороной длины 1. Из трёх его вершин по меньшей мере две — одного цвета.

5.157. Возьмём любые точки A и B разного цвета. Если $AB < 1$, то возьмём точку C, на расстоянии 1 от A и от B. Тогда две из этих точек разного цвета. Если $AB > 1$, то на отрезке AB от точки A будем откладывать отрезки AM_1, M_1M_2, и т. д. длины 1. Тогда либо среди этих точек найдутся две разного цвета, либо найдётся точка M_n такая, что $M_nB \leqslant 1$.

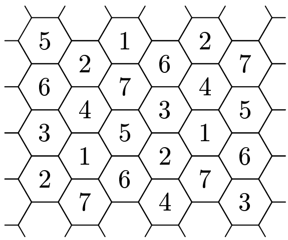
5.158. 8, 8 и 8. При каждой из 8 вершин по 3 квадрата разных цветов.

5.159. Возьмём правильный пятиугольник. Из пяти его вершин хотя бы три одного цвета, причём они образуют равнобедренный треугольник.

5.160. У семиугольника всегда есть две соседние вершины (например, 1 и 2) одного цвета. Если среди вершин 3, 5 и 7 есть вершина того же цвета, то она с этими двумя образует равнобедренный треугольник. В другом случае все они (3, 5 и 7) другого цвета. Для восьмиугольника — неверно (в чёрный цвет надо покрасить вершины 1, 2, 5 и 6).

5.161. Допустим противное. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, все его вершины разного цвета. Рассмотрим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой BC. Тогда A_1 одного цвета с A и окружность с центром A и радиуса AA_1 должна быть окрашена в тот же цвет. На этой окружности найдутся две точки, расстояние между которыми равно 1.

5.162. Предположим, что нет прямоугольного треугольника с вершинами одного цвета. Разделим каждую сторону правильного треугольника двумя точками на три равные части. Эти точки образуют правильный шестиугольник. Если две его противоположные вершины одного цвета, то все остальные вершины будут второго цвета, а значит, есть прямоугольный треугольник с вершинами второго цвета. Значит, противоположные вершины шестиугольника разноцветные. Поэтому найдутся две соседние разноцветные вершины; противоположные им вершины тоже разноцветные. Одна из этих пар разноцветных вершин лежит на стороне треугольника. Точки этой стороны, отличные от вершин шестиугольника, не могут быть ни первого, ни второго цвета. Получено противоречие.



К 5.163

5.163. Раскраска состоит в том, что блок из семи правильных шестиугольников со стороной 0,45, раскрашенных в цвета 1–7 (см. рис.), повторяется во все стороны. Нетрудно показать, что расстояние между точками различных одноцветных шестиугольников при такой раскраске больше 1. (Оно не меньше $0{,}45\sqrt{7}$.)

5.164. Рассмотрим две точки одного цвета X и Y. Пусть Y_1 такая, что X — середина YY_1, а X_1 — такая, что Y — середина XX_1, O — середина XY. Если одна из этих трёх точек одного цвета с X и Y, то она вместе с X и Y образуют искомую тройку. Если Y_1, O и X_1 другого цвета, то они будут искомой тройкой.

5.165. Рассмотрим правильный тетраэдр с ребром 1 см, расположенный целиком внутри булки. Для каждой из его вершин есть одна из трёх возможностей — либо находиться внутри изюмины одного из двух сортов, либо не принадлежать никакой изюмине. Вершин — 4, а возможностей — 3.

5.166. Возьмём три вертикальные прямые и девять горизонтальных. Будем рассматривать только точки пересечения этих прямых. Так как имеется лишь 8 вариантов раскраски трёх точек в два цвета, то найдутся две горизонтальные прямые, на которых лежат одинаково раскрашенные тройки точек. Среди трёх точек, раскрашенных в два цвета, найдутся две одинаково раскрашенные точки. Вертикальные прямые, проходящие через эти точки, вместе с ранее выбранными двумя горизонтальными являются искомыми.

5.167. Пусть нет равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, параллельными сторонами клеток, и вершинами одного цвета. Будем считать, что раскрашены не узлы, а клетки. Разобьём лист на квадраты со стороной 4; тогда на диагонали каждого такого квадрата найдутся 2 клетки одного цвета. Пусть число n больше количества различных раскрасок квадрата со стороной 4. Рассмотрим квадрат, состоящий из n^2 квадратов со стороной 4. На его диагонали найдутся два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4. Возьмём, квадрат K, на диагонали которого найдутся два одинаково раскрашенных квадрата со стороной $4n$. Рассмотрев квадрат со стороной $4n$ и в нем два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4, получим четыре клетки одного цвета, две клетки второго цвета и одну клетку третьего цвета. Аналогично, рассмотрев квадрат K, получим клетку, которая не может быть ни первого, ни второго, ни третьего цвета.

5.168. а) , б) 32 поля. Разбейте доску на 16 квадратиков 2×2.

5.169. 32.

5.170. Не может. Все 22 суммы лежат между $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{10} = 10$ и $\underbrace{3 + \ldots + 3}_{10} = 30$ — всего 21 число.

5.171. В каждой строке есть не менее трёх клеток, окрашенных в один цвет. Так как строк пять, то найдутся три, в каждой из которых не менее трёх клеток одного цвета. Рассмотрим две из этих трёх строк. Если в них нет двух столбцов одного цвета, т. е. один столбец одного цвета, а в остальных четырёх столбцах по одной клетке одного цвета. Поэтому, добавляя третью строчку, мы обязательно получим требуемое в задаче.

5.172. Возьмём горизонтальную полосу шириной 7 клеток. Так как число способов окраски конечно, то найдутся два одинаково окрашенных вертикальных столбика. В каждом из них 7 клеток, окрашенных в 6 цветов, поэтому по принципу Дирихле в каждом столбике найдутся 2 одинаково окрашенные клетки, находящиеся на одной диагонали.

5.173. Так как от любой клетки до любой другой можно добраться, не более 19 раз сдвинувшись в соседнюю клетку, то все числа находятся между a и $a+95$, где a — минимальное число из всех расставленных чисел. Значит, среди этих чисел не более 96 разных.

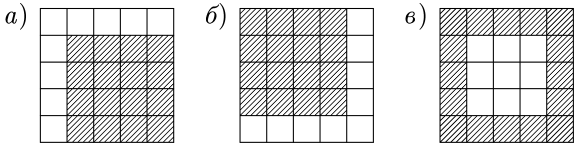
5.174. Все квадратики можно разбить на 9 групп по тому, на какой горизонтали находится их левая нижняя клетка. Рассмотрим ту группу, которой принадлежит по меньшей мере 7 квадратиков. Разделим эти квадратики на три подгруппы: с левой нижней клеткой на 1–3-й, 4–6-й и 7–9-й вертикалях. Хотя бы одна из этих подгрупп содержит три квадратика, тогда центральный из них можно убрать, т. к. он покрывается крайними.

5.175. Рассмотрим две клетки, в которых стоят числа 1 и 81, и соединим их цепочкой из соседних клеток. Если хотя бы одна из клеток — не угловая, то цепочка содержит не более 16 клеток, в которых стоят числа $a_1 = 1$, $a_2, \ldots, a_n = 81$. Тогда $(a_n - a_{n-1}) + \ldots + (a_2 - a_1) = a_n - a_1 = 81 - 1 = 80$. Разностей в данном случае не больше 15, и если бы каждая разность была меньше 6, то их сумма была бы меньше $15 \cdot 5 = 75$. Итак, среди разностей есть не меньшие 6.

Числа 1 и 81 стоят в угловых клетках, лежащих на одной диагонали; соединим их двумя цепочками длиной в 17 клеток каждая и составим 16 разностей. Имеем:

$$80 = (81 - a_{16}) + \ldots + (a_2 - 1) = (81 - b_{16}) + \ldots + (b_2 - 1),$$

поэтому, если в первой цепочке нет разностей, больших 5, то, поскольку сумма 16 разностей равна 80, каждая разность равна 5, значит, в клетках этой цепочки стоят числа $1, 6, 11, \ldots, 81$, поэтому этих чисел (кроме 1 и 81) нет во второй цепочке, т. е. не могут



К 5.176

все разности второй цепочки равняться 5, а если какая-то из них меньше 5, то найдётся разность, большая 5.

5.176. Допустим, что в нашем квадрате нет закрашенных уголков. Тогда в любом квадратике 2×2 не менее двух чистых клеток. Рассмотрим закрашенный на рис. *а* квадрат K. Так как он разбивается на 4 квадрата 2×2, то в нем не менее 8 чистых клеток, значит, вне него — максимум одна чистая клетка.

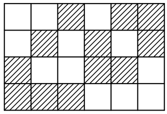
Аналогично, вне квадрата M (рис. *б*) также не более одной чистой клетки. Дополнения до квадратов K и M составляют «граничный пояс» L (рис. *в*), в котором находится не более двух чистых клеток. Но L содержит четыре непересекающихся уголка, значит, не меньше двух из них закрашены полностью. Противоречие.

5.177. Из 41 столбца найдётся 21, в которых не менее трёх клеток одного цвета, например, чёрного. Так как всего 10 вариантов раскраски в чёрный цвет столбца и $21 = 2 \cdot 10 + 1$, то найдётся три столбца с одинаковой чёрной окраской.

5.178. Считаем, что $A_1 < A_2 < \ldots < A_n$. Выберем номер i, для которого среди точек $A_1, \ldots, A_i$ есть точки всех четырёх цветов. Тогда цвет A_i отличен от цветов $A_1, \ldots, A_{i-1}$. Теперь выберем наибольший номер $j < i$, для которого среди точек $A_j, \ldots, A_i$ есть точки всех четырёх цветов. Отрезок $[A_j, A_i]$ — искомый.

5.179. На произвольной прямой выберем 7 точек. Их них по меньшей мере 4 окрашены в один цвет, скажем, в красный. Обозначим их P_1, P_2, P_3, P_4. Рассмотрим ещё две прямые, параллельные первоначальной и две четвёрки точек (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) и (R_1, R_2, R_3, R_4), полученные проектированием выбранной четвёрки на эти прямые. Если в одной из этих четвёрок есть хотя бы две красные точки, то все вершины прямоугольника с вершинами в них и соответствующих точках четвёрки P_i — красные. В противном случае три (или более) точек из Q_i и три (или более) точек из R_i должны быть голубыми. Но эти тройки голубых точек расположены так, что среди них обязательно найдутся по паре точек, лежащих одна под другой и, таким образом, образующие голубой прямоугольник.

5.180. а) Ясно, что если есть столбец из клеток одного цвета (например, чёрного), то в остальных столбцах есть не более одной клетки чёрного цвета. Легко видеть, что два таких столбца образуют белый прямоугольник.



К 5.180

Далее, пусть есть столбец с тремя чёрными клетками. Тогда в этих трёх строках других столбцов не более одной чёрной клетки. Поскольку их шесть, а вариантов лишь четыре (без чёрной клетки и с ней в каждой из этих строк), то будут два столбца с одинаковыми клетками в этих строках. Они задают белый прямоугольник.

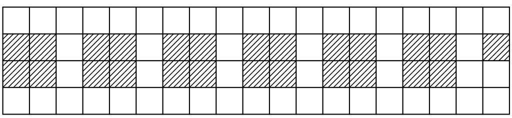
Наконец, пусть в каждом столбце ровно две чёрные клетки. Тогда, т. к. вариантов их размещения в столбце лишь 6, а столбцов 7, в двух столбцах расстановки совпадут, и они образуют прямоугольник. б) См. рис.

5.181. Ясно, что расположение 7 звёздочек, показанное на рисунке, удовлетворяет условию задачи. Если же звёздочек 6 или меньше, то найдутся два столбца, в каждом из которых стоит не более одной звёздочки. Вычеркнем оставшиеся два столбца. После этого останется не больше двух звёздочек, которые можно вычеркнуть вместе со строками, в которых они стоят.

	*	*	
	*		*
		*	*
*			

К 5.181

5.182. Занумеруем строки и столбцы на бесконечной клетчатой бумаге следующим образом. Присвоим номер 1 самому левому из столбцов, содержащих чёрные клетки. Столбцам вправо от него присвоим номера 2, 3, ... Аналогично присвоим номер 1 самой нижней из строк, содержащих чёрные клетки, и номера 2, 3, ... строкам над строкой с номером 1. Две чёрные клетки имеют хотя бы одну общую вершину тогда и только тогда, когда номера строк и номера столбцов, в которых расположены эти клетки, отличаются не более чем на 1.

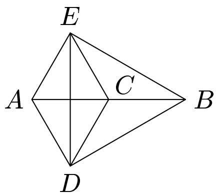


К 5.182

Рассмотрим 4 множества чёрных клеток $M(ч,н)$, $M(н,ч)$, $M(ч,ч)$, $M(н,н)$, где $M(ч,н)$ — множество всех чёрных клеток, стоящих в строках с чётными номерами и в столбцах с нечётными номерами, и т. п. Каждая чёрная клетка принадлежит ровно одному из этих множеств. Так как всего чёрных клеток 25, то в одном из этих множеств (обозначим его через M_0) содержится не менее 7 клеток.

Любые две разные клетки множества M_0 не имеют общих вершин, так как номера их строк (номера их столбцов) имеют одинаковую чётность, и, значит, либо номера строк отличаются не менее чем на два, либо не менее чем на два отличаются номера столбцов. Итак, при любом расположении раскрашенных клеток найдутся 7 из них, не имеющих общих вершин и поэтому $k \geqslant 7$. Для расположения на рисунке, более 7 клеток, попарно не имеющих общих вершин, выбрать нельзя, поэтому $k \leqslant 7$. Следовательно, $k = 7$.

5.183. Эти суммы могут принимать лишь 7 разных значений: от (-3) до 3.

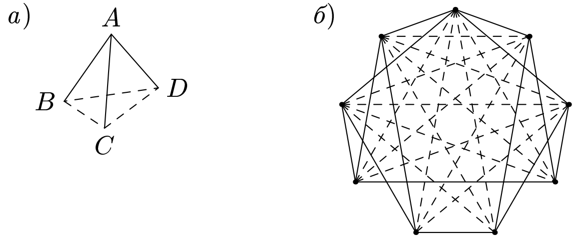


К 5.184

5.184. а) Возьмём отрезок AB длиной 2 с разноцветными концами. Такой отрезок существует: в противном случае все точки окружности радиуса 2 с центром в произвольной точке O были бы окрашены в тот же цвет, что и точка O, а всевозможные окружности радиуса 2 с центром на окружности заполнили бы круг радиуса 4 с центром O, все точки которого были бы одного цвета, что невозможно. Пусть цвет точки C — середины отрезка AB — совпадает с цветом точки A. Построим правильные треугольники ACD и ACE по разные стороны от прямой AB (см. рис.). По условию точки D и E окрашены в тот же цвет, что и точка B, поэтому треугольник BDE будет искомым.

б) Разобьём плоскость на горизонтальные полосы шириной $\sqrt{3}/2$, включающие свои верхние границы, но не включающие нижние границы, и раскрасим их так, чтобы соседние имели разный цвет.

5.185. Выделим на листе бумаги горизонтальную полосу шириной в $n+1$ клетку. Каждый вертикальный столбик этой полосы содержит $n+1$ клеток, которые окрашены не более чем в n цветов. Значит, в каждом вертикальном столбике имеется не менее двух клеток одного цвета. Число столбиков в выделенной полосе бесконечно, а число всевозможных способов раскраски клеток в столбике конечно (оно равно n^{n+1}). Поэтому в выделенной бесконечной полосе обязательно найдутся два одинаково раскрашенных



К 5.188

столбика, а в них — 4 клетки одного цвета (по две в каждом столбике), являющиеся угловыми в некотором прямоугольнике со сторонами, параллельными прямым линиям на бумаге. Указанные четыре клетки одного цвета являются искомыми.

Аналогично доказывается, что найдутся четыре клетки одного цвета, центры которых являются вершинами некоторого прямоугольника со сторонами, параллельными биссектрисам углов клеток.

5.186. а) 11 фигур. В каждом квадрате 2×2 должно быть покрыто не менее двух клеток. б) Утверждение справедливо для квадрата 7×7. Если оно справедливо для доски $(6n+1) \times (6n+1)$, то в одном из углов квадрата $(6n+7) \times (6n+7)$ поместим квадрат $(6n+1) \times (6n+1)$, закрывающий вырезанную клетку, а оставшуюся часть разрежем на прямоугольники 2×3.

5.187. Допустим противное. Тогда в любых двух строках разное количество клеток красного цвета, и всего их в таблице не менее $0+1+\ldots+13+14 = 105$. Аналогично для синих и зелёных клеток. Тогда всего в таблице должно быть не менее $3 \cdot 105 = 315$ клеток, в то время как всего в ней $15 \cdot 15 = 225$ клеток. Значит, найдутся по крайней мере две строки с одинаковым количеством клеток какого-либо цвета.

5.188. $n = 33$. Легко подсчитать, что 9 точек соединяются 36 отрезками. Если закрашено 33 отрезка, то три отрезка остаются незакрашенными. Выберем такие 3 точки из 9, которые служат концами трёх незакрашенных отрезков. Тогда остальные 6 точек соединены между собой закрашенными отрезками. Покажем, что среди них найдётся одноцветный треугольник. Выберем любую из указанных 6 точек. Из неё исходят 5 отрезков к 5 другим точкам. Среди них найдутся 3 отрезка одного цвета (см. рис. a), например AB, AC, AD. Тогда один из четырёх получившихся треугольников (ABC, ACD, ABD и BCD) имеет стороны одного цвета.

	*	*	*			
*	*					*
*		*			*	
*			*	*		
			*		*	*
		*		*		*
	*			*	*	

*							*	*	*			
					*	*	*					*
				*		*		*			*	
				*	*				*	*		
		*	*	*			*					
	*		*		*			*				
	*	*				*			*			
*	*			*								*
*		*			*						*	
*			*			*				*		
			*						*		*	*
		*						*		*		*
	*						*			*	*	

К 5.189

С другой стороны, есть пример раскрашивания 32 отрезков (см. рис. *б*, где сплошные линии обозначают синий цвет, а пунктирные — красный). Значит, наименьшее число n отрезков, такое, что при любом раскрашивании их в два цвета найдётся одноцветный треугольник, равно 33.

5.189. а) $k = 21$; б) $k = 52$. Оценим количество точек, которое можно нужным образом разместить в квадрате $m\times m$. Пусть x_i — число точек в строке с номером i и $x_1 + \ldots + x_m = k$. Если в некоторой строке отмечены какие-то две клетки, то ни в какой другой строке такая же пара клеток не может быть отмечена. Всего в i-й строке отмечено $\frac{1}{2}x_i(x_i - 1)$ пар клеток. Так как все отмеченные пары различны, то их суммарное число не больше общего числа возможных пар, т. е.

$$\frac{1}{2}x_1(x_1 - 1) + \ldots + \frac{1}{2}x_m(x_m - 1) \leqslant \frac{1}{2}m(m - 1).$$

Отсюда $x_1^2+\ldots+x_m^2 \leqslant m(m-1)+x_1+\ldots+x_m = m(m-1)+k$ так как $x_1^2+\ldots+x_m^2 \geqslant (x_1+\ldots+x_m)^2/m = k^2/m$, то $k^2/m \leqslant m(m-1)+k$. Отсюда $k \leqslant \frac{1}{2}(m + m\sqrt{4m-3})$. При $m = 7$ и $m = 13$ получаем 21 и 52.

Укажем способ построения примеров, реализующих точную оценку. В пункте а) в качестве «номеров» строк (а также столбцов) используем тройки из чисел 0 и 1, отличные от $(0;0;0)$. Их как раз семь: $(1;1;1)$, $(1;1;0)$, $(1;0;1)$, $(0;1;1)$, $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$. Клетку на пересечении строки (a_1, a_2, a_3) и столбца (x_1, x_2, x_3) отмечаем, если $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ чётно. В примере б) в качестве «номеров» строк и столбцов используем тройки из чисел 0, 1 и -1, отличные от $(0;0;0)$, причём из двух троек, получающихся одна из другой умножением на -1, используется лишь одна. Их как раз 13: $(1;1;1)$, три перестановки $(1;1;0)$, три перестановки $(1;1;-1)$, три перестановки $(1,-1;0)$ и три перестановки $(1;0;0)$. Клетку на пересечении строки (a_1, a_2, a_3) и столбца (x_1, x_2, x_3) отмечаем, если $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ делится на 3.

Замечание. Это — конструкции конечных проективных плоскостей над полем из $p = 2$ и $p = 3$ элементов: столбцам соответствуют точки, строкам — прямые проективной плоскости, а требуемое в условии свойство таблицы сводится к тому, что через каждые две точки проходит одна прямая и каждые две прямые пересекаются в одной точке (прямая (a_1, a_2, a_3) содержит точку (x_1, x_2, x_3), если $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ равно 0 по модулю p). Можно убедиться, что последнее неравенство превращается в равенство лишь при $m = p^2 + p + 1$, где p — натуральное число, при этом $k = (p+1)(p^2 + p + 1)$.

Вопрос о том, существует ли для таких m и k соответствующая таблица, очень сложен: он сводится к (нерешённой в общем виде) проблеме существования конечных проективных плоскостей порядка p, во всяком случае, при простом p (или равном степени простого числа) ответ на этот вопрос положителен.

5.190. Разобьём все точки M на 12 строк (по одной координате) и 12 столбцов (по второй координате). Есть цвет, в который окрашено не менее 48 точек. Выберем 48 точек. Число выбранных точек в столбце со второй координатой, равной $1, \ldots, 12$, обозначим $a_1, \ldots, a_{12}$ соответственно ($a_1 + \ldots + a_{12} = 48$). Тогда количество пар выбранных точек в i-м столбце равно $a_i(a_i - 1)/2$, а общее число пар точек, у которых вторые координаты совпадают, равно

$$A = \frac{a_1(a_1-1)}{2} + \ldots + \frac{a_{12}(a_{12}-1)}{2} = \frac{(a_1^2 + \ldots + a_{12}^2)}{2} - \frac{a_1 + \ldots + a_{12}}{2}.$$

Из $a_1^2 + \ldots + a_{12}^2 \geqslant (a_1 + \ldots + a_{12})^2/12$ имеем $A \geqslant 72$. Каждой паре точек, лежащих в одном столбце, соответствует пара строк, в которых эти точки находятся. Так как количество разных пар строк, равное $C_{12}^2 = 66$, меньше числа A, то найдутся две пары выбранных точек, которым соответствует одна и та же пара строк. Эти четыре точки — вершины искомого прямоугольника.

5.191. Всегда можно. Доказательство проведем индукцией по числу точек. База (одна точка) очевидна. Для доказательства перехода разберём возможные варианты расположения точек.

Случай 1. В M есть четыре точки, являющиеся вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат.

Удалим эти точки, а оставшееся множество окрасим с сохранением требуемого условия, это можно сделать по предположению индукции. В прямоугольнике две точки окрасим в белый цвет, а две — в красный так, чтобы диагонали имели одноцветные концы, тогда разность между числом белых и красных точек ни на одной прямой не изменится, а нужное условие сохранится и для полученной окраски множества M.

Случай 2. M не содержит прямоугольников, но содержит «уголок» — такие три точки A, B, C, что прямая AB параллельна одной оси координат, а прямая BC — другой. Удалим из множества M точки A, B, C, но добавим к множеству M точку D такую, что $ABCD$ — прямоугольник. Полученное множество окрасим нужным образом, что можно сделать по предположению индукции. Далее, удалив D и добавив точки A и C, окрашенные в тот же цвет, что и D, и точку B, окрашенную в противоположный цвет, получим нужную окраску множества M.

Случай 3. Множество M не содержит уголков и прямоугольников, но содержит более чем одну точку на какой-либо прямой l, параллельной оси координат. Тогда точки вне прямой l окрашиваем нужным образом, что можно сделать по предположению индукции, а на прямой l — произвольным образом, лишь бы число белых точек на l отличалось от числа красных не более чем на единицу.

Случай 4. Все точки «изолированные», т. е. на каждой прямой l, параллельной оси координат, расположено не более одной точки множества M. В этом случае любая окраска удовлетворяет условию.

6. ГРАФЫ

6.1. С З до М добраться нельзя (нарисовать схему).

6.2. Нет. Можно ехать лишь следующим образом:

$$20 \to 7 \to 15 \to 2 \to 10 \to 18 \to 5 \to 13,$$

а с 13-го этажа уехать нельзя.

6.3. К вечеру 12-го дня.

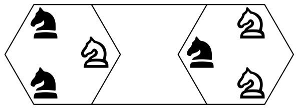
6.4. 24. После каждой встречи один борец выбывает. В конце остается 1 борец, значит, выбыть должно 24.

6.5. 28. См. 4.20.

6.6. Нельзя. Рассмотрите остатки от деления на 9.

6.7. Можно.

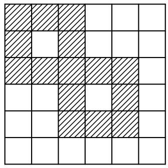
6.8. Развернув граф возможных ходов в круг, получим, что вначале кони стояли так, как на рис. 6.5, *а*), а в конце должны поменяться местами. Ясно, что при этом каждый конь должен сделать четыре хода, а меньшим числом ходов обойтись не удастся, т. к. кони не могут перепрыгивать друг через друга.



К 6.10

6.9. Развернув диаграмму в окружности (см. 6.8), мы увидим, что кони нанизаны на нить в следующем порядке: чёрный, красный, чёрный, белый. Значит, поменять их можно, если сделать каждым конём по четыре хода в одном направлении.

6.10. Указание. Диаграмму, изображающую возможные ходы коней, можно развернуть и уложить так, как показано на рисунке. На этом графе задачу решать гораздо легче. Можно найти минимальное решение в 18 ходов.



К 6.11

6.11. а) Можно (см. рис.). б) Нельзя. Пусть $a_1, \ldots, a_{15}$ — число соседей каждой из 15 закрашенных клеток. Тогда они имеют всего общих сторон $(a_1 + \ldots + a_{15})/2$ — не целое число.

6.12. Пусть A — любая станция метро. Тогда следует закрыть такую станцию метро, до которой от A дальше всего (по числу остановок).

6.13. Пусть A — вершина многогранника, и $AA_1, \ldots, AA_n$ — рёбра, из неё выходящие. Ребро AA_1 красим в синий цвет, остальные рёбра — в красный. Все звенья ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$ красим в синий цвет, а ребро A_1A_2 — в красный. Последовательно добавляем грани, примыкающие к уже покрашенной части многогранника. Если у грани оказались два покрашенных ребра, то третье ребро красим любым цветом, если покрашено одно ребро, то оставшиеся два красим разными цветами.

Легко видеть, что в каждый момент все вершины уже рассмотренных граней соединены как ломаной из синих рёбер, так и из красных.

6.14. Объявим каждую из k столиц столицей республики. Затем рассмотрим все города, соединённые со столицей одной дорогой, и присоединим их к тем республикам, со столицами которых они соединены (если таких столиц несколько, выберем любую из них). Далее, берем города, ещё не вошедшие ни в одну из республик и соединённые одной дорогой с каким-либо городом какой-нибудь республики, и распределяем их между республиками, с которыми они соединены (всё равно как). Так как из любого города в любой можно проехать, то за конечное число шагов все города будут распределены по республикам. Заметим, что если город был приписан к республике на n-м шаге, то путь от него до любой из столиц составляет не менее n дорог, причём один из путей в n дорог содержится в той республике, к которой присоединён город.

6.15. Из условия следует, что существуют города A и B такие, что из A нельзя попасть в B. Предположим, что отделились города, в которые нельзя попасть из A. Если из A можно попасть в C, а D — город из отделившейся части, то в D нельзя попасть из C, так как иначе можно было бы из A через C перелететь в D. Значит, отделившаяся часть городов удовлетворяет требуемому условию.

6.16. Индукция по n — жителей города. При $n = 1, 2$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 3$, а m — общее количество звонков в день. По условию $m \leqslant n$, поэтому найдется житель N, разговаривавший не более чем с двумя жителями (в противном случае $m \geqslant 3n/2 > n$). По предположению индукции, всех жителей города, кроме N, можно разбить на 3 группы так, чтобы выполнялось условие задачи. Житель N не разговаривал с жителями, входящими в одну из групп, поэтому его можно добавить к этой группе, сохранив в силе требуемое условие.

6.1. Подсчёт числа рёбер

6.17. $50 \cdot 8/2 = 200$ дорог.

6.18. Сумма нескольких чётных чисел чётна тогда и только тогда, когда количество нечётных слагаемых в ней чётно.

6.19. Нет. Не существует графа с 15 нечётными (степени 7) вершинами.

6.20. Нельзя. **6.21.** Не существует.

6.22. В графе с 953 вершинами должно быть чётное число нечётных вершин, поэтому у нечётного числа из них число знакомых — чётно.

6.23. Нет, так как 19 нечётных вершин у графа быть не может.

6.24. Нельзя. **6.25.** Не может.

6.26. Нет. Если в государстве k городов, то дорог — $3k/2$, но $3k/2 \neq 100$.

6.27. Верно. **6.28.** Следствие теоремы 1.

6.29. Следует из теоремы 1.

6.30. По теореме 1 число площадей (вершин) — $2n$, число улиц (рёбер) — $2n \cdot 5/2 = 5n$.

6.31. 15 и 12. Пусть m — число мальчиков, n — число девочек, тогда $4m = 5n$ и $m + n = 27$.

6.32. Каждые две вершины графа соединяет одно ребро.

6.33. Нет. Рассмотрим граф, вершины которого — данные отрезки, а ребро соединяет 2 вершины, когда 2 отрезка пересекаются.

6.34. Верно.

6.35. $57 \cdot 3 + 5 = 176$. Число потомков равно количеству рёбер в графе — родословном дереве царя Гвидона.

6.36. в) Рассмотрите произвольный город X, город A, в который из X нельзя долететь не более, чем с одной пересадкой, и город B, в который из X нельзя доехать на поезде не более, чем с одной пересадкой. Заметьте, что эти города соединены каким-то видом транспорта. г) Пусть из A в B нельзя долететь не более, чем с двумя пересадками; из C в D нельзя доехать на поезде не более, чем с двумя пересадками. Рассмотрите граф сообщений четырёх упомянутых городов.

6.37. Докажем две леммы.

Лемма 1. Для каждой остановки можно указать маршрут, который через неё не проходит.

Доказательство. Действительно, если через остановку K проходит только один маршрут, остальные через неё не проходят.

Пусть через K проходят два маршрута KL и KM (L и M — остановки). Из условия 3 есть маршрут LM, а в силу условия 2 этот маршрут не проходит через K.

Лемма 2. Через каждую остановку проходит три маршрута.

Доказательство. В самом деле, из условия 3 с остановки N на остановку P маршрута PQR, не проходящего через N, можно проехать некоторым маршрутом NP, который по условию 2 не проходит через Q и R. Аналогично, должны быть маршруты NQ и NR, отличные от NP и друг от друга. С другой стороны, любой маршрут, проходящий через N в силу условия 2 имеет общую остановку с маршрутом PQR, и, значит, совпадает с одним из маршрутов NP, NQ или NR. На каждом из трёх маршрутов, проходящих через N есть ещё две остановки. В силу условия 3 с N на любую другую остановку можно проехать одним из маршрутов NP, NQ или NR. Тогда в городе $3(3 - 1) + 1 = 7$ остановок и 7 маршрутов.

6.38. Вначале аналогично 6.37 можно доказать, что каждый маршрут имеет одинаковое число n остановок и через каждую остановку проходит ровно n маршрутов. Отсюда можно получить уравнение $n(n-1)+1=57$, $n=8$.

Замечание. В этой задаче рассмотрена проективная плоскость из 57 точек (маршруты — прямые).

6.39. 10 линий. Из условия вытекает, что с данной линии метро можно пересесть максимум на 3 другие линии, с каждой из этих — ещё на две. Поэтому число линий не превышает $1+3+6=10$. Примером схемы с 10 линиями является граф Петерсена (см. 6.44), в котором вершины соответствуют линиям метро, а рёбра — станциям пересадки.

6.40. Пусть на мяче x белых лоскутов, $32-x$ — чёрных. Тогда границ белых с чёрными — $5(32-x)=3x$, отсюда $x=20$.

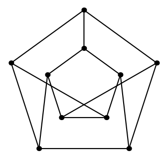
6.41. Из 8 человек каждую задачу не решило трое. Предположим, что не существует двух школьников, которые (вместе) решили все задачи; это означает, что для каждой (неупорядоченной) пары $\{x, y\}$ школьников найдется задача P_{xy}, которую они не решили. Всего существует $8\cdot 7/2=28$ пар $\{x, y\}$. Но каждая из 8 задач может выступать в роли P_{xy} лишь для трёх пар $\{x, y\}$, а $8\cdot 3=24<28$. Получили противоречие.

6.42. Пусть существуют пять городов, соединённых указанным в задаче образом. Докажем прежде всего, что ни из какого города не выходят три линии одного и того же вида транспорта. Пусть город A соединён с городами B, C и D, например, самолётом. Тогда по условию ни одна пара из городов B, C и D не может быть соединена самолётом. Пусть B и C соединены, например, поездом. Города C и D не могут быть соединены автобусом, так как иначе город C имел бы все три вида транспорта. Поэтому C и D соединены поездом. По тем же причинам города B и D также соединены поездом. Получили, что B, C и D попарно соединены поездом. Противоречие. Итак, из каждого города выходят две транспортные линии одного вида и две транспортные линии некоторого другого вида. Тогда каждый город обслуживается ровно двумя видами транспорта. Поэтому хотя бы один вид транспорта обслуживает более чем три города (иначе всего городов было бы не менее чем $4\cdot 3/2=6$). Если он обслуживает ровно два города, то из каждого из этих городов выходит только одна транспортная линия такого вида, что невозможно. Если же он обслуживает ровно три города, то они должны быть соединены попарно этим видом транспорта, что также невозможно. Итак, доказано, что для пяти городов (а значит, и для большего их числа) условие задачи невыполнимо. Если же рассмотреть четыре города A, B, C и D, которые связаны следующим образом: A с B поездом C с D автобусом, а остальные пары самолётом, то все условия задачи будут выполнены. Значит, наибольшее число городов равно 4.

6.43. Назовем длиной пути число отрезков, из которых он состоит. Пусть n — длина кратчайшего пути из A в B. Докажем утверждение задачи индукцией по n.

При $n = 1$ кроме кратчайшего пути AB есть путь, идущий из A в перекрёсток $C \neq A$, удалённый от B на 1, и не проходящий через B. Пусть $n > 1$, D — ближайший к A перекрёсток на кратчайшем пути из A в B. По предположению индукции, существует два непересекающихся пути p и q из D и B. Будем идти из A по пути l, не проходящем через D. Если этот путь не пересекается с путями p и q, то всё доказано. Если же он впервые пересекает, скажем, путь p, то дальше следует идти по p прямо в B. Полученный путь не пересекается с q.

6.44. 10 городов. Из любого города A можно добраться не более, чем до трёх городов, а из каждого из них не более, чем до двух (не считая A). Итак, всего городов не более $1+3+6 = 10$. Пример на рисунке (граф Петерсена) показывает существование нужной системы авиалиний.



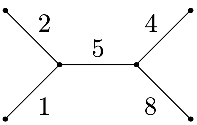
К 6.44

6.45. 20. По условию задачи рядом с каждым мальчикам стоят мальчик и девочка. Значит, один мальчик в окружении двух мальчиков стоять не может, т. е. три мальчика находиться рядом не могут. Не может также один мальчик стоять в окружении двух девочек. Значит, рядом с каждым мальчиком стоит ровно один мальчик, т. е. мальчики располагаются по кругу парами (всего 5 пар), между которыми располагаются девочки.

Между соседними парами мальчиков не могут стоять 1 или 2 девочки, так как при таком расположении через одного от каждой из этих девочек стояли бы мальчики, а не мальчик и девочка, как в условии. Между соседними парами мальчиков не могут стоять и 3 девочки, так как при этом через одну от стоящей в середине девочки стояли бы мальчики. Не могут стоять 5 девочек рядом — в таком случае через одного от девочки, стоящей в середине группы из 5 девочек, стояли бы девочки, а не девочка и мальчик. Остается одна возможность: пары мальчиков чередуются четвёрками девочек (всего 5 четвёрок). Итак, учитель приглашает 20 девочек и расставляет по кругу так: 2 мальчика, 4 девочки, 2 мальчика, и т. д.

6.46. Пусть A, B и C — 3 последовательных пункта на берегу озера. Из условия следует, что A и B соединены тогда и только тогда, когда B и C не соединены.

Итак, все пункты разбиваются на пары соседних, соединённых рейсом теплохода. При этом любые две такие пары соединены, т. е. один из пунктов первой пары соединён с некоторым пунктом второй пары.



К 6.47

6.47. а) Можно (см. рис.). б) Нельзя. Если требуемая сеть дорог существует, то одно из чисел — n или $n-2$ — является квадратом целого числа. Выберем какой-нибудь город A и назовем его «хорошим». Любой город называется «хорошим», если длина пути A и B — чётное число, и «плохим» — если нечётное. Пусть x — число «хороших» городов, y — число «плохих» городов $(x+y=n)$. Всего есть xy пар городов, в которых один город хороший, а другой — плохой. Значит, среди чисел $1, 2, \ldots, n(n-1)/2$ имеется xy нечётных чисел. Если n нечётно, то $n = n - 4xy = (x-y)$, если же чётно, то $n = (x-y)+2$.

6.48. Для организации сообщения необходимо иметь по меньшей мере 21 авиакомпанию, так как общее количество беспосадочных авиалиний не меньше чем $20 + \ldots + 2 + 1 = 210$, а каждая авиакомпания обслуживает $4+3+2+1 = 10$ беспосадочных авиалиний. Пример схемы обслуживания 21 авиакомпанией получается из правильного 21-угольника, в котором города — это вершины 21-угольника, авиалинии — его стороны и диагонали. Первая авиакомпания обслуживает города с номерами $1, 3, 8, 9, 12$, а остальные — города, которые получаются из указанного набора поворотами на углы $360°k/12$, $(k = 1, 2, \ldots, 20)$. Требования задачи выполнены, так как среди отрезков, соединяющих вершины с номерами 1, 3, 8, 9, 12 встречаются по одному разу сторона 21-угольника и его диагонали всех возможных длин.

6.49. n. Так как каждый маршрут имеет не более одного поворота, то он идёт не более чем по одной вертикальной и не более чем по одной горизонтальной улицам Поэтому, если допустить, что маршрутов менее n, то найдутся горизонтальная и вертикальная улицы, по которым не проходит ни одного маршрута, и по перекрёстку, образуемому этими улицами, также не пройдет никакой маршрут. Значит, число маршрутов должно быть не менее n.

Пример автобусной сети из n маршрутов, удовлетворяющей условию задачи таков: i-й маршрут сети проходит по всей i-й вертикальной улице и затем — слева направо по последней горизонтальной улице.

6.50. Докажем утверждение задачи методом от противного. Пусть найдутся два города A и B такие, что из A в B нельзя проехать, сделав меньше 63 пересадок. Разобьём все города на группы следующим образом: нулевая группа состоит из города A, первая — из всех городов, в которые можно проехать из A без пересадок, и так далее (k-я группа состоит из всех городов, в которые можно проехать из А с $(k-1)$ пересадками, но нельзя проехать с меньшим их числом). Получим в итоге не менее 64 групп. Заметим, что при каждом $k = 0, 1, \ldots, 21$ в группах с номерами $3k$, $3k+1$ и $3k+2$ содержится в общей сложности не менее 94 городов, так как из какого-нибудь города $(3k+1)$-й группы выходит не менее 93 дорог, соединяющих его с городами указанных групп. Значит, всего городов в стране не менее, чем $94 \cdot 22 = 2068$, что противоречит условию.

6.51. Допустим, что такая раскраска возможна. Рассмотрим отрезки какого-либо одного цвета, например, красного. Общее число треугольников, одна из сторон которых красная, равно числу пар из 11 остальных цветов, то есть $10 \cdot 11/2 = 55$. Так как каждый красный отрезок служит стороной для 10 треугольников, то число красных отрезков не меньше 6. Но тогда и число отрезков любого другого цвета, не меньше 6, а общее число отрезков должно быть, следовательно, не меньше $12 \cdot 6 = 72$. Однако число всех сторон и диагоналей в 12-угольнике равно $11 \cdot 12/2 = 66 < 72$. Противоречие.

6.2. Эйлеровы графы

6.52. а) Можно. б) Нельзя. Рисуя граф в каждую вершину, за исключением начальной и конечной, мы войдем столько же раз, сколько выйдем из неё. Поэтому степени всех вершин должны быть чётными.

6.53. Нельзя. У соответствующего графа есть четыре нечётных вершины.

6.54. а) 6, б) 5, в) 4. **6.55.** Нет.

6.56. а), в) Нет. Если это возможно, то ясно, что проволока идёт по рёбрам куба без наложения, то есть мы как бы нарисовали каркас куба, не отрывая карандаша от бумаги. Но это невозможно, так как у куба 8 нечётных вершин, б) Поскольку нечётных вершин 8, то таких кусков нужно не менее четырёх.

6.57. Можно, так как есть лишь две комнаты с нечётным числом дверей — 8 и 10, с одной из которых и надо начинать.

6.58. Рассмотрим два города и пусть они не соединены путём. Так как каждый соединён не менее, чем с 7 другими, при этом города различны (если 2 совпадают, то есть путь, соединяющий исходные города), то мы указали не менее 16 городов.

6.59. Аналогично 6.58.

6.60. Рассмотрим компоненту связности графа ковролиний, содержащую столицу. Нам нужно доказать, что она содержит также город Дальний. Предположим противное. Тогда в этой компоненте связности из одной вершины (столицы) выходит 21 ребро, а из остальных вершин — по 20 рёбер. В этом графе (компоненте связности) ровно одна нечётная вершина.

6.61. Если закрыта дорога AB, то докажем, что можно добраться из A в B. Если это не так, то в компоненте связности, содержащей A, все вершины, кроме A — чётные. Противоречие с теоремой 1.

6.62. Ровно один город должен быть пересадочным, а так как в связном графе с 50 вершинами рёбер не меньше 49, то 49 — наименьшее число авиалиний.

6.63. Докажем, что связный граф, имеющий не более двух нечётных вершин — эйлеров по индукции по числу рёбер графа. Пусть вначале граф не имеет нечётных вершин. База (граф без рёбер) очевидна. В произвольном графе нет висячих вершин, значит, он не является деревом, и в нем есть цикл. Временно удалим из графа рёбра этого цикла. Тогда граф распадается на несколько компонент связности, имеющих общие вершины с выкинутым циклом и удовлетворяющих условиям теоремы. В силу индукционного предположения каждая из компонент связности — эйлеров граф. Исходный граф рисуем так: обходим цикл и, попадая в вершину, относящуюся к какой-то компоненте, переходим в неё и рисуем её, в конце возвращаясь в ту же вершину, после чего продолжаем движение по циклу. Доказательство для графа с двумя нечётными вершинами аналогично (временно удаляем путь, связывающий эти вершины). То, что эйлеров граф имеет не более двух нечётных вершин было доказано в 6.52.

6.64. а) Нельзя. Никакие две ломаные не должны иметь общих отрезков. Поэтому 12 узлов решётки, расположенных на границе квадрата и отличных от его вершины, должны быть концами ломаных, а у 5 ломаных всего 10 концов. б) Можно.

6.65. Граф связен, степени его вершин чётны.

6.66. Доказательство можно провести индукцией по n. Для доказательства индукционного перехода выберем две нечётные вершины, соединим их путём и временно удалим все его рёбра. Граф распадётся на компоненты связности. Присоединим теперь к удалённому пути компоненты связности, которые, очевидно, не содержат нечётных вершин.

6.67. а) Нельзя. б) Можно.

6.68. а) Да. Например, все улицы прямые и выходят из одной точки. б) Да. Например, 3 улицы образуют правильный треугольник, и ещё 3 улицы соединяют центр треугольника с его вершинами (теорема Эйлера).

6.69. Не смогут. Допустим, что это возможно. Пусть на шоссе n городов, тогда всего $2n-1$ дорог. Поскольку дороги одной компании соединяют все города в связное множество, то этих дорог не меньше n. Тогда дорог двух компаний не меньше $2n$. Противоречие.

6.70. Достаточно доказать, что граница компоненты связности одного цвета связная область другого цвета. В самом деле, перекрасим связную область в цвет её границы, получим связную область большего размера. Рассмотрим её границу. Опять перекрасим область в цвет границы. Рано или поздно диаметр одноцветной области будет достаточно большим.

Для доказательства перейдем к новому графу (известный приём в теории графов): в качестве новых вершин возьмём середины старых рёбер и соединим 2 новые вершины ребром, если соответствующие им старые рёбра имели общую вершину. У нового графа будут покрашены вершины. Докажем, что у нового графа компоненты связности одного цвета — связная область другого цвета.

Заметим, что у нового графа из каждой вершины выходит 10 рёбер. Занумеруем рёбра одной вершины по часовой стрелке от 1 до 10. Тогда вершины, занумерованные соседними числами (1 и 10 — тоже соседи), соединены ребром.

Возьмём компоненту связности синего цвета и будем обходить её по правилу правой руки, отмечая в каждой синей точке все красные точки, в которые мы бы пошли, если бы они были синими. По предыдущему замечанию отмеченные точки образуют связную область.

6.71. Цвета, в которые покрашен граф, занумеруем от 1 до k. Те вершины цвета 2, которые не соседствуют ни с какими вершинами цвета 1, перекрасим в цвет 1. Новая раскраска будет правильной, поэтому в ней k цветов. Значит, какие-то вершины цвета 2 не перекрашены и потому соседствуют с вершинами цвета 1. Аналогично, вершины цвета 3, которые не соседствуют с вершинами цвета 2, перекрасим в цвет 2, и т. д. вплоть до последнего цвета.

После этого рассмотрим какую-либо вершину цвета k. Она не перекрашена, и потому соседствует с вершиной цвета $(k-1)$. Эта вершина тоже не перекрашена, так как иначе её первоначальный цвет был бы k, и она не могла бы соседствовать с вершиной того же цвета. Раз вершина не перекрашена, то она соседствует с вершиной цвета $(k-2)$, и т. д. Продолжая этот процесс, построим путь из вершин k цветов, которые не были перекрашены.

6.3. Деревья

6.72. Пусть найдутся две вершины, которые соединены двумя разными простыми путями. Если пути не имеют общих вершин, то пройдя от одной вершины к другой по 1-му пути, и вернувшись по 2-му, получим цикл. Если они имеют общую вершину, то выберем первую точку — A, в которой пути расходятся. За выбранной точкой на 1-м пути найдем первую точку — B, принадлежащую также и 2-му пути. Участки 1-го и 2-го пути между точками A и B образуют простой цикл.

6.73. Рассмотрим произвольную компоненту связности этого графа. Она не является деревом, так как в ней нет висячей вершины. Значит, в ней есть цикл.

6.74. Пусть концы удалённого ребра в новом графе соединены простым путём. Тогда этот путь вместе с удалённым ребром образует в исходном графе цикл.

6.75. Из условия граф Древляндии — дерево. У него есть висячая вершина. Удалим её и выходящее из неё ребро. Оставшийся граф также дерево. У него есть висячая вершина, которую также удалим и т. д. Проделав эту операцию $n-1$ раз, получим граф, состоящий из одной вершины. Так как удалялось по одному ребру, вначале их было $n-1$.

6.76. Если нет, то удалив несколько рёбер, из него можно получить дерево.

6.77. Будем рассматривать волейбольную сетку как граф, вершинами которого являются узлы сетки, а рёбрами — верёвочки. В этом графе нужно удалить как можно больше рёбер так, чтобы он остался связным. Заметим, что пока в графе есть цикл, возможно удаление любого ребра этого цикла. Связный граф, не имеющий циклов, является деревом. Поэтому, только получив дерево, мы не сможем убрать ни одного ребра. Изначально в графе было $601 \cdot 50 + 600 \cdot 51 = 60\,650$ рёбер и $51 \cdot 601 = 30\,651$ вершин, т. е. дерево будет иметь $30\,650$ рёбер. Таким образом, разрезать можно $60650 - 30650 = 30\,000$ верёвочек.

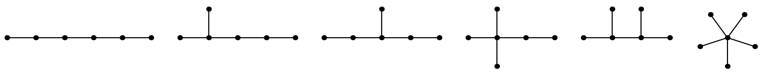
6.78. $30 \cdot 29/2 - 29 = 406$.

6.79. Выделите максимальное дерево и удалите его висячую вершину.

6.80. а), б) Рассмотрите «максимальное» дерево и выберите путь, соединяющий две висячие вершины.

6.81. 63. Поставим внутри каждого квадратика 1×1 точку, и, убирая спичку, соединим соответствующие точки. Тогда мы получим связный граф, а минимальное число рёбер у связного графа в том случае, когда граф — дерево. Так как вершин — 64, то число рёбер не меньше 63. Пример дерева легко привести.

6.82. Соединим эти две вершины путём. Пусть a — его длина. Расстояние от любой вершины до двух данных отличаются на величину, имеющую ту же чётность, что и a.



К 6.83

6.83. Указание. Покажите, что любое дерево с шестью вершинами изоморфно одному из графов на рисунке.

6.84. Начав с некоторой вершины y, будем идти по различным рёбрам графа, нумеруя их подряд $1, 2, \ldots, s$ до тех пор, пока это возможно.

Если в результате останутся непронумерованные рёбра, то в силу связности графа хотя бы одно из них выходит из вершины, на которой мы уже побывали. Начав с этой вершины, пойдем по непронумерованным рёбрам, нумеруя их подряд $s + 1, s + 2, \ldots$ также до тех пор, пока это возможно.

Продолжая этот процесс, в конце концов получим некоторую нумерацию рёбер графа. Докажем, что она — искомая.

Действительно, пусть из некоторой вершины v выходит не менее двух рёбер. В случае $v = y$ одно из рёбер имеет номер 1, поэтому наибольший общий делитель номеров рёбер, выходящих из v, равен 1. Если $v \neq y$, то обозначим через r наименьший из номеров рёбер, выходящих из v. Это означает, что в первый раз мы попали в вершину v именно по этому ребру на r-м шаге процесса. Так как в этот момент из v выходили ещё непронумерованные рёбра, то одно из них должно иметь номер $r+1$. Но наибольший общий делитель множества чисел, содержащего r и $r+1$, равен 1, что и завершает доказательство.

6.85. Рассмотрим некоторый путь, соединяющий некоторые два города, возможно, включающий в себя некоторые закрытые после кризиса рейсы. Покажем, что в этом пути любой закрытый рейс можно заменить последовательностью незакрытых. Пронумеруем авиакомпании числами от 1 до N. В одной из авиакомпаний сохранились все рейсы: предположим, что в первой. Тогда в любой другой авиакомпании закрыли по одному рейсу. Рассмотрим только рейсы первой и второй авиакомпаний: из каждого города выходит по одному рейсу этих авиакомпаний. Следовательно, все города разбиваются на циклы. В одном из этих циклов закрыли один рейс. Очевидно, можно пролететь остальными рейсами этого цикла, следовательно, мы можем «обойти» любой закрытый рейс. Отметим, что мы при этом не используем рейсы других авиакомпаний, следовательно, аналогично можно обойтись без остальных закрытых рейсов.

6.86. Пусть существует граф, степени всех вершин которого больше двух, но длина любого цикла в этом графе делится на 3. Рассмотрим такой граф B с наименьшим числом вершин. Очевидно, в этом графе существует цикл C, пусть этот цикл последовательно проходит по вершинам $A_1, \ldots, A_{3k}$. Пусть существует путь S, соединяющий вершины A_m и A_n и не проходящий по рёбрам цикла C. Рассмотрим циклы C_1 и C_2, состоящие из пути S и двух «половинок» цикла C. Поскольку длины обоих этих циклов делятся на 3, то и длина пути S делится на 3. В частности, из доказанного утверждения следует, что никакая вершина X, не входящая в цикл C, не может быть соединена рёбрами с двумя разными вершинами цикла C.

Объединим все вершины $A_1, \ldots, A_{3k}$ цикла C в одну вершину A, которую соединим рёбрами со всеми вершинами, которые были соединены с вершинами цикла C. Очевидно, в полученном графе B' меньше вершин, чем в графе B, и степень каждой вершины по-прежнему больше двух. Из доказанного выше следует, что длина любого цикла в графе B' делится на 3. Противоречие с минимальным числом вершин графа B.

6.4. Плоские графы и теорема Эйлера

6.87. 4.

6.88. Пусть отмеченные точки и вершины квадрата — вершины, и соединяющие их отрезки и стороны квадрата — рёбра плоского графа. Для каждого куска, на которые граф разбивает плоскость посчитаем число ограничивающих рёбер, и все полученные числа сложим. Поскольку каждое ребро разделяет два куска, то в итоге получим удвоенное число рёбер. Так как все куски, кроме внешнего — треугольники, а внешний кусок ограничен 4 рёбрами, то получаем $3(F-1)+4=2E$, т. е. $E=3(F-1)/2+2$. Заметим, что число вершин нашего графа равно 24 и подставим количества вершин рёбер в формулу Эйлера $24-(3(F-1)/2+2)+F=2$. Отсюда $F=43$. Итак, число треугольников — 42.

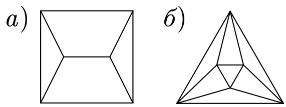
6.89. Каждый кусок (грань) ограничивается не менее, чем тремя рёбрами.

6.90. а) Подставив $2E \geqslant 3F$ из 6.89 в формулу Эйлера, получим $V-E+E/3 \geqslant 2$. Отсюда $E \leqslant 3V-6$. б) Сложите неравенства для компонент связности.

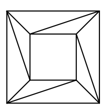
6.91. Для этого графа не выполнено неравенство $E \leqslant 3V-6$.

6.92. а) Можно. Расположим 6 точек (ЭВМ) в вершинах правильного шестиугольника. Его стороны закрасим через одну цветами 1 и 2, а диагонали — цветами 3, 4, 5 (одним цветом закрасим две параллельные малые диагонали и перпендикулярную к ним большую). б) Нельзя, так как число проводов каждого цвета должно быть равным 15/2.

6.93. Нельзя. Если бы такой граф был плоским, то так как каждый кусок должен быть ограничен по меньшей мере 4 рёбрами, получим аналогично решению 6.89 $E \geqslant 2F$. В задаче $E=9$, поэтому $F \leqslant 4$. А из формулы Эйлера имеем $F=2-6+9=5$.



К 6.94


К 6.95

6.94. а), б) См. рис. **6.95.** См. рис.

6.96. Не выполняется неравенство $3V-6 \geqslant E$.

6.97. Предположим противное. Тогда $2E \geqslant 6V$, т. е. $E \geqslant 3V$, что противоречит неравенству.

6.98. Пусть оба эти графа — плоские. Тогда у них вместе не более, чем $(3 \cdot 11 - 6) + (3 \cdot 11 - 6) = 54$ ребра. Однако в полном графе с 11 вершинами 55 рёбер. Противоречие.

6.99. Докажите неравенство $E \leqslant 3V - 6$, используя то, что из каждой вершины выходит по крайней мере 3 ребра. Обозначив число пятиугольников через a, число шестиугольников через b, имеем $5a + 6b + 7 = 2E \leqslant 6F - 12 = 6(a + b + 1) - 12$. Отсюда $a \geqslant 13$.

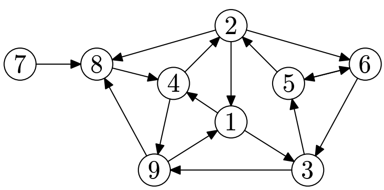
6.5. Ориентированные графы

6.100. Количество (общее) «втекающих» рек должно быть равно общему количеству «вытекающих» рек.

6.101. Пусть в столицу входит a дорог. Тогда общее число «входящих» дорог равно $21 \cdot 100 + a$, а общее количество «выходящих» дорог не больше $20 \cdot 100 + (100 - a)$. Поэтому $21 \cdot 100 + a \leqslant 20 \cdot 100 + (100 - a)$, то есть $2a \leqslant 0$. Таким образом, $a = 0$.

6.102. Занумеруйте города и направьте движение от городов с меньшими номерами к городам с большими номерами.

6.103. Фиксируем некоторую вершину A_0. Если уже построена вершина A_k, возьмём вершину A_{k+1}, соединённую с некоторой уже рассмотренной A_l, и на всех рёбрах, ведущих из вершин A_i в A_{k+1}, поставим стрелки в сторону вершины A_{k+1}. Тогда из A_0 можно попасть в A_{k+1}, сначала пройдя в A_l, а из неё — в A_{k+1}.



К 6.104

6.104. 784913526. Соединим стрелками цифры, которые могут следовать друг за другом. Ясно, что первой идёт 7, затем 8, 4 и т. д.

6.105. Выберем любую улицу, она разбивает город на две части. Эта улица вместе с одной из частей кольцевой дороги образует новое кольцо с односторонним движением, а внутри его улицы образуют меньший город, аналогичный Зурбагану. Снова выделим одну улицу и т. д. В конце концов мы придём к городу из одного микрорайона, окружённого кольцом, которое можно объехать.

6.106. Выберем город A и дорогу, ведущую в него. Эта дорога идёт из какого-то города B. И из города A можно попасть в город B. Получен замкнутый путь в Гиппопотамии. Далее доказательство следует 6.63, так как мы имеем связный граф с чётными вершинами.

6.107. а) Пусть из города A нельзя доехать до города B. Рассмотрите города, в которые входят дороги из A, и города, из которых выходят дороги в B. б) Вычислите общее количество дорог, выходящих из первой группы городов. Заметьте, что этих дорог достаточно много для того, чтобы хотя бы одна из них кончалась в городе из второй группы.

6.108. 2. Нарисуйте ориентированный граф перехода от следующей цифры к предыдущей.

6.109. Пусть удалено ребро между вершинами A и B. Выберем две произвольные вершины. Рассмотрите три случая: обе эти вершины не совпадают с A или B, одна из них совпадает с A или с B, эти вершины — A и B.

6.110. Назовем «соседями» города N те города, из которых можно попасть в N непосредственно, а «близкими» к N — те города, из которых можно попасть в N, проезжая не более, чем через один промежуточный город. Докажем методом математической индукции, что найдется город N, к которому остальные близки. Для стран, в которых всего 2 города, утверждение очевидно. Пусть это доказано для стран с n городами. Нанесем на схему дороги, соединяющие какие-нибудь n городов. Тогда по предположению индукции найдется такой город A, что остальные $n-1$ городов близки к A, т. е. каждый из них является соседом A или соседом одного из соседей A. Если $(n+1)$-й город B тоже близок к A, то все города страны близки к A. Если же это не так, то, из условия задачи, город A и все его соседи являются соседями B. Каждый из остальных городов является соседом одного из соседей A и, значит, близок к B, т. е. все города страны близки к B.

6.111. Рассмотрим эйлеров цикл, проходящий по всем рёбрам графа, и ориентируем все рёбра в соответствии с порядком прохождения цикла.

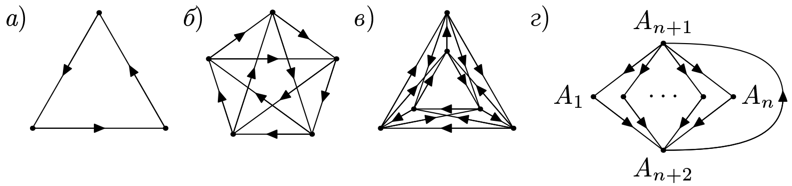
6.112. Докажите, что существует замкнутый путь вдоль стрелок, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

6.113. База — для трёх городов. Для доказательства индукционного перехода удалите город, имеющий и входящие, и выходящие дороги.

6.114. Используем математическую индукцию. Для $n = 2$ утверждение верно. Пусть утверждение справедливо для любого графа с n точками, и рассмотрим произвольный граф с $n+1$

точками. По 6.75, на нём найдется такая точка A, которая служит концом единственного отрезка AB.

Докажем, что с помощью наших операций можно направить стрелку от B к A. Пусть стрелка направлена от A к B. Выйдем из точки A и пойдем по любому пути, подчиняясь направлению стрелок — мы придём в такую точку C, из которой некуда дальше двигаться, что означает, что все стрелки входят в C. Изменим направление этих стрелок на противоположное и заметим, что путь, по которому мы пришли в точку C, сократился на один отрезок. Аналогично, постепенно сокращая все такие пути, мы получим желаемое направление стрелки от B к A. Далее, рассмотрим подграф с n точками, который получается из исходного графа отбрасыванием точки A и отрезка AB. По предположению индукции в этом подграфе можно добиться нужного направления всех стрелок. Легко понять, что необходимые для этого операции в подграфе можно проводить и на исходном графе, всякий раз преобразуя предварительно стрелку $B \to A$ в стрелку $A \to B$. В результате на всех отрезках исходного графа, кроме AB, будут расставлены нужные стрелки, а на отрезке AB стрелка будет направлена от B к A. Наконец, применив операцию к точке A, поменяем, если нужно, стрелку $B \to A$ на $A \to B$.



К 6.115

6.115. Для $n = 3$, $n = 5$ и $n = 6$ требуемые системы точек изображены на рис. *а* — *в*, а на рис. *г* показан один из способов, позволяющих из системы n точек $A_1, \ldots, A_n$, соединённых нужным образом стрелками, получить требуемую систему с $n+2$ точками $A_1, \ldots, A_{n+2}$. Для этого к уже имеющимся стрелкам добавляются стрелки, идущие из A_{n+1} к точкам $A_1, \ldots, A_n$; из точек $A_1, \ldots, A_n$ — в A_{n+2}, наконец, из A_{n+2} — в A_{n+1}. По индукции утверждение задачи верно при всех нечётных $n \geqslant 3$ и всех чётных $n \geqslant 6$. Для $n = 4$ требуемой системы не существует.

6.116. Если существует команда, выигравшая и у команды-победительницы, и у всех команд, проигравших победителям, то у такой команды очков больше, чем у победителей турнира, что невозможно.

6.117. Пусть номера команд $a_1, \ldots, a_{20}$ и a_1 выиграла у a_2. Строим цепочку команд по индукции. Пусть из $a_1, \ldots, a_n$ построена цепочка $b_1, \ldots, b_n$ в соответствии с условиями. Возьмём a_{n+1}. Если b_n выиграла у a_{n+1}, то $b_{n+1} = a_{n+1}$, если нет, то ищем i, при котором a_{n+1} выиграла у b_{n-i}. Если a_{n+1} проиграла b_{n-i-1}, то место a_{n+1} между b_{n-i} и b_{n-i-1}, если нет, то ищем меньший номер i с таким свойством. Если такого номера не найдется, то a_{n+1} должна стоять до b_1.

6.118. Пусть A и B набрали одинаковое число очков, причём B выиграла у A. Тогда если для любой команды C, у которой выиграла A, выиграла и B, то у B должно быть очков больше, чем у A. Значит, есть команда C такая, что A выиграла у C, а C выиграла у B.

6.6. Знакомства, теория Рамсея

6.119. Если среди этих трёх двое будут знакомы, то есть три знакомых пассажира.

6.120. Если знакомство вида «коротышка — малышка» — это ребро графа, n — число коротышек, m — число малышек, то всех знакомств (рёбер) коротышек $6n$, а малышек — $6m$. Но $6n = 6m$.

6.121. Девушек больше.

6.122. Да, могло. Например, на балу присутствовало три девушки А, Б, В, и каждый юноша танцевал с ними по очереди. При этом Б умнее А, А умнее В, В красивее Б, Б красивее А.

6.123. Пусть A и B ещё не обменялись рукопожатиями. Рассматривая четвёрку $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{X}, \mathrm{Y})$ (X и Y — любые другие люди) видим, что либо X, либо Y обменялись рукопожатиями с остальными тремя, в частности, между собой. Значит, если K и L не обменялись рукопожатиями, то хотя бы один из них — или A, или B. Если теперь найдётся C, не пожавший руку, например, A, то, аналогично получим, что если K и L не пожали друг другу руки, то среди них есть либо A, либо C. Значит, если двое не пожали руки, то либо среди них есть A, либо это пара (B, C). Но если найдётся кто-либо ещё (D), не пожимавший руку A, то в четвёрке $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ никто не пожал руку трём остальным. Значит, не сделано не более трёх рукопожатий (AB, AC и, возможно, BC).

6.124. 4 журнала, 6 посетителей. Обозначая журнал точкой, а посетителя отрезком, выходящим из этой точки, получим полный граф, степень каждой вершины которого равна 3. Значит, у него 4 вершины и 6 рёбер.

6.125. 5 районов, 10 аппаратов.

6.126. 6 сотрудников, 15 газет.

6.127. Предположим противное. Тогда для каждого числа от 68 до 101 есть ровно 3 человека, имеющие такое число знакомых. Но тогда количество людей, имеющих нечётное число знакомых, нечётно. Противоречие.

6.128. Вызовем произвольного ученика A_1. Пусть он решил задачи a_1 и a_2. Попросим его рассказать, например, задачу a_2. Найдется единственный ученик A_2, решивший вместе с ним задачу a_2. Пусть он расскажет другую решённую им задачу a_3. Продолжим этот процесс. Покажите, что рано или поздно будет спрошен ученик, решивший вместе с A_1 задачу a_1.

Задачу можно интерпретировать геометрически, т. е. решать её с помощью графов. Изобразим 20 задач в виде 20 точек на плоскости. Каждому из 20 школьников сопоставим ребро, соединяющее две точки-задачи, которые этот школьник решил. С помощью описанной выше процедуры нетрудно показать, что наш граф распадается на несколько многоугольников.

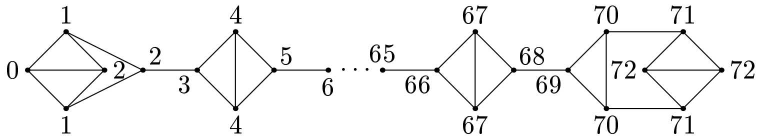
6.129. Пусть X имеет знакомых $A_1, \ldots, A_m$. и по условию они незнакомы. Значит, для каждых двух человек (A_i, A_j) должен найтись ещё один общий знакомый, отличный от X и незнакомый с X (при этом разным парам (A_i, A_j) отвечают разные люди). Наоборот, каждому из незнакомых с X соответствует пара (A_i, A_j) их общих с X знакомых. Значит, число людей, незнакомых с X, равно числу пар C_m^2. Поэтому $n = 1 + m + C_m^2$ (1 — это сам X, m — число его знакомых, C_m^2 — число незнакомых с X). Отсюда m определяется однозначно, и, значит, оно одинаково для всех X (заметим, что n принимает только значения 1, 2, 4, 7, $11, \ldots$).

6.130. Рассмотрите двух незнакомых учёных и их знакомых.

6.131. Предположим противное. Тогда для каждого числа от 68 до 101 есть ровно три человека, имеющие такое число знакомых. Но тогда количество людей, имеющих нечётное число знакомых, нечётно. Противоречие.

6.132. Рассмотрим учёного с максимальным числом друзей, равным n. По условию все его друзья имеют разное число друзей, отличное от 0, но не большее n. Таких возможностей n: 1 друг, 2 друга, $\ldots$, n друзей, значит, все случаи реализуются.

Поэтому существует, в частности, учёный, имеющий ровно одного друга.



К 6.133

6.133. Может. На рисунке указан граф знакомств, содержащий 22 ромба и 100 вершин; в каждой вершине стоит число, равное количеству дней, необходимых для попадания в неё новости из вершины 0. Вершина 64 отвечает 5 марта, ещё через 8 дней (13 марта) новость становится известной всем.

6.134. Докажем от противного. Выбрав любых двух человек A и B, среди оставшихся десяти выберем таких $C_1, \ldots, C_k$, каждый их которых знает ровно одного в этой паре. В силу предположения имеем $k \geqslant 6$, так как при $k \leqslant 5$ в рассмотренной группе $10 - k \geqslant 5$ человек удовлетворяет условию задачи. Число N троек $\{A, B, C_i\}$ подсчитаем двумя способами. Всего имеется $0{,}5 \cdot 12 \cdot 11 = 66$ пар $\{A, B\}$ и каждой паре отвечает не менее 6 человек C_i, поэтому $N \geqslant 6 \cdot 66$. С другой стороны, C_i можно фиксировать и искать для него такие пары $\{A, B\}$, в которых он знает ровно одного человека. Если у C_i есть n знакомых, то число искомых пар $\{A, B\}$ равно $n(11 - n) \leqslant 30$. Выбрать же C_i можно 12 способами, откуда $N \leqslant (5 \cdot 6) \cdot 12 = 360$. Итак, $6 \cdot 66 \leqslant N \leqslant 360$. Но $6 \cdot 66 = 396 > 360$. Противоречие.

6.135. Пусть в компании у любых двух людей нечётное число общих знакомых.

Лемма. В такой компании у каждого чётное число знакомых.

Доказательство. Рассмотрим множество знакомых любого человека A (без него самого). В этой компании у каждого нечётное число знакомых (поскольку нечётно число общих знакомых с A), значит, число людей в компании чётно.

Возьмём любого человека A и посчитаем сумму чисел общих знакомых у A и каждого из остальных 49. Сумма 49 нечётных слагаемых нечётна. Теперь посчитаем эту сумму другим способом. Для каждого знакомого A посчитаем, сколько раз он входил в сумму, и сложим эти числа. Знакомых A чётное число (по лемме), каждый входил в сумму нечётное число раз, так как знаком с нечётным числом людей, отличных от A (по лемме); значит, сумма чётна. Противоречие.

6.136. Пусть, например, брат A не встретился со своей женой. Тогда она либо ушла до прихода своего мужа (и, значит, раньше, чем жёны двух других братьев), либо после ухода (позже, чем жены двух других братьев). Аналогично другие жены. Но из жён трёх братьев по крайней мере одна не пришла позже, чем две другие, и не ушла раньше их.

6.137. Докажем, что есть по крайней мере 97 школьников, каждый из которых знаком с 99 остальными участниками кружка. Пусть не все 100 школьников знакомы между собой. Тогда найдутся двое, A и B, которые не знают друг друга. Рассмотрим любую четвёрку школьников, в которую входят A и B, скажем, A, B, X, Y. По условию, один из четырёх знаком с остальными тремя. Это может быть X или Y, так как A и B незнакомы. Пусть, например, X знаком с A, B и Y. Применив то же рассуждение к любой группе A, B, X, Z, в которую входят A, B и X, видим, что либо X знаком с A, B и Z, либо Z знаком с A, B и X. Так или иначе, X и Z знакомы. Следовательно, X знаком со всеми участниками кружка. Нетрудно видеть, что кроме A и B найдется самое большее один школьник, знакомый не со всеми участниками кружка.

6.138. Заметим, что каждый гость знает ровно двоих из остальных четырёх. В самом деле, допустим, что гость A имеет трёх знакомых: B, C и D. Тогда если B и C знают друг друга, то среди A, B и C нет незнакомых. Поэтому B и C (аналогично B и D, C и D) незнакомы, и среди B, C, D нет знакомых. Аналогично рассматривается случай, когда A имеет трёх незнакомых. Пусть теперь знакомые A — гости B и C. Тогда B и C не знакомы, и у B есть знакомый D ($D \neq A$, $D \neq C$). Если D знаком с C, то каждый из гостей A, B, C, D знаком с двумя гостями внутри этой четвёрки, поэтому пятый гость E не может быть ни с кем знаком. Таким образом, D не знаком с C, и так как он не знаком с A, а C не знаком с B, то C и D знакомы с E. Значит, гостей можно рассадить, например, в таком порядке: E, D, B, A, C.

6.139. Допустим, что никакие трое из математиков не говорят на одном и том же языке. Рассмотрим произвольного математика A. Он говорит не более чем на трёх языках, причём на каждом из эти языков говорит ещё не более чем один из математиков (иначе мы получили бы противоречие с допущением). Поэтому найдутся 5 математиков, с которыми A не говорит на одном языке. Пусть один из этих пяти — математик B. По той же причине, что и

A, математик B может говорить на одном языке не более чем с тремя математиками. Поэтому среди остальных четырёх математиков, не говорящих на одном языке с A, найдется математик C, не говорящий на одном языке с B. Таким образом, в тройке A, B, C никакие двое говорят на одном языке, что противоречит условию задачи.

6.140. а) Пусть среди любых четырёх человек имеются двое незнакомых. Тогда, скажем, человек A не может иметь более трёх незнакомых: если A имеет четырёх незнакомых, то, согласно предположению, среди них найдутся двое незнакомых между собой, а они образуют вместе с A тройку попарно незнакомых людей. Итак, A имеет не более трёх незнакомых, а значит, не менее 6 знакомых. Пусть A знаком с $B_1, B_2, \ldots, B_6$. Тогда среди $B_1, \ldots, B_6$ нет тройки попарно знакомых людей (иначе эта тройка вместе с A образовывала бы четвёрку попарно знакомых людей, что противоречило бы предположению). Значит, среди любых трёх человек из $B_1, \ldots, B_6$ есть двое незнакомых. Тогда B_1 не может иметь более двух незнакомых среди $B_2, \ldots, B_6$ (если B_1 не знаком, например, с B_2, B_3, B_4 то B_2, B_3 и B_4 попарно знакомы). Поэтому B_1 имеет по крайней мере 3 знакомых среди $B_2, \ldots, B_6$. Тогда в этой тройке людей найдутся двое знакомых друг с другом, образующих вместе с B_1 и A четвёрку попарно знакомых. Противоречие.

б) Докажем, что утверждение останется верным. Если какой-либо человек знаком по крайней мере с шестью людьми, то доказательство аналогично проведённому выше в п. а). Если же каждый человек знаком ровно с пятью людьми, то общее количество пар знакомых равно $9 \cdot 5/2$, т. е. не является целым, что невозможно. Наконец, если найдется человек, не знакомый по крайней мере с четырьмя людьми, то эти четверо попарно знакомы (иначе нашлась бы тройка попарно незнакомых людей), т. е. образуют искомую четвёрку людей.

6.141. 90 игр. Пусть среди любых трёх команд найдутся две, уже сыгравшие между собой. Выберем команду A, которая провела наименьшее количество игр — k. Каждая из k команд, уже сыгравших с A, как и сама команда A, провела не менее k игр. Из $(19-k)$ команд, не сыгравших с A, каждая сыграла со всеми остальными $(18-k)$ из них — иначе нашлась бы тройка команд, среди которых никакие не играли между собой. Итак, удвоенное число всех игр (т. е. сумма количества игр, сыгранных всеми командами) не меньше $k^2+k+(19-k)(18-k) = 2k^2-36k+18\cdot 19 = 2(k-9)^2+180 \geqslant 180$. Пример ситуации, когда сыграно 90 игр и удовлетворяются условия задачи, дают две группы по 10 команд, в каждой из которых все команды друг с другом сыграли, но ни одна не играла с командой другой группы.

Если изобразить команды точками, а не сыгравшие друг с другом команды соединить отрезком, то получится граф, который при соблюдении условия задачи будет графом без треугольников. Можно доказать, что в таком графе с n вершинами максимум $[n^2/4]$ рёбер.

6.142. Задачу можно решить методом математической индукции. Другое решение: занумеруем N человек числами от 1 до N и будем знакомить человека с номером i и человека с номером j, если $|i-j| \leqslant N/2$. При таком способе знакомства одинаковое количество знакомых будет только у людей с номерами k и $N-k$. Значит, никакие три человека не будут иметь одинакового количества знакомых.

6.143. Будем говорить, что жители X, A_1, A_2, ..., A_k, Y образуют цепочку, если X знаком с A_1, A_2 знаком с A_3, ..., A_k знаком с Y. Из условия следует, что любые два жителя соединены некоторой цепочкой. Будем считать, что замкнутых цепочек (т. е. цепочек, в которых X знаком с Y) нет. Возьмём самую длинную цепочку

$$X - A_1 - A_2 - \ldots - A_{10} - \ldots - A_k - Y.$$

Если $k \leqslant 19$, то новость, сообщённая A_{10}, через 10 дней станет известна всем жителям посёлка. Если $k \geqslant 20$, отделим жителей X, $A_1, \ldots, A_{10}$ и всех, кто связан с ними не через A_{11} (их не меньше 11). Оставшаяся группа жителей по-прежнему удовлетворяет условию задачи. Повторяя уже описанную процедуру 89 раз (и на каждом шагу выделяя своего A_{10}), мы либо на каком-то шагу исчерпаем всех жителей, либо останется не более $1000 - 89 \cdot 11 = 21$, из которых выберем ещё одного, как описано выше. Если же в посёлке есть замкнутые цепочки, то их можно разорвать, сохраняя условия задачи.

6.144. Для любой команды найдутся 9 команд, с которыми она ещё не играла, а среди этих девяти — две, не игравшие между собой.

6.145. Пусть n — число жителей в городе N. Для любых двух жителей города подсчитаем число жителей, знакомых хотя бы с одним из них, и обозначим сумму всех полученных чисел через x. Мы должны доказать, что в городе N найдутся два таких жителя A и B, что число жителей, знакомых или с A или с B, не меньше

$n/2$. Так как число пар жителей равно $n(n-1)/2$,то для этого достаточно показать, что

$$x \geqslant 0{,}5n \cdot n(n-1)/2 = n(0{,}5n^2 - 0{,}5n)/2.$$

Для каждого жителя M подсчитаем число $x(M)$ пар жителей, в которых хотя бы один человек знаком с M. Если $n(M)$ — число знакомых M, то $x(M)$ равно

$$\frac{n(M)(n(M)-1)}{2} + n(M)(n - n(M)) = \frac{n(M)(2n-1-n(M))}{2}.$$

Наименьшее значение, которое на отрезке $[0{,}3n; n]$ принимает квадратный трёхчлен $y(x) = x(2n-1-x)/2$ равно $y(0{,}3n) = (0{,}51n^2 - 0{,}3n)/2$. Значит, $x(M) \geqslant (0{,}51n^2 - 0{,}3n)/2$. Просуммировав все числа $x(M)$, получим x. Итак, $x(M) \geqslant n(0{,}51n^2 - 0{,}3n)/2 > n(0{,}5n^2 - 0{,}5n)/2$.

6.146. Возьмём граф на 12 вершинах, которые соответствуют людям, две его вершины соединены, если люди незнакомы. Если в этом графе нет циклов нечётной длины, то его можно разбить на две части, в каждой из которых вершины не будут соединены, и поэтому найдутся шесть попарно знакомых.

Предположим теперь, что в графе есть циклы нечётной длины. Рассмотрим нечётный цикл минимальной длины k. Разберём все возможные его длины.

Случай 1. $k = 3$. Тогда если среди девяти человек, не входящих в этот цикл, есть два незнакомых, то среди оставшихся семи из каждых четырёх найдутся три знакомых. Таким образом, в подграфе на 7 вершинах каждые два ребра имеют общую вершину. Третье ребро обязано проходить через эту вершину, иначе среди четырёх человек не найдутся трое знакомых. Поэтому все рёбра имеют общую вершину, и, удаляя эту вершину, мы получаем шесть попарно знакомых человек.

Случай 2. $k = 5$. Тогда, как и выше, среди оставшихся семерых из каждых четырёх человек найдутся трое знакомых и среди этих семерых найдутся шестеро знакомых.

Случай 3. $k = 7$. Тогда среди пяти человек, не входящих в этот цикл, все попарно знакомы. Если есть человек из цикла, знакомый со всеми этими пятью, то всё доказано. В противном случае, каждый из цикла не знаком с кем-то из оставшихся. Так как $7 > 5$, то найдётся человек A из оставшихся, не знакомый с двумя из цикла B, C. Из того, что мы взяли цикл минимальной длины, следует, что эти два незнакомых из цикла должны быть знакомы через одного D. Но тогда D знаком со всеми из пяти оставшихся, потому что, удаляя из цикла D и заменяя его на A, мы получаем снова цикл длины 7, а в дополнении к циклу длины 7 все попарно знакомы.

Случай 4. $k = 9$. Цикла длины 9 не может быть по условию задачи.

Случай 5. $k = 11$. Тогда, как и при рассмотрении циклов длины 7, мы видим, что оставшийся человек может быть незнаком максимум с двумя из цикла. Но тогда в цикле легко найти 5 человек, знакомых между собой и с оставшимся. (Например, взяв идущих через одного по циклу и не знакомых с оставшимся.)

Теория Рамсея

6.147. а) Рассмотрим какую-нибудь точку и выходящие из неё пять отрезков. Очевидно, хотя бы три из них одного цвета. Вторые концы этих трёх отрезков образуют треугольник. Если его стороны одного цвета, то всё доказано; если же разных цветов, то одна из его сторон окрашена в тот же цвет, что и рассматриваемые три отрезка, и, значит, образует с двумя из этих отрезков «одноцветный» треугольник.

б) Приводим традиционное решение этой задачи. Пусть делегат A может объясниться с тремя другими делегатами, назовем их B, C и D. Среди последних по крайней мере двое также могут объясниться между собой, скажем, B и C. Тогда A, B, C — искомая тройка. Если же A может объясниться не более чем с двумя другими делегатами, то найдутся три делегата E, F и G, ни с одним из которых A не может говорить. Тогда E, F, G образуют искомую тройку. Чтобы доказать, что, например, E и F могут объясниться, достаточно рассмотреть тройку E, F, A.

6.148. Рассмотрим все треугольники с вершинами в данных точках. Выберем из них тот, в который попадает наибольшее число точек. Обозначим его ABC. Проведем прямые AB, BC и AC. Они разбивают плоскость на области трёх типов: треугольник, углы и «двуугольники». Внутри углов точек не может быть по построению треугольника ABC. Если бы точка D оказалась внутри, скажем, угла B, то треугольник ADC содержал бы треугольник ABC и тем самым большее число точек внутри себя.

Если хотя бы одна из точек D и E (для определённости, D) лежит внутри двуугольника (например, с основанием AC), то четырёхугольник $ABCD$ является искомым. Если же обе эти точки лежат внутри треугольника, то прямая DE пересекает только две стороны треугольника (для определённости, AB и BC). Тогда $ADEC$ — выпуклый четырёхугольник.

6.149. Из произвольной вершины A выходит по крайней мере 6 рёбер одного цвета. Если среди рёбер, соединяющих их вторые концы, есть ребро BC того же цвета, то искомые вершины — A, B, C. Если же такого ребра нет, используем 6.147 для вторых концов этих шести рёбер.

6.150. а) Пусть есть вершина, из которой выходит 6 синих рёбер. Из 6.147 есть вершина, из которой выходит не более 4 синих рёбер (из 9 вершин не может выходить по 5 синих рёбер). Из неё выходит по крайней мере 4 красных ребра.

б) Изобразим мушкетёров в виде 9 точек на плоскости. Каждую пару точек соединим красным отрезком в том случае, если соответствующие мушкетёры поссорились, и синим отрезком в противном случае. Из условия следует, что на получившемся графе нет ни одного треугольника с тремя красными сторонами. Требуется доказать, что найдется четырёхугольник, у которого все стороны и все диагонали синие.

Заметим, что если найдется точка, из которой выходит по крайней мере 4 красных отрезка, то другие концы этих отрезков, очевидно, образуют искомый четырёхугольник. Пусть из любой точки выходит не более трёх красных отрезков. Тогда найдется точка A, из которой выходит не более двух красных отрезков. В самом деле, если это не так, то всего красных отрезков должно быть $9 \cdot 3/2$, но это число не целое. Итак, рассмотрим точку A, из которой выходит по крайней мере 6 синих отрезков. Применяя к другим концам этих отрезков задачу 6.147, получаем, что среди них найдутся три точки B, C, D, которые являются вершинами синего треугольника. Тогда, очевидно, четырёхугольник $ABCD$ — искомый.

6.151. Из любой вершины выходит по крайней мере 9 рёбер одного цвета. Далее используем 6.150.

6.152. $n = 66$. Пусть какая-либо из этих 66 точек соединена с 65 остальными отрезками четырёх разных цветов. Так как $65 = 4 \cdot 16 + 1$, то из этих 65 отрезков найдутся 17 какого-либо одного цвета по принципу Дирихле. Далее применим 6.149. При $n = 65$ можно, хотя и непросто, построить пример, когда треугольник с одноцветными сторонами не найдётся.

6.153. Докажите вначале существование точек A, B и точек $C_1, C_2, \ldots, C_{100}$, таких, что любой четырёхугольник с вершинами в точках A, B и $C_1, \ldots, C_{100}$ выпуклый. Затем докажите существование одной точки D и аналогичного множества $D_1, \ldots, D_{100}$.

7. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ЛОГИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

7.1. 10 коп. и 5 коп.

7.2. Один кошелёк лежал внутри другого. **7.3.** Два оборота.

7.4. 11 раз.

7.5. 2, 2, 9. После второго ответа подходят лишь варианты 2, 2, 9 и 6, 6, 1.

7.6. Северный полюс и все точки, удалённые от южного полюса на $1 + R\arcsin(1/(2\pi Rn))$ км ($n \in \mathbb{N}$), где R — радиус Земли.

7.7. 40 человек.

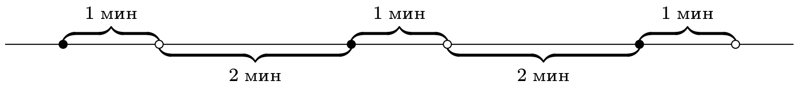
7.8. Первое испытание — с четвёртого этажа. Если орех разбился, то последовательно с первого, затем со второго и третьего этажей (если понадобится). Если после первого испытания орех не разбился, то второе испытание — с седьмого этажа. Если орех разбился, то далее с пятого и шестого этажей (если понадобится). Если после второго испытания орех не разбился, то третье испытание — с девятого и далее либо с восьмого, либо с десятого.

7.9. Если распилить третье звено, то цепочка распадается на три части; 1, 2 и 4 звена. С их помощью удается расплатиться, так как хозяин может давать сдачу звеньями, полученными им ранее.

7.10. Заметьте сначала, что если у путешественника имеется цепочка, состоящая из $n = (k+1)2^{k+1} - 1$ звеньев, то он может распилить k звеньев так, чтобы получились куски, состоящие соответственно из $k+1$, $2(k+1)$, $2^2(k+1), \ldots, 2^k(k+1)$ звеньев. Располагая этими кусками и k распиленными звеньями, путешественник может расплачиваться с хозяином в течение n дней. Если число n звеньев цепочки не имеет вида $n = (k+1)2^{k+1} - 1$ надо рассмотреть наименьшее целое число k такое, что $n < (k+1)2^{k+1} - 1$. В частности, при $n = 100$ достаточно распилить 4 звена.

7.11. Раскрыть все три звена одного обрывка и соединить ими четыре оставшихся обрывка в одну цепь.

7.12. Пусть, например, поезда идут в каждую сторону с интервалом в 3 мин. При этом расписание может быть составлено так, что, пропустив поезд, идущий к центру, вы должны будете 1 мин. ждать поезда из центра, а пропустив поезд из центра,



К 7.12

будете ждать очередного поезда к центру 2 мин. (см. рис., на котором тёмными кружками отмечены прохождения поездов к центру и светлыми кружками — моменты прохождения поездов из центра). Поэтому вдвое более вероятно, что вы попадёте на станцию в один из двухминутных интервалов и, следовательно, попадёте на поезд, идущий к центру.

7.13. а) 5 автомобилей, не хватит, а 6 — достаточно: нужно только позаботиться о том, чтобы их выходные были в разные дни. б) 9 автомобилей не хватит: в какой-то день недели 2 из них должны простаивать, так что на ходу только 7 — автомобилей, а нужно 8. А 10 автомобилей достаточно: выходные можно распределить так, что каждый день будут простаивать не больше двух автомобилей.

7.14. 88.

7.15. После каждого рассказа с нечётным числом страниц меняется чётность начальной страницы следующего рассказа. Поэтому чётность начальной страницы меняется не меньше 14 раз (один из 15 рассказов с нечётным числом страниц может оказаться в книге последним). Итак, не менее 7 раз рассказы начинаются с чётной страницы и тем самым не более 23 раз — с нечётной. Если в начале книги поместить все рассказы с чётным числом страниц, а затем с нечётным, то ровно 23 рассказа будут начинаться с нечётных страниц.

7.16. 5 человек. Если есть 6 человек, то хотя бы для одного остались одни собственные галоши. Пример, когда 5 человек не смогли надеть галоши, очевиден.

7.17. Пусть в каждом лагере есть торговая палатка, где продаются доставленные консервы, и цена одной банки в базовом лагере равна 1 рублю, а в каждом следующем — в 3 раза больше, чем в предыдущем. Тогда цена банок, доставленных в любой из лагерей не меньше, чем цена банок, взятых для этого из базового лагеря. Действительно, для переноски банки из некоторого лагеря в следующий мы должны взять по крайней мере три банки, две из которых будут съедены на пути туда и обратно соответственно. Стоимость банки в 5-м лагере будет при этом $3^5 = 243$ руб., значит из базового лагеря нужно взять не менее 243 банок.

Докажем теперь, что 243 банок хватит. Для этого из базового лагеря выходит 81 член экспедиции. 54 человека из них, принеся по банке в первый лагерь, сразу возвращаются. Остальные 27 человек, взяв по 3 банки, идут во 2-й лагерь. 27 банок при этом остаются в 1-м лагере, чтобы обеспечить им возвращение из 1-го лагеря в базовый. Так происходит в каждом лагере. Две трети дошедших участников возвращаются, а треть — идёт дальше. Итак, из 4-го лагеря в 5-й выйдет один человек. Он и принесет вожделенную банку в 5 лагерь.

7.18. 9 щук. Если, например, 7 щук насытятся (съев каждая по 3 голодные щуки), то останутся ещё 2 голодные, которые насытятся (съев каждая по 3 ранее насытившиеся щуки); итак, общее количество насытившихся щук равно 9. Покажем, что 9 — наибольшее количество насытившихся щук.

Пусть k — число оставшихся щук, n — число насытившихся, тогда $3n$ — число проглоченных щук, поэтому (если каждая щука или насытится, или не съест ни одной щуки) $k + 3n = 30$, значит, $k = 3m$ и $m + n = 10$. Так как заведомо останутся несъеденные щуки, то $m > 2$, значит, наибольшее значение $n = 9$.

7.19. а) Пусть 1-й рыбак разделит улов на три, по его мнению, равные части, а 2-й и 3-й укажут на ту часть, которая им кажется большей. Если они указывают на разные части, то каждый берет ту часть, которая ему нравится, а 1-й берет оставшуюся часть. Если же они указывают на одну часть, то делят её между собой, как сказано в условии задачи. Затем 2-й и 3-й должны указать на ту из двух оставшихся частей, которая им кажется большей. Если они покажут на одну и ту же часть, то вновь делят её между собой, 1-й берет оставшуюся часть. Если её они укажут на разные части, то каждый из них делит понравившуюся ему часть с 1-м.

б) Будем решать задачу по индукции. Предположим, что n рыбаков нашли способ разделить улов безобидно. Допустим, что рыбаков стало $n + 1$. Разделим весь улов между n рыбаками и затем предложим каждому из них разделить свою долю на $n + 1$ равных (по его мнению) частей. Пусть теперь $(n + 1)$-й рыбак возьмёт у каждого из них по одной из этих частей. При этом каждый из n рыбаков получит, по его мнению, $n/(n + 1)$ его прежней доли, а так как его прежняя доля составляла, по его мнению, не менее всего улова, то он будет доволен. Ясно, что и последний рыбак не сможет жаловаться, так как он уверен, что взял у каждого из своих товарищей не менее $1/(n + 1)$ доли.

7.20. 85. Первый колокол за минуту сделает 46 ударов, 2-й и 3-й — соответственно 37 и 31 удар. Удары первого и второго колоколов совпадут через 20/3 секунды, а всего они совпадут 10 раз, удары первого и третьего — 16 раз, второго и третьего — 7 раз, а всех трёх — 4 раза. По формуле включений-исключений общее число ударов — $46 + 37 + 31 - 10 - 16 - 7 + 4 = 85$.

7.21. 5.

7.22. Нужно назвать числа $a = 100$, $b = 10$, $c = 1$.

7.23. За 10 минут машина проходит путь, равный двойному расстоянию от станции до места встречи бизнесмена с машиной. Значит, путь от станции до места встречи машина проходит за 5 минут. На месте встречи машина была за 5 минут до времени обычного приезда бизнесмена на станцию, значит, путь от станции до места встречи бизнесмен шёл $55 - 5 = 50$ мин. Значит, скорость бизнесмена в $50 : 5 = 10$ раз меньше скорости машины.

7.24. Ваня может выйти в начале 38-го часа. Путь по дороге и тропинке (туда и обратно) занимает 16 часов. Значит, если выйти сразу после извержения первого кратера, то он не будет опасен. Движение по тропинке (туда и обратно) занимает 8 часов. Значит, если начать движение по тропинке сразу после извержения 2-го кратера, то он не будет опасен. Ване для безопасного подъёма достаточно, чтобы к началу движения по дороге перестал извергаться первый кратер, а спустя 4 часа, к началу движения по тропинке, перестал извергаться второй кратер.

Найдём такой момент времени. Первый кратер извергается 1-й, 19-й, 37-й часы. Второй кратер извергается 1-й, 11-й, 21-й, 31-й, 41-й часы.

7.25. Переходят папа и мама — 2 минуты. Папа с фонариком возвращается — 1 минута. Переходят бабушка и малыш — 10 минут. Мама с фонариком возвращается — 2 минуты. Переходят папа и мама — 2 минуты. Итого 17 минут.

Домино

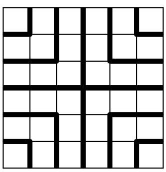
7.26. а) Прежде всего, понятно, что можно исключить из рассмотрения дубли. Тогда имеется 6 костей с шестёркой. Если же требуемую цепь можно выложить, то костей с шестёркой оказывается нечётное число (одна кость с краю и чётное число костей внутри цепочки). Противоречие.

б) Можно. Снова выбросим дубли, возьмём какую-нибудь кость с шестёркой и будем выкладывать кости по правилам игры, оставив шестёрку на конце. В какой-то момент мы уже не сможем положить новую кость. Из п. а) следует, что тогда на правом конце получившейся цепочки обязательно будет шестёрка. Если костей больше нет, то нужная цепочка получена. Если же есть ещё кости, то с их помощью можно удлинить построенную цепочку. Для этого будем циклически перекладывать кости с правого конца цепи на левый. Поскольку, по предположению, все кости с шестёркой уже выложены, то в нашей цепи присутствуют и единицы, и двойки, и т. д., так что для любой кости, ещё не включённой в нашу цепь, мы рано или поздно найдём место. Понятно, что таким образом нам удастся в конце концов выложить все кости. Получить на концах цепи шестёрки можно с помощью той же процедуры циклического перекладывания костей.

7.27. Заметим, что после выбрасывания дублей имеется 5 костей (нечётное число!) с каждой цифрой. Аналогично решению задачи 7.26 заключаем, что выложить все кости в одну цепь и в 2 цепи нельзя. В 3 цепи выложить кости можно, например, (01)(12)(23)(34)(45), (13)(35)(52)(20)(04), (24)(41)(15)(50)(03).

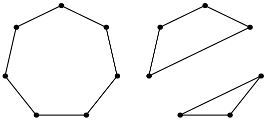
7.28. Нет. Для того чтобы расположить кости согласно условию, нужно всегда располагать чётное число рядом с нечётным. Но на костях домино 32 чётных числа и только 24 нечётных.

7.29. Можно. Для этого следует, например, выложить костями домино указанные на рисунке бесконечные уголки.



К 7.29

7.30. Заметим, что после выбрасывания каждой второй кости, а затем всех дублей среди оставшихся костей есть либо ровно четыре кости с одной шестёркой, либо ровно две такие кости. То же справедливо и в отношении других цифр: пятёрки, четвёрки и т. д.



К 7.30

Докажем, что если есть четыре кости с одинаковой цифрой, например, с шестёркой, то все кости можно сложить в одно кольцо. В самом деле, выложим кости в цепочку так, чтобы в ней были использованы все кости с шестёркой (это можно сделать, см. решение 7.26). Итак, в этой цепи встречаются по крайней мере пять разных цифр. Затем, как и при решении 7.26, мы можем максимально расширить цепь, т. е. добиться того, чтобы в этой цепи были использованы все кости с встречающимися в ней цифрами. Оказывается, что после этого наша цепь будет содержать вообще все кости. Это очевидно, если в ней встречаются по крайней мере шесть различных цифр. Предположим, однако, что в ней встречаются лишь пять цифр. Тогда среди костей, не попавших в цепочку (их по крайней мере три), непременно найдётся кость с одной из этих пяти цифр. Но такая кость должна уже содержаться в цепи. Противоречие.

Рассмотрим теперь случай, когда каждая цифра встречается лишь на двух костях. Это возможно, если в число оставшихся костей попали все семь дублей. В этом случае очевидно, что, выбросив дубли, семь костей можно выложить либо в одно кольцо, либо в два кольца (см. рис., где точки — это цифры 0–6, а соединяющие их отрезки — соответствующие кости домино). Осталось лишь добавить дубли.

7.31. Если n чётное, то каждой половинке найдётся пара, а дубли можно вставить между парами. Поэтому можно выставить все $(n+2)(n+1)/2$ косточек.

Если n нечётное, то можно выставить $(n+2)(n+1)/2-(n-1)/2$ косточек. Половинок с каждым значением нечётное число, значит, как бы мы ни разбивали на пары половинки, для каждого значения на половинке найдётся одна половинка без пары. Так как две из половинок будут на концах цепочки, то оставшихся половинок не может быть меньше $n-1$. Соответствующий пример легко построить.

Доли и проценты

7.32. На четверть. Так как половина персиков составляла треть объёма банки, половина оставшихся персиков составляет шестую часть первоначального объёма. Часть $1/6$ составляет от $2/3=4/6$ одну четверть.

7.33. Уменьшилось. Пусть вначале учеников — n, мальчиков — $0{,}5n$. Тогда стало: учеников — $0{,}9n$, мальчиков — $0{,}55\times$ $\times\, 0{,}9n=0{,}495n$.

7.34. Пусть x_1, x_2 — число мальчиков в 1-м и 2-м походе, y_1, y_2 — число девочек в 1-м и 2-м походе. Тогда по условию $(x_1+x_2)/(x_1+x_2+y_1+y_2)\leqslant 2/5$, откуда $(x_1+x_2)/(y_1+y_2)\leqslant 2/3$. Но $(x_1+x_2)/(y_1+y_2)\geqslant(x_1+x_2)/2y\geqslant x/2y$, где x, y — число всех мальчиков и девочек. Отсюда $x/2y\leqslant 2/3$ или $y/x\geqslant 3/4$, тогда $(x+y)/x\geqslant 7/4$ и $x/(x+y)\leqslant 4/7$.

7.35. Примем площадь стола за единицу. Выберем какой-нибудь журнал и рассмотрим ту его часть, которая не лежит на других журналах. Для каждого журнала измерим площадь этой части. Мы получим 15 чисел, составляющих в сумме единицу. Ясно, что 7 наименьших из этих чисел составляют в сумме не более 7/15. Достаточно убрать соответствующие 7 журналов.

7.36. Пусть на встречу собралось x мужчин, участвовавших только в первом походе, y мужчин, участвовавших только во втором, и z мужчин, участвовавших в обоих походах. Тогда в первом походе было $x+z$ мужчин и $2(x+z)/3$ женщин, а во втором $y+z$ мужчин и $(y+z)/3$ женщин. Следовательно, на встречу пришло не больше $2(x+z)/3+(y+z)/3 = 2x/3+y/3+z \leqslant x+y+z$ женщин.

7.37. Двоечник неверно ответил на половину всех вопросов. Это составляет 4/5 тех вопросов, на которые он отвечал наугад. Если x — искомая величина задачи, то на $1-x$ часть вопросов двоечник отвечал наугад, так что можно составить уравнение: $4/5(1-x) = 1/2$, откуда $x = 3/8$.

Турниры

7.38. 9 мастеров и 3 гроссмейстера. Если n — число участников матча, $n(n-1)/2$ — общее количество очков в матче.

7.39. Из условия команда Б выиграла у А. Остальные встречи А выиграла, так как иначе она набрала бы менее 6 очков, т. е. не более 4 очков из 8 возможных, а значит, не была бы победительницей. Так как A набрала 6 очков, то команды Б, В, Г и Д набрали соответственно не более 5, 4, 3 и 2 очков. При этом ни одна из них не могла набрать меньше соответственно 5, 4, 3 и 2 очков, так как иначе все 5 команд вместе набрали бы вместе менее $6+5+4+3+2 = 20$ очков, в то время как они сыграли $5\cdot 4/2$ встреч и, следовательно, набрали $5\cdot 4/2 = 20$ очков.

	А	Б	В	Г	Д	очки
А	—	0	2	2	2	6
Б	2	—	1	1	1	5
В	0	1	—	1	2	4
Г	0	1	1	—	1	3
Д	0	1	0	1	—	2

К 7.39

Поскольку Б одну встречу (с А) выиграла и ни одной встречи не проиграла, то остальные 3 встречи (с командами В, Г и Д) она свела вничью. Команда Г набрала 3 очка и не выиграла ни одной встречи. Так как она проиграла А и сделала ничью с Б, то с командами В и Д она сыграла вничью. Команда В набрала

	А	Б	В	Г	Д	Е	очки
А	—	0	2	2	2	2	8
Б	2	—	0	2	1	2	7
В	0	2	—	0	2	2	6
Г	0	0	2	—	0	2	4
Д	0	1	0	2	—	0	3
Е	0	0	0	0	2	—	2

К 7.40

	А	Б	В	Г	Д	Е	очки
А	—	1	1	1	1	2	6
Б	1	—	2	0	0	2	5
В	1	0	—	0	2	2	5
Г	1	2	2	—	0	0	5
Д	1	2	0	2	—	0	5
Е	0	0	0	2	2	—	4

К 7.43

4 очка. При этом она проиграла А и сделала ничьи с Б и Г. Значит, она выиграла у Д. Окончательный ответ приведён на рисунке.

7.40. Турнирная таблица представлена на рисунке.

7.41. Е набрал 3 очка. А, Б, В и Г — по 2,5, Д — 2. Из условия видно, что победитель — не В, не А, не Г, не Д и не Б. Значит, победителем является Е. Он сыграл вничью с А и проиграл В. Как Е сыграл с Б? Он не мог выиграть у Б, поскольку Б не проиграл ни одной партии; но он не мог и проиграть Б, иначе набрал бы не более 2,5 очка и, следовательно, не был бы победителем турнира. В таком случае партия Е с Б окончилась вничью. Поскольку Е в партиях с А, В и Б уже потерял 2 очка, то у Г и Д он выиграл и набрал 3 очка.

Б с одной стороны набрал не более 2,5 очка, так как не является победителем турнира; с другой — он набрал не менее 2,5 очка, так как ни одной партии не проиграл. Значит, он набрал 2,5 очка и все партии свел вничью.

В выиграл у Е, сыграл вничью с А, Б и Д, набрав минимум 2,5 очка. Следовательно, он набрал ровно 2,5 очка и проиграл Г. Г проиграл Е, сыграл вничью с А, Б и Д и выиграл у В. Тогда он набрал также 2,5 очка. Наконец, Д набрал 2 очка, А — 2,5.

7.42. Выиграл у занявшего пятое место, проиграл занявшему третье место.

7.43. Может (см. рис.).

7.44. Пример указан на рисунке.

оц.	A	B	C
1	4	3	5
2	3	5	4
3	5	4	3

К 7.44

7.45. Пусть игрок А набрал меньше всех очков (точнее, не больше, чем каждый из остальных). Игрок А знает всех, кто выиграл у него. Предположим, что В проиграл А. Тогда В выиграл у кого-то, кто выиграл у А (иначе у В было бы меньше очков, чем у А, а это противоречит выбору А). Значит, А знает В. Следовательно, А — искомый участник.

7.46. Пусть в турнире 12 команд. Общее количество очков, набранное командами равно $(11 \cdot 12/2) \cdot 2 = 132$. У последней не менее 6 очков, у предпоследней — 7, и т. д. Тогда общее количество очков — $6 + 7 + \ldots + 17 = 138 > 132$.

7.47. Обозначим число мастеров через m, число гроссмейстеров через g, при этом $m + g = n$. Как бы ни окончилась партия между двумя партнёрами, суммарное количество очков, набранных обоими, в результате увеличится на 1. Значит, сумма очков, набранных мастерами в партиях против мастеров, равна числу партий, сыгранных между мастерами, т. е. $m(m-1)/2$. Так как каждый мастер половину своих очков набрал в партиях с гроссмейстерами, то общее число очков, набранных мастерами в партиях против гроссмейстеров, также равно $m(m-1)/2$. Точно также доказывается, что сумма очков, набранных гроссмейстерами в их партиях против мастеров, равна $g(g-1)/2$. Число партий, в которых гроссмейстер играл против мастера, равно $g(g-1)/2$. Отсюда $m(m-1)/2 + g(g-1)/2 = mg$ или $m^2 - 2mg + g^2 = m + g$, т. е. $(m-g)^2 = n$, что и требовалось доказать.

7.48. 11. Все 8 команд вместе наберут $8 \cdot 7/2 = 56$ очков. Поэтому 7, 8 и даже 9 очков не гарантируют команде выход в финальную четвёрку. А 10 очков? Пусть найдутся 5 команд, которые все матчи между собой сыграли вничью, а у остальных трёх — выиграли. Тогда каждая из них наберет по $4 + 6 = 10$ очков. Но 10 очков не дают гарантии выхода команды в финал, так как таких команд 5, а не 4. Докажем, что если команда наберет 11 очков, то она выйдет в финал. Допустим противное: найдутся пять команд, каждая из которых наберет не менее 11 очков. В этом случае они вместе наберут не менее 55 очков, а значит, остальные три команды вместе — не более 1 очка. Но это невозможно, поскольку такие три команды только во встречах между собой наберут вместе $2(3 \cdot 2/2) = 6$ очков.

7.49. Могло. Каждая пара сыграла по 7 партий. При этом первый выиграл у второго 2 партии, второй у первого — тоже 2 партии; первый выиграл у третьего 3 партии, а третий у первого — 4 партии; остальные партии турнира окончились вничью.

Таким образом, первый шахматист набрал 6,5 очков, второй — 7 очков, третий — 7,5 очков; при этом первый выиграл больше всех — 5 партий, второй проиграл меньше всех — 2 партии, а больше всех очков набрал третий.

7.50. Обозначим число команд через n. Докажите, что в турнире сыграно $n(n-1)/2$ матчей и число очков, набранных всеми командами, равно $n(n-1)/2$. Так как призёры набрали 15 очков, то $n(n-1)/2 \geqslant 15$, откуда $n \geqslant 5$. Так как команды, занявшие места с 3-го по последнее, набрали не более чем по 3 очка, то $n(n-1)/2 \leqslant 3(n-2)+12$, откуда $(n-2)^2 \leqslant 10$ и $n \leqslant 5$. Значит, $n = 5$, $n(n-1) = 20$. Командам, занявшим 2 последние места, досталось 5 очков, 3 очка — команде, занявшей IV место, и 2 очка — команде, занявшей V место.

7.51. Студент С. Общая сумма очков равна 39. Числа x, y и z — различные, поэтому $x+y+z \geqslant 1+2+3 = 6$. Число $x+y+z$ должно быть делителем 39, значит, $x+y+z = 13$. Студент А не может иметь z очков за тест, набранные им 20 очков не выражаются как $3y$. Если $20 = x+2y$, то $y-z = 7$ и $x+y \geqslant 17$, поэтому остается лишь возможность $20 = 2x+y$. Отсюда y — чётное число. Если $y = 2$, то $x+y+z = 10$, если $y \geqslant 6$, то $x+y \geqslant 13$, поэтому $y = 4$. Отсюда $x = 8$ и $z = 1$. Есть только один способ распределить эти очки так, чтобы суммы равнялись 20, 10 и 9.

7.52. 7 или 14. Обозначая число восьмиклассников за x и используя первое условие легко показать, что общее число очков, набранных ими, равно $x(x-1)/2+2x-7$. Из второго условия следует, что 14 делится на x.

7.53. 9 человек (пример соответствующей таблицы приведён на рисунке).

—	0	0	1	1	1	1	1	1
1	—	0	1	1	1	1	1	1
1	1	—	0	0	1	1	1	1
0	1	1	—	0	0	0	1	1
0	0	1	1	—	0	1	0	1
0	0	0	1	1	—	1	1	0
0	0	0	0	1	0	—	$1/2$	$1/2$
0	0	0	0	1	0	$1/2$	—	$1/2$
0	0	0	0	0	1	$1/2$	$1/2$	—

К 7.53

7.54. $66-12 = 54$ ничейных партий. Каждый из участников турнира выиграл только по одной партии.

7.55. Последнее место. Команды 2–24 играют между собой вничью 1 : 1, первая выигрывает 2 : 1 у команд 2–12, с 13-й играет вничью 1 : 1, а 14–24-й — проигрывает 1 : 2, у 25-й — выигрывает 4 : 0. 25-я команда проигрывает 0 : 1 2–12-й, играет 1 : 1 с 13-й и выигрывает 4 : 0 у 14–24-й.

7.56. n очков. Например, первая команда выигрывает у всех остальных, набирая $2n-2$ очка. А остальные команды играют друг с другом вничью, набирая по $n-2$ очка каждая.

7.57. Пронумеруем борцов по их силе (больший номер побеждает меньший). Тогда команды $(3, 4, 8)$, $(2, 6, 7)$, $(1, 5, 9)$ удовлетворяют условиям.

7.58. а) Представим себе людей сидящими в вершинах правильного n-угольника. У правильного n-угольника есть n осей симметрии. Пусть в k-м туре каждый играет с симметричным ему относительно k-й оси (участники, через которых проходит ось, не играют). Утверждение задачи следует теперь из того что для любых двух вершин A и B правильного n-угольника существует ровно одна осевая симметрия, переводящая A в B. б) При чётном n. Если n нечётно, то нужно провести $n(n-1)/2$ партий. За один час можно провести не больше $(n-1)/2$ партий. Значит, понадобится не меньше n часов. Пусть n чётно. Расположим людей в вершинах правильного $(n-1)$-угольника. Одному не хватит места — посадим его в центр. Каждая $n-1$ из осей симметрии проходит ровно через одну вершину. Шахматист, сидящий в этой вершине играет с сидящим в центре.

7.59. Назовем победителем команду, набравшую в первенстве наибольшее число очков. Пусть n — число игр, выигранных победителем, m — число сделанных им ничьих. Тогда победитель набрал $2n+m$ очков. По условию каждая другая команда одержала не менее $n+1$ побед, т. е. набрала не менее $2(n+1)$ очков. Победитель набрал наибольшее число очков, значит $2n+m > 2n+2$, и тогда $m > 2$.

Значит, найдётся команда, с которой победитель сыграл вничью, эта команда набрала не меньше $2(n+1)+1$ очков, поэтому $2n+m > 2n+3$, и $m > 3$.

Победитель должен был выиграть хотя бы одну игру. Действительно, в противном случае он набрал бы не более $s-1$ очков, где s — число команд, участвующих в первенстве. Любая другая команда тогда набрала бы строго меньше $s-1$ очков, а все участники турнира — менее $s(s-1)$ очков. Приходим к противоречию с тем, что всего в первенстве разыгрывается ровно $s(s-1)$ очков, так как после каждой игры распределяются два очка, а всего игр $s(s-1)/2$.

Итак, $m > 3$, $n > 0$, поэтому победитель сыграл не менее 5 игр. Значит, общее число команд (вместе с победителем) не меньше 6.

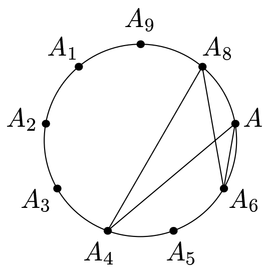
В 7.43 приведена итоговая таблица некоторого первенства, в котором участвовали 6 команд, удовлетворяющая условиям задачи. Следовательно, наименьшее число участников описанного в задаче первенства равно 6.

7.60. Могло. Например, в турнире участвовали 13 команд. Одна из них (команда A) выиграла 5 матчей и 7 проиграла. Все остальные игры закончились вничью. По новой системе у A 15 очков, у остальных — не более 14 очков, по старой системе у A было бы 10 очков, а у остальных — не менее 11 очков.

7.61. Шахматисты, занявшие последние 4 места, сыграли между собой $4 \cdot 3/2 = 6$ партий и набрали в этих партиях в общей сложности 6 очков. Значит, шахматист, занявший II место, набрал не менее 6 очков. Пусть у него 6,5 очков и, следовательно, он не проиграл ни одной партии. Тогда победитель турнира набрал 7 очков и выиграл все партии, в том числе и у шахматиста, занявшего II место. Противоречие. Итак, шахматист, занявший второе место, имеет ровно 6 очков. Значит, шахматисты, занявшие V–VIII места, также имеют вместе ровно 6 очков, причём они набрали эти очки только в играх друг с другом, т. е. проиграли все партии шахматистам, занявшим первые четыре места. В частности, игрок, занявший III место, выиграл у шахматиста, занявшего V место.

7.62. От противного: пусть в турнире участвовали 12 команд. Пусть x_k — количество очков, набранных командой, занявшей k-е место, $1 \leqslant k \leqslant 12$. По условию задачи $x_1 > x_2 > \ldots > x_{12}$ и $x_{12} \geqslant 6$ (так как 12-я команда выиграла у первых трёх команд). Значит, $x_{11} \geqslant 7, \ldots, x_2 \geqslant 16, x_1 \geqslant 17$, т. е. $x_1 + \ldots + x_{12} \geqslant 17 + \ldots + 6 = 138$. С другой стороны, $x_1 + \ldots + x_{12} = 2 \cdot (12 \cdot 11/2) = 132$. (Сумма очков, набранных всеми командами, равна числу игр, умноженному на количество очков, набранных в одной игре.) Но $132 < 138$. Противоречие.

7.63. Пусть описанный в задаче турнир проведён. Тогда все противники любого из теннисистов разбиваются на пары, поэтому n — нечётное число. Все возможные пары противников разбиваются на четвёрки пар, игравших в одном матче. Следовательно, число этих пар, равное $n(n-1)/2$, кратно четырём. Отсюда получаем, что $n - 1 = 8k$, $n = 8k + 1$.



К 7.63

Докажем, что при любом $k \geqslant 1$ указанный турнир для $n = 8k+1$ участников возможен. При $k = 1$ для описания турнира поставим в соответствие теннисистам вершины правильного девятиугольника $A_1 \ldots A_9$. На рисунке изображён матч пары A_1A_2 против пары A_3, A_5, причём отрезками соединены противники.

Поворачивая эту конструкцию из отрезков вокруг центра на углы, кратные $2\pi/9$, мы получим, изображение для остальных 8 матчей. При этом каждая хорда вида A_iA_j появится в изображении один раз, поскольку она равна в точности одной из хорд A_2A_3, A_1A_3, A_2A_5 и A_1A_5. При $k > 1$ выделим одного из $8k + 1$ теннисистов, а остальных разобьём на k групп по 8 человек. Присоединяя выделенного теннисиста последовательно к каждой группе, проведём в них турниры по описанной выше схеме для 9 человек. Тогда останется только провести матчи между противниками из разных групп. Для этого достаточно разбить каждую группу на 4 команды по 2 человека и провести все возможные матчи между командами из разных групп.

7.64. Пусть не все набрали одинаковое число очков. Пусть занявшие первое место («первые») набрали K очков, а занявшие последнее место («последние») — L очков. (Места определяются по очкам, а не по коэффициентам.)

Коэффициент «первых» — это сумма K чисел, каждое из которых не меньше L. Значит, этот коэффициент не меньше $K \cdot L$. Аналогично, коэффициент «последних» — это сумма L чисел, каждое из которых не больше K. Поэтому коэффициент «последних» не превосходит $K \cdot L$. Если коэффициенты «первых» и «последних» равны, то они равняются $K \cdot L$. В этом случае каждый «первый» выиграл K встреч у набравших L очков, то есть у «последних», а каждый «последний» выиграл L встреч у набравших K очков. Если число «первых» больше одного, то один из них выиграл у другого, что противоречит предыдущему. Значит, на первом месте один спортсмен. Аналогично, на последнем месте только один спортсмен.

По условию, в турнире есть третий участник. Из доказанного следует, что он не проигрывал ни первому, ни последнему, то есть выиграл и у первого, и у последнего. Но тогда он набрал больше очков, чем первый, так как тот выиграл только у последнего. Противоречие.

7.65. Участники турнира делятся на тех, кто увеличил свою сумму очков (не менее чем на n) и тех, кто её уменьшил. Хотя бы одна из этих двух групп включает не менее n спортсменов. Пусть, например, такова первая группа, и в ней x спортсменов. Если их общая сумма очков увеличилась на D, то $D \geqslant x \cdot n$.

Эта сумма увеличилась за счёт встреч x спортсменов с остальными $2n - x$. Каждая из этих встреч добавила не более одного очка. Поэтому $D \leqslant x(2n - x)$.

Сравнивая неравенства, получаем $2n - x \geqslant n$. Но, по предположению, $x \geqslant n$. Значит, $x = n$. Следовательно, $D = n \cdot n$, и каждый спортсмен первой группы увеличил свою сумму очков ровно на n. Ко второй группе применимо такое же рассуждение.

7.66. Всего в турнире были сыграны $n(n-1)$ партий, и в каждой разыгрывалось 1 очко. Поэтому при равенстве всех результатов участники набрали по $n-1$ очку. Каждый шахматист сыграл белыми $n-1$ партию, и количество выигранных им партий белыми равно одному из n чисел: $0, \ldots, n-1$. Предположим, что утверждение задачи неверно: все выиграли разное число партий белыми. Тогда реализованы все возможные варианты от 0 до $n-1$. Рассмотрим двух участников турнира: А, выигравшего $n-1$ партию белыми, и В, не выигравшего ни одной такой партии. Разберёмся, каким мог быть результат партии, которую А играл против В чёрными. С одной стороны, А набрал $n-1$ очко, играя белыми, так что все свои партии чёрными, в том числе и эту, он должен был проиграть. Но В не выиграл белыми ни одной партии, значит, не мог выиграть и эту. Противоречие.

7.67. а) Не могут; б) могут. а) Пусть N — число игроков, $M = [N/2]$. Игроков, занявших первые M мест, назовём сильными, а остальных — слабыми (между участниками с одинаковой суммой очков места распределяются произвольно). Пусть X — число правильных партий между сильными и слабыми. Сумма очков, набранных сильными во встречах между собой, равна $M(M-1)/2$, а во встречах со слабыми — не больше X. Поэтому средний результат сильного не больше

$$\frac{M-1}{2} + \frac{X}{M}.$$

Аналогично, средний результат слабого не меньше

$$\frac{N-M-1}{2} + \frac{M(N-M)-X}{N-M}.$$

Если есть неправильные партии, то не все игроки набрали поровну, и средний результат сильного больше, чем слабого. Отсюда $X > M(N-M)/2 \geqslant N(N-1)/8$. Так как общее число партий равно $N(N-1)/2$, доля правильных партий больше $1/4$.

б) Возьмём сначала турнир $2k+1$ игрока, в котором каждый участник с номером $i \leqslant k$ проиграл участникам с номерами

$i+1, \ldots, i+k$ и выиграл у остальных, а каждый участник с номером $i > k$ выиграл у участников с номерами $i-k, \ldots, i-1$ и проиграл остальным. Очевидно, что все игроки набрали по k очков, причём в таблице турнира выше главной диагонали единицы стоят лишь в $k(k+1)/2$ клетках из $2k(2k+1)/2$. Теперь «размножим» каждого игрока, заменив его блоком из n новых, и пусть участники из разных блоков играют друг с другом так же, как соответствующие прежние участники, а участники из одного блока играют друг с другом вничью. Получим новую таблицу, в которой по-прежнему у всех игроков поровну очков. Исправим эту таблицу так, чтобы суммы очков игроков перестали быть равными. Для этого будем менять результаты участников из блока $k+1$: в их встречах против участников из блока $k+1-i$ заменим $i \cdot n$ выигрышей ничьими, так что сумма очков каждого участника блока $k+1$ уменьшится, а каждого участника блока $k+1-i$ увеличится на $i/2$. Напротив, в партиях с игроками блока $k+1+i$ заменим ничьими $i \cdot n$ проигрышей. Число неправильных партий станет равно

$$n^2\frac{2k(2k+1)}{2} - n^2\frac{k(k+1)}{2} - 2n\frac{k(k+1)}{2}.$$

При этом общее число партий равно $n(2k+1)(n(2k+1)-1)/2$. При $n=k=20$ неправильные партии составляют $235600/335790 > 0{,}7$ от общего числа партий.

Числа

7.68. Предположим противное и упорядочим по возрастанию числа: $x_1 < \ldots < x_{10}$. Тогда должна выполняться неравенства: $x_1 \geqslant 1$, $x_2 > 3x_1/2 \geqslant 2$, $x_3 > 3x_2/2 \geqslant 3$, т. е. $x_3 \geqslant 4, \ldots,$ $x_9 > 3x_8/2 \geqslant 60$, т. е. $x_9 \geqslant 61$, $x_{10} > 3x_9/2 \geqslant 183/2 > 91$. Противоречие.

7.69. $1/2^8$ можно получить усредняя число в первой ячейке со всеми остальными по очереди. Покажем, что меньшее получить нельзя. Пусть после каждой операции все ненулевые числа становятся равными наименьшему из них. Эта новая операция дает результат в каждой ячейке не больше, чем исходная операция и при этом она либо ничего не меняет, либо уничтожает один нуль и уменьшает все числа в два раза. Так как новая операция не позволяет получить число меньшее $1/2^8$, то исходная операция — тем более.

7.70. Можно. Сначала расположим числа, начинающиеся или оканчивающиеся девяткой:

$$909, 919, \ldots, 999,$$
$$901, 109, 902, 209, 903, 309, \ldots, 906, 609, 907, 709, 908, 809,$$
$$911, 119, 912, 219, 913, 319, \ldots, 916, 619, 917, 719, 918, 819,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$991, 199, 992, 299, 993, 399, \ldots, 996, 699, 997, 799, 998.$$

Число 899 писать пока не будем, а напишем следующее:

$$808, 818, \ldots, 888, 898,$$
$$801, 108, \ldots, 807, 708,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$891, 198, \ldots, 897.$$

Опять в конце 798 не пишем и переходим к числам с семёркой на конце или в начале, и т. д. Когда мы дойдём до чисел с единицей на конце или в начале, у нас останутся ненаписанными числа

$$101, 111, \ldots, 191 \text{ и } 192, 293, 394, \ldots, 798, 899.$$

Допишем их в указанном порядке.

7.71. Может. Приведём пример:

$$2; 2; 2; 2; -9; 2; 2; 2; 2; -9; 2; 2.$$

Здесь выписаны подряд (с учётом знака) разности между доходами и расходами фирмы (сальдо) за каждый месяц года. Мы видим, что сумма любых пяти последовательных чисел выписанной цепочки отрицательна (равна -1), а в целом за год сумма всех чисел положительна (равна 2).

7.72. Можно. Например:

$$-a, b, b, -a, b, b, \ldots, -a, b, b, -a, b,$$

где a и b таковы, что $2b - a > 0$ и $13b - 7a < 0$. Одно из решений: $a = 25, b = 13$.

7.73. Пусть $n = kl$. Разобьём n чисел на l групп по k соседних чисел. Так как сумма чисел в каждой группе отрицательна, то и сумма всех чисел отрицательна. Пусть $n = kl + r$, где $0 < r < k$. Будем искать числа в виде

$$(-a), \underbrace{b, \ldots, b}_{k-1}, (-a), \ldots, (-a), \underbrace{b, \ldots, b}_{k-1}, (-a), \underbrace{b, \ldots, b}_{r-1}.$$

Тогда a и b должны удовлетворять неравенствам: $a < b(l+1)$ (сумма k соседних отрицательна) и $a(l+1) > b(n-l-1)$ (сумма всех чисел положительна) или $(n-l-1)/(l+1) < a/b < k-1$. Поэтому для существования a и b достаточно проверить неравенство $(n-l-1)/(l+1) < k-1$.

7.74. а) Допустим, что такая строка из 50 чисел существует. Из условия задачи следует, что сумма любых четырёх рядом стоящих чисел отрицательна. Группу из 28 чисел, стоящих подряд, можно разбить на 7 «четвёрок» — значит, их сумма отрицательна, но можно разбить и на 4 «семёрки» — значит, эта сумма положительна. Противоречие. б) Условию удовлетворяет, например, строка, в которой четыре раза подряд выписана последовательность $4, 4, 4, 4, 4, 4, -5, -5, -5, -5, -5$, а на последних шести местах снова: $4, 4, 4, 4, 4, 4$.

7.75. 16. Это типичная олимпиадная задача, не требующая для своего решения никаких дополнительных знаний. Её решение состоит из двух частей: нахождения последовательности из 16 чисел, удовлетворяющих условию задачи, и доказательства того, что большего количества чисел последовательность такого рода иметь не может. Последовательность (разумеется, не единственную) можно найти интуитивно, путём проб, но можно построить и с помощью некоторого рассуждения:

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5.$$

Докажем, что в рассматриваемой последовательности не может быть больше 16 членов. Пусть в последовательности не меньше 17 членов, тогда, зафиксировав любые 4 идущие подряд члена, получим, что кроме них имеется ещё не меньше 13 членов, следовательно, по крайней мере с одной стороны от этой четвёрки находится не меньше 7 членов. Значит, существует последовательность из 11 идущих подряд членов, содержащая выбранную четвёрку на одном из своих концов. Но сумма взятых 11 выбранных членов положительна, а сумма 7 членов, дополнительных к выбранной четвёрке, отрицательна, поэтому сумма выбранных четырёх членов положительна; поскольку это произвольная четвёрка последовательных членов, заключаем, что сумма любых четырёх последовательных членов положительна. Взяв затем произвольную тройку идущих подряд членов, мы можем рассмотреть семёрку идущих подряд членов, которая начинается или оканчивается выбранной тройкой. Так как сумма добавленных четырёх членов, по доказанному, положительна, а сумма всех семи членов, по предположению, отрицательна, то сумма выбранных трёх членов отрицательна.

Рассмотрим теперь любой член последовательности и возьмём четвёрку идущих подряд членов, в которой он стоял бы на одном из её концов. Тогда их сумма положительна, сумма добавленных трёх членов отрицательна; значит, рассматриваемый член последовательности положителен, т. е. все члены последовательности положительны, а это противоречит тому, что сумма 11 её членов отрицательна. Итак, в данной последовательности содержится не более 16 членов.

7.76. В самом деле, составим систему $k+n-2d$ линейных уравнений с $k+n-d-1$ неизвестными:

$$\begin{array}{rr} x_1+\ldots+x_n=a_1, & x_1+\ldots+x_k=b_1, \\ x_2+\ldots+x_{n+1}=a_2, & x_2+\ldots+x_{k+1}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k-d}+\ldots+x_{k+n-d-1}=a_{k-d}, & x_{n-d}+\ldots+x_{k+n-d-1}=b_{k-d}. \end{array}$$

Можно показать, что система совместна: её матрица имеет максимально возможный ранг $k+n-2d$. Если числа n и k взаимно просты ($d=1$), то она имеет единственное решение; если же $d>1$, то в системе имеется $d-1$ свободных неизвестных.

Таким образом, по заданным n и k можно найти строчку из $n+k-d-1$ чисел, удовлетворяющих условию. Если же m меньше этого числа, то первые m чисел уже выписанной строчки удовлетворяет условию задачи.

Покажем теперь, что если $m \geqslant k+n-d-1$, то не существует такой строчки из m чисел, что все её n-суммы имеют один знак, а все k-суммы — другой. Допустим, что нашлась такая строчка из $k+n-d$ чисел, и пусть $n>k$. Вычеркнем первые k чисел. Тогда в строчке из оставшихся $n-d$ чисел все k-суммы по-прежнему имеют одни знак, а все $(n-k)$-суммы имеют другой знак. Поскольку $n-d=(n-k)+k-d$, мы от задачи с параметрами n и k пришли к задаче с меньшими числами: k и $n-k$. Повторяя эту процедуру (похожую на алгоритм Евклида), мы придём к такой ситуации: имеется строчка чисел, в которой все d-суммы имеют один знак, а все ld-суммы — другой знак, что, очевидно, невозможно. (Заметим, что аналогичной процедурой — спуском от (n,k) к $(k,n-k)$, похожей на алгоритм Евклида, можно доказать и совместность выписанной выше системы.)

Наконец, ясно, что если не существует строчки из $n+k-d$ чисел, удовлетворяющей условию, то нельзя выписать и более длинную такую строчку.

7.77. Решение 1. Упорядочим числа $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{1989}$. Если $a_1 > 0$, то утверждение очевидно. Пусть $a_1 \leqslant 0$, тогда $a_{1981} + \ldots + a_{1989} > 0$ (т. к. $a_1 + a_{1981} + \ldots + a_{1989} > 0$). Поэтому $a_1 + \ldots + a_{1989} = (a_1 + \ldots + a_{10}) + (a_{11} + \ldots + a_{20}) + \ldots + (a_{1981} + \ldots + a_{1989}) > 0$.

Решение 2. Рассмотрим сумму всех сумм 10 чисел. Она равна $(a_1 + \ldots + a_{1989}) \cdot C_{1989}^{10}$ (см. главу 14) и положительна. Следовательно, и $a_1 + \ldots + a_{1989}$ положительна.

7.78. Обозначим числа $a_1, \ldots, a_{51}$. Тогда

$$a_1 = \frac{(a_1 a_2 a_3 a_4) \cdot (a_5 a_6 a_7 a_8) \cdot \ldots \cdot (a_{49} a_{50} a_{51} a_1)}{(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{51})} > 0.$$

Из произвольности нумерации имеем положительность всех чисел.

7.79. Можно:

$$203 = 7 + 29 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{167\ \text{единиц}} = 7 \cdot 29 \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{167\ \text{единиц}}.$$

Поставим вопрос: какие натуральные числа нельзя представить одновременно в виде суммы и в виде произведения нескольких (одних и тех же) натуральных чисел? Ответ на этот вопрос такой: простые числа.

Другой вопрос, связанный с этой задачей: при каких натуральных значениях k уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k$ имеет ненулевое решение в целых числах?

Оказывается, что при всех значениях k. Например: при $k = 1$ $x_1 = 1$; при $k = 2$ $x_1 = x_2 = 2$; при $k > 2$ $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-2} = 1$, $x_{k-1} = 2$, $x_k = k$.

7.80. 28 ходов. За один ход можно увеличить число на 3 или на 5, за два хода — на $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$ или $10 = 5 + 5$. Рассуждая аналогичным образом, составим таблицу (верхняя строка — насколько увеличивается число, нижняя — минимальное число ходов, если возможны несколько вариантов).

Для того, чтобы получить одно и то же число — назовем его a — надо увеличить число 1 на $a-1$, число 2 на $a-2$ и т. д., т. е.

1	3	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1	1	2	2	3	2	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5

К 7.80

необходимо 9 идущих подряд добавок. Из таблицы следует, что это возможно при $a \geqslant 17$.

7.81. Можно считать, что числа расположены в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Рассмотрим числа

$$a_1, \ldots, a_n, a_1 + a_n, a_2 + a_n, \ldots, a_{n-1} + a_n,$$
$$a_1 + a_{n-1} + a_n, \ldots, a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Здесь сначала перечисляются все числа, потом к самому большому по очереди добавляются все остальные (по одному), затем к сумме двух самых больших, и т. д. Так как каждое число здесь больше предыдущего, то все выписанные числа различны. Их число — $n + (n-1) + \ldots + 1 = n(n+1)/2$.

Заметим ещё, что указанная оценка достигается — первые n натуральных чисел дают пример n различных чисел, из которых нельзя составить больше чем $n(n+1)/2$ различных сумм (эти суммы — все натуральные числа от 1 до $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$).

7.82. Минимальное значение $s_{\min}$ равно $-[n/2]$, т. е. $-(n-1)/2$, если n нечётно и $-n/2$, если n чётно. а) Сумму s всевозможных попарных произведений чисел $x_1, \ldots, x_n$ можно записать так: $s = ((x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2)/2$. Отсюда $s \geqslant -n/2$.

Если n чётно, то, положив половину из x_k равными 1, а половину равными -1, получим $s = -n/2$. Если же n нечётно, то (поскольку s — целое число) $s \geqslant -(n-1)/2$; наименьшее значение s достигается, если среди x_k имеется $(n+1)/2$ единиц и $(n-1)/2$ минус единиц. б) Сводится к задаче а): каждое из x_k можно последовательно заменить на 1 или -1 так, что величина суммы всевозможных попарных произведений не будет увеличиваться (правило замены: x_k заменяем на -1, если сумма остальных чисел неотрицательна, и на 1, если отрицательна). Поэтому ответ здесь такой же, как в пункте а).

7.83. Каждое слагаемое $|a_k - b_k|$ $(k = 1, \ldots, n)$ равно разности числа, большего n, и числа, не превосходящего n. Поэтому $|a_1 - b_1| + \ldots + |a_n - b_n| = (n+1) + (n+2) + \ldots + 2n - (1 + 2 + \ldots + n) = n^2$.

7.84. Решение 1. Пусть $A = \{0, 1, 2, \ldots, 1975\}$ (это данное множество чисел, так как добавление 0 не изменяет ответа на вопрос задачи), а $B = \{0, 1, \ldots, 1975, 1976, \ldots, 1998, 1999\}$. Покажем, что если B разбить на 2 группы так, как требуется в условии задачи, то сумма всех чисел одной группы будет равна сумме всех чисел другой. Зная этот результат, легко ответить и на вопрос относительно A, так как оно получается из B удалением всего 24 чисел, соответствующие суммы которых легко вычисляются.

Разобьём множество B на два подмножества $Н$ и $Ч$, включив в $Н$ все числа из B с нечётной суммой цифр, а в $Ч$ — с чётной. Обозначим через $S_н$ и $S_ч$, суммы чисел соответственно из $Н$ и $Ч$. Докажем, что $S_ч = S_н$.

Заметим, что среди чисел $0, \ldots, 999$ одинаковое количество чисел с чётной и нечётной суммой цифр. Действительно, разобьём числа на пары $(0; 1), (2; 3), \ldots, (998; 999)$. Числа каждой пары отличаются на 1 в последнем разряде, т. е. их суммы цифр разной чётности. Поэтому имеем: ($\sigma(n)$ — сумма цифр числа n)

$$S_ч - S_н = \sum_{i=0}^{i=999} (-1)^{\sigma(i)} i + \sum_{i=0}^{i=999} (-1)^{\sigma(i)+1}(1000 + i) =$$
$$= \sum_{i=0}^{i=999} \left((-1)^{\sigma(i)} i + (-1)^{\sigma(i)+1} i\right) - 1000 \sum_{i=0}^{i=999} (-1)^{\sigma(i)} = 0,$$

поскольку первая сумма в последней строке — это просто сумма нулей, а вторая — это разность между количеством чисел с чётной и нечётной суммой цифр среди $0, \ldots, 999$.

Обратимся теперь к исходному множеству A. Множество B получается добавлением к A чисел $1976, 1977, \ldots, 1999$. Поэтому если $s_ч$, $s_н$ — суммы чисел, принадлежащих множеству A, имеющих соответственно чётную и нечётную суммы цифр, то

$$S_ч = s_ч + 1977 + 1979 + 1980 + 1982 + \ldots + 1988 + 1991 + \ldots + 1999,$$

$$S_н = s_н + 1976 + 1978 + 1981 + 1983 + \ldots + 1989 + 1990 + \ldots + 1998,$$

откуда $S_ч - S_н = s_ч - s_н + 2$, и, значит, $s_н = s_ч + 2$, поскольку $S_н = S_ч$. Итак, сумма $s_н$ больше $s_ч$ суммы на 2.

Решение 2. Докажем, что для двадцати чисел $20t, \ldots 20t + 19$ сумма чисел с нечётной суммой цифр равна сумме чисел с чётной суммой цифр. Разобьём числа на четвёрки $(20t + q, 20t + q + 1, 20t + q + 10, 20t + q + 11)$, где $q = 0, 2, 4, 6, 8$. Чётность суммы цифр $20t + q$ и $20t + q + 1$ ($20t + q + 10$ и $20t + q + 11$) различна, поскольку все разряды, начиная с разряда десятков, у них совпадают, а в разряде единиц они отличаются на 1. Также различна чётность у $20t+q$ и $20t+q+10$ (они различаются лишь на 1 в разряде десятков). Следовательно, в одну из сумм $S_н, S_ч$ войдут $20t+q$ и $20t+q+11$, а в другую — $20t+q+1$ и $20t+q+10$. Нетрудно видеть, что «вклад» каждой четвёрки в эти суммы одинаков, поэтому и полные суммы равны.

Отсюда следует, что для любого множества $\{1, \ldots, 20t+19\}$ (в частности, для множества $\{1, \ldots, 1979\}$) эти суммы равны. Обратимся теперь к исходному множеству A.

$$S_ч(A) = S_ч(1, \ldots, 1979) - 1979 - 1977,$$
$$S_н(A) = S_н(1, \ldots, 1979) - 1978 - 1976.$$

Поскольку первые слагаемые равны, то $S_ч(A) - S_н(A) = -2$.

7.85. Покажем, что требуемое разбиение возможно только при чётных значениях n. Пусть имеется какое-либо разбиение чисел на группы. Тогда сумма чисел в каждой группе должна делится на 4. Действительно, если $a = (b+c+d)/3$, то $a+b+c+d = 4a$. Значит, сумма всех чисел, равная $1+2+\ldots+4n = 4n(4n+1)/2 = 2n(4n+1)$, также делится на 4. Это возможно только при чётных n. Для любого $n = 2k$ такое разбиение возможно, как показывает следующий пример. Пусть группы $A_i = \{8i+1, 8i+3, 8i+8, 8i+4\}$; число $8i+4$ есть среднее арифметическое остальных чисел из группы A_i, $i = 0, \ldots, k-1$. Пусть $B_i = \{8i+6, 8i+7, 8i+2, 8i+5\}$; число $8i+5$ есть среднее арифметическое остальных чисел из группы B_i, $i = 0, \ldots, k-1$. Тогда $A_0, \ldots, A_{k-1}, B_0, \ldots, B_{k-1}$ есть искомое разбиение.

Таблицы

7.86. Нет. Иначе сумма всех чисел в таблице при подсчёте по строкам — положительна, а по столбцам — отрицательна.

7.87. Нет. Иначе сумма всех чисел в таблице при подсчёте по строкам чётна, а по столбцам — нечётна.

7.88. а) Можно (см. рис.). б) Нет. Иначе произведение всех чисел в таблице при подсчёте по строкам отрицательно, а по столбцам — положительно.

7.89. Можно (см. рис.).

7.90. Пусть a — наименьшее среди чисел таблицы; p, q, r, s — числа, стоящие в четырёх соседних клетках. Из равенства $4a = p+q+r+s$ вытекает, что $(p-a)+(q-a)+(r-a)+(s-a) = 0$. Так

−1	−1	−1	1
−1	1	−1	−1
1	−1	1	1
1	1	1	−1

К 7.88

2	2	2	2	2
2	−7	2	−7	2
2	2	−9	2	2
2	−7	2	−7	2
2	2	2	2	2

К 7.89

как в скобках стоят неотрицательные числа, то $a = p = q = r = s$ и т. д.

7.91. Возьмём ту строку, сумма чисел в которой наименьшая, и рассмотрим суммы чисел по всем «крестам», соответствующим клеткам этой строки. Сумма всех этих сумм не меньше na. С другой стороны, обозначив сумму всех чисел таблицы через N, а сумму чисел этой строки через m, получим $N + (n-1)m \geqslant na$, но по предположению $m \leqslant N/n$, поэтому $N(1 + (n-1)/n) \geqslant na$ или $N \geqslant an^2/(2n-1)$.

Итак, сумма чисел в таблице не меньше $an^2/(2n-1)$. Остается проверить, что можно расставить числа в таблице так, чтобы эта сумма, была равна $an^2/(2n-1)$.

7.92. 0. Разобьём таблицу на сумму таблицы десятков и таблицы единиц. Тогда в таблице единиц сумма всех чисел равна 0 (сумма чисел в каждом столбце — 0) и в таблице десятков сумма всех чисел равна 0 (сумма в каждой строчке — 0).

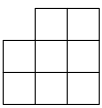
7.93. Решение аналогично 7.90.

7.94. Каждое число, не стоящее с краю, не превосходит наибольшее из своих соседей, т. е. не максимально.

7.95. Если n и m чётны, то $nm/2$. Если n чётно, m нечётно, то $n(m-1)/2$. Если n и m нечётны и $n \geqslant m$, то $n(m-1)/2$. Докажем это.

Случай 1. n и m чётны. Закрасим вертикальные полоски через одну и докажем, что нельзя обойтись меньшим числом закрашенных клеток. В самом деле, разобьём прямоугольник на $mn/4$ квадратиков 2×2. В каждом из них надо закрасить не менее двух клеток.

Случай 2. n чётно, m нечётно. Закрасим полоски через одну в нечётном направлении, начиная со второй. Докажем, что меньшим числом закрашенных клеток не обойтись. В самом деле, из такого прямоугольника можно вырезать $n(m-1)/4$ квадратиков 2×2, в каждом из которых нужно закрасить две клетки.



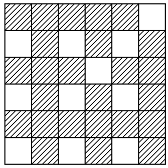
К 7.95

Случай 3. n и m чётны, $m < n$. Пример аналогичен случаю 2: закрасим $(m-1)/2$ полосок $1 \times n$.

Доказательство того, что меньше закрасить нельзя будем вести индукцией по длине меньшей стороны прямоугольника. База (прямоугольники $1 \times n$) очевидна. Пусть теперь дан прямоугольник $m \times n$ $(m < n)$. Покажем, что в угловой каёмке, дополняющей прямоугольник размерами $(n-2) \times (m-2)$ до прямоугольника размерами $n \times m$, необходимо закрасить не менее $n(m-1)/2 - (n-2)(m-3)/2 =$

$= m+n-3$ клеток. В самом деле, эту каёмку можно разрезать на $(m+n-6)/2$ квадратиков 2×2 и фигуру F, показанную на рисунке. В квадратиках необходимо закрасить не менее $m+n-6$ клеток, а в фигуре F — не менее трёх клеток (так как она содержит два квадратика 2×2 с общей клеткой). Отсюда получаем требуемую оценку.

7.96. Ответ для 12 клеток показан на рисунке. В пункте а) дополнительно закрашивается правая верхняя клетка.



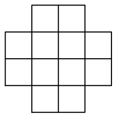
К 7.96

7.97. При $n \leqslant 998$ и при $n \geqslant 3989$.

Рассмотрим два случая: $n \leqslant 1995$ и $n > 1995$.

В первом случае суммарная площадь полосок равна $1995+\ldots+2+1 = 1995\cdot1996/2 = 1995\cdot998$. Поскольку она не меньше площади прямоугольника, $1995\cdot998 \geqslant 1995n$, т. е. $998 \geqslant n$. Чтобы разрезать прямоугольник при $n \leqslant 998$, надо разрезать прямоугольник на n полосок длиной 1995 и первую сохранить, вторую разрезать на полоски длиной 1 и 1994, третью — на полоски длиной 2 и 1993, и т. д. Последняя полоска $1\times n$, которую мы сможем разрезать, будет иметь номер 998 ($997+998 = 1995$).

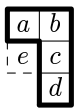
Аналогично, во втором случае общая площадь всех полосок равна $1+\ldots+n = n(n+1)/2$, а площадь прямоугольника — $1995n$. Поэтому необходимо $n(n+1)/2 \geqslant$ $\geqslant 1995n$, т. е. $n \geqslant 3989$. Метод разрезания аналогичен: разрежем прямоугольник на 1995 полосок длиной n, сохраним первую, вторую разрежем на полоски длиной 1 и $n-1, \ldots,$ 1995-ю разрежем на полоски длиной 1994 и $n-1994$. При $n \geqslant 3989$ все они будут различными.



К 7.98

7.98. Наименьшее из чисел, стоящих в клетках фигуры, показанной на рисунке, удовлетворяет условию.

7.99. Выделим левую верхнюю угловую клетку таблицы. Затем рассмотрим области: угловой квадрат 3×3 без этой клетки, квадрат 5×5 без квадрата 3×3, квадрат 7×7 без квадрата 5×5 и т. д. Сумма чисел, стоящих о клетках любой из построенных областей, не больше 2. Действительно, если отрезать полные квадратики 2×2, останется фигура, показанная на рисунке. Сумма чисел $a+b+c+d$ равна $d-e$, поэтому по модулю она не превосходит 2.



К 7.99

7.100. Если n делятся на k, то вся таблица разбивается на квадраты $k\times k$, сумма чисел в каждом из которых отрицательна. Следовательно, отрицательна и сумма всех чисел в таблице, так что в этом случае требуемым способом числа в таблицу записать нельзя.

Если n не делится на k, т. е. $n = pk + r$, $0 < r < k$, то подходящую таблицу можно построить, например, следующим способам. Запишем в k-ю, $(2k)$-ю, ..., (pk)-ю клетки каждое из k-й, $(2k)$-й, ..., (pk)-й строк таблицы числа x, $x < 0$. О том, как выбирать x, будет сказано ниже. В остальные клетки таблицы запишем число 1.

Тогда в любом квадрате $k \times k$ содержится ровно одна клетка с числом x, поэтому сумма чисел в таком квадрате равна $k^2 - 1 + x$. Всего в квадрате будет p^2 клеток с числом x, поэтому сумма всех чисел в таблице равна $n^2 - p^2 + p^2x$. Итак, число x должно удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} k^2 - 1 + x < 0, \\ n^2 - p^2 + p^2x > 0, \end{cases} \qquad \text{т. е.} \qquad 1 - n^2/p^2 < x < 1 - k^2.$$

Такое число x найдётся, потому что $n^2/p^2 = (pk + r)^2/p^2 > k^2$. Отметим, что существуют и другие способы заполнения таблицы.

7.101. Допустим, что такая расстановка возможна. Заметим, что столбец точных квадратов не может быть ни первым, ни последним, так как у точных квадратов 20 «соседних» чисел, а в одном соседнем столбце можно уместить только 11 чисел. Итак, после удаления столбца точных квадратов таблица распадается на две непустые части, в каждой из которых число клеток кратно 11. Группа чисел между двумя последовательными квадратами попадает в одну из этих частей, при этом числа $m^2 - 1$ и $m^2 + 1$ попадают в разные части, поэтому такие группы чисел попеременно попадают то в одну часть таблицы, то в другую. Между m^2 и $(m+1)^2$ имеется $2m$ чисел. Значит, в одну из частей попадает $2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50$ чисел. Так как 50 не кратно 11, то требуемая расстановка невозможна.

7.102. Сумма всех чисел в таблице неотрицательна, поэтому найдётся строка, содержащая не менее 1000 единиц. Переставим столбцы таблицы так, чтобы в первой 1000 клеток этой строки стояли 1. Обозначим через A и B прямоугольники 2000×1000, образованные первой 1000 и последней 1000 столбцов таблицы. Пусть A_1 — 1000 строк прямоугольника A с наибольшими суммами записанных в них чисел, A_2 — остальные 1000 строк. Покажем, что сумма чисел в A_1 не меньше 1000. Допустим противное и докажем, что тогда в каждой строке из A_2 сумма чисел отрицательна. Действительно, если хотя бы в одной из строк из A_2 сумма неотрицательна, то и во всех строках из A_1 она неотрицательна. Кроме того, одна из строк A_1 вся состоит из 1, значит, сумма всех чисел в A_1 не меньше 1000. Противоречие. Отсюда следует, что сумма чисел в каждой строке из A_2 не больше чем -2, так как сумма чисел в любой строке чётна.

Значит, сумма чисел во всем прямоугольнике A меньше, чем $1000 + (-2) \cdot 1000$, т. е. меньше -1000. Но по условию сумма чисел во всей таблице неотрицательна. Следовательно, сумма чисел в прямоугольнике B больше 1000. Пусть B_1 — 1000 строк прямоугольника B с наибольшими, а B_2 — 1000 строк с наименьшими суммами записанных в них чисел. Докажем, что сумма чисел в B_1 не меньше 1000. Это верно, если сумма чисел в каждой строке из B_2 неположительна. Если же хотя бы в одной строке из B_2 сумма чисел положительна, то она положительна и в каждой строке из B_1.

Вариации знакомства

7.103. Один. В паре с честным любой из оставшихся депутатов продажен.

7.104. Возьмём любых двух мальчиков из пяти. Каждый из них имеет среди остальных двух братьев, а значит, они имеют общего брата, Следовательно, сами они — братья.

7.105. Расписание приведено в таблице (участники обозначены цифрами от 1 до 9, каждый из 12 столбцов соответствует тройке дежурных).

1	4	7	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	5	8	4	5	6	5	6	4	6	4	5
3	6	9	7	8	9	9	7	8	8	9	7

К 7.105

7.106. 19 рыжиков и 11 груздей. Если бы в корзине нашлись 12 груздей, то ни один из них не был бы рыжиком. Значит, количество груздей не более 11. Если бы груздей было меньше 11, то их было бы не больше 10. Тогда можно было бы найти 20 не груздей. Значит, груздей ровно 11, а рыжиков — 19.

7.107. Передача информации может быть осуществлена следующим образом. Рассмотрим некоторых четверых людей в компании — назовем их A, B, C, D. Пусть сначала все члены компании, кроме B, C и D, звонят A и сообщают ему свои новости. Это потребует $n-4$ звонка. Затем между собой говорят A и B, а также C и D. После этого A говорит с C, а B с D, в результате чего все четверо будут знать все новости. За оставшиеся $n-4$ звонка A сообщает их всем остальным.

7.108. Все жители разбиваются на два множества, причём любые двое жителей из одного множества дружат между собой, а из разных — не дружат. Затем, ссорясь в одном множестве, каждый житель будет переходить в другое множество. Это будет происходить до тех пор, пока все жители не станут друзьями.

7.109. По индукции. Наименее битый депутат бит не более одного раза. Отправим его в комиссию, а его врагов выведем из парламента. За одну операцию комиссия растет на 1, а число депутатов убывает не больше чем на 3. Поэтому в комиссию войдёт не меньше $1/3$ депутатов.

Более общий факт: если каждый депутат дал своим коллегам k пощёчин, то существует разбиение парламента на $2k+1$ «приличных» комиссий.

7.110. Рассадим вначале рыцарей произвольно. Пусть при этом какие-то два врага — рыцари A и B — оказались рядом, причём B сидит справа от A. Найдём теперь среди друзей рыцаря A такого C, что его правый сосед D — друг B (он найдётся, поскольку у A есть n друзей, а число врагов у B, не считая A, всего лишь $n-2$). Теперь «развернем» весь участок стола $BDE\ldots FGC$ от B до C в обратную сторону: $CGF\ldots EDB$. Легко видеть, что при этом число пар соседей-врагов уменьшится. Действуя так и дальше, в конце концов придём к требуемой рассадке.

7.111. Пусть A и B, не сумевшие познакомиться после указанной серии ужинов, на следующем ужине смогут познакомиться. Тогда можно выстроить цепочку знакомств, связывающих A и B. Рассмотрим эту цепочку и будем каждый вечер убирать из неё того, кто устраивает ужин (если он присутствует в цепочке). Когда каждый человек устроит хотя бы один ужин, в цепочке между A и B никого не останется. Так что A и B окажутся знакомыми между собой. Противоречие.

7.112. 1990. Отметим, что из n сенаторов выбрать трёх можно $n(n-1)(n-2)/(2\cdot 3)$ способами. Обозначая число искомых комиссий через x, а число комиссий, в которых присутствуют как друзья, так и враги, через y, имеем первое уравнение: $x+y = (30\cdot 29\cdot 28)/(2\cdot 3) = 4060$. Если сенатор напишет список комиссий, в каждой из которых оба других члена одновременно или его друзья, или враги, то получится список из $23\cdot 22/2+6\cdot 5/2 = 268$ комиссий (у каждого сенатора 23 друга и 6 врагов). Всего во всех списках будет указано $30 \cdot 268 = 8040$ комиссий. Но при этом комиссии, в которых все три сенатора либо дружат, либо враждуют между собой, будут указаны в трёх списках, а каждая из остальных комиссий — в одном списке. Тогда второе уравнение: $3x + y = 8040$. Отсюда $x = 1990$.

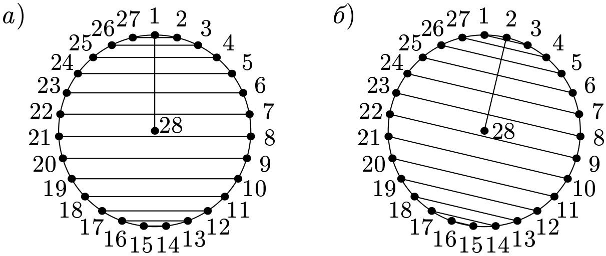
7.113. Пусть a — произвольный делегат, A — множество из 10 выбранных им кандидатов. Предположим, что комиссия A не является «хорошей» для всех делегатов съезда. Это значит, что найдётся делегат b такой, что множество B выбранных им кандидатов не пересекается с A. Разобьём множество A на два подмножества A_1 и A_2 по 5 человек, а множество B — на два подмножества B_1 и B_2 тоже по 5 человек. Докажем, что одна из четырёх комиссий $C_{ij} = A_i \cup B_j$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant 2$, состоящих из 10 человек каждая, является «хорошей» для всех делегатов съезда.

Пусть это не так, т. е. для каждой комиссии C_{ij}, найдётся делегат c_{ij}, для которого эта комиссия не является «хорошей». Пусть D — «хорошая» комиссия (из двух человек) для 6 делегатов a, b, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} (такая комиссия существует согласно условию задачи). Так как комиссия D является «хорошей» для делегатов a и b, то в ней есть человек из комиссии A и человек из комиссии B. Но комиссии A и B не пересекаются. Значит, один член комиссии D входят в A, а другой — в B. Но тогда комиссия D содержится в одной из комиссий C_{ij}, и, следовательно, не является «хорошей» для делегата c_{ij}, что противоречит выбору D. Противоречие.

Соответствие (снабжение парой)

7.114. Поровну. Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998. Значит, можно перечислить все целочисленные прямоугольники периметра 1996: это прямоугольники 1×997, $2 \times 996, \ldots, 499 \times 499$. Аналогично, можно перечислить все целочисленные прямоугольники периметра 1998: $1 \times 998, 2 \times 997, \ldots, 499 \times 500$. В обоих случаях длина меньшей стороны может быть равна $1, 2, \ldots, 499$.

7.115. Содержащих точку A_1 многоугольников больше на число треугольников с вершиной A_1, т. е. на $99 \ldots 98/2$. Любому многоугольнику без вершины A_1 можно поставить в соответствие многоугольник с вершиной A_1, добавив её к его вершинам. А обратную операцию (отбрасывание вершины A_1) можно произвести для n-угольников при $n > 3$.



К 7.116

7.116. Поскольку каждый ученик мог сидеть не больше чем с 27 учениками, это не могло длиться более 27 месяцев. Покажем, как учитель мог рассаживать учеников в течение 27 месяцев.

Занумеруем учеников числами от 1 до 28. Поставим числа от 1 до 27 на окружности в вершинах правильного 27-угольника, а число 28 — в центре этой окружности. Соединим отрезком точки 1 и 28. Остальные точки соединим попарно отрезками, перпендикулярными этому отрезку (см. рис. *а*).

Рассадим учеников так: если 2 числа соединены отрезком, то соответствующих им школьников сажаем за одну парту. В следующем месяце соединяем отрезком точки 2 и 28 и через остальные точки проводим перпендикулярные ему отрезки (рис. *б*); рассаживаем учеников по этой схеме, далее берем поочерёдно отрезки 28–3, 28–4, …, 28–27 и проводим отрезки, перпендикулярные каждому из них.

7.117. К первой группе можно отнести числа, в записи которых имеется нечётное число единиц, ко второй группе — все остальные числа.

7.118. Основная идея: если стрелки показывают хорошее время, то их зеркальное отражение плохое, и наоборот. В полночь стрелки совпадают. Если пустить часы назад, то стрелки будут показывать какое-то вчерашнее время, а их расположение будет зеркально симметричным положению стрелок на обычных часах. Итак, каждому хорошему моменту времени сегодня соответствует плохой момент вчера. Причём интервалу хорошего времени соответствует интервал плохого. Значит, хорошего времени сегодня столько же, сколько было плохого вчера. Поэтому хорошего и плохого времени в сутках поровну.

7.119. Больше хорошего. Заметим, что минутная и секундная стрелки определяют «плохой» сектор между их продолжениями, попав в который, часовая стрелка задаё плохой момент времени. Этот сектор не превосходит 180°. Значит, поскольку через целое число часов положение минутной и секундной стрелок не меняется, через 6 часов после каждого плохого момента будет хороший, т. е. плохого времени не больше, чем хорошего. Однако, очевидно, бывают хорошие моменты, через 6 часов после которых наступает также хороший момент.

Комментарий. Количество моментов плохого и хорошего времени бесконечно, а потому говорить о том, что хороших моментов больше, нестрого. Нужно рассуждать о сумме длин интервалов плохого и хорошего времени. Например, каждому интервалу плохого времени соответствует свой интервал хорошего времени такой же длины (при сдвиге на 6 часов), поэтому хорошего времени не меньше, чем плохого. Кроме того, некоторым хорошим интервалам соответствуют хорошие интервалы, поэтому хорошего времени больше. Важно отметить, что при сдвиге суток на 6 часов мы получаем сутки, состоящие из тех же интервалов плохого и хорошего времени, но в другом порядке.

7.120. В первом классе должны содержаться все числа с нечётным числом двоек, во втором — с чётным.

7.121. Можно. Надо поместить два самых больших числа, т. е. a_n и a_{n-1} в разные группы, затем размещать очередное число в группу, сумма чисел которой в данный момент меньше.

7.122. Если счастливый билет имеет номер A, то билет с номером $A' = 999999 - A$ также счастливый и $A' \neq A$. Поскольку $A + A' = 1001 \cdot 999 = 13 \cdot 77 \cdot 999$ делится на 13, то и сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

7.123. Чисел, не представимых в таком виде, больше. Пусть $n = k^2 + m^3$, где $k, m, n \in \mathbb{N}$, а $n \leqslant 1000000$. Ясно, что тогда $k \leqslant 1000$, а $m \leqslant 100$. Поэтому нужное представление могут давать не более чем 100 000 пар (k, m). Но чисел n, удовлетворяющих условию, не больше, чем таких пар, так как некоторые пары дают числа n, большие 1 000 000, а некоторые различные пары дают одно и то же число n.

7.124. Разобьём на две группы все пятизначные числа, составленные из цифр 1, 2, 3, 4, 5 и начинающиеся с цифр A и B:

$$M_{AB} = \{ABabc; ABbac; Abcab\} \text{ и } N_{AB} = \{ABacb; ABbac; Abcba\}.$$

Легко проверить, что суммы квадратов чисел в группах M_{AB} и N_{AB} одинаковы. Аналогично разобьём все пятизначные числа.

Погрузка

7.125. На рисунке приведены два решения.

№	1	$^1/_2$	0
I	2	3	2
II	2	3	2
III	3	2	3

№	1	$^1/_2$	0
I	3	1	3
II	3	1	3
III	1	5	1

К 7.125

7.126. Покажем, что пяти машин точно достаточно. Будем грузить машины ящиками в любом порядке до тех пор, пока ящики не кончатся, следя лишь за тем, чтобы не наступила «перегрузка» машины. Это возможно, так как в любой момент погрузки будет хотя бы одна машина, загруженная не более чем 2 тоннами. Действительно, если бы все машины были загружены больше, чем на 2 тонны, то общий вес груза составлял бы больше, чем $5 \cdot 2$ т $=$ $= 10$ т, что противоречит условию задачи. Эту машину можно догрузить любым ящиком, поскольку по условию задачи он весит не более тонны. Покажем, что четырёх машин может не хватить. Например, для вывоза 13 ящиков весом $10/13$ т каждый, четырёх машин недостаточно. Действительно, каждая машина может увезти не более трёх таких ящиков, так как 4 ящика весят $40/13$ т > 3 т. Значит, все машины увезут не больше 12 ящиков.

7.127. Будем грузить глыбы, не выбирая, на платформу №1 до тех пор, пока их общая масса не превысит 58 т. Последнюю глыбу снимем с платформы и положим рядом. Аналогично будем грузить глыбы на платформы №№2–14. Общая масса глыб, положенных на эти 14 платформ и рядом с ними, более $58 \cdot 14 = 812$ тонн. Оставшиеся глыбы весят меньше $870 - 812 = 58$ т, и их можно целиком погрузить на платформу №15. На последние две платформы можно погрузить оставшиеся 14 глыб следующим образом: положим на каждую по 7 штук, тогда их масса на каждой платформе не превысит $7 \cdot 8 = 56$ т.

7.128. Грузим ящики на первую машину, пока их масса не превысит 1,5 т; последний ящик снимем и положим рядом с машиной. Затем грузим ящики на вторую машину, на третью и так далее до тех пор, пока не загрузим 8 машин. Общая масса ящиков на этих 8 машинах и ящиках рядом больше $1{,}5 \cdot 8 = 12$ т. Поэтому масса оставшихся ящиков меньше 1,5 т и их сможет увезти 9-я машина. Лежащие на земле 8 ящиков разобьём на две четвёрки; каждая четвёрка ящиков имеет массу меньше $4 \cdot 350 = 1{,}4$ т, и поэтому их можно увезти на двух машинах.

7.129. а) Можно поместить в первый грузовик бочки весом в 1, 4, 5, 8, 9, 12, 14, 17 пудов; во второй — 2, 3, 6, 7, 10, 11, 15, 16 пудов; в третий — 13, 18, 19, 20 пудов. б) Нельзя. Если бочки разложены поровну по весу, то во всех грузовиках имеется одно и то же целое число пудов, поэтому суммарный вес всех бочек (в пудах) делится на 3. Однако в данном случае суммарный вес бочек $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$ пудов на 3 не делится.

Дискретная непрерывность

7.130. Начнём брать шары по одному слева. Разность между чёрными и красными шарами после первого взятия равна 1, а перед последним она равна -1. Значит, был момент, когда разность равнялась 0.

7.131. В двух из трёх выбранных угловых клетках имеем одинаковые числа, например, 1. Возьмём одну из этих клеток и прибавляем к ней соседнюю, затем к получившемуся куску прибавляем соседнюю с куском клетку и т. д. Последней клеткой должна быть вторая угловая клетка с числом 1. (Так можно сделать, например, беря по одной клетке полосками.) Тогда сумма чисел в клетках куска изменяется от 1 вначале до -1 в конце. Момент, когда сумма будет 0, соответствует нужному разрезанию.

7.132. Пусть при сложении куба белых квадратиков получилось больше, чем чёрных. Начнём поворачивать по очереди кубики до тех пор, пока не появятся все три новых грани кубика. При каждом повороте одного кубика разность между числом белых и чёрных квадратиков всегда чётна, поэтому она не меняется или меняется на 2. Так как по условию чёрных и белых граней было поровну, то после окончания всех поворотов чёрных квадратиков получится больше, чем белых. Значит, был момент, когда поровну было число чёрных и белых квадратиков.

7.133. Обозначим через S разность между количеством мячей, оставшихся (на данный момент) забить «Зениту», и количеством мячей, забитых «Молотом». При каждом мяче, забитом в те или другие ворота, S уменьшается на 1. В начале матча $S = 8$, а в конце $S = -5$. Следовательно, был момент, когда $S = 0$, т. е. когда количество мячей, которые осталось забить «Зениту», равнялось количеству мячей, забитых на данный момент «Молотом».

7.134. При увеличении числа на 1 сумма цифр либо увеличивается на 1 (число оканчивается не на 9), либо уменьшается на 8, 17, 26 (в зависимости от девяток на конце). Пусть сумма цифр числа a равна $s(a)$. Рассмотрим последовательно числа, большие a, и выберем из них числа с суммой цифр, большей $s(a)$. Из выбранных чисел с равной суммой цифр оставим только наименьшее число. Ясно, что при этом мы получим последовательность чисел с суммой цифр $s(a), s(a)+1, \ldots$ без пропусков. Поскольку $s(b) = s(a)+100$, между числами a и b найдётся число, сумма цифр которого равна $s(a)+43$.

7.135. Разобьём квадрат на 4 квадратика 25×25. Если во всех квадратиках суммы чисел одного знака, то найдётся один, обладающий требуемым свойством. Если есть два квадратика с суммами разного знака, то найдутся два таких соседних, например, левый верхний A и левый нижний B. Пусть абсолютные величины суммы чисел в них больше 25. Построим цепочку квадратиков 25×25 следующим образом: $A_1 = A$, A_2 состоит из 2–25-й строк A и 1-й строки B, A_3 состоит из 3–25-й строк A и 1-й и 2-й строки $B, \ldots, A_{26} = B$, т. е. на каждом шаге добавляется строка снизу и убирается строка сверху. Так как разница сумм между двумя соседними квадратиками цепочки по модулю не больше 50, то среди A_i найдётся квадратик 25×25 с требуемым свойством.

7.136. Предположим противное, т. е. не найдётся такого m, что $a_m = m/500$. Тогда докажем, что при $m = 500k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ $a_m > m/500$. Доказательство по индукции. При $k = 1$ $a_{500} > 1$ по предположению. Пусть при $k = l$ $a_{500l} > l$, тогда $a_{500(l+1)} \geqslant a_{500l} > l$ и по предположению $a_{500(l+1)} \neq l+1$. Поэтому $a_{500(l+1)} > l+1$. Но по условию $a_n = n/1000$ для некоторого n и n имеет вид $1000p$. Противоречие.

Геометрия

7.137. Нельзя. Рассмотрим два маленьких угловых кубика. Для того, чтобы отрезать каждый, нужно не менее трёх разрезов, т. е. всего не менее шести разрезов.

7.138. Указание. Предположим противное и рассмотрим ситуацию на главной диагонали. Клетки на ней должны быть покрыты только горизонтально (или вертикально) лежащими доминошками.

7.139. Разобьём каждую сторону квадрата, ограничивающего данную площадь на 50 равных частей и соединим соответствующие точки деления на противоположных сторонах. В результате вся площадь разобьётся на 2500 квадратиков 2×2 м, каждый из которых состоит из четырёх плиток с общей вершиной. Значит, каждый из этих квадратиков может содержать не более одной красной плитки, и, тем самым, количество красных плиток не может превышать 2500. Покажем, что ровно 2500 красных плиток быть может. Для этого нужно собрать блок 2×2 из четырёх плит разного цвета, и замостить такими блоками всю площадь, следя за тем, чтобы все блоки были ориентированы одинаково.

7.140. Объём коробки размерами $11 \times 13 \times 14$ равен 2002, т. е. достаточен, а общая площадь её стенок равна $2(11 \cdot 13 + 11 \cdot 14 + 13 \cdot 14) = 958$.

7.141. От противного. Пусть верх квадрата склеен с низом. Возьмём раскраску, противоречащую условию. Будем называть весом линии количество чёрных клеток на ней. Пусть есть горизонталь веса n. Тогда n вертикалей и n диагоналей каждого направления должны иметь веса $1, 2, \ldots, n$, так как все они пересекают эту горизонталь. Тогда и n горизонталей имеют веса $1, 2, \ldots, n$, так как все они пересекают вертикаль веса n. Циклически переставим горизонтали так, чтобы нижняя имела вес n (свойства раскраски при этом не изменятся). Пронумеруем горизонтали снизу вверх от 0 до $n-1$, а вертикали — от 0 до $n-1$, начиная с вертикали веса n. Каждая диагональ пересекает по разу горизонталь и вертикаль веса n, поэтому диагонали веса 1 должны проходить через клетку их пересечения — клетку $(0; 0)$. Итак, все клетки $(i; i)$ и $(n-i; i)$, $i > 0$ — пустые.

Если n нечётно, то в каждом столбце, кроме 0, получаем не менее двух пустых клеток, и столбца веса $n-1$ не найдётся. Если $n = 2m$, то столбец m и строка m должны иметь вес $m-1$ (в них закрашены все клетки, кроме (m, m)). Но тогда мы не сможем найти столбца веса 1. Если с самого начала отсутствует горизонталь веса n, то есть горизонталь веса 0, и мы можем провести те же рассуждения, поменяв ролями закрашенные и незакрашенные клетки.

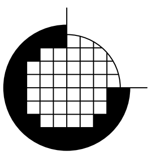
7.142. Круг. Пусть наименьшее расстояние от произвольной точки кляксы до её границы принимает наибольшее значение в точке A, а наибольшее значение в точке B. Тогда круг радиуса r с центром A лежит внутри кляксы, а круг радиуса p центром B содержит кляксу. По условию $r = p$, значит, точки A и B совпадают.

7.143. а) Не может. Покажем, что клякса не может жить вечно. Прежде всего отметим, что добавление чёрных точек не уменьшает множество чёрных точек в следующий момент времени, а стало быть, и во все последующие. Ограниченную кляксу можно докрасить до круга. Итак, можно считать, что клякса — круг.

Достаточно показать, что круг радиусом R в следующую секунду уменьшится до круга радиусом $R-t$ и t не уменьшается, с уменьшением R. Последнее утверждение следует из того, что круг радиусом $r<R$ можно дополнить в каждой граничной точке до круга радиусом R с той же граничной точкой (см. рассуждение с добавлением чёрных точек).

Теперь покажем, что круг уменьшается. Назовем единичный круг с центром в точке A окрестностью точки A. Рассмотрим касательную к кругу в точке A и окрестность точки A. Ясно, что площадь чёрной области в этой окрестности меньше половины. Поскольку площадь чёрной части в окрестности точки A меняется непрерывно при сдвиге A внутрь чёрного круга, то при достаточно малом сдвиге площадь чёрной части останется меньше половины. Поэтому круг уменьшается.

б) Может! Причина этого состоит в том, что белые участки внутри кляксы гибнут так же, как и сама клякса.



К 7.143

Лемма 1. Пусть плоскость составлена из «оконных рам» — белых квадратов с длинами сторон N, окаймлённых чёрными рамками шириной 2. Тогда через время, не превышающее времени «жизни» круга радиуса $N/\sqrt{2}$, она превратится в однородную чёрную плоскость.

Доказательство. Заметим, что каждая чёрная точка находится в окрестности белых точек не более чем одного квадрата. Значит, после первой секунды белые квадраты уменьшатся, т. е. и после первого хода квадраты не будут «взаимодействовать». Продолжая это рассуждение дальше, мы увидим, что каждый белый квадрат будет уменьшаться независимо. То, что он исчезнет, а также ограничение на время, доказывается аналогично рассуждениям пункта а) (достаточно поменять местами белые и чёрные точки).

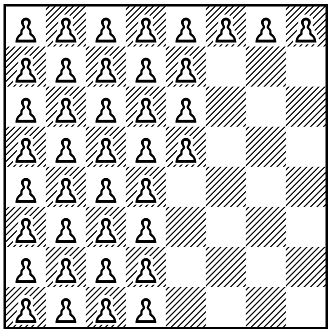
Лемма 2. Время, за которое чёрный круг радиуса R стянется на ΔR, не меньше времени жизни круга радиуса ΔR.

Доказательство следует из того, что уменьшение радиуса круга за секунду тем меньше, чем больше его радиус.

Возьмём теперь плоскость, составленную из «рам» с квадратами с ребром N. Обрежем её по окружности радиуса R (правая верхняя часть рисунка), а снаружи добавим чёрное кольцо радиуса $N/\sqrt{2}+2$, а также закрасим в чёрный цвет все неполные квадраты (см. основную часть рисунка). Нетрудно доказать, что при больших R такая клякса имеет площадь $S_0(R) = \alpha\pi R^2(1+\varepsilon(R))$, где $\alpha = (4N+4)/(N+2)^2$ — средняя плотность плоскости из «рам», а $\varepsilon(R)$ стремится к 0 с ростом R.

Поскольку все квадраты и наружная белая плоскость разделены чёрными полосами шириной более 2, они изменяются независимо (т. е. так, как бы вели себя, если все остальные белые зоны были закрашены чёрным). При этом наружная зона до тех пор, пока не пройдёт время, необходимое для стягивания круга радиуса $N/\sqrt{2}$ будет, несмотря на свое увеличение, отделена полосой шириной более 2 (в силу леммы 2) от остальных белых зон. Легко видеть, что после того, как внутренние квадраты пропадут, внешняя зона расширится не более чем на $N/\sqrt{2}$. Следовательно, новая площадь кляксы не меньше πR^2. Таким образом, площадь кляксы выросла примерно в α раз (или, более точно, для всякого $\beta < \alpha$, найдётся такое R, что площадь выросла по меньшей мере в β раз).

7.144. Все поля доски кроме вертикали a, горизонтали 8 и самого поля e4 можно разбить на пары, симметричные относительно e4. Таких пар — 24. По условию, на поля каждой пары можно поставить не более одной пешки. Кроме того, можно поставить не более, чем по одной пешке на поля вертикали a и горизонтали 8. Таких полей 15. На поле e4, по условию, пешки ставить нельзя. Значит, всего можно поставить не более 39 пешек. Расстановка 39 пешек показана на рисунке.



К 7.144

7.145. Очевидно, что в каждом столбике из 8 кубиков-клеток может стоять только одна ладья, поэтому больше 64 ладей поставить нельзя. Покажем, как поставить 64 ладьи, чтобы они не били друг друга. Введём систему координат с осями, направленными вдоль рёбер куба так, чтобы каждая клетка имела координатами тройку (x, y, z) чисел от 0 до 7 и поставим ладьи в клетки, сумма координат которых делится на 8. Эта расстановка является искомой.

Докажем, что эти ладьи не бьют друг друга. Предположим противное — какие-то две ладьи бьют друг друга. Значит, две их координаты (скажем, x и y) совпадают, а третья — различна (обозначим её z_1 и z_2 соответственно). По построению суммы $x+y+z_1$ и $x+y+z_2$ делятся на 8. Значит, на 8 делится и их разность $z_1 - z_2$, что невозможно, так как z_1 и z_2 — различные неотрицательные числа, меньшие 8.

Докажем теперь, что в каждом вертикальном столбике находится по ладье, то есть что мы поставили 64 ладьи. Каждый такой столбик определяется своей парой координат x и y. Координата z для ладьи в этом столбике однозначно задается условием $x+y+z \equiv 0 \pmod 8$. А именно, если $x+y$ делится на 8, то $z=0$, в противном случае z равно 8 минус остаток от деления на 8 суммы $x+y$.

7.146. 15 клеток. Доска разделена 18 прямолинейными отрезками: 9 вертикалями и 9 горизонталями. С каждой из них прямая может пересекаться лишь в одной точке, но из четырёх отрезков, служащих краями доски, она пересекается лишь с двумя. Значит, на прямой не более 16 отмеченных точек, разбивающих на не более 15 отрезков, т. е. клеток не более 15. Пример с 15 клетками легко найти.

7.147. Упорядочим ладьи на шахматной доске как буквы в тексте: слева направо и сверху вниз. Первую ладью красим в любой цвет, а очередную ладью (L) красим так: если сверху или слева есть бьющие её ладьи (их не больше двух), то красим L в отличный от них цвет. Тогда все бьющие друг друга ладьи будут покрашены в разные цвета.

7.148. 16. Все дамки должны находиться на доске 6×6 с центром, совпадающим с центром доски 8×8.

7.149. По условию красные и синие фишки должны чередоваться (на окружности), значит, всего их 40. На полуокружности между красной и противоположной ей синей фишкой стоят 19 фишек, значит, крайние из этих фишек одноцветны, а они должны быть разноцветными, как соседние: одна — с красной, другая — с синей. Значит, указанная в задаче расстановка фишек невозможна.

7.150. Так как каждое из чисел равно модулю разности двух других, а модуль любой величины всегда неотрицателен, то все числа должны быть неотрицательны. Пусть наибольшее из них равно x. Следующих за ним два числа должны быть не больше x и различаться на x. Это возможно лишь в случае, когда одно из них равно x, а другое — 0. Итак, в каком-то месте должны стоять числа $x, x, 0$, либо числа $x, 0, x$. Двигаясь по окружности против часовой стрелки, однозначно восстановим остальные числа. В обоих случаях получается один и тот же набор — $x, x, 0, x, x, 0$. Так как сумма всех чисел равна 1, то $x = 1/4$.

7.151. Если две точки поменять местами, то число пар соседних красных точек минус соседних чёрных не меняется. Это доказывается перебором всех вариантов расположения двух точек, которые меняются, и соседних к ним.

7.152. Последовательность чисел: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, задаваемая соотношениями $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$, $u_1 = u_2 = 1$ называется последовательностью Фибоначчи.

Пусть N карточек расположены по кругу в вершинах N-угольника. Введём следующие обозначения. Если a и b карточки, то дугой (a, b) будем называть промежуток между a и b (по часовой стрелке), а длиной дуги (a, b) — число сторон N-угольника между a и b. Число на карточке a будем обозначать a'. Назовем тройкой ранга k три открытые (числом вверх) карточки (a, b, c), удовлетворяющие следующим условиям:

1) карточка b лежит на дуге (a, c),
2) на дугах (a, b) и (b, c) нет открытых карточек,
3) длины дуг (a, b) и (b, c) равны либо обе u_k, либо одна — u_k, а другая — u_{k+1},
4) $b' > a'$, $b' > c'$.

Заметим теперь, что в задаче требуется найти тройку ранга 1. Покажем, как, имея некоторую тройку, можно построить тройку меньшего ранга. При этом мы существенно будем использовать определение чисел Фибоначчи. Итак, пусть (a, b, c) — тройка ранга k. Возможны два случая.

Случай 1. Длины обеих дуг (a, b) и (b, c) равны u_k. На дуге (a, b) откроем такую карточку d, что длины дуг (a, d) и (d, b) равны u_{k-2} и u_{k-1} соответственно. При этом возможны два варианта: если $d' < b'$, то (d, b, c) — тройка ранга $k - 1$; если $d' > b'$, то (a, d, b) — тройка ранга $k - 2$.

Случай 2. Длина одной дуги (для определённости — (a, b)) равна u_{k+1}, другой — u_k. На большей дуге откроем такую карточку d, что длины дуг (a, d) и (d, b) равны u_k и u_{k-1} соответственно. При этом также возможны два варианта: если $d' < b'$, то (d, b, c) — тройка ранга $k - 1$; если $d' > b'$, то (a, d, b) — тройка ранга $k - 2$.

Применяя последовательно описанный способ открывания карточек, мы сможем из тройки ранга k построить тройку ранга 1, открыв не более $k - 1$ карточки. Остается найти тройку ранга k.

Пусть $N = N_k = 2u_k + u_{k+1}$. Откроем три карточки (a, b, c) так, чтобы длины дуг были равны u_k, u_k и u_{k+1} соответственно. Тогда или (a, b, c), или (c, a, b), или (b, c, a) — тройка ранга k. Итак, доказано: если есть N_k карточек, то, открыв не более $k + 2$ карточек, мы найдём тройку ранга 1. В условии задачи $N = N_8 = 21+21+34 = 76$. Поэтому достаточно открыть не более 10 карточек.

7.153. а) Нельзя. Заметим, что никакие два из чисел $0, 1, 2, 8, 9$ не могут стоять рядом. Значит, они должны стоять через одно. Однако число 7 не может оказаться ни на одном из 5 оставшихся мест, ведь рядом с ним из выписанных чисел может стоять только 2. б) Нельзя. Рассуждение аналогично а). Никакие два из чисел $1, 2, 3, 11, 12, 13$ не могут стоять рядом; из этих чисел только 1 может стоять рядом с 4 и только 13 — рядом с 10, тогда 10 и 4 должны стоять рядом.

Любопытно отметить, что для 14 чисел (и, по-видимому, для любого $n \geqslant 14$) такая расстановка возможна:

$$-12-9-13-10-14-11-7-4-1-5-2-6-3-8-.$$

7.154. 6. Ясно, что ни одно из написанных чисел не равно нулю. Одно из них обозначим через u_1, а числа, следующие за u_1 по кругу по направлению движения часовой стрелки, — через $u_2, u_3, \ldots$. Пусть для краткости $u_1 = a$, $u_2 = b$. Тогда $u_3 = u_2/u_1 = b/a$, $u_4 = u_3/u_2 = 1/a$, $u_5 = u_4/u_3 = 1/b$, $u_6 = u_5/u_4 = a/b$, $u_7 = u_6/u_5 = a$.

В силу условия числа, написанные по кругу, различны. Так как оказалось, что $u_7 = u_1$, то более 6 чисел, удовлетворяющих условию задачи, расположить по кругу нельзя. Шесть чисел, удовлетворяющих условию задачи: например, (берем $a = 2$, $b = 3$),

$$u_1 = 2,\ \ u_2 = 3,\ \ u_3 = 3/2,\ \ u_4 = 1/2,\ \ u_5 = 1/3,\ \ u_6 = 2/3.$$

Покажем, что 3, 4 и 5 чисел по кругу расположить нельзя. Пусть $n = 3$, $u_1 = a$, $u_2 = b$ и $a \neq b$. Тогда $u_3 = b/a$. Поскольку $u_1 = u_2u_3$, то $a = b^2/a$, т. е. $a^2 = b^2$. Отсюда следует, что $b = -a$ (ибо $a \neq b$), и поэтому $u_3 = -1$. Кроме того, $u_3 = u_1u_2$, т. е. $-1 = ab = -a^2$. Значит, $a^2 = 1$, $a = 1$, ибо $a = u_1 \neq u_3 = -1$. Но тогда $u_2 = b = -a = -1 = u_3$. Противоречие.

Если $n = 4$, $u_1 = a$, $u_2 = b$, то $u_3 = b/a$, $u_4 = 1/a$ и $1/a = u_4 = u_1u_3 = b = u_2$. Вновь получаем противоречие.

Если $n = 5$, $u_1 = a$, $u_2 = b$, то $u_3 = b/a$, $u_4 = 1/a$ $u_5 = 1/b$ и $1/b = u_5 = u_1u_4 = 1$. Отсюда следует, что $b = 1$ и $u_3 = b/a = 1/a = u_4$. Опять противоречие.

Без общей идеи

7.155. Не более чем за 7 шагов таракан выясняет, в каком из четырёх квадрантов находится Истина, а затем начинает двигаться параллельно сторонам этого квадранта и делает не более $D\sqrt{2} < 3D/2$ шагов.

7.156. Рассмотрим последовательность слов:

$$\text{А, АБА, АБАВАБА, АБАВАБАГАБАВАБА,} \ldots$$

Она задаётся следующим условием: в k-м слове k-я буква стоит посередине, а слева и справа от неё — два одинаковых подслова, совпадающих с $(k-1)$-м словом. Докажем по индукции, что n-е слово удовлетворяет условию задачи для алфавита из первых n букв. Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Пусть утверждение верно для всех слов с номерами от 1 до $n-1$. Рассмотрим n-е слово. Если бы нашлись два соседних одинаковых подслова, то, по предположению индукции, они не могли бы располагаться оба в $(n-1)$-м слове. Значит, одно из них содержит центральную букву слова, т. е. n-ю букву алфавита. Но эта буква только одна, и в соседнем подслове её нет. Противоречие. Значит, в n-м слове тоже нет соседних одинаковых подслов.

Если приписать к n-му слову n-ю букву алфавита, то слово будет состоять из двух одинаковых подслов. Если приписать букву с номером $k < n$, то k-е слово, которое является концом n-го слова, даст два соседних одинаковых подслова. (Длина искомого 33-го слова равна $2^{33} - 1$, это около 9 миллиардов букв!)

7.157. Пусть m — число растений в определителе. Подсчитаем суммарное число различий между всеми парами растений по всем признакам. Число пар растений равно $m(m-1)/2$, и каждая пара различается не меньше, чем по 51 признаку, поэтому общее число различии $S \geqslant 51m(m-1)/2$. Оценим S по-другому. Пусть m_i — число растений, обладающих признаком i, тогда число пар растений, которые i-й признак различает, равно $m_i(m - m_i)$, и общее число различий между растениями равно $S = m_1(m - m_1) + \ldots + m_{100}(m - m_{100})$.

Заметим, что $m_i(m - m_i) = m^2/4 - (m/2 - m_i)^2 \leqslant m^2/4$. Поэтому $S \leqslant 100m^2/4 = 25m^2$. Значит, $51m(m-1)/2 \leqslant S \leqslant 25m^2$, откуда $m \leqslant 51$. Допустим, $m = 51$ (нечётное число), тогда получаем неравенство: $m_i(m - m_i) < m^2/4$, и $51m(m-1)/2 \leqslant S \leqslant 25m^2$, откуда $m < 51$. Противоречие. Значит, $m \leqslant 50$.

Эта задача связана с кодами, исправляющими ошибки. Вместо растений рассмотрим сообщения, а вместо описаний — последовательности из 0 и 1 заданной длины; минимальное число различий двух последовательностей называется кодовым расстоянием d (в нашей задаче $d = 51$), а сам определитель называется кодом. Если исказить любое сообщение произвольным образом, но не больше, чем в $(d-1)/2$ позициях, то его можно отличить от любого другого сообщения в коде. Это свойство и понимается под исправлением ошибок.

7.158. Обозначим массы грузов $a_1, \ldots, a_n$ в том порядке, в каком их развозят, тогда стоимость перевозки —

$$a_1(a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_n) + a_2(a_2 + 2a_3 + \ldots + 2a_n) + \ldots + \\ + a_{n-1}(a_{n-1} + 2a_n) + a_n^2 = (a_1 + \ldots + a_n)^2.$$

Получилось не зависящее от порядка нумерации выражение.

7.159. а) Можно. Покрасим ребра нижнего основания по кругу: первое — в цвет 1, второе — в цвет 2, третье — в цвет 3, четвёртое — опять в цвет 1 и т. д. (Цепочка замкнётся, поскольку 1995 делится на 3.) Каждое ребро верхнего основания покрасим в цвет ребра нижнего основания, находящегося под ним. Каждое боковое ребро, выходящее из вершины, где сходятся два цвета, покрасим в недостающий цвет. Ясно, что на всех боковых гранях присутствуют все три цвета.

б) Нельзя. Пусть призма покрашена требуемым образом; тогда в основании есть три ребра всех трёх цветов, идущие подряд (иначе основание раскрашено с периодом 2 и не может быть покрашено в три цвета). Несложно проверить, что раскраска этого участка однозначно определяет раскраску участка, находящегося над ним, соответствующих боковых рёбер и следующих рёбер основания. Итак, раскраска этих трёх рёбер однозначно определяет раскраску следующего ребра и нижняя грань окажется покрашенной с периодом 3. Но 1996 не делится на 3 и цепочка не замкнётся.

7.160. Заметим, что результат нажатия нескольких кнопок не зависит от порядка их нажатия. Проведём индукцию по числу лампочек. При $n = 1$ утверждение верно. Пусть мы умеем гасить $n-1$ лампочку. Докажем утверждение для n лампочек. Погасим произвольные $n-1$ лампочку. Если погасла и последняя, то индуктивный переход сделан. А если любая последняя лампочка всегда горит, то обозначим необходимый для этого набор кнопок через S_i, где i — номер горящей лампочки. Заметим, что S_iS_j — результат последовательного применения S_i и S_j — меняет состояние у двух лампочек с номерами i и j и только у них. Итак, мы научились менять состояние у любой пары лампочек.

По условию найдётся кнопка T, соединённая с нечётным числом лампочек. Погасим все лампочки, кроме одной, соединённой с кнопкой T. Затем нажмём T. Тогда будет гореть чётное число лампочек. Погасим их парами.

Обычно в задачах про лампочки или таблицы, где задан набор операций, невозможность получить определённое состояние доказывается с помощью инварианта — чётности числа горящих лампочек в некоторых подмножествах. Оказывается, что если нет ни одного подмножества, в котором сохраняется чётность числа горящих лапочек, то все лампочки можно погасить.

Данное решение можно перевести на язык линейной алгебры. Описанный процесс перехода к новым операциям есть, в сущности, широко известный метод Гаусса, используемый для решения систем линейных уравнений.

7.161. 1998. Занумеруем фонари натуральными числами в порядке следования вдоль дороги. Если отрезки, освещённые n-м и $(n+2)$-м фонарями, пересекаются, то $(n+1)$-й фонарь можно выключить. Значит, отрезки с различными нечётными номерами не пересекаются. На отрезке длины 1000 м нельзя расположить больше 999 непересекающихся отрезков длины 1 м. Значит, фонарей не больше 1998. Расположим 1998 фонарей так, чтобы центры освещённых отрезков образовывали арифметическую прогрессию, первый член которой равен 0,5 м, а 1998-й равен 999,5 м. Между n-м и $(n+2)$-м отрезком остаётся зазор в $(1/1997)$ м. Его освещает только $(n+1)$-й фонарь. Поэтому никакой фонарь нельзя выключить.

7.162. 50 мест. Если 10 партий наберут ровно по 5% голосов, а две, включая Партию любителей математики (ПЛМ), — по 25%, то представители ПЛМ получат ровно 50 мест в парламенте. Докажем, что большее число мест ПЛМ получить не может. Обозначим общее число избирателей за S, число проголосовавших за ПЛМ — $P_{\text{ПЛМ}}$, число проголосовавших за партии, прошедшие в парламент — P_+, а за партии, не прошедшие в парламент — P_-. Тогда количество мест, полученных ПЛМ в парламенте, равно

$$100 \cdot \frac{P_{\text{ПЛМ}}}{P_+} = 100 \cdot \frac{P_{\text{ПЛМ}}}{S - P_-}.$$

Отсюда видно, что наибольшее число мест ПЛМ получит в том случае, если общее количество голосов, отданных за непрошедшие партии, максимально. Если бы в парламент не прошли 11 партий, они вместе набрали бы не более 55% голосов, но $55\% + 25\% < 100\%$. Значит, не прошли в парламент максимум 10 партий, и они набрали в сумме не более 50% голосов. Поэтому ПЛМ получит в парламенте не более 50 мест.

7.163. Расположению карт в колоде сопоставим число, в котором цифр столько, сколько в колоде карт, причём на k-м месте справа стоит «1», если k-я карта снизу лежит рубашкой вверх, и «2» в противном случае. Тогда после каждого преобразования это число уменьшается. (Действительно, сравним полученное число с предыдущим. Среди всех цифр, которые изменились, выберем самую левую, т. е. найдём самый старший изменившийся разряд. Очевидно, в этом разряде цифра «2» сменилась на «1».) Поскольку количество n-значных чисел из единиц и двоек конечно (не больше 2^n), в конце концов мы получим число, состоящее из одних единиц, что соответствует расположению всех карт рубашкой вверх.

7.164. Может. Многочлен $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ имеет корень t, больший 1, поскольку $P(1) < 0$, а $P(2) > 0$. Тогда $t^3 = t^2 + t + 1 > t^2 + t$. Возьмём длины палочек равными t^3, t^2, t. После первого отпиливания получим палочки с длинами t^2, t, 1. Так как отношение длин не изменилось, процесс будет продолжаться бесконечно.

7.165. Можно. Примем общую сумму денег за 1. Предположим, мы ставим сумму a на первую лошадь, b — на вторую и c — на третью. Тогда $a + b + c = 1$. При выигрыше первой лошади мы получим $5a$, второй — $4b$, третьей — $2c$. Выигрыш во всех трёх случаях означает, что $a + b + c = 1$ и $5a > 1$, $4b > 1$, $2c > 1$ или $a > 1/5$, $b > 1/4$, $c > 1/2$. Это возможно, так как $1/5 + 1/4 + 1/2 = 19/20 < 1$. Например, можно взять $a = 4/19$, $b = 5/19$, $c = 10/19$. Тогда при любом исходе скачек мы получим $20/19$ исходной суммы.

7.166. Разрежем данный прямоугольник на две равные прямоугольные трапеции прямой, проходящей через его центр и делящей каждую из длинных сторон на отрезки длиной 9,4 см и 15,6 см. Приложим получившиеся трапеции большими основаниями так, чтобы получился пятиугольник, и проведём окружность через концы коротких оснований трапеций. Эти четыре вершины пятиугольника образуют прямоугольник 20 см $\times$ 9,4 см, поэтому диаметр описанной окружности равен $\sqrt{20^2 + 9{,}4^2} \leqslant 22{,}1$ см. Центр окружности находится на расстоянии 10 см и 4,7 см от сторон прямоугольника, и поэтому на расстоянии $15{,}6 - 4{,}7 = 10{,}9 < 22{,}1 \cdot 1/2$ см от пятой вершины пятиугольника, т. е. весь пятиугольник находится внутри окружности.

7.167. 51. Пусть в стране n избирателей. Обозначим через x число городских жителей в проекте состава правительства, через y — число сельских. По условию $x + y = 100$. За такой проект правительства проголосует $(2n/3) \cdot (x/100)$ городских жителей и $(n/3) \cdot (y/100)$ сельских. Требуется, чтобы

$$\frac{2n}{3} \cdot \frac{x}{100} + \frac{n}{3} \cdot \frac{y}{100} > \frac{n}{2}.$$

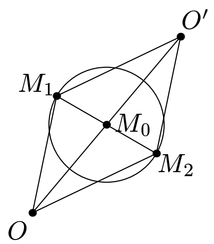
Упростив, получим $2x + y > 150$ или $2x + (100 - x) > 150$, откуда $x > 50$.

7.168. Наибольшее возможное значение c_1 равно 24. Если первое место одному фигуристу присуждено всеми судьями, то $c_1 = 9$. Если первые места присуждены двум фигуристам, то один из них получил не менее пяти первых мест, а остальные четыре полученных им места не выше четвёртого, поэтому $c_1 \leqslant 5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 21$.

Если первые места получили три фигуриста, то, так как остальные из полученных ими мест не выше 4-го, сумма мест всех этих фигуристов не больше $1 \cdot 9 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 72$ и $c_1 \leqslant 24$. Если у 4 спортсменов — 1-е место, то их общая сумма мест не больше 90 и $c_1 \leqslant 22$. Случай, когда 5 и более спортсменов получают 1-е место, невозможен (на них не хватит очков от 1 до 4). Итак, $c_1 \leqslant 24$.

Пример с $c_1 = 24$: каждый из трёх лучших фигуристов получает места $1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4$, каждый из трёх следующих — $2, 2, 2, 5, 5, 5, 6, 6, 6$, а остальные — произвольно.

7.169. Идея решения: сумма расстояний до концов стрелок в среднем (по времени) больше, чем сумма расстояний до центров часов. Доказательство можно провести так. Рассмотрим суммы s_1 и s_2 расстояний от центра стола O до концов минутных стрелок в два момента времени, отстоящие на 30 минут. Величина $s_1 + s_2$ больше $2s_0$, где s_0 — сумма расстояний от O до центров часов, потому что у каждого треугольника OM_1M_2 сумма длин сторон OM_1 и OM_2 больше удвоенной длины медианы, расположенной между ними (см. рис.). Поэтому хотя бы одно из чисел s_1 или s_2 больше s_0.



К 7.169

7.170. а) Эпидемия не кончится, например, если в 1-й день из трёх друзей один болен, другой здоров, а третий имеет иммунитет после прививки.

б) Покажем, что никто не может заболеть дважды. Разобьём всех коротышек на группы по числу дружеских связей, отделяющих их от простудившихся. К первой группе отнесём самих простудившихся, ко второй — всех друзей коротышек из нулевой группы, не находящихся в нулевой группе, к третьей — друзей коротышек из второй группы, не отнесённых к первой и второй группам, и т. д. Заметим, что если двое коротышек — друзья, то номера их групп отличаются не более чем на единицу. По индукции легко доказывается, что в i-й день будут болеть все коротышки i-й группы, у коротышек $(i-1)$-й группы будет иммунитет, а остальные будут здоровы.

7.171. В субботу.

7.172. Предположим, что утверждение задачи не выполнено. Это означает, что какие бы урну и кандидата ни взять, во взятой урне найдётся бюллетень, не содержащий фамилии взятого кандидата.

Выберем произвольный бюллетень из произвольной урны и занумеруем кандидатов, фамилии которых встречаются в этом бюллетене, числами от 1 до n. Этими же числами занумеруем n оставшихся урн. Тогда в k-й урне $(k = 1, \ldots, n)$ найдётся бюллетень, не содержащий фамилии k-го кандидата. Набор этих бюллетеней вместе с бюллетенем, взятым вначале, противоречит условию задачи.

ИНВАРИАНТ

8. ЧЁТНОСТЬ

8.3. Нельзя. Сумма 10 нечётных чисел — чётна (см. 8.2).

8.4. Нет. Сумма $(\pm 1) + (\pm 3) + \ldots + (\pm 57)$ нечётна.

8.5. Сумма $(\pm 1) + (\pm 2) + \ldots + (\pm 1985)$ нечётна.

8.6. Введем на плоскости систему координат так, чтобы вершины квадрата, в которых сидят кузнечики, имели координаты $(0; 0)$, $(0; 1)$ и $(1; 0)$. Ясно, что кузнечики всегда будут прыгать по точкам с целыми координатами. Легко проверить также, что после прыжка чётность каждой из координат кузнечика не меняется. Поэтому никакой из кузнечиков не может попасть в точку $(1; 1)$, у которой обе координаты нечётны.

8.7. Не могут. Обозначим кузнечиков A, B и C. Назовем расстановки кузнечиков ABC, BCA и CAB (слева направо) — правильными, а ACB, BAC и CBA — неправильными. Легко видеть, что при любом прыжке тип расстановки меняется.

8.8. Нет. За каждый шаг сумма всех написанных чисел увеличивается на 2. Так как вначале сумма равна 1, то она всегда будет оставаться нечётной. А сумма четырёх одинаковых чисел чётна.

8.9–8.10. Нельзя. Чётность перевернутых стаканов не меняется.

8.11. а) Можно. Необходимо переворачивать пятаки так, чтобы через каждые два переворачивания гербом вниз лежало 2, 4, 6, … пятаков. б) Нельзя (см. 8.9).

8.12. Не могло. На каждом листе сумма номеров страниц нечётна, а сумма 25 нечётных чисел нечётна.

8.13. Среди этих чисел — чётное число «минус единиц», а для того, чтобы сумма равнялась нулю, их должно быть ровно 11.

8.14. При указанной операции не меняется чётность количества минусов. Поэтому последний знак — плюс, если было написано чётное число минусов, и минус, если нечётное.

8.15. Нет. По условию местами могут меняться лишь две фишки, стоящие на чётных местах или две фишки, стоящие на нечётных местах, поэтому самой левой могут стать лишь фишки с нечётными (считая слева) номерами.

8.16. Не всегда. При перестановках сохраняется чётность номера места. Поэтому если самый высокий человек стоит вторым, то он никогда не станет первым.

8.17. Хотя бы одно из чисел $c_i = a_i - b_i$ чётно (если бы каждое из чисел было нечётным, то нечётной была бы и их сумма, равная 0).

8.18. Чётность числа бананов не меняется, поэтому, если число бананов было чётным, то оставшийся плод — ананас, если нечётным, — то банан.

8.19. Пусть есть одно нечётное число — a_1. Так как сумма его с двумя другими — a_2 и a_3 — чётная, то одно (например, a_2) — нечётное, а другое (a_3) — чётное. Тогда a_4 — чётное (так как сумма a_1, a_2 и a_4 чётна), сумма a_1, a_3 и a_4 — нечётна. Противоречие.

8.20. Нельзя. Среди этих чисел одно (2) — чётное, а остальные — нечётные. Поэтому в той строке, где стоит двойка, сумма чисел нечётна, а в других — чётна.

8.21. Нельзя. В самом деле, сумма чисел от 1 до 10 равна 55, и изменяя в ней знаки, мы меняем все выражение на чётное число.

8.22. Нет. Разность между числом букв «У» и букв «Ы» в слове не меняется.

8.23. Обозначим через $S = (a_1, \ldots, a_n)$ расстановку томов, т. е. на первом месте стоит том a_1, …, на n-м месте — том a_n. Пару томов (a_i, a_j) при $i < j$ назовем стоящей «неправильно», если $a_i > a_j$. Каждой расстановке S соответствует $f(S)$ — число стоящих «неправильно» пар. Легко показать, что операция замены двух томов местами меняет $f(S)$ на нечётное число. Так как для $S_0 = (1, \ldots, n)$ имеем $f(S_0) = 0$, то при нечётном начальном $f(S)$ получить 0 можно лишь нечётным числом операций, а при чётном начальном $f(S)$ получить 0 можно лишь чётным числом операций.

8.24. Нечётное. По правилам турнира каждый школьник может участвовать в любом количестве конкурсов турнира. Рассмотрим сумму количеств участников по всем пяти конкурсам. Эта сумма должна быть нечётной, так как на каждом конкурсе побывало нечётное число школьников. С другой стороны, эту сумму получим, сложив для каждого школьника число конкурсов, в которых он участвовал. Если число школьников чётно, то рассматриваемая сумма имеет чётное число нечётных слагаемых и, значит, она чётна. Противоречие.

8.25. Чётность суммы чисел на доске неизменна.

8.26. Ясно, что количество a участков, на которых улитка ползла вверх или вниз, равно количеству участков, на которых она ползла вправо или влево. Осталось только заметить, что a чётно.

8.27. Произведение P всех чисел таблицы равно произведению произведений чисел в каждой строке. Так как в таблице пять строк, то P отрицательно. С другой стороны, P равно произведению произведений чисел в каждом столбце. Значит, найдется столбец, в котором произведение чисел отрицательно.

8.28. Поскольку единиц 25 штук, то на главной диагонали должна быть хотя бы одна единица. Аналогично, на главной диагонали есть двойка, тройка и т. д.

8.29. Решение 1. Рассмотрим числа $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_2x_3$, ..., $y_n = x_nx_1$. Каждое из них равно либо 1, либо -1. Так как их сумма равна нулю, количество k минус единиц равно числу единиц, т. е. $n = 2k$. Произведение $y_1y_2\dots y_n = (x_1x_2\dots x_n)^2 > 0$, поэтому число отрицательных сомножителей (а оно равно k) чётно. Следовательно, $n = 2k$ делится на 4.

Решение 2. Обозначим $S_m = x_1x_2 + \ldots + x_mx_1$. Тогда $S_2 = x_1x_2 + x_2x_1 = \pm 2 \equiv 2 \pmod 4$, $S_{m+1} = S_m + x_mx_{m+1} + x_{m+1}x_1 - x_mx_1$. Легко проверить, что сумма $x_mx_{m+1} + x_{m+1}x_1 - x_mx_1$ может принимать только значения 1 и -3, т. е. разность $S_{m+1} - S_m$ дает остаток 1 при делении на 4. Значит, S_n при делении на 4 дает тот же остаток, что и $n - 2 + 2 = n$. Так как $S_n = 0$, то n делится на 4.

8.30. Нет. Чётность числа разноцветных пар (не только соседних), где левая фишка красная, не меняется. В исходной ситуации это число равно 1, в желаемой — 0.

8.31. Рассмотрим «пустое поле» как отдельную фишку: можно только менять «пустую фишку» с соседними. Так как пустая фишка должна попасть на исходное поле, число операций должно быть чётным. Поэтому можно получить конфигурации, отличающиеся от начальной только чётным числом перестановок.

Шахматы, шашки

8.32. Нельзя, так как общее количество клеток (25) не делится на два, а каждая доминошка покрывает две клетки.

8.33. Каждая доминошка покрывает одно чёрное и одно белое поле, а при вырезании, например, полей a1 и h8 чёрных полей остается на два меньше, чем белых.

8.34. Поскольку при каждом ходе меняется цвет поля, на котором стоит конь, то имеет место чередование цветов: белого и чёрного.

8.35. Не может. Конь должен сделать 63 хода, и последним (нечётным) ходом он встанет на поле другой чётности, нежели a1; но h8 имеет тот же цвет.

	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3

К 8.36

8.36. Занумеруем часть клеток доски так, как показано на рисунке. Пусть n — число ладей, стоящих на полях с номером 1, m — на полях с номером 2, k — на полях с номером 3. Из условия задачи следует, что на 1, 3, 5 и 7 горизонталях стоят 4 ладьи, поэтому $n + k = 4$. Так же во 2, 4, 6 и 8 горизонталях стоят 4 ладьи, поэтому $m + k = 4$. Отсюда $m = n$, и, значит, число ладей на чёрных полях равно $2n$.

8.37. а) Поскольку в противном случае шашки разбиваются на пары симметричных, то на диагонали обязательно должно стоять нечётное число шашек.

б) Допустим, что это не так. Соединим шашки, симметричные относительно какой-либо из диагоналей, ниткой. После этого разложим все шашки на «ожерелья» — группы шашек, соединённых нитками. Тогда в каждом из «ожерелий» — либо две, либо четыре шашки. Значит, общее количество шашек должно быть чётным — противоречие.

8.38. Нельзя.

Геометрия

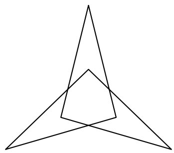
8.39. Если ось симметрии не проходит через вершину, то данные 1997 точек должны разбиваться на пары симметричных, что невозможно.

8.40. Не может. Если мы обойдем контур ломаной, переходя из каждой вершины в следующую, то каждый раз, пересекая прямую, будем оказываться в другой полуплоскости (прямая делит плоскость на две половины). Таким образом, имеет место чередование, и значит, количество вершин должно быть чётным.

8.41. Не существует. Сколько раз кривая попала внутрь окружности, столько раз она должна выйти. Следовательно, число точек пересечения чётно.

8.42. Пусть все пары вершин задают отрезки разной длины. Отрезку A_pA_q поставим в соответствие наименьшее из чисел $|p-q|$ и $2n-|p-q|$. В результате для данных n пар вершин получим числа $1, 2, \ldots, n$; пусть среди этих чисел k чётных и $n-k$ нечётных. Нечётным числам соответствуют отрезки A_pA_q, где числа p и q разной чётности. Поэтому среди вершин остальных отрезков будет k вершин с чётными номерами и k вершин с нечётными номерами, причём отрезки соединяют вершины с номерами одной чётности. Значит, число k чётно. Для чисел n вида $4m$, $4m+1$, $4m+2$ и $4m+3$ количество k чётных чисел равно $2m$, $2m$, $2m+1$ и $2m+1$ соответственно, поэтому $n=4m$ или $n=4m+1$.

8.43. См. рис. При чётном числе звеньев аналогично такую ломаную можно построить, а при нечётном нельзя, так как все звенья ломаной можно разбить на пары, соответствующие точкам её самопересечения.



К 8.43

8.44. Нельзя. Допустим, что бруски уложены в коробку. Тогда они полностью её заполняют. Рассмотрим слой коробки толщиной 1, расположенный у грани размером 7×11. Каждый брусок либо целиком располагается внутри этого слоя, либо заполняет три кубика $1 \times 1 \times 1$ из этого слоя, и, значит, число кубиков размером $1 \times 1 \times 1$ в слое должно делиться на 3. Но число $7 \cdot 11$ на 3 не делится.

8.45. Рассмотрим квадрат, разрезанный на прямоугольники как граф. В этом графе все вершины кроме углов квадрата имеют нечётную степень, поэтому их чётное число (в графе число вершин, имеющих нечётную степень, чётно).

8.46. Нельзя. Если выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то его стороны обязательно разбиваются на пары параллельных.

8.47. Для любой точки X, лежащей вне AB, имеем $AX - BX = \pm AB$. Если предположить, что суммы расстояний равны, то мы получим, что выражение $\pm AB \pm AB \pm \ldots \pm AB$, в котором 45 слагаемых, равно нулю. Но это невозможно.

8.48. Обозначим через a длину AB, $A_1, \ldots, A_k$ — красные точки, $B_1, \ldots, B_l$ — синие точки. Заметим, что $|A_iA - A_iB| = a$ и

$|B_iA - B_iB| = a$ для любого i. Отсюда разность указанных в условии величин равна

$$(A_1A + \ldots + A_kA + B_1B + \ldots + B_lB) -$$
$$- (A_1B + \ldots + A_kB + B_1A + \ldots + B_lA) =$$
$$= (A_1A - A_1B) + \ldots + (A_kA - A_kB) + (B_1B - B_1A) + \ldots + (B_lB - B_lA).$$

Каждое из 1001 слагаемых в последней сумме равно $\pm a$, поэтому сумма не равна 0.

8.49. Четыре. Если у кого-то из Катиных друзей соседи того же пола, то очевидно, что все стоящие в кругу — одного пола. Значит, мальчики и девочки чередуются, поэтому девочек в круге пять — столько же, сколько и мальчиков. Значит, у Кати четыре подруги.

8.50. Ясно, что комбинация из 9 единиц раньше, чем 9 нулей, получиться не может. Если же получилось 9 нулей, то на предыдущем ходу нули и единицы должны чередоваться, что невозможно, так как их всего нечётное количество.

8.51. Проведем наше доказательство от противного. Занумеруем всех сидящих за столом по порядку, начиная с какого-то места. Если на k-м месте сидит мальчик, то ясно, что на $(k-2)$-м и на $(k+2)$-м местах сидят девочки. Но поскольку мальчиков и девочек поровну, то и для любой девочки, сидящей на n-м месте, верно, что на $(n-2)$-м и на $(n+2)$-м местах сидят мальчики. Если мы теперь рассмотрим только тех 25 человек, которые сидят на «чётных» местах, то получим, что среди них мальчики и девочки чередуются, если обходить стол в каком-то направлении. Но 25 — нечётное число.

8.52. Пронумеруем вершины 20-угольника числами от 1 до 20. Назовем длиной хорды между вершинами n_1 и n_2 число $|n_1 - n_2|$, если кратчайшая дуга не содержит дуги $(20; 1)$ и $20 - (n_1 - n_2)$ в противном случае. Предположим, что длины всех хорд различны, т. е. они равны $1, \ldots, 10$. Пусть k_1 — наименьший номер вершины хорды длины 1, k_2 — наименьший номер вершины хорды длины 2 и т. д. Тогда второй номер вершины хорды длины 1 либо $k_1 + 1$, либо $k_1 + 20 - 1$; хорды длины 2 — либо $k_2 + 2$, либо $k_2 + 20 - 2$; и т. д., хорды длины 10 — $k_{10} + 10$. Сумма всех номеров будет равна $2(k_1 + \ldots + k_{10}) - 20m + a_1 + \ldots + a_{10}$, где $|a_1| = 1, \ldots, |a_{10}| = 10$. Из того, что $|a_1| + \ldots + |a_{10}| = 1 + \ldots + 10 = 55$ — нечётное число, следует нечётность $a_1 + \ldots + a_{10}$, а, значит, и суммы всех номеров. Но сумма всех номеров равна $20 \cdot 21/2 = 210$ — чётная. Противоречие.

8.53. Объединим в группы всех сидящих рядом рыцарей одного клана и удалим всех рыцарей каждой группы, кроме последнего. При этом останется одинаковое число рыцарей первого и второго клана, т. е. чётное число. Но удаляются рыцари, справа от которых сидит друг, оставляя лишь таких, справа от которых сидит враг. Согласно условию задачи число удалённых рыцарей равно чётному числу оставшихся. Значит, общее число всех рыцарей делится на 4.

8.54. Назовем два треугольника параллельными, если каждая сторона одного из них параллельна какой-то стороне другого. «Класс параллельности» распадается на два подкласса так, что любые два треугольника одного подкласса одинаково ориентированы (коэффициент гомотетии положителен), а разных подклассов — противоположно ориентированы (коэффициент гомотетии отрицателен). Ясно, что два треугольника могут иметь общий участок сторон, только если они противоположно ориентированы. Поэтому, если мы покрасим в один цвет все треугольники одной ориентации, а в другой цвет — все треугольники противоположной ориентации, то получим раскраску в два цвета, удовлетворяющую условию задачи.

8.55. Не могут. Будем называть расположение шайб правильным, если обходя вершины треугольника ABC именно в порядке A–B–C, мы получим обход по часовой стрелке, и неправильным в противном случае. Легко видеть, что при каждом ударе тип расположения меняется.

8.56. а) Нельзя. Если n карточек сделать из синих красными, а $17 - n$ — из красных синими, то синих карточек станет $(8 - n) + (17 - n) = 25 - 2n$ — нечётное число. б) Можно. Красных карточек после первого переворачивания станет $30 - (25 - 2n) = 5 + 2n$. Выберем n так, чтобы $5 + 2n = 17$, т. е. $n = 6$. Поэтому, если первым ходом шесть синих карточек сделать красными, а 11 красных — синими, то красных карточек станет $6 + (22 - 11) = 17$. Вторым ходом перевернем все эти 17 карточек.

8.57. Нельзя. Заштрихуем три сектора через один и обозначим число монет в заштрихованных секторах перед n-м ходом через a_{n-1}. Очевидно, что $a_0 = 3$ и a_k отличается от a_{k-1} на 1. Значит, $a_1, a_3, \ldots, a_{19}$ — числа чётные, а $a_0, a_2, \ldots, a_{20}$ — нечётные. Следовательно, через 20 ходов число монет в заштрихованных секторах будет нечётным. А если бы все монеты стояли в одном секторе, то это число было бы чётным (0 или 6).

8.58. Нет. В качестве инварианта рассмотрите чётность величины p, равной числу пар (a, b), в которых число a стоит правее числа b и при этом $a > b$.

8.59. Нельзя. В противном случае все цифры в ряду стояли бы на местах одной и той же чётности.

8.60. Если между двумя карточками, на которых написано число a, лежит одна карточка с числом b, то между карточками с числом b лежит ровно одна из карточек с a. Отсюда следует, что при любом расположении карточек число карточек, лежащих между парами, будет чётным. Но согласно условию задачи оно должно равняться $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Итак, искомого расположения не существует.

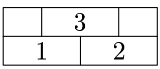
8.61. Нельзя, так как белая шашка при взятии чёрной сдвигается всегда на чётное число вертикалей. Поэтому если она взяла одну шашку, то она всегда будет отстоять от второй на чётное число вертикалей и не сможет её взять.

8.62. Среди чисел $1, 2, \ldots, 99$ нечётных больше, чем чётных.

8.63. Расположив придворных по окружности в том порядке, в каком они следят друг за другом, и предположив, что их количество n чётно, получаем, что придворный с номером $n/2$ следит за тем, кто следит за первым придворным, хотя им должен быть придворный с номером n.

8.64. Нельзя, так как сумма $1 + 2 + \ldots + 33$ нечётна, а сумма чисел в каждой группе должна быть чётной.

8.65. Докажите, что $k(5^{1090701}) + k(2^{1090701})$ чётно.



К 8.66

8.66. Решение 1. Пусть удалось провести ломаную, удовлетворяющую условию. Поскольку контуры областей 1, 2, 3 на рисунке содержат по 5 отрезков и ломаная должна каждый из этих отрезков пересечь ровно по разу, каждая из этих трёх областей должна содержать один из концов ломаной (если ни один из концов не принадлежит области, ломаная должна входить в неё столько же раз, сколько и выходить, т. е. число её пересечений с отрезками границы должно быть чётным). Однако концов у ломаной только два. Противоречие.

Решение 2. Поставим в каждой из 6 областей (включая внешнюю), на которые наша фигура делит плоскость, точку — «столицу» области, а для каждого из 16 отрезков нарисуем пересекающую его «дорогу», соединяющую столицы двух прилежащих к нему областей. Полученную сеть дорог нельзя обойти, проходя по каждой дороге один раз, так как есть четыре города, в которых сходится нечётное число дорог. А чтобы такой обход существовал, необходимо, чтобы таких городов было 0 или 2 (подробнее см. раздел 6).

8.67. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — произведения по строкам, $q_1, \ldots, q_n$ — по столбцам. Тогда вычислим произведение чисел в таблице двумя способами: $p_1 \ldots p_n = q_1 \ldots q_n$. Значит, чётность количества (-1) среди $p_1, \ldots, p_n$ та же, что и среди $q_1, \ldots, q_n$, т. е. всего среди $2n$ чисел $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ чётное число (-1) и тем самым чётное число 1. Но тогда число тех и других различно (так как n нечётно) и потому сумма $p_1 + \ldots + p_n + q_1 + \ldots + q_n$ не равна 0. (Эта сумма может отличаться от $2n$ лишь на число, кратное 4.)

8.68. Пусть можно уложить кости домино на доску так, что каждая из горизонтальных и вертикальных прямых, разделяющих доску на клетки, пересекает хотя бы одну кость домино. Всего имеется 10 таких прямых. Каждая из этих прямых разбивает доску на две части, состоящие из чётного числа клеток. В любой из этих частей содержится какое-то количество неразрезанных костей домино. Эти кости занимают чётное число клеток. Оставшиеся клетки заняты половинками разрезанных костей, а так как их чётное число, то и число разрезанных костей тоже чётно. Итак, каждая из 10 прямых разрезает не меньше двух костей, а так как каждую кость пересекает только одна прямая, то число разрезанных костей не меньше 20. Но всего костей — 18. Противоречие.

8.69. Ответ: нет, не может. Так как на каждом дежурстве, в котором участвует данный человек, он дежурит с двумя другими, то всех остальных можно разбить на пары. Однако 99 — нечётное число.

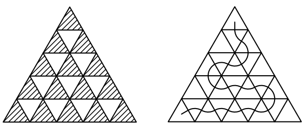
8.70. Возьмём две ближайшие друг к другу планеты. Астрономы на этих планетах смотрят друг на друга. Остается ещё $n-2$ планеты и $n-2$ астронома. Если хотя бы один из них смотрит на уже выбранную планету, то на одну из $n-2$ планет не хватит астрономов. Если же на эти две планеты никто больше не смотрит, то снова можно применить то же рассуждение: выбираем уже из $n-2$ планет две ближайшие и т. д. Так как n нечётно, в конце концов останется одна планета, которую никто не наблюдает.

8.71. Если сумма двух чисел a и b состоит из одних девяток, то при сложении этих чисел не может быть переносов единицы в следующий разряд. Поэтому $S(a+b) = S(a) + S(b)$, где $S(x)$ — сумма цифр числа x. При этом если $S(a) = S(b)$, то $S(a+b)$ чётно и не может равняться $9 \cdot 1967$.

8.72. Если последняя цифра числа a не равна нулю, то сумма её с последней цифрой числа b равна 10, а суммы цифр в каждом из остальных девяти разрядов равны 9. Отсюда следует, что $2S(a) = 9 \cdot 9 + 10 = 91$, что невозможно.

8.73. Предположим противное. Запишем два числа одно под другим и будем складывать их столбиком. Так как последняя цифра суммы нечётная, то при сложении первых цифр также получится нечётная сумма. Поэтому в этот разряд из предыдущего при сложении не переходит единица, т. е. что сумма цифр во втором, а, значит, и в предпоследнем столбце меньше 10. Заметим, что из второго столбика в третий разряд также не переходит 1 — это могло быть лишь если сумма цифр второго разряда была бы равна 9, а сумма цифр первого разряда больше 10, но тогда во втором разряде суммы стоял бы 0.

Отбросив теперь у данного числа две последние и две первые цифры и проведя те же рассуждения для получившихся 13-значных, затем 9-значных и, наконец, 5-значных чисел, получим, что в средний разряд суммы из предыдущего не может перейти 1, а так как цифры, стоящие в средних разрядах, одинаковые, то средняя цифра суммы окажется чётной. Как видно из решения, утверждение задачи верно для $(4k + 1)$-значных чисел. Простые примеры ($12+21$, $506+605$, и т. п.) показывают, что для чисел с другим числом знаков оно не верно.



К 8.74

8.74. Раскрасим треугольники в два цвета, как показано на рисунке. Чёрных треугольников получилось на k больше, чем белых. Поэтому всего белых треугольников $(k^2 - k)/2$, а чёрных — $(k^2+k)/2$. В цепочке цвета треугольников чередуются. Поэтому чёрных треугольников в цепочке не больше чем $(k^2 - k)/2 + 1$. Всего же треугольников в ней не больше чем $(k^2 - k)/2 + (k^2 - k)/2 + 1 = k^2 - k + 1$. Пример цепочки, в которой число треугольников в точности равно $k^2 - k + 1$, показан на рисунке.

8.75. а) Разобьём все 12 вершин на 6 пар противоположных вершин: A_1A_7, $A_2A_8, \ldots, A_6A_{12}$. При каждой операции в каждой паре меняет знак только одна вершина. Поэтому в парах $A_2A_8, \ldots, A_6A_{12}$ после $(2k - 1)$ операции будут разные знаки, а после $2k$ — одинаковые (в паре A_1A_7, будет всё наоборот). Поэтому не может случиться, что в паре A_2A_8 знаки разные, а в паре A_3A_9 — одинаковые. б) Рассмотрим разбиение на 4 группы по три вершины: $A_1A_5A_9$, $A_2A_6A_{10}$, $A_3A_7A_{11}$, $A_4A_8A_{12}$ и будем рассуждать так же, как выше. Чётность числа минусов в каждой группе меняется при каждой операции, и у групп $A_2A_6A_{10}$ и $A_3A_7A_{11}$ она одинаковая. в) Аналогичные рассуждения для разбиения на три группы: $A_1A_4A_7A_{10}$, $A_2A_5A_8A_{11}$, $A_3A_6A_9A_{12}$.

Задача обобщается на любой n-угольник и любое k. Сопоставим каждому набору $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ (где $\varepsilon_i = \pm 1$) в вершинах n-угольника набор d чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, где $d = \text{НОД}(n; k)$, таким образом: $x_i = \varepsilon_i \varepsilon_{i+d} \ldots \varepsilon_{i+n+d}$. Тогда два набора (ε_i) и (ε'_i) можно перевести друг в друга в том и только в том случае, если либо соответствующие наборы (x_i) и (x'_i) одинаковы, либо k/d чётно и наборы (x_i), (x'_i) противоположны: $x_i = -x'_i$ для всех i.

8.76. Пусть p — число нулей, q — число единиц, r — число двоек. После каждой операции все три числа p, q и r изменяются на 1, тем самым меняют чётность. Когда на доске останется одна цифра, одно из чисел p, q и r станет равно 1, два другие — 0. Значит, вначале чётность одного из этих чисел была отлична от чётности двух других. Соответствующая цифра и останется на доске.

8.77. Прямая, проходящая по некоторому звену BC ломаной, пересекает чётное или нечётное число других звеньев в зависимости от того, лежат ли соседние звенья AB и CD по одну или по разные стороны от прямой BC (в последнем случае звено BC будем называть «зигзагом») — в самом деле, чётность числа пересечений ломаной с прямой BC определяется тем, в одной или в разных полуплоскостях от неё расположены точки A и D. Но на каждой замкнутой ломаной чётное число «зигзагов»: пройдя по этой ломаной и отметив, в какую сторону — влево или вправо — мы поворачиваем в каждой вершине, мы одинаковое количество раз меняем направление поворота слева направо и справа налево.

Ещё более короткое доказательство получается, если использовать тот факт, что стороны угла, получающегося при продолжении каждых двух соседних звеньев AB и BC за точку B, ломаная пересекает чётное число раз.

8.78. Если a — общее число пар и m — число пар, состоящих из мальчиков, то $2a = 8m$.

8.79. а) Если n не делится на 4, то среди сомножителей лишь одно чётное число и потому их сумма не равна 0. б) При $n = 4k$, $n = 2 \cdot (-2k) \cdot 1^{3k-2} \cdot (-1)^k$, если k чётно, и $n = (-2)(-2k) \cdot 1^{3k} \times$ $\times (-1)^{k-2}$, если k нечётно.

8.80. При m и n, имеющих одинаковую чётность. Если m и n нечётны, то нужно склеить полоску $1 \times n$, а из m таких полосок получить прямоугольник $m \times n$. При чётных m и n сначала склеиваются прямоугольники $(m-1) \times (n-1)$, $1 \times (n-1)$, $(m-1) \times 1$ и 1×1. Если числа m и n имеют разную чётность, то из предположения о возможности склеить прямоугольник требуемым образом следует, что общее количество плиточек будет нечётно.

8.81. Очевидно, что на каждом шаге сохраняется остаток от деления на 7 суммы всех записанных чисел. Пусть второе из оставшихся чисел равно x. Тогда остаток от деления на 7 суммы $x + 987$ равен остатку от деления на 7 суммы $1 + \ldots + 1987 = 1987 \cdot 7 \cdot 142$, т. е. равен 0. Число 987 делится на 7. Значит, и число x должно делиться на 7. Так как число 987 не является остатком от деления на 7, то число x является остатком от деления на 7, т. е. $0 \leqslant x \leqslant 6$. Поскольку x, как показано, делится на 7, то $x = 0$.

8.82. Среди чисел $1^2, 2^2, \ldots, 1989^2$ имеется 995 нечётных. Поэтому при любой расстановке знаков значение получающегося выражения будет нечётным, т. е. искомое число не меньше 1. Покажем, что 1 получить можно. Рассмотрим квадраты четырёх последовательных натуральных чисел k^2, $(k+1)^2$, $(k+2)^2$, $(k+3)^2$. Из них при соответствующей расстановке знаков можно получить число 4 таким образом: $k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2 = 4$. Тогда из квадратов 8 последовательных натуральных чисел можно получить при соответствующей расстановке знаков числа 0 и 8. Разобьём множество чисел $22^2, 23^2, \ldots, 1989^2$ на восьмёрки последовательных чисел и расставим знаки «+» и «−» так, чтобы в каждой такой восьмёрке получился 0. Затем из шестнадцати чисел $6^2, 7^2, \ldots, 21^2$ получаем число 16, а из чисел 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 получаем число (-15) следующим образом: $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 = -15$. В результате из данных чисел получим число 1, которое, значит, и является искомым наименьшим неотрицательным числом.

8.83. Нет. Введем на листе систему координат с осями, проходящими по линии сетки. Назовем чётностью узла чётность суммы его координат. Одну ножку циркуля будем считать первой, другую — второй. Докажите, что чётности узлов, в которые попадают ножки циркуля, не меняются при выполнении шагов. Если вначале чётности первой и второй ножек были различны, ножки поменяться местами не могут. Если эти чётности одинаковы, рассмотрите вместо исходной новую сетку, у которой ячейки в два раза больше, а ножки циркуля вначале расположены в её узлах, после чего повторите уже приведённые рассуждения.

9. ОСТАТКИ, АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ, РАСКРАСКА, ПОЛУИНВАРИАНТ

9.1. а) Нет. При каждом разрывании одного куска на 6 частей общее число кусков увеличивается на 5. Поэтому число кусков бумаги на каждом шаге может иметь только вид $5n + 1$. б) Нет. Имеем $3n + 1 + 6k + 1 = 1993$ или $3(n + 2k) = 1991$, но 1991 на 3 не делится.

9.2. Инвариант — остаток от деления числа голов Змея Горыныча на 7.

9.3. Инвариант — остаток по модулю 11 разности между числом диллеров и числом даллеров у финансиста.

9.4. Нельзя. Проследите за остатками по модулю 4.

9.5. Можно: 456, 45, 90, 9, 18, 36, 72, 7, 14.

9.6. У суммы цифр тот же остаток при делении на 9, что и у самого числа.

9.7. Единиц получится на одну больше, чем двоек. Всякое число дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма его цифр. Поэтому в нашей задаче единицы получаются из чисел, дающих при делении на 9 остаток 1, т. е. из чисел 1, 10, 19, $28, \ldots, 999\,999\,991, 1\,000\,000\,000$, а двойки — из чисел, дающих в остатке 2, т. е. из чисел 2, 11, 20, $29, \ldots, 999\,999\,992$.

9.8. 10. **9.9.** Не может.

9.10. а) Можно. Обозначим операции автоматов соответственно I, II, III и условимся n сделанных подряд операций I или II записывать соответственно как I^n или II^n. Тогда карточку $(31; 13)$ можно получить из карточки $(19; 86)$ так:

$$(19; 86) \xrightarrow{\mathrm{III}} (86; 19) \xrightarrow{\mathrm{I}^4} (10; 19) \xrightarrow{\mathrm{III}} (19; 10) \xrightarrow{\mathrm{I}} (9; 10) \xrightarrow{\mathrm{III}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}} (10; 9) \xrightarrow{\mathrm{I}} (1; 9) \xrightarrow{\mathrm{III}} (9; 1) \xrightarrow{\mathrm{I}^7} (2; 1) \xrightarrow{\mathrm{III}} (1; 2) \xrightarrow{\mathrm{II}} (3; 2) \xrightarrow{\mathrm{III}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}} (2; 3) \xrightarrow{\mathrm{II}} (5; 3) \xrightarrow{\mathrm{III}} (3; 5) \xrightarrow{\mathrm{II}^2} (13; 5) \xrightarrow{\mathrm{III}} (5; 13) \xrightarrow{\mathrm{II}^2} (31; 13).$$

б) Нельзя. Поскольку операции I, II, III сохраняют НОД$(m; n)$, а НОД$(19; 81) = 1 \neq$ НОД$(12; 21) = 3$, из карточки $(19; 81)$ нельзя получить карточку $(12; 21)$.

Необходимое и достаточное условие того, чтобы из карточки $(m; n)$ можно было получить карточку $(a; b)$, состоит в том, что НОД$(m; n) =$ НОД$(a; b)$.

Необходимость этого условия очевидна: все операции сохраняют НОД. Если это условие выполнено, то обе карточки с помощью операций I и III можно привести к карточке (d, d) по алгоритму Евклида. Действительно, каждый шаг алгоритма Евклида — это деление с остатком числа a на число b: $a = bq+r$ $(0 \leqslant r < b)$. Этот шаг можно провести операцией I^q. Затем, после операции III, можно аналогично сделать следующий шаг алгоритма и т. д. до тех пор, пока не получится (d, d). Проходя по цепочке $(a, b) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (d; d)$ в обратном порядке с заменой операции I на операцию II, мы из карточки $(d; d)$ получим $(a; b)$.

9.11. а) Можно. Сначала получаем карточку $(1; 8)$:

$$(5;19) \xrightarrow{\mathrm{I}} (6;20) \xrightarrow{\mathrm{II}} (3;10) \xrightarrow{\mathrm{I}^7} (10;17) \xrightarrow[(3;10)]{\mathrm{III}} (3;17) \xrightarrow{\mathrm{I}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}} (4;18) \xrightarrow{\mathrm{II}} (2;9) \xrightarrow{\mathrm{I}^7} (9;16) \xrightarrow[(2;9)]{\mathrm{III}} (2;16) \xrightarrow{\mathrm{I}^7} (1;8),$$

а из неё уже легко получить карточки $(1;15), (1;22), \ldots, (1;7k+1)$:

$$(1;7(k-1)+1) \xrightarrow{\mathrm{I}^7} (8;7k+1) \xrightarrow[(1;8)]{\mathrm{III}} (1;7k+1)$$

б) Нельзя. При любых операциях разность чисел на карточках будет делиться на 7.

в) Пусть d — наибольший нечётный делитель разности $b-a$; тогда из карточки $(a;b)$ можно получить $(1;n)$, только если $n = dk+1$ при некотором натуральном k. Необходимость этого условия очевидна (доказывается аналогично п. б)). Докажем, что из $(a;b)$ можно получить $(1;1+d)$. Сначала получим карточку с разностью d операциями

$$(a;b) \xrightarrow{\mathrm{II}} (a/2;b/2),$$

$$(a;b) \xrightarrow{\mathrm{I}} (a+1;b+1) \xrightarrow{\mathrm{II}} ((a+1)/2;(b+1)/2)$$

которые дают пару с вдвое меньшей разностью. Чтобы из пары $(a, a+d)$ получить $(1, 1+d)$, нужно проделать серию операций

$$(a;a+d) \xrightarrow{\mathrm{I}^d} (a+d;a+2d) \xrightarrow[(a;a+d)]{\mathrm{III}} (a, a+2d) \xrightarrow{\mathrm{II}} (a/2;a/2+d),$$

$$(a;a+d) \xrightarrow{\mathrm{I}} (a+1;a+d+1) \xrightarrow{\mathrm{I}^d} (a+d+1;a+2d+1) \xrightarrow[(a+1;a+d+1)]{\mathrm{III}}$$

$$\xrightarrow[(a+1;a+d+1)]{\mathrm{III}} (a+1;a+1+2d) \xrightarrow{\mathrm{II}} ((a+1)/2;(a+1)/2+d).$$

Они уменьшают первый член пары, пока он не равен единице. Карточки $(1;1+dk)$ получаются из (1;d+1) аналогично получению в п. а) карточек $(1;7k+1)$ из $(1;8)$.

9.12. Рассмотрите следующую величину: пусть каждый чиж получает номер, равный номеру дерева, на котором он сидит. Тогда остаток от деления суммы номеров чижей на 44 — инвариант.

9.13. *В*. Проследите за чётностью разностей $N(A)-N(B)$, $N(B)-N(C)$, $N(C)-N(A)$, где $N(X)$ — число амёб типа X.

9.14. а) Для возвращения в исходную точку «лев» должен сделать одинаковое число ходов вправо, вниз и влево, вверх, т. е. всего $3n$ ходов. Но на доске 100 клеток, поэтому обойти всю доску, побывав в каждой клетке по одному разу, «лев» не может. б) Разность номеров столбца и строки при каждом ходе либо уменьшается на 2, либо увеличивается на 1. Значит, её остаток по модулю 3 каждый раз увеличивается на 1. Так как всего ходов 99, этот остаток не изменился, но разность в конце отличается от исходной на 1. Противоречие. Значит, такого обхода нет.

9.15. Будем считать, что рассматриваемая бесконечная шахматная доска, как и обычная, раскрашена в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. Тогда при нечётном N «верблюд» будет ходить только по клеткам одного цвета, и, тем самым не может пройти на любую клетку.

Докажем, что при чётном N «верблюд» может пройти с любой клетки на любую. Очевидно, для этого достаточно доказать, что он может пройти с любой клетки на соседнюю (смежную по стороне), например, на соседнюю с ней сверху. Первым ходом ходим на одну клетку вправо и N клеток вверх, а вторым — на одну вправо и N вниз. Так мы окажемся на две клетки правее исходной. Повторим эту пару ходов $N/2$ раз (тогда мы окажемся на N клеток правее исходной), после чего пойдем на одну клетку вверх и N влево. Мы оказались в клетке, соседней с исходной.

9.16. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке в два цвета — белый и чёрный. При этом 12 клеток из 25 окажутся окрашенными в один цвет, например белый, остальные 13 — в другой, чёрный. Каждый жук переползает на клетку другого цвета. Так как жуков, которые вначале сидели на белых клетках, 12, а чёрных клеток — 13, то после переползания всех жуков по меньшей мере одна чёрная клетка останется пустой.

9.17. Рассмотрим раскраску в четыре цвета, указанную на рисунке. Тогда каждая плитка 2×2 содержит ровно одну клетку цвета 1, а каждая плитка 1×4 — ни одной или две клетки цвета 1.

1	4	1	4	1	4
2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4
2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4
2	3	2	3	2	3

К 9.17

1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4
4	3	4	3	4	3
2	1	2	1	2	1

К 9.18

Следовательно, чётность числа плиток 2×2 должна совпадать с чётностью числа клеток цвета 1, что и доказывает утверждение задачи.

9.18. Раскрасим доску в четыре цвета так, как это показано на рисунке. Допустим, что существует обход конем данной доски. Данная раскраска обладает тем свойством, что если конь стоит на поле цвета 1 (соответственно 2), то следующим ходом он встанет на поле цвета 3 (соответственно 4). А так как полей цветов 1 и 2 столько же, сколько и полей 3 и 4, то в случае наличия обхода конем доски цвета пар $(1, 2)$ и $(3, 4)$ чередуются. Значит, всякий раз, как конь встает на поле цвета 3, следующим ходом он должен встать на поле цвета 1 или 2 — а может встать только на поле цвета 1. Значит, при обходе доски цвета 1 и 3 чередуются. Но это невозможно, так как тогда конь никогда не встанет на поля цветов 2 и 4. Противоречие.

9.19. Каждый из 26 единичных кубиков, отличных от центрального, будем считать либо чёрным, либо белым в шахматном порядке: 12 кубиков, имеющих ровно по две грани на поверхности большого куба, назовем белыми, а остальные 14 кубиков — чёрными. Заметим, что в любой паре таких кубиков, имеющих общую грань, один кубик будет белым, а другой — чёрным. Указанные 26 кубиков мышка съесть не сможет, поскольку в противном случае их можно было бы разбить на 13 пар, каждая из которых состояла бы из белого и чёрного кубика, а тогда белых и чёрных кубиков было бы поровну.

9.20. Раскрасим все узлы в шахматном порядке в чёрный и белый цвет. На границе лежит $4 \cdot 99$ узлов (не считая вершин) — поровну чёрных и белых. Пусть все они служат концами ломаных. Тогда имеется одинаковое количество ломаных с двумя белыми и двумя чёрными концами. Поэтому общее количество белых и чёрных узлов, лежащих на ломаных внутри доски, также одинаково.

(На ломаных с белыми концами на один чёрный узел больше, на ломаных с чёрными — на один белый.) Но всего внутри доски 99^2 — нечётное число узлов, так что по крайней мере один их них не лежит на ломаной.

9.21. Пусть утверждение не верно. Покрасим концы дуг чёрной краской. Разделим всю окружность на дуги длины 1 и новые точки деления покрасим в красный цвет. Возьмём теперь какую-нибудь дугу AC длины 2 с чёрными концами и красной серединой B'. Диаметрально противоположная ей точка B чёрная. Пусть на дуге AB длины $3k-1$ n_1 дуг длины 1, n_2 дуг длины 2 и n_3 дуг длины 3. На дуге BC будет n_1 дуг длины 3 (точки, диаметрально противоположные концам дуги единичной длины, красные). Поэтому $n_3 = k - n_1$, что противоречит равенству $3k - 1 = n_1 + 2n_2 + 3n_3$.

9.22. Нельзя. Пусть на каком-то шаге в секторах оказались в последовательном порядке числа $a_1, \ldots, a_6$. Составим сумму $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$. После каждого хода она не меняется, так как каждая разность сохраняет своё значение. Но в начальном положении $S = 2$, а в конечном, когда каждое из шести чисел равно одному и тому же числу, $S = 0$.

9.23. Можно. Пусть на каком-то шаге в вершинах шестиугольника оказались в последовательном порядке числа $a_1, \ldots, a_6$. Составим сумму $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$. При прибавлении к двум соседним числам суммы (или к a_1 и a_6) одного и того же числа эта сумма не изменит своего значения. И в начальном, и в конечном положении она равна 20. Укажем способ перехода от начального положения к конечному:

$$(8,3,12,1,10,6) \to (7,2,12,1,10,6) \to (7,2,14,3,10,6) \to \\ \to (5,2,14,3,10,4) \to (5,2,14,6,13,4).$$

9.24. а) Сумма чисел при этом преоборазовании не меняется. б) Нельзя получить число, большее, чем наибольшее из данных вначале.

9.25. а) Нельзя (сумма всех поставленных чисел остаётся нечётной). б) Можно. в) Нельзя. Для доказательства утверждений пунктов а) и в) нужно рассмотреть два тетраэдра, образованных вершинами куба, никакие две из которых не принадлежат одному ребру. Производимые операции увеличивают на единицу сумму чисел, стоящих в вершинах каждого из этих тетраэдров.

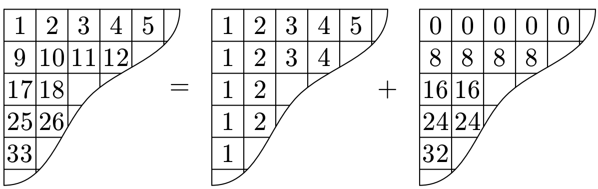
9.26. В качестве инварианта можно рассмотреть произведение всех чисел на доске, предварительно увеличенных на 1.

9.27. При каждой операции сохраняется сумма квадратов чисел. Действительно, если тройка (a, b, c) заменяется тройкой $((a+b)/\sqrt{2}, (a-b)/\sqrt{2}, c)$, то $((a+b)/\sqrt{2})^2 + ((a-b)/\sqrt{2})^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Отсюда следует ответ: нельзя.

9.28. При этих операциях произведение всех написанных на доске чисел остается неизменным, а сумма при этом может меняться только в большую сторону.

9.29. Пусть $c = ab + a + b$, тогда $c + 1 = (a+1)(b+1)$. Значит, если вместо чисел, написанных на доске, рассматривать числа, на единицу большие, то каждое новое число будет получаться как произведение двух уже имеющихся. Так как начинаем мы с 2 и 3, то после нескольких умножений получим число вида $2^n 3^m$, где n и m — натуральные числа. В исходной ситуации могут быть получены только числа вида $2^n 3^m - 1$. Число 13121 таковым является $13122 = 2 \cdot 3^8$, а число 12131 — нет.

9.30. Пусть это невозможно. Занумеруем карточки числами от 1 до 12 в направлении часовой стрелки (начиная с любого места). Присвоим каждому гостю номер, который написан на его карточке. Повернем стол так, чтобы первая карточка оказалась около первого гостя. Пусть при этом против i-го гостя окажется a_i-я карточка ($a_i = 1, 2, \ldots, 12$). Для того чтобы i-й гость оказался против своей карточки, надо повернуть стол против часовой стрелки на угол $b_i 30^\circ$, где $b_i = i - a_i$, если $i > a_i$ и $b_i = i - a_i + 12$, если $i \leqslant a_i$. Легко видеть, что b_i принимает все значения $1, 2, \ldots, 12$. Складывая b_i, получим $b_1 + \ldots + b_{12} = (1 + \ldots + 12) - (a_1 + \ldots + a_{12}) + 12k = 12k$, где k — какое-то целое число. Но $a_1 + \ldots + a_{12} = b_1 + \ldots + b_{12} = 1 + 2 + \ldots + 12 = 78$.



К 9.31

9.31. Представим каждое из чисел, записанных на полях шахматной доски, в виде суммы двух других чисел так, как это показано на рисунке. Если 8 ладей не бьют друг друга, то на каждой горизонтали и вертикали стоит по одной ладье. Поэтому сумма чисел по полям, занятым ладьями, всегда будет $(1 + 2 + \ldots + 8) + (0 + 8 + 16 + \ldots + 56) = 260$.

9.32. Сумма чисел в таблице не зависит от способа её подсчёта. Именно в этом смысле это — задача на инвариант.

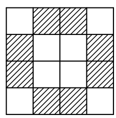
9.33. а), б) Докажите, что чётность числа чёрных клеток среди четырёх угловых не меняется при перекрашиваниях.

9.34. Задача решается как и задача 9.33 — надо лишь рассмотреть другие четыре клетки, а именно a1, a2, b1, b2 (в шахматной нотации).

9.35. а), б) Нет. При перекрашивании горизонтали или вертикали (квадрата 2×2), содержащей k чёрных и $8 - k$ $(4 - k)$ белых клеток, получится $8 - k$ $(4 - k)$ чёрных и k белых клеток. Поэтому число чёрных клеток изменится на $8 - k - k = 8 - 2k$ $(4 - 2k)$, т. е. на чётное число клеток; значит, чётность числа клеток сохраняется.

9.36. а) В каждой строке найдутся по крайней мере две клетки одного цвета. Перекрасим все клетки строки в этот цвет. Мы получим таблицу, каждая строка которой покрашена в один из m цветов, $m \leqslant n - 1$. Поэтому найдутся по крайней мере две строки, покрашенные в один и тот же цвет. В этот цвет закрасим все клетки таблицы. б) Покажем, что все клетки таблицы можно закрасить в один цвет. Перекрасим клетки каждой строки таблицы в тот цвет, которым чаще встречается в этой строке. Такой цвет в каждой строке существует, поскольку число клеток в строке нечётно. После таких перекрашиваний все столбцы таблицы будут иметь одинаковую раскраску. В каждом из столбцов, содержащих нечётное (!) число клеток, число клеток некоторого цвета (одного и того же для всех столбцов), будет меньше числа клеток другого цвета, в который мы и перекрасим, согласно условию задачи, все клетки в каждом столбце.

9.37. Легко видеть, что каждая прямая, параллельная сторонам или диагоналям квадрата, пересекает чётное число из восьми заштрихованных на рисунке клеток. Поэтому чётность числа минусов, стоящих в этих клетках, при указанных операциях не меняется.



К 9.37

9.38. а), б) Нельзя. Рассмотрим правый верхний квадрат 2×2. За ход число минусов может либо увеличиться (уменьшится) на 2, либо не измениться. Значит, в квадрате всегда будет нечётное число минусов.

9.39. Пусть таблица T_1 после некоторых преобразовании, описанных в условии задачи, превратилась в таблицу T_2, в которой число минусов наименьшее. Значит, при преобразованиях таблицы T_1 число минусов в ней не может уменьшиться. Такие таблицы мы будем называть минимальными. Докажем, что число минусов в минимальной таблице не может быть больше четырёх. Действительно, в каждом столбце и строке минимальной таблицы стоит не более двух минусов (иначе, меняя соответствующий столбец или строку, мы бы уменьшили число минусов). Допустим, что существует минимальная таблица, в которой более четырёх минусов. В некоторой её строке A стоят два минуса. Обозначим через P и Q столбцы, в которых стоят эти минусы. Какие-нибудь два из оставшихся минусов стоят в столбцах P и Q или в двух других столбцах. Меняя, если нужно, строку A, можно добиться, чтобы в двух столбцах таблицы стояло по два минуса. Рассмотрим теперь пятый минус. Он не может стоять ни в одном из рассмотренных выше столбцов, так как таблица минимальна. Пусть этот минус расположен в строке B. Меняя знак в одном или двух упомянутых выше столбцах, добиваемся того, чтобы в строке стояло три минуса. Противоречие.

Таблицы, у которых на диагонали стоят 1, 2, 3 или 4 минуса, а на остальных местах плюсы, являются минимальными (значит, характеристика может принимать значения $0, 1, \ldots 4$). Чтобы это доказать, полезно заметить, что результат преобразования таблицы T_1 в T_2 зависит не от числа изменений некоторой строки или столбца, а только от чётности этого числа. В самом деле, пусть, например, первая строка менялась a раз; а столбцы менялись соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 раза. Тогда знак, стоящий в левом верхнем углу, менялся $a + b_1$ раз, а знак в остальных трёх клетках первой строки менялся соответственно $b_2 + a$, $b_3 + a$, $b_4 + a$ раз. При чётном a можно взять вместо a нуль, а при нечётном — единицу, и результат будет тем же. Поэтому можно рассматривать только такие преобразования, при которых каждая строка и каждый столбец меняются не более одного раза. Пользуясь этим, уже нетрудно проверить минимальность таблиц.

9.40. Отметим сначала несколько фактов для случая любого натурального n. Существует всего 2^n расстановок чисел $+1$ и -1 в вершинах правильного n-угольника. Назовем две расстановки эквивалентными, если от одной из них к другой (а стало быть, и обратно) можно перейти указанными в условии операциями — изменением знаков в вершинах правильных n-угольников. Любые две операции такого типа «коммутируют» — результат не зависит от порядка, в котором они выполняются; повторение любой операции дважды также можно исключить — оно эквивалентно операции, не меняющей расстановки. При этом можно ограничиться лишь операциями изменения знаков в вершинах правильных p-угольников с простым числом вершин p (назовем их «образующими»); множество вершин правильного n-угольника при любом n, делящемся на p, можно разбить на n/p образующих p-угольников. Рассмотрим конкретные задачи.

а) При $n = 15$ существует всего 8 образующих p-угольников: пять треугольников и три пятиугольника. Единичную (состоящую из всех $+1$) расстановку обозначим через E. Любая эквивалентная E расстановка определяется указанием некоторого подмножества из 8 этих p-угольников; различных подмножеств (включая пустое) существует 2^8 — это меньше, чем общее число 2^{15} расстановок. Поэтому существуют расстановки, не эквивалентные E.

б) При $n = 30$ общее число образующих p-угольников равно $15 + 10 + 6 = 31$, так что для решения задачи нужны дополнительные соображения. Заметим, что можно ограничиться меньшим числом образующих: например, из каждой пары симметричных относительно центра треугольников (и пятиугольников) можно оставить лишь один — изменение знаков в нем, а также в трёх (пяти) «двуугольниках», содержащих его вершины, эквивалентно изменению знаков в другом, ему симметричном. Остается $15 + 5 + 3 = 23$ образующих, таким образом, существует не более $2^{23} < 2^{30}$ расстановок, эквивалентных E.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	6	12	3	9
1	10	1	7	13	4
2	5	11	2	8	14

К 9.40

в), г) Покажем, как для любого n найти точное количество $T(n)$ расстановок, эквивалентных E. Заметим, что количество расстановок, эквивалентных какой-то другой расстановке A из $+1$ и -1, также равно $T(n)$: все они получаются почленным умножением знаков расстановки A на любую расстановку из класса эквивалентных E. Обозначим через $K(n)$ число «классов эквивалентности» — максимальное количество попарно неэквивалентных друг другу расстановок; тогда $K(n) = 2^n/T(n)$. Пусть n содержит s разных простых множителей: $p_1, \ldots, p_s$. Положим $p_1 \ldots p_s = q$, $n/q = m$. Разобьём правильный n-угольник на m правильных q-угольников. Задача вычисления $T(n)$ сводится к более простой задаче вычисления $T(q) = T(p_1, p_2, \ldots, p_s)$; ведь каждый из образующих p_i-угольников содержится лишь в одном из q-угольников, другими словами, происходящие в разных q-угольниках изменения знаков независимы, поэтому $T(n) = (T(q))^m$, $K(n) = (K(q))^m$.

Начнём со случая $s = 2$; пусть $n = p_1p_2$. Занумеруем вершины n-угольника числами $0, \ldots, n-1$. Запишем эти числа в таблицу $p_1 \times p_2$ так, что числа в одном столбце дают одинаковый остаток при делении на p_1, в одной строке — при делении на p_2. Это можно сделать, так как остатки (r_1, r_2) от деления на p_1 и p_2 однозначно определяет номер от 0 до n (см. рис.). Расстановкам чисел $+1$ и -1 в точках на окружности соответствуют расстановки чисел $\nu(r_1, r_2) = +1$ и -1 в клетках таблицы (r_1 — номер строки, r_2 — номер столбца), изменению знаков в p_1- и p_2-угольниках — изменение знаков ν в строках и столбцах. Любую расстановку этими операциями можно привести к такой, у которой в первой строке и первом столбце стоят одни $+1$. Такие «приведённые» расстановки будут попарно неэквивалентны; в самом деле, при замене знаков ν в строках и столбцах величина произведения $\nu(r_1, r_2)\nu(0, r_2)\nu(r_1, 0)\nu(0, 0)$ сохраняется (набор таких величин для всех (r_1, r_2), $1 \leqslant r_1 \leqslant p_1 - 1$, $1 \leqslant r_2 \leqslant p_2 - 1$ определяет класс эквивалентности).

Поэтому $K(p_1, p_2) = 2^{(p_1-1)(p_2-1)}$, $T(p_1, p_2) = 2^{p_1+p_2-1}$. В частности, $K(15) = 2^8$, $T(15) = 2^7$; $K(10) = 2^4$. Последнее равенство позволяет найти $K(200)$: $n = 200 = 2^3 5^2$, $q = 10$, $m = 20$, $K(200) = (K(10))^{20} = 2^{80}$.

Аналогично можно найти $K(n)$ для случая любого s. Пусть $q = p_1 \ldots p_s$; номер k от 0 до $q - 1$ однозначно определяется остатками $r_1, \ldots, r_s$ от деления q на $p_1, \ldots, p_s$ («китайская теорема об остатках», см. 11.208); с расстановками $\nu(r_1, \ldots r_s)$ — функциями на множестве наборов r_i, $1 \leqslant r_i \leqslant p_i - 1$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, принимающими значения $+1$ и -1, — разрешено проделывать операции одновременной замены знаков в одном «ряду», состоящем из p_i наборов, у которых i-я координата r_i произвольна — меняется от 0 до $p_i - 1$, а остальные $s - 1$ чисел r_i фиксированы (для каждого i); этими операциями любая расстановка сводится к такой, для которой $\nu(r_1, \ldots, r_s) = +1$, если хоть одно r_i равно 0; полученные приведённые расстановки неэквивалентны (сохраняется произведение 2^s значений ν для наборов, получающихся из данного заменой некоторых координат на нули). Ответ для $q = p_1 \ldots p_s$ и любого $n = qm$: $K(q) = 2^{(p_1-1)\ldots(p_s-1)}$, $K(n) = 2^{\varphi(n)}$, где $\varphi(n) = n(1 - 1/p_1)\ldots(1 - 1/p_s)$. В частности, $K(30) = 2^8$, $T(30) = 2^{22}$.

Возникшая здесь несколько неожиданно функция $\varphi(n)$ хорошо известна в теории чисел: это функция Эйлера, выражающая количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним.

9.41. За 50. Докажем по индукции, что для n пар орёл — решка минимальное число ходов не меньше n. Предположим, что это верно для n пар и докажем для $n+1$ пары. Допустим, что для $n+1$ пары минимальное число ходов равно n. Тогда в каждый из n ходов должна переворачиваться хотя бы одна монета из первых n пар. Легко показать, что для приведения $(n+1)$-й пары к нужному виду необходимо чётное число ходов. Но при каждом из этих ходов необходимо переворачивание решки, стоящей перед $(n+1)$-й парой, а при чётном числе переворачиваний она останется решкой. Значит, n ходов недостаточно.

9.42. Полуинвариантом является проходимое на каждом шагу расстояние. Оно не убывает, а кроме того, на втором шагу оно больше чем на первом ($BC > BA$). Значит, вернуться в A можно только по дороге более длинной, чем AB, что невозможно.

9.43. Допустим, что на гранях куба написаны числа. Проделаем операцию, описанную в условии задачи, и полученные при этом числа напишем на гранях второго кубика. Со вторым кубиком проделаем то же самое и т. д. В результате получим 26 кубиков таких, что числа, написанные, на $i+1$-м кубике, получаются из чисел, написанных на i-м, с помощью процедуры, описанной в условии задачи. Пусть M_i $(i = 1, \ldots, 26)$ — наибольшее из чисел, записанных на гранях i-го кубика. Тогда $M_1 \geqslant \ldots \geqslant M_{26}$. Но из условия $M_{26} = M_1$, так что $M_1 = \ldots = M_{26}$. Рассмотрим 3-й кубик. На одной из его граней должно стоять число, равное M_1 и пусть это верхняя грань. Легко показать, что на четырёх боковых гранях второго кубика должны стоять числа M_1. В точности, так же можно заключить, что на всех гранях первого кубика стоит число M_1. Но по предположению не все числа, написанные на гранях первого кубика, равны. Противоречие.

9.44. Пусть вершинам куба поставлены в соответствие некоторые числа. Числа, полученные применением операции, описанной в условии задачи, соотнесем вершинам второго куба. Повторим эту процедуру, введя третий куб, и т. д. Обозначим через M_i и m_i наибольшее и наименьшие из чисел, соотнесённых вершинам i-го куба. Повторяя рассуждения предыдущей задачи, установим, что $M_1 = M_2 = \ldots = M_{11}$, $m_1 = m_2 = \ldots = m_{11}$.

9.45. 0. Если умножить любое число n на однозначное a так, что $an \geqslant 10^k$, а $(a-1)n < 10^k$, то, вычеркнув первую единицу, мы получим число, меньшее исходного. Итак, описанной операцией можно уменьшить любое наперёд заданное число.

9.46. Пусть P — это число дорог с концами в городах с различным цветом флагов. Каждое утро это число уменьшается. Поскольку P — целое неотрицательное число, процесс закончится.

9.47. Исходная карта — прямоугольник K_0, меньшая карта — прямоугольник $K_1 \subset K_0$. Рассмотрим преобразование f, отображающее прямоугольник K_0 на K_1. Пусть $K_{i+1} = f(K_i)$. Так как последовательность K_i является стягивающейся последовательностью вложенных прямоугольников, существует единственная точка X, принадлежащая всем прямоугольникам K_i. Так как X принадлежит K_i, то точка $f(X)$ принадлежит K_{i+1}, т. е. точка $f(X)$ также принадлежит всем прямоугольникам K_i. Так как есть только одна точка, принадлежащая всем прямоугольникам, то $f(X) = X$.

9.48. На каждом шаге сокращается суммарная длина всех проведённых отрезков (это следует из неравенства треугольника), и всего существует лишь конечное число расположений отрезков с вершинами в данных точках. Поэтому данный процесс не может продолжаться бесконечно.

9.49. Среди всех таблиц, которые можно получить из данной переменами знаков в строках и столбцах, возьмём ту, для которой сумма максимальна. Такая таблица T существует, поскольку способов, которыми можно осуществить перемены знаков в строках и столбцах 2^{m+n} (в каждой строке (столбце) можно либо поменять знак, либо нет) — конечное число. В таблице T сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательна. В самом деле, если бы сумма чисел в некоторой строке (или столбце) таблицы T была отрицательна, то, изменив знак в этой строке (столбце), мы получили бы таблицу с большей суммой всех чисел, что противоречит выбору таблицы T.

9.50. Разобьём парламент произвольным образом на две палаты и организуем процесс пересаживания: выберем парламентария, имеющего не менее двух врагов в своей палате, и пересадим его в другую палату. Общее число пар врагов, сидящих в одной палате, при этом уменьшается. Процесс остановится, так как число враждующих пар конечно. Получившееся разбиение удовлетворяет условиям задачи.

9.51. Пусть машина имеет запас бензина, достаточный для того, чтобы проехать всю дорогу без заправок. Пусть она начинает движение с любой станции (забирая по дороге весь бензин на каждой станции) и оканчивает движение в той же точке и с тем же количеством бензина. Обозначим через A станцию, подъезжая к которой машина имела в баке наименьшее за всё время движения количество бензина. Пусть в этот момент количество бензина в машине было равным x. Если машина с количеством бензина, равным x, начнёт движение со станции A, то в баке всегда будет бензина не меньше x. Значит, если машину с пустым баком заправить на станции A, то она сможет, начиная движение с этой станции, совершить поездку по кругу (так как это количество x бензина можно с самого начала вылить и совершить путешествие без него).

9.52. а) Предположим, что четвёрка (a, b, c, d) встретилась вновь. Докажем сначала, что в этом случае $abcd = 1$. Пусть $abcd = p$. Тогда произведение чисел второй четвёрки равно p^2, третьей — p^4, четвёртой — p^8, и т. д. Ясно, что при $p \neq 1$ в последовательности произведений не будет двух одинаковых чисел и, значит, все получающиеся четвёрки будут различны. Таким образом, $p = 1$. Теперь рассмотрим вторую четвёрку: ab, bc, cd, da; так как $abcd = 1$, то, как легко проверить, четвёртой четвёркой будет b^2c^2, c^2d^2, d^2a^2, a^2b^2. Таким образом, четвёртая четвёрка получается из второй возведением в квадрат и перестановкой. Точно так же из четвёртой получается шестая четвёрка, из шестой — восьмая и т. д. Если не все числа второй четвёрки равны 1, то наибольшее из них больше 1. Тогда наибольшее из чисел $2n$-й четвёрки будет с ростом n неограниченно увеличиваться, а это противоречит тому, что они периодически повторяются. Итак, $ab = bc = cd = da = 1$, а значит, все четвёрки, начиная со второй равны $(1, 1, 1, 1)$, т. е. не равны (a, b, c, d). Противоречие.

б) При $n = 1$ утверждение задачи очевидно. Предположим, что оно справедливо при $n = k$, и докажем его справедливость при $n = k + 1$. Запишем первые три строчки:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2^{k+1}},$$

$$x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{2^{k+1}}x_1,$$

$$x_1x_3, x_2x_4, \ldots, x_{2^{k+1}}x_2.$$

Легко видеть, что числа, стоящие на нечётных местах, и числа, стоящие на чётных местах, образуют строчки, $x_1, x_2, \ldots, x_{2^{k+1}-1}$ и $x_2, x_4, \ldots, x_{2^{k+1}}$, которые «через шаг» преобразуются так, как это требуется в условии, а так как по предположению индукции строчка длины 2^k в конце концов преобразуется в строчку из одних единиц, то и из исходной строчки длины 2^{k+1} получится строчка из одних единиц.

Можно доказать, что из строки x длины $m = 2^k r$, где r нечётно, тогда и только тогда получится строка из одних единиц, когда x состоит из r одинаковых блоков длины 2^k, т. е. имеет период 2^k.

9.53. Какой бы набор из n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (среди которых не все равны между собой) мы не взяли, через несколько шагов максимальное число набора уменьшится, а минимальное увеличится. Отсюда ясно, что максимальное число не может всё время оставаться целым, если, конечно, не получится набора из равных чисел $(a, a, \ldots, a)$.

Пусть из набора $z_1, \ldots, z_n$ впервые получается набор равных чисел: $(z_1 + z_2)/2 = (z_2 + z_3)/2 = \ldots = (z_{n-1} + z_n)/2 = (z_1 + z_n)/2$. Тогда числа z_i равны через одно. При нечётном n это невозможно. Пусть n чётно. Посмотрим, из какого набора может получиться набор $(a, b, a, b, \ldots, a, b)$. Пусть $(y_1 + y_2)/2 = (y_3 + y_4)/2 = \ldots = (y_{n-1} + y_n)/2 = a$; $(y_2 + y_3)/2 = (y_4 + y_5)/2 = \ldots = (y_n + y_1)/2 = b$. Тогда $y_1 + \ldots + y_n = 2na$, $y_2 + y_3 + \ldots + y_n + y_1 = 2nb$, т. е. $2an = 2nb$ и $a = b$. Итак, набор из попарно равных чисел получен быть не может.

9.54. В результате каждой операции сумма S попарных произведений соседних чисел увеличивается (в этой сумме $ab + bc + cd$ заменяется на $ac + cb + bd$, а $ab + cd < ac + bd$, если $(a - d)(b - c) < 0$). Но сумма S может принимать лишь конечное число различных значений.

9.55. Для доказательства достаточно заметить, что при перекрашивании любой «особой» точки в другой цвет число отрезков с разноцветными концами уменьшается по крайней мере на 1. Поэтому перекрашивание удается произвести только конечное число раз, после чего не остается ни одной «особой» точки.

9.56. Пусть m/n и k/l — произвольные (быть может, сократимые) дроби. Условимся писать $m/n \to k/l$, если дробь k/l может быть получена из дроби m/n с помощью некоторого числа указанных в условии задачи операций.

Докажем, что «$\to$» обратимо, т. е. если $m/n \to k/l$, то и $k/l \to m/n$. Достаточно, очевидно, доказать обратимость каждой из трёх указанных в условии операций. Действительно, первая и вторая операции (вычитание знаменателя из числителя и прибавление знаменателя к числителю) взаимно обратны, а третья (обращение дроби) — обратна сама себе.

Покажем теперь, как из дроби $1/2$ получить дробь $67/91$. В соответствии со сделанным замечанием достаточно показать, как из дроби 67/91 получается дробь 1/2. Имеем:

$$67/91 \to 91/67 \to 24/67 \to 67/24 \to 19/24 \to 24/19 \to 5/19 \to$$
$$\to 19/5 \to 4/5 \to 5/4 \to 1/4 \to 4/1 \to 2/1 \to 1/2.$$

9.57. Если четвёрка (a_n, b_n, c_n, d_n) получена из данной на n-м шаге $(n \geqslant 1)$,то $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ и $(n > 1)$

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geqslant 2(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2 + d_{n-1}^2).$$

Действительно, разность правой и левой частей этого неравенства равна

$$2a_{n-1}b_{n-1} + 2b_{n-1}c_{n-1} + 2c_{n-1}d_{n-1} + 2d_{n-1}a_{n-1} =$$
$$= 2(a_{n-1} + c_{n-1})(b_{n-1} + d_{n-1}),$$

а числа $a_{n-1} + c_{n-1}$ и $b_{n-1} + d_{n-1}$ имеют разный знак, т. к. их сумма — 0.

9.58. Из неравенства $1/a + 1/b \geqslant 4/(a + b)$ $(a, b > 0)$ следует, что после каждой операции сумма S обратных величин чисел, написанных на доске, не увеличивается. Вначале $S = n$, поэтому в конце $S \leqslant n$, откуда следует требуемое утверждение.

9.59. Нет. Пусть $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ — квадратный трёхчлен (с дискриминантом $B^2 - 4AC$). После первой операции трёхчлен $f(x)$ меняется на трёхчлен $(A + B + C)x^2 + (B + 2A)x + A$ с дискриминантом $B^2 - 4AC$, а после второй операции — на трёхчлен $Cx^2 + (B - 2C)x + (A - B + C)$ с дискриминантом $B^2 - 4AC$. Итак, при выполнении разрешённых операций дискриминант сохраняется. Но у трёхчлена $x^2 + 4x + 3$ дискриминант равен 4, а у трёхчлена $x^2 + 10x + 9$ он равен 64.

9.60. Нет. В результате данной операции из чисел, делящихся на 7, получаются числа, делящиеся на 7.

9.61. Назовем характеристикой колоды количество имеющихся в ней карт той масти, которой в колоде осталось больше всего. При каждом ходе характеристика либо не меняется, либо уменьшается на 1. В последнем случае, очевидно, берётся карта загаданной масти. Так как в начале характеристика колоды равнялась 13, а в конце — 0, по ходу игры она уменьшалась 13 раз.

10. ИГРЫ

10.1. После каждого хода количество кучек увеличивается на 1. Сначала их было 3, в конце — 45. Таким образом, всего будет сделано 42 хода. Последний, 42-й, ход сделает второй игрок.

10.2. После каждого хода количество кусков увеличивается ровно на 1. Выигрывает первый игрок.

10.3. После каждого хода и количество вертикалей, и количество горизонталей, на которые можно поставить ладей, уменьшается на 1, поэтому игра будет продолжаться ровно 8 ходов. Последний, выигрышный ход будет сделан вторым.

10.4. Чётность числа единиц на доске после каждого хода не меняется. Поскольку сначала единиц было чётное число, то после последнего хода на доске не может оставаться одна (нечётное число!) единица. Выигрывает второй игрок.

10.5. Чётность результата не зависит от расстановки плюсов и минусов, а зависит только от количества нечётных чисел в первоначальном наборе. Так как в данном случае их 10 (т. е. чётное число), то выигрывает первый игрок.

10.6. а) Выигрывает Лёша, как и в 10.5. б) Выигрывает Лёша: он ставит «+» между 5-й и 6-й единицами, а остальные ходы делает симметрично ходам Вити.

10.7. Если Вася 11-м ходом ставит чётное число, то Петя ставит 4, а если Вася ставит нечётное число, то Петя ставит 2.

10.8. Из 10 чисел с последней цифрой $0, 1, \ldots, 9$ всегда найдется делящееся на 7, поэтому выигрывает второй.

10.9. а) Выигрывает заканчивающий (он может повторять ходы первого). б) Заканчивающий проигрывает. Выигрышная стратегия второго такова: на первом ходу он ставит цифру, на 1 меньшую, чем поставлена первым, а потом он повторяет ходы первого. Тогда по окончании игры число будет иметь вид

$$A = \overline{a_0(a_0-1)a_1a_1a_2a_2\ldots a_sa_sb} \equiv$$
$$\equiv (a_0+\ldots+a_s+b)-((a_0-1)+a_1+\ldots+a_s) = b+1 \pmod{11}.$$

Но $b = 0, \ldots, 9$, поэтому $b+1$, а, значит, и A, не может делиться на 11.

10.10. Ясно, что синие шары можно считать тройками, а белые — двойками. Задача сведена к такой: в ящике лежат $15:3+ +12:2 = 11$ кубиков. За один ход разрешается брать 1 кубик. Кто возьмёт последний? Решение очевидно — это игра, в которой ничего не зависит от игроков.

10.11. В этой игре выигрывающий, допустив ошибку, может проиграть. Ошибка — в том, что после своего хода оставить невычеркнутыми клетки только в одном столбце или только в одной строке, предоставляя противнику возможность выиграть следующим ходом. Проигравшим в этой игре является тот, кто сделает этот роковой ход. Заметим, что оставшуюся после вычёркивания горизонтали часть клетчатой доски $m \times n$ можно представить себе как доску $(m-1) \times n$. Аналогично, после вычёркивания вертикали остается доска $m \times (n-1)$. Ситуация, в которой каждый ход является «роковым» — это доска 2×2. При каждом ходе суммарное количество горизонталей и вертикалей на доске уменьшается на 1. Поэтому чётность этой суммы в начале игры определяет победителя. В пункте а) выигрывает первый игрок, а в пунктах б) и в) — второй. Заметим, что в пункте б) решающим соображением может быть и симметричная стратегия второго игрока.

10.12. В процессе игры (сравните с алгоритмом Евклида) обязательно будет выписан НОД исходных чисел. Значит, будут выписаны и все числа, кратные ему, не превосходящие большего из исходных чисел. В нашем случае НОД равен 1. Поэтому будут выписаны все числа от 1 до 36. Итак, игра будет продолжаться 34 хода (два числа были написаны сначала), и выигрывает второй.

10.13. За ось симметрии возьмём прямую, разделяющую 4-ю и 5-ю горизонтали. Симметричная стратегия обеспечивает выигрыш второму игроку.

10.14. Выигрывает первый. Центральная или осевая симметрия.

10.15. Выигрывает первый. Первый ход в центр доски, а затем — центральная симметрия.

10.16. В обоих пунктах выигрывает первый игрок. а) Осевая симметрия. б) Центральная симметрия. Решающим соображением является то, что если два симметричных поля не побиты, то поля, с которых оба они бьются, также не побиты.

10.17. Выигрывает второй. Центральная симметрия.

10.18. Выигрывает первый. Первым ходом он снимает центральную шашку, а потом играет центрально-симметрично.

10.19. Выигрывает второй игрок. Его стратегия: каждым ходом он возвращает ладью на большую диагональ a1–h8.

10.20. Выигрывает второй игрок при помощи симметричной стратегии: каждым своим ходом он берет столько же камней, сколько предыдущим ходом взял первый игрок, но из другой кучи.

10.21. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он берет все камни из одной кучи, после чего играет как в задаче 10.20.

10.22. Выигрывает первый. Первым ходом он уравнивает количество камней в кучках, после чего играет как в задаче 10.20.

10.23. Выигрывает первый. Первым ходом он проводит хорду, по обе стороны от которой расположено по 9 вершин. После этого, на каждый ход второго он отвечает аналогичным ходом по другую сторону от этой хорды.

10.24. В обоих пунктах выигрывает второй. Независимо от хода первого игрока, второй может после своего хода оставить две одинаковые по длине цепочки лепестков. Далее — симметрия.

10.25. Выигрывает А. Он ставит фишку того же цвета в противоположную вершину.

10.26. Тот, кто ходит вторым. В условиях задачи не сказано, кто начинает игру — А или Б. Пусть игру начинает А. Если он прибивает, например, красный шар в одной из вершин куба, то игроку Б лучше всего в ответ прибить также красный шар в одной из соседних вершин и т. д. Значит, в этом случае выигрывает Б.

10.27. а) При $n = 9$ начинающему следует первым своим ходом переправить на плюс центральный минус, а затем отвечать на каждый ход противника ходом, симметричным относительно центра цепочки. Выигрывает начинающий. Ясно, что эта стратегия применима при любом нечётном начальном числе минусов.

б) При $n = 10$ также выигрывает начинающий: ему нужно первым ходом переправить два центральных минуса на плюсы, а дальше отвечать на ход второго игрока ходом, симметричным относительно центра цепочки. Очевидно, такая стратегия приведет его к победе при любом чётном начальном числе минусов.

10.28. а) Выигрывает первый игрок. б) Выигрывает первый игрок.

10.29. а), б) Выигрывает второй. Центральная симметрия. в) Выигрывает первый. Первым ходом он протыкает ряд, состоящий из центральных кубиков четырёх слоев 3×3. Дальше — центральная симметрия.

10.30. Проигрывает тот, кто отломит кусок ширины 1. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он разламывает шоколадку на два куска 5×5. Дальше симметрия.

10.31. Выигрывает первый: первым ходом он ставит крестик в центральную клетку. Затем после каждого хода второго игрока он ставит крестик в центрально-симметричную клетку.

10.32. а) Для выигрыша достаточно оставлять партнёру при каждом ходе число камней, делящееся на 4. Первый может это сделать, если начальное число камней не делится на 4. б) Первый выигрывает, если n не делится на $m + 1$.

10.33. Выигрывает первый. Вначале он называет 1, а далее, если второй n-м ходом прибавляет m, то первый $(n+1)$-м ходом прибавляет $11-m$.

10.34. а) Положение в игре описываются числом спичек, оставшихся в коробке, и чётностью числа спичек у игрока, имеющего право хода. Можно показать, что проигрышные поля имеют вид «$(6k-1)$, нечет», «$6k$, нечет» и «$(6k+1)$, чёт», где k — натуральное, и при правильной игре выигрывает начинающий.

10.35. Выигрывает второй игрок. Выигрышными являются позиции, в которых между шашками находится кратное 3 число пустых клеток.

10.36. Второй выигрывает тогда и только тогда, когда фишка в начальном положении стоит на поле 4, 8 или 12. Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть вначале фишка стоит на клетке с номером 0. Тогда выигрывает второй игрок, не сделав ни одного хода.
2) Пусть вначале фишка стоит на одной из клеток с номерами 1, 2 или 3. Здесь выигрывает первый игрок, переместив фишку за один ход на клетку с номером 0.
3) Допустим, что фишка сначала стоит на клетке с номером 4. Тогда выиграет второй игрок: если первый первым ходом передвинет фишку влево на 1, 2 или 3 поля, то второму игроку следует в ответ передвинуть её соответственно на 3, 2 или 1 поле, после чего она окажется на клетке 0. Такой ответ будем называть дополнением до 4.
4) Пусть фишка вначале находится на одной из клеток с номерами 5, 6 или 7. Начинающему следует переместить фишку соответственно на 1, 2 или 3 поля — с тем чтобы она оказалась на клетке 4, после чего дело сведётся к предыдущему случаю, но с переменой игроков местами. Поэтому выигрывает первый.
5) Пусть фишка стоит на поле 8. Здесь выигрывает второй игрок, дважды дополняя число полей, на которые переместил фишку начинающий, до 4.

Далее, если фишка вначале стоит на клетке 9, 10 или 11, то выигрывает первый, если на клетке 12, то второй игрок, а если на клетке 13 или 14, то снова первый.

10.37. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции, при которых в коробке остается 2^n-1 спичка. Первый ход — оставить 255 спичек.

10.38. В этой игре выигрывает тот, кто получит единицу. Побеждает первый. Выигрышными позициями являются нечётные числа.

10.39. В пункте а) выигрывает второй игрок, в пункте б) — первый. В этой игре выигрышными являются позиции, при которых в каждой кучке нечётное число спичек.

10.40. Выигрывает первый игрок. Занумеруем горизонтали и вертикали шахматной доски в естественном порядке. Координаты поля a1 — $(1,1)$, поля h8 — $(8,8)$. Выигрышными являются позиции, в которых король стоит на поле с чётными координатами. Первый ход — на поле b2.

−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−	−	−

К 10.41

−	−	−	−	−	−	−	+
−	−	−	−	−	+	−	−
−	−	−	−	−	−	+	−
−	−	+	−	−	−	−	−
+	−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	+	−	−	−
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	+	−	−	−	−

К 10.42

10.41. Выигрывает второй игрок. Выигрышные позиции указаны на рисунке.

10.42. Пользуясь анализом с конца, можно получить выигрышные позиции (см. рис.). Выигрывает первый игрок, причём у него есть три варианта первого хода: на поля c5, e3, d1.

10.43. Пронумеруем вертикали (сверху вниз) и горизонтали (справа налево) шахматной доски числами от 0 до 7. Каждой позиции исходной игры сопоставим клетку, находящуюся на пересечении горизонтали с номером, равным числу камней в первой куче, и вертикали с номером, равным числу камней во второй куче. Ходу в первоначальной игре соответствует ход ферзя из 10.42, т. е. мы отождествили игру с 10.42.

10.44. Выигрывает первый. Расстановка плюсов и минусов после переформулировки в терминах клетчатой доски 12×12 (исходному положению соответствует левый нижний угол) показана на рисунке.

10.45. Так может играть первый: он ставит крестик в середину доски, а далее будет ставить крестики симметрично второму относительно этой клетки.

10.46. Эта задача является примером того, что геометрическая интерпретация необязательна для проведения анализа с конца. Здесь плюсами и минусами удобно помечать числа. Плюсом оказываются помечены числа, делящиеся на 10. Таким образом, выигрывает второй игрок.

10.47. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции. Это числа от 56 до 111 и от 4 до 6. Итак, выигрывает первый игрок (его первый ход — в 4, 5 или 6).

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	−	−	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	+
+	+	+	+	+	+	−	−	+	−	−	+
−	−	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+
−	−	−	−	−	+	−	−	+	−	−	+
+	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
−	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+

К 10.44

10.48. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции:

$$500, 250, 125, 62, 31, 15, 7, 3.$$

Выигрывает первый игрок.

10.49. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции — числа, делящиеся на 3. Выигрывает первый игрок, первым ходом он может, например, вычесть $1, 4, 16$.

10.50. Витя выигрывает. Лёша при первом своём ходе пишет натуральное число в пределах от 16 до 30. Вите в ответ лучше всего написать число 15. Далее Лёша пишет любое число в пределах от 8 до 14, а Вите следует написать число 7. Затем Лёша пишет число от 4 до 6, а Вите нужно написать число 3. Лёше остается написать только число 2, а Вите — 1.

10.51. Переформулируем пункты а) и б) в терминах шахматной доски. Игра а) оказывается тождественной игре из задачи 10.41. Расстановка плюсов и минусов в пункте б) такая же, как в пункте а) («+» с поля $a2$ и далее через одно). В обоих пунктах выигрывает первый игрок.

10.52. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции с двумя нечётными кучками. Первый ход — съесть кучку из 21 конфеты и разделить кучку из 20 конфет на любые две нечётные кучки.

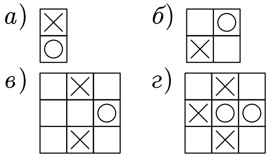
10.53. Выигрывает первый игрок. Выигрышные позиции — те, при которых в максимальной по количеству камней кучке остается $2^n - 1$ камень. Первый ход — первую и вторую кучки можно разбивать как угодно, а третью — на кучку из 63 камней и кучку из 7 камней.

10.54. Выигрывает первый игрок. Поскольку своим ходом он может взять $1, 2, \ldots, 5$ спичек, то второму игроку он всегда оставляет число спичек, кратное 6. Через конечное число ходов он оставит второму игроку ровно 6 спичек.

10.55. Выигрывает первый. Разобьём все целые числа, начиная с 2, на непересекающиеся пары вида $(2k, 2k+1)$. Тогда среди трёх чисел $n, n-1, n-2$ два образуют пару. Начинающий первым ходом фишку, стоящую на поле с тем номером, который не попал в пару, переставляет на поле с номером 1. На ход второго игрока первый ставит оставшуюся фишку на поле с номером, образующим соответствующую пару.

10.56. Если выигрывают чёрные, то белые, не меняя позиции, передают ход.

10.57. Пусть у ноликов есть выигрышная стратегия. Тогда этой стратегией могут воспользоваться крестики, игнорируя свой начальный знак.



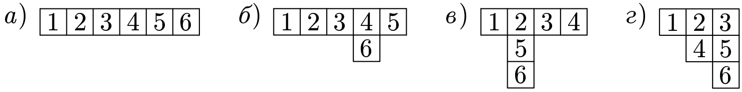
К 10.58

10.58. Начинающий должен поставить первый крестик не слишком близко к границе (не ближе чем на 7 клеток). Легко понять, что наилучший метод защиты для второго игрока состоит в том, чтобы поставить первый нулик по соседству с крестиком. Имеются две принципиально разные возможности (рис. *а* и *б*); прочие сводятся к изображённым поворотом листа. Разберём более трудный вариант, показанный на рис. *б*. Первый игрок ставит крестик, как это показано на рис. *в*. Если нулик не будет поставлен на поле между крестиками, то крестики выигрывают за два хода, поставив 4 знака по вертикали. Наилучший второй ход нуликов и ответ крестиков изображены на рис. *г*. Теперь крестики имеют две свободных «двойки» по диагоналям. Проигрыш нуликов неизбежен, нулики проигрывают максимум через 3 хода по одной из диагоналей.

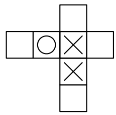
Случай на рис. *а* проще. Крестики выигрывают за пять ходов.

10.59. На доске из 7 клеток, показанной на рисунке, начинающий может выиграть, как бы ни играл его противник: сначала он ставит крестик на пересечении рядов, а затем на одну из средних клеток в ряду, на котором нет нуля.

При любом ходе противника первый может выиграть на третьем ходу. Если доска состоит не более чем из 6 клеток, то второй участник всегда может предотвратить победу первого. Докажем это. Будем называть тройкой три рядом стоящие клетки. На рис. *а* имеется четыре тройки: $(1,2,3)$; $(2,3,4)$; $(3,4,5)$ и $(4,5,6)$, а на рис. *г* — 3 тройки: $(5,2,3)$; $(3,5,6)$ и $(1,4,6)$.



К 10.59



К 10.59

Чтобы предотвратить победу первого, второму достаточно поставить по одному нулику на каждую тройку. Если есть не более двух троек, то второй участник может двумя ходами «перекрыть» их. Пусть есть более двух троек. Если рядом стоит 5 или 6 клеток, то все тройки находятся в этом ряду (рис. *а* и *б*). Поставив нолик на третью от края клетку, второй оставляет только одну неперекрытую тройку, которую он может перекрыть вторым ходом. Если имеются 4 рядом стоящие клетки, то существует самое большее одна тройка, нестоящая в этом ряду (рис. *в*). Заняв одну из двух средних клеток ряда длины 4, второй участник перекрывает обе тройки, стоящие в этом ряду, а вторым своим ходом перекрывает оставшуюся тройку.

Остаётся случай, когда никакие четыре клетки не стоят в ряд (при этом 6 клеток могут содержать не более трёх троек). Если есть три тройки, то каждые две из них должны иметь общую клетку (рис. *г*) и есть три такие клетки, в которых пересекаются по две тройки. Поставив нолик на одну из этих клеток, второй участник первым же ходом перекроет две из этих троек, оставшуюся он перекроет вторым ходом.

10.60. Может. Если девочка берёт конфету из коробки, в которой лежит одна конфета, то мальчик берёт конфету из коробки, в которой больше одной конфеты. Если девочка берёт конфету из коробки, в которой ровно две конфеты, то мальчик берёт оставшуюся конфету из той же коробки. Если девочка берёт конфету из коробки, в которой больше двух конфет, то мальчик берёт конфету из коробки, в которой ровно одна конфета.

Доказательство того, что мальчик сможет сделать свой ход, ведётся по индукции. Будем доказывать его в такой форме: мальчик может сделать k ходов, и после его k-го хода число непустых коробок равно $(50-k)$. База $(k=0)$ очевидна. Докажем переход. Если девочка взяла $(k+1)$-м ходом конфету из коробки с одной конфетой, то на $50-k-1$ непустых коробок приходится $100-2k-1$ конфет. По принципу Дирихле, найдётся коробка с более чем одной конфетой. Если девочка взяла конфету из коробки с двумя конфетами, то переход очевиден. Если же она взяла конфету из коробки, в которой более двух конфет, то на $50 - k$ непустых коробок приходится $100 - 2k - 1$ конфет. Значит, найдётся коробка с одной конфетой.

10.61. Второй выигрывает при числе конфет $2, 4, 16, 32, 64, \ldots$, поскольку из не степени двойки всегда можно получить степень двойки, а из степени двойки (кроме числа 2) можно получить только не степень двойки. Итак, при 50 конфетах выигрывает первый.

10.62. Выиграет A. Самый северо-восточный квартал города будет освещён в любом случае после первого хода. Если у B есть выигрышная стратегия, то у неё есть выигрышный ответ на ход A, состоящий в освещении только северо-восточного квартала. Но этот же ход может сделать A и воспользоваться выигрышной стратегией B.

10.63. а) Выигрывает первый: первым ходом освещаем максимальный квадрат, не совпадающий с данным. Далее — симметричная стратегия. б) Выигрывает первый. Примените индукцию. Первый ход — в правую нижнюю угловую клетку. Далее первый может каждым ходом возвращать доску в состояние «прямоугольник без угловой клетки».

Замечание. Можно доказать, что для любого прямоугольника всегда выигрывает второй. Действительно, пусть второй имеет выигрышную стратегию. Заметим, что при любом начальном ходе правая нижняя клетка всегда освещается. Поэтому если 1-й первым ходом делает ход в правый нижний угол, то любой ход 2-го приведет к тому же результату, если бы 1-й до этого не ходил. Поэтому 1-й сможет теперь применить стратегию 2-го и выиграть. Полученное противоречие показывает, что выигрывает всегда первый (но явной стратегии из этого решения не извлечёшь).

10.64. Указание. Искусственная переборная задача. Выигрывает первый, сказав первым ходом 2 фразы (дальнейшее решение — перебор вариантов). Можно разобрать случаи с другим количеством фраз.

10.65. а) первый, брать 300; б) первый, брать 300 или 500; в) первый, 600; г) первый, 10; д) первый, 201; е) первый, 400; ж) ничья при $a + d = b + c$; иначе выигрывает первый: при $a + d > b + c$ брать d, при $a + d < b + c$ брать b.

10.66. Выигрывает второй. Если первый перекладывает из второй ямки в третью, то второй перекладывает из четвёртой в пятую, и наоборот. Далее второй выигрывает всегда. Если же первый перекладывает из первой ямки во вторую, то второй — из третьей в четвёртую, и наоборот. Далее второй перекладывает шарики только из чётных ямок.

10.67. Выигрывает первый. Сначала он вычёркивает 27, затем для любого $k \equiv i \pmod 5$ при $i \neq 0$, вычеркнутого вторым игроком, первый вычёркивает число, равное $5 - i \pmod 5$. Если второй вычёркивает число, равное $0 \pmod 5$, то первый только один раз вычёркивает число, равное $1 \pmod 5$, а затем на этот ход первый отвечает вычёркиванием числа, равного $0 \pmod 5$; так как $1 + \ldots + 26 = 1 \pmod 5$.

10.68. Сначала первый игрок вычёркивает 9 чисел от 47 до 55. Остальные числа разбиваются на две группы: от 1 до 46 и от 56 до 101. Для любого k, вычеркнутого вторым игроком, первый вычёркивает $|55 - k|$; разность оставшихся чисел равна 55.

10.69. Пусть сначала первый мудрец вычеркнет все нечётные числа, затем второй — все числа, большие 512 (их осталось 256), затем первый все числа, большие 256, и т. д. Тогда в итоге второй уплатит первому 32. Несложно доказать, что первый всегда может добиться разности не меньше 32, а второй — разности не больше 32.

10.70. Витя выигрывает: он выбирает центр какой-то клетки и отмечает точки симметрично точкам Лёши относительно этого центра. После 6 ходов Лёша может отмечать только узлы, расположенные в 6 треугольных областях, образованных каждой стороной шестиугольника и продолжениями соседних с ней сторон.

10.71. Выигрывает первый. Первый закрашивает квадрат 18×18, примыкающий к большей стороне прямоугольника, так, чтобы ось симметрии квадрата и ось симметрии прямоугольника совпали. Тогда относительно этой общей оси остаток прямоугольника распадётся на две одинаковые части. Теперь на каждый ход второго игрока первый отвечает симметричным ходом, причём у первого игрока ход всегда найдется, так как второй не может закрасить квадрат, пересекающий ось симметрии.

10.72. Да. Приведем стратегию второго игрока. Первые 1000 ходов он пропускает. Ход с номером $n > 1000$ он делает так:

1) если на n-м и $(2000-n)$-м местах стоят одинаковые буквы — ничего не делает;

2) если на этих местах — разные буквы, то одна из них не совпадает с той, которая стоит на 1000-м месте. Второй игрок меняет её с 1000-й буквой.

10.73. Разобьём доску на четыре части по две вертикали в каждой. Пусть чёрные в ответ на ход белых в какой-либо части делают ход в той же части. Тогда, если чёрные лишат белых возможности ходить в каждой из частей, то белые не смогут ходить вообще. Итак, достаточно описать выигрышную стратегию чёрных для случая, когда игра происходит в пределах двух вертикалей. Если белые передвигают свою фишку на k клеток вперёд, то чёрные передвигают свою фишку, стоящую в другой вертикали, на k клеток вперёд. Если же белые передвигают свою фишку на k клеток назад, то чёрные передвигают свою фишку, стоящую в той же вертикали, на k клеток вперёд. Тогда после каждого хода чёрных расстояния между фишками, стоящими в одной вертикали, и фишками, стоящими в другой вертикали, становятся одинаковыми. Поэтому на любой ход белых чёрные имеют ответный ход, а, значит, чёрные не могут проиграть. Так как чёрные ходят только вперёд, то игра закончится через конечное число ходов.

10.74. Докажем, что хотя бы одна из граней данного многоугольника не является треугольником. Пусть, напротив, все его n граней — треугольники. Тогда у этого многогранника $3n/2$ рёбер (ибо каждое из трёх рёбер любой грани принадлежит одновременно двум граням) и n вершин (ибо каждая из трёх вершин любой грани принадлежит одновременно трём граням). По формуле Эйлера имеем $n+n-3n/2=2$, т. е. $n=4$, что противоречит условию задачи. Первый игрок, чтобы выиграть, должен первым ходом занять грань A_1, не являющуюся треугольником. Вторым ходом он должен занять свободную грань A_2, прилежащую к грани A_1 и имеющую общие ребра с двумя свободными гранями A_3, A_4, также прилежащим к грани A_1 (это можно сделать, поскольку второй игрок мог занять лишь одну грань, прилежащую к грани A_1). Наконец, третьим ходом он может занять одну из граней A_3 или A_4, не занятую вторым игроком. Итак, первый игрок выигрывает на третьем ходу.

10.75. Пусть $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_9$ — числа, написанные на карточках. Если $a_1+a_9>a_2+a_8$, то первый ставит число a_9 в клетку 2 (см. рис.), а вторым своим ходом — число a_2 (или a_1) в одну из клеток 1 или 4. Если $a_1+a_9<a_2+a_8$, то первый ставит число a_1 в клетку 2, а вторым своим ходом — число a_9 (или a_8) в одну из клеток 1 или 4. Если $a_1+a_9=a_2+a_8$, то первый может

применить любую из описанных выше стратегий (при правильной игре второго результат игры в этом случае — ничья).

	1	
2		3
	4	

К 10.75

10.76. 30. Опишем стратегию второго игрока, которая обеспечит ему такую сумму. Разобьём все числа на пары: $(1,2)$, $(3,4),\ldots,(19,20)$. Каждый раз, когда первый ставит какой-нибудь знак перед одним из чисел, кроме 19 и 20, второй должен ставить противоположный знак перед числом той же пары. Как только первый ставит какой-нибудь знак перед числом последней пары, второй ставит тот же знак перед другим из этих чисел. Ясно, что окончательная сумма по модулю будет не меньше чем $19+20-1-1-\ldots-1(9\text{ единиц})=30$.

Докажем, что первый может не позволить второму выбрать больше 30, если будет при каждом своём ходе ставить перед наибольшим из оставшихся чисел знак, противоположный знаку имеющейся к этому моменту суммы (если сумма равна 0, то ставится плюс). Рассмотрим некоторую партию. Пусть k-й ход — последний, в результате которого сумма меняет знак (включая ходы, перед которыми сумма равна 0). За первые $k-1$ ходов будут заведомо использованы числа $20,\ldots,20-(k-1)$. Так как максимальная по модулю сумма, которая может получиться после k-го хода $20-(k-1)+20-k=41-2k$. За каждый из следующих $10-k$ ходов сумма уменьшается по крайней мере на 1, так как первый каждый раз вычитает из модуля суммы наибольшее из оставшихся чисел m, а второй не может добавить к нему больше $m-1$. Итак, в результате сумма будет не более $41-2k-(10-k)=31-k\leqslant 30$.

10.77. а) Если n чётно, то всю доску можно разбить на прямоугольники размером 1×2 («домино»). Начинающий всегда будет иметь возможность сделать ход (и тем самым выиграет), если он будет следовать такой стратегии: если фишка стоит на одной из клеток какого-то домино, то он ставит её на вторую клетку того же домино («закрывает» домино).

б) Всегда выигрывает начинающий. При чётном n стратегия та же, что и в а). При нечётном n нужно снова разбить на домино все клетки, кроме угловой; раскрасив доску в шахматном порядке, легко убедиться, что на угловую клетку второй никогда пойти не сможет, поэтому первый выигрывает, следуя той же стратегии.

10.78. а) Пусть $m\geqslant 2n$. Покажем, что первый игрок может сделать в позиции (m,n) такой ход, что полученная позиция станет (для второго игрока) проигрышной. Если позиция $(m-n,m)$ — проигрышная, то искомый ход: $(m,n)\to(m-n,m)$.

Если же эта позиция выигрышная, то в ней существует ход, превращающий её в проигрышную. Поскольку $m - n \geqslant n$, этот ход имеет вид $(m-n, n) \to (m-kn, n)$, где k — некоторое натуральное число. Но тогда искомый выигрышный ход первого игрока: $(m, n) \to (m - kn, n)$. Отметим, что здесь удается доказать, что позиция (m, n) при $m \geqslant 2n$ выигрышная, не предъявляя в явном виде выигрывающей стратегии.

б) При $a \geqslant (1+\sqrt{5})/2$. Каждой позиции (m, n), где $m \geqslant n$, поставим в соответствие точку $x = m/n \geqslant 1$ на числовой оси. При каждом ходе точка x смещается на некоторое целое число k влево; если она попадает в отрезок $0 < x < 1$, то заменяется на обратную: $x \to 1/x$, попадание в 0 — проигрыш. Отметим на оси отрезок $[1/t; t]$ длины 1; $t - 1/t = 1$ при $t = (1+\sqrt{5})/2$. Точки $x = m/n$, лежащие внутри этого отрезка, соответствуют проигрышным позициям, правее него — выигрышным; в самом деле, из такой точки можно очередным (выигрывающим!) ходом попасть в этот отрезок; если $1 < x < t$, то очередной ход выводит из отрезка, а если $x = 1$, то ведет к проигрышу. Поскольку наибольшее число спичек в коробках уменьшается, через несколько ходов игра обязательно закончится.

10.79. Среди 8 чисел найдутся три, не превосходящие $1/6$, причём два из них будут стоять на концах диагонали одной из граней — её и надо выбрать первому.

10.80. а) Выигрышная стратегия для первого игрока: вначале он пишет число 6, после чего второй может написать одно из чисел 4, 5, 7, 8, 9, 10. Разбивая их на пары, первый игрок на ход второго пишет соответствующее парное число.

б) Докажем, что первый имеет выигрышную стратегию при любом значении p.

Рассмотрим новую игру — с теми же правилами, но с одним ограничением: запрещается выписывать на доске число 1 (ясно, что только первый и только первым ходом может написать 1). Если в этой новой игре у первого есть выигрышная стратегия, то она годится и в исходной игре. Если же в новой игре у первого выигрышной стратегии нет, то он в исходной игре может первым ходом написать 1 и тем самым превратить исходную игру в новую с той лишь разницей, что в этой новой игре начинающим будет второй игрок, у которого не будет выигрышной стратегии.

10.81. Выигрывает второй игрок. В начале партии он должен стирать числа, кратные 2 до тех пор, пока таковых не останется. Так как количество чисел, не превосходящих 1000 и кратных 3, равно 333, то второму понадобится не более 333 ходов для того, чтобы ни одно из оставшихся на доске чисел не делилось на 3 (некоторые из чисел, кратных 3, могут быть стёрты и первым игроком). После этого второй делает свои ходы произвольно до того момента, когда на доске останутся три числа. Каждое из них будет давать остаток 1 или 2 при делении на 3, поэтому среди трёх оставшихся на доске чисел обязательно найдутся два, дающие одинаковые остатки. Именно их он и должен оставить.

10.82. Пусть первый игрок называет числа a, b и c. Даже если он выберет их целыми, корни квадратного уравнения могут оказаться иррациональными или даже совсем не существовать. Поэтому ему следует взять числа a, b и c так, чтобы выполнялось равенство $a+b+c=0$: тогда квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ (и все остальные уравнения с теми же коэффициентами, но расположенными в ином порядке) всегда имеет корень $x_1=1$, а также корень $x_2=c/a$, если $a\neq 0$. Для того чтобы корни этого уравнения получились разными, нужно выбрать числа a, b и c так, чтобы они были не равными 0 и такими, чтобы отношение любых двух из них было отличным от 1.

Значит, первый игрок выиграет, если он назовет любые три рациональных числа a, b и c, не равных нулю, попарно различных и таких, что $a+b+c=0$.

10.83. Он должен вписать любое число вместо какой-либо звёздочки во втором равенстве. Далее, если второй игрок вписывает число вместо любой звёздочки в каком-нибудь равенстве, он должен вписать число в то же равенство, причём если вписываемое число — последнее в данном равенстве, его надо подобрать так, чтобы равенство выполнялось.

10.84. Если первый игрок поставит -1 перед x в первой степени, а при втором своём ходе он поставит на последнее оставшееся место число, противоположное тому, которое поставил второй, то получится многочлен вида $x^3-ax^2-x+a=(x^2-1)(x-a)$. Корни этого многочлена: -1, 1, a — целые числа.

10.85. У второго есть выигрыш. За свои четыре хода он заведомо сможет добиться, чтобы оставшаяся для последнего, 5-го хода первого звёздочка стояла при нечётной степени x^{2l+1}. Пусть перед последним 4-м ходом второго возник многочлен $P(x)+*x^m+ + *x^{2l+1}$, где $P(x)$ — известный многочлен с числовыми коэффициентами.

Подберём числа a и $c>0$ так, чтобы при любом значении b для многочлена $F(x)=P(x)+ax^m+bx^{2l+1}$ было $cF(l)+F(-2)=0$

(тогда $F(x)$ будет заведомо иметь корень на отрезке $[-2;1]$); для этого достаточно взять

$$c = 2^{2l+1}, \qquad a = \frac{P(-2) - cP(1)}{c + (-2)^m},$$

(конечно, роли 1 и -2 могли бы играть здесь и другие числа разных знаков). Поставив это значение на 4-м ходу, второй обеспечит наличие корня.

10.86. Обозначим четыре разряда (слева направо) через r_1, r_2, r_3, r_4. Игра распадается на две фазы: «дебют» и «эндшпиль» вторая фаза начинается, как только 2-й игрок поставит некоторую цифру в старший разряд r_1. Ясно, что в дебюте 1-й игрок не должен называть маленьких цифр (от 0 до 3) или больших (от 6 до 9), поскольку второй, помещая такую цифру в r_1 (маленькую — в первое число, большую — во второе), переходит в заведомо выигрышный эндшпиль если разность первых цифр не больше 3, то разность чисел не больше 3999. Впрочем, если первый назвал первой цифру 4 (или 5), то второй может добиться разности, не меньшей 4000, сразу перейдя в эндшпиль ходом $r_1 = \binom{4}{*}$ или $r_1 = \binom{*}{5}$, а затем все появляющиеся цифры 0 (соответственно 9) помещая в разряды r_2, r_3, r_4, пока они не заполнятся; естественно, первая же цифра — не 0 (не 9) — будет поставлена в r_1 (что приведет к разности, не превосходящей 3999), и под этой угрозой первый не сможет добиться лучшей финальной позиции, чем $4000 - 0000$ $(9999 - 5999)$. Мы предъявили стратегию второго, доказывающую утверждение а).

Но не может ли он добиться большего, в дебюте расставив в разрядах r_2–r_4 некоторые цифры 4 и 5 и в удачный для себя момент перейдя в эндшпиль? Чтобы помешать этому, первый должен следить за тем разрядом r_i с наименьшим i, в котором стоят цифра и звёздочка либо две разные цифры.

Если $r_i = \binom{*}{4}$ или $r_i = \binom{*}{5}$, он называет цифру 5, если $r_i = \binom{4}{*}$ или $r_i = \binom{5}{*}$ — цифру 4, а позиция с $\binom{4}{*}$ при такой стратегии первого не может получиться. После перехода в эндшпиль из такого дебюта первый может называть нули (если в r_1 цифра поставлена в верхнее число) или девятки (если в нижнее). Утверждение пункта б) доказано.

Можно доказать, что при любом числе разрядов $n > 0$ в такой игре её «цена» — разность, которая получается при наилучшей игре обоих, — равна $4 \cdot 10^{n-1}$.

10.87. Существует. Например, первым ходом игрок А выбирает значение $b = -1$. При любом ходе Б оставшийся ход А делает так, чтобы $4c + a = 0$. Покажем, что для любого a уравнение $x^3 + ax^2 - x - a/4 = 0$ имеет три разных корня. Обозначим левую часть через $f(x)$. Тогда $f(-\infty) = -\infty$, $f(-1/2) = 3/8 > 0$, $f(1/2) = -3/8 < 0$, $f(+\infty) = +\infty$. Ввиду непрерывности $f(x)$, уравнение имеет три разных корня.

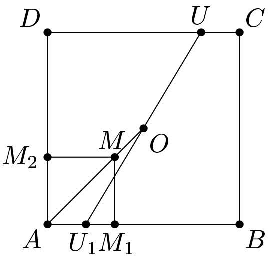
10.88. Выигрывает первый игрок. Опишем его выигрышную стратегию. Вначале он выкладывает на стол $0:0$, II отвечает $0:a$, тогда I выкладывает кость $a:a$. Теперь II делает ход либо $0:n$, либо $a:n$. В первом случае I выкладывает кость $n:a$, во втором — $n:0$. Тогда после хода I игрока на концах цепочки будут 0 или a. Это же произойдёт после того, как на ход II игрока $0:m$ ($a:m$) I ответит $m:a$ ($m:0$). Кости вида $0:n$ и $a:n$ ($n \neq 0, a$) разбиваются на пары, поэтому последний ход останется за первым игроком.

10.89. Докажем, что выигрывает Петя. Мысленно разобьём контакты на четыре одинаковых группы A, B, C и D. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Петя будет отвечать на любой ход Васи так, чтобы для каждого номера k от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходило поровну проводов. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию у Пети всегда будет возможность ответить на ход Васи. Теперь подробнее опишем Петину стратегию. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например, провод A_iA_j, то Петя перережет провода B_jB_j, C_iC_j и D_jD_j. Если Вася перерезает провод между проводами из разных групп и с разными номерами, например, провод A_iB_j, то Петя в ответ перережет провода A_jB_i, C_iD_j и C_jD_i. Если же Вася перерезал провод между контактами из разных групп с одинаковыми номерами, например, провод A_kB_k, то Петя перережет провод C_kD_k. Заметим, что из описанной стратегии Пети следует, что провода, которые он собирается резать, не будут отрезаны до его хода.

Такие ходы Петя может сделать, так как из возможности отрезать один провод от некоторого контакта следует возможность отрезать по одному проводу от контактов с таким же номером. Отметим, что каждый раз после хода Пети от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходит поровну проводов. Значит, Петя всегда сможет сделать ход, и, так как количество проводов конечно, проиграет Вася.

Игры-преследования

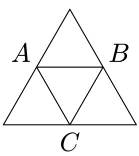
10.90. Покажем, что ученик может убежать от учителя. Обозначим квадрат пруда $ABCD$, его центр O, положение ученика в любой момент точкой M, а учителя — точкой U. Пусть учитель подошёл к точке C, M_1 и M_2 — проекции точки M на стороны AB и AD соответственно, U_1 — точка, симметричная точке U относительно центра O пруда (см. рис.).



К 10.90

Ученик должен плыть по направлению к вершине A до тех пор, пока точка U_1 остается внутри угла M_1MM_2. Как только точка U_1 совпадает с одной из точек M_1 или M_2, ученик поворачивает в направлении этой точки. Чтобы доплыть до берега, ему надо проплыть меньше половины длины квадрата. Учителю же надо пробежать половину периметра квадрата. Значит, путь учителя более чем в 4 раза длиннее, чем путь ученика.

10.91. Сторожа поймают обезьяну, если примут следующий план. Вначале они должны занять вершины A и B (см. рис.); очевидно, можно считать, что обезьяна находится в нижней части рисунка. Теперь один сторож должен спускаться вдоль AC, а второй — контролировать отрезок AB, чтобы обезьяна не проскочила через A или B. Дальнейшее просто.



К 10.91

10.92. Пусть v — максимальная скорость волка. Проведем через точку, в которой находится волк, две прямые, параллельные диагоналям квадрата. Эти прямые в точках C_1, C_2, C_3, C_4 пересекают контур квадрата. Так как скорость перемещения каждой из точек $C_1, \ldots, C_4$ не больше чем $v\sqrt{2} < 3v/2$, то собаки смогут в каждый момент находиться в этих четырёх точках и, значит, не выпустят волка.

10.93. Занумеруем проспекты от 1 до 10 сверху вниз. Пусть первый полицейский находится на первым перекрёстке, второй — на втором, а гангстер находится на верхней полосе. Тогда первый полицейский, пройдя по своему проспекту не более 100 кварталов, обнаружит гангстера. Если же этого не произошло, то, значит, гангстер находится не в первой полосе и полицейские могут спуститься на одну полосу вниз. Контролируя вторую и третью полосы, они гарантируют, что гангстер не попадет на первую полосу. Действуя, как и раньше, и опускаясь каждый раз (если это нужно) на одну полосу вниз, полицейские в какой-то момент обнаружат гангстера.

10.94. Может. Для этого заяц сначала выбирает произвольную вершину A квадрата и бежит к ней по диагонали с максимальной скоростью до тех пор, пока не окажется на расстоянии, меньшем $(\sqrt{2} - 1{,}4)/2$ (сторону квадрата полагаем равной 1). Затем он, не меняя скорости, сворачивает на 90° и движется перпендикулярно диагонали к той стороне квадрата, на которой находится только один волк (если в этот момент волк находится в вершине A, то заяц сворачивает в любую сторону). Нетрудно видеть, что в момент, когда заяц пересечёт сторону квадрата, ни один волк не сможет оказаться в той же точке этой стороны.

Заметим, что если скорость волка в $\sqrt{2}$ раз больше скорости зайца, то волки ловят зайца.

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

11. ДЕЛИМОСТЬ

11.1. Разложение на множители. Простые и составные числа

11.2. Среди чисел есть числа, кратные 3, 5 и два чётных, одно из них делится на 4.

11.3. Если $n = 2k$, то $n^3 - 4n = 8(k-1)k(k+1)$, а $(k-1)k(k+1)$ делится на 6 по 11.1.

11.4. $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a+b)$.

11.5. $n^6 - n^4 - n^2 + 1 = (n^2-1)^2(n+1)$.

11.6. 15 руб. Цена лыж делится на 3 и на 5.

11.7. 1, 2, 3, 7. **11.8.** -1, 1, -2, 2. **11.9.** $2, 2^2, \ldots, 2^k$.

11.10. $\overline{ababab} = 10101(10a+b) = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (10a+b)$.

11.11. а) 4; б) 6; в) 9; г) $(n+1)(m+1)$.

11.12. Если n разлагается в произведение двух сомножителей, то меньший не больше $\sqrt{n}$. При $n = 1601$ меньший сомножитель меньше 40, значит, простой делитель не превосходит 37.

11.13. а) $p-1$; б) $p^2 - p$.

11.14. Каждому делителю d соответствует делитель n/d, поэтому число делителей, отличных от $\sqrt{n}$, всегда чётное число.

11.15. При $n \neq m^2$ меньших делителей меньше $\sqrt{n}$, а всех делителей меньше $2\sqrt{n}$, при $n = m^2$ меньших делителей меньше $\sqrt{n}-1$, а всех — меньше $2\sqrt{n}-1$.

11.16. а) $1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2, 4, 5, 6$ (89 единиц, 8 двоек). Их сумма 120. б) 1, $2^2, \ldots, 2^{97}, 2^{99}$, 3, $3 \cdot 2^{98}$. Их сумма $3 \cdot 2^{99}$.

11.17. Среди $n+1, \ldots, 2n$ заведомо есть числа, кратные каждому k, где $1 \leqslant k \leqslant n$.

11.18. Если q_i — делитель числа n, то $n = q_i p_i$, где p_i — тоже делитель. Пусть $q_1 < \ldots < q_s$ — все делители n, тогда $p_1 > \ldots > p_s$ — те же делители, но в обратном порядке.

11.19. Число слева не делится на 11, а справа — делится.

11.20. $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, поэтому $n = 11$.

11.21. Нет, так как в 24! — 4 нуля, а в 25! уже 6 нулей.

11.22. 24. Рассмотреть степень 5 в разложении 100! на простые множители.

11.23. Если в разложение n на простые множители входит 3, то в разложение n^2 входит 9.

11.24. Если разность $a^2 - b^2$ чётна, то чётны $a - b$ и $a + b$, значит, $a^2 - b^2$ делится на 4, а 1998 не делится на 4.

11.25. $4 + 7a = 7(a + 1) - 3$, $a + b = 2 + a - (35 - b) + 33$.

11.26. На 11 делится $(a^2 + 9ab + b^2) - 11ab = (a - b)^2$, поэтому $a - b$ делится на 11, но $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

11.27. $n^2 + 9n - 2$ делится на $n + 11$, значит, на $n + 11$ делится также $(n^2 + 9n - 2) - (n - 2)(n + 11) = 20$. Отсюда, $n + 11 \leqslant 20$, т. е. $n \leqslant 9$. Мальчиков меньше.

11.28. Пусть это число равно $10a + b$, тогда его квадрат равен $10(10a^2+2ab)+b^2$. Число $10a^2+2ab$ чётно, значит, $b^2 = 10(2k+1)+d$, что возможно лишь при $b = 4$ или $b = 6$.

11.29. 17 и 34, 13 и 52. Пусть a и b — двузначные числа, тогда $100a + b = kab$ или $b = a(kb - 100)$, т. е. b делится на a. Полагая $b = ma$, получим $100 = m(ka-1)$. Так как m однозначно и является делителем 100, то $m = 1, 2, 4, 5$, но $m = 1$ и $m = 5$ не подходят.

11.30. Пусть $N = \overline{xa}$, где a — последняя цифра N. Тогда $N = 10x + a$, $N_1 = 10x + 2a = 2(10x + 2a) - 19x$.

11.31. 27. Если некоторое p^k входит в разложение N на простые множители, то k должно быть кратно 3.

11.32. 1 933 096.

11.33. 10^n, $5^3 \cdot 10^n$. Указание. Все A_i должны иметь вид $2^{n_i}5^{m_i}$. При $n_0 > m_0$ нет решений, что следует из $S(A) \leqslant A$ и индукции. При $n_0 < m_0$ из $S(5^n) < 2^{n-3}$ при $n \geqslant 10$ и индукции следует $A_{k-1} = 5^3 \cdot 10^l = A_0$.

11.34. Пусть $N = 100x + 10y + z$ и $x + y + z = 7$. Тогда $N = 7A + (y - z)$, откуда $y = z$.

11.35. Пусть $x = p/q$, если $p/q+q/p = n$, то p^2 должно делиться на q, откуда $q = \pm 1$.

11.36. Из $b^2 - 4ac = 23$ следует $(b-5)(b+5) = 2(2ac-1)$. Но $b-5$ и $b + 5$ — числа одинаковой чётности, поэтому их произведение, если оно чётно, делится на 4, а правая часть — чётное число, не делящееся на 4.

11.37. Рассмотрим 5 чисел последовательности: a, b, c, d, e причём b и e — чётные, a, c, d — нечётные. Имеем $e = cd + 1 = ab^2c + b(a + c) + 2$. Число ab^2c делится на 4 (т. к. b чётно), $b(a + c)$ тоже делится на 4, а e не делится на 4.

11.38. Нельзя. Площадь грани $2^{10} \times 3^{10}$ не кратна 5, а площади граней кирпичиков кратны 5.

11.39. $1+2+2^2+\ldots+2^{1990} = (1+2)+2^2(1+2)+\ldots+2^{1988}(1+2) + 2^{1990} = 3(1+2^2+\ldots+2^{1988}) + 2^{1990}$.

11.40. Нет. $1986 = 12 \cdot 331$. Цифры не делятся на 331.

11.41. Пусть $n(n+1)\ldots(n+99) = k^{100}$. Число k входит множителем в левую часть, но k и $k+1$ взаимно просты (их общий делитель является делителем $k+1-k=1$).

11.42. 108. По индукции можно показать, что число не может иметь более трёх знаков ($10^{n-1} > 12 \cdot 9n$ при $n > 3$). Осталось решить уравнение $100x + 10y + z = 12(x+y+z)$.

11.43. $n^2+3n+5 = (n-7)(n+4)+33$. Если число делится на 11, то $(n-7)(n+4)$ делится на 11, но $n-7 = (n+4)-11$, значит, $(n-7)(n+4)$ делится на 121, а 33 на 121 не делится.

Простые и составные числа

11.44. Пусть $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, $a > b$, $c > d$, $a > c$, $a \neq c$. Число p^2 можно записать двумя способами: $p^2 = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (ad+bc)^2 + (ac-bd)^2$. Так как $(ac+bd)(ad+bc) = p(ab+cd)$, то $ac+bd$ или $ad+bc$ делится на p. Если $ac+bd$ делится на p, то из левого равенства для p^2 следует, что $ad = bc$. Так как $a > c$, то должно быть $b > d$, а тогда $a^2+b^2 > c^2+d^2$. Аналогично рассматривается случай, когда $ad+bc$ делится на p.

11.45. $a+(a+2)+\ldots+(a+2(n-1)) = na+2(1+2+\ldots+(n-1)) = na+n(n-1) = n(a+n-1)$.

11.46. $65(a+b) = 65a+65b = 65a+56a = 121a$. Но 65 и 121 взаимно просты, значит $a+b$ делится на $121 = 11 \cdot 11$.

11.47. Из A можно получить любое чётное (кроме 2) число, прибавляя 2. Пусть $B = pn$, где p — простое, $n > 1$. Из A получим $2p$, затем прибавляем $n-2$ раза p.

11.48. а) $1998!+1$. б) Доказательство будем вести индукцией по количеству чисел. При $n = 1$ возьмём любой квадрат, больший 1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ такие числа, что они имеют делители s_i — полные квадраты, большие 1 и $a_i = a_1+i-1$. Рассмотрим $a_{n+1} = a_1+n$, $l = s_1 \ldots s_n$ и $A = l(l+2)a_{n+1}$, тогда $A+a_1, \ldots, A+a_{n+1}$ — искомая последовательность: $A+a_{n+1} = a_{n+1}(l+1)^2$ делится на квадрат. в) Аналогично б), $A = a_{n+1}((l+1)^m-1)$.

11.49. Да. Перемножим нечётные числа от 1001 до 1999. Так как их 500 и каждое из них меньше 2000, то их произведение меньше $2000^{500} = 32^{100} \cdot 10^{1500} < 100^{100} \cdot 10^{1500} = 10^{1700}$. Припишем к этому числу справа несколько нулей, а затем цифру 1 и ещё три 0 так, чтобы общее число цифр равнялось 1997. Если в полученном числе не менять последнюю цифру, то число будет чётным, а значит, составным. Если изменить последние три 0 на нечётное число, то последние 4 цифры образуют число, на которое делится построенное число.

11.50. Доказательство от противного. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — все простые числа. Рассмотрим число $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Это число не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$ (т. к. оно даёт при делении на них остаток 1) и, значит, является ещё одним простым.

11.51. б) $n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2)^2 - (2mn)^2$.

11.52. $3551 = 60^2 - 7^2$.

11.53–11.55. Сумма и разность кубов.

11.56. Множитель 111^{222}.

11.57. $1977 \cdot 1997 + 100 = (1987 - 10)(1987 + 10) + 100 = 1987^2$.

11.58. При $n = 2m$

$$7\overbrace{1\ldots1}^{2m} = \frac{7\overbrace{1\ldots1}^{2m} \cdot 9}{9} = \frac{63\overbrace{9\ldots9}^{2m}}{9} = \frac{8\overbrace{0\ldots0}^{m}{}^2 - 1^2}{9} =$$

$$= \frac{8\overbrace{0\ldots0}^{m}1 \cdot 7\overbrace{9\ldots9}^{m}}{9} = \overbrace{8\ldots8}^{m}9 \cdot 7\overbrace{9\ldots9}^{m}.$$

Если $n = 6m+5$, то число делится на 3 (т. к. его сумма цифр числа делится на 3), если $n = 6m+3$, то число $71\ldots1$ делится на 13 (711 и 111111 делятся на 13), если $n = 6m+1$, то число $11171\ldots1$ делится на 7 (111111 и 1117111 делятся на 7).

11.59. а) Если $n = pm$ и $p \neq m$, то очевидно. Если $p = m$, то $n = p^2 > 4$ или $p > 2$, откуда $n = p^2 > 2p$. Тогда в $(n-1)!$ есть два разных члена p и $2p$. б) Числа p и m не превосходят $n - 3$ (иначе, если, например, $p > n - 3$, то так как $m \geqslant 2$, получим $n = pm > 2(n-3)$ или $n < 6$. в) Нет. $(n-4)!$ не делится на n при $n = 6$ или $n = 9$.

11.60. Если $(p-1)! + 1$ делится на p, то p — не составное (см. 11.59). Пусть p — простое, a — какой-то остаток, тогда $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ все различны по модулю p. ($k_1a - k_2a$ не может делиться на p). Значит, есть такое k, что $ka \equiv 1 \pmod{p}$. Отметим, что $k \neq a$ при $a \neq 1$, $a \neq p-1$, иначе $k^2 \equiv 1 \pmod{p}$ или $(k-1)(k+1)$ делится на p, что невозможно. Итак, все остатки в произведении $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)$, кроме 1 и $p-1$ разбиваются на пары взаимно обратных, т. е.

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \equiv 1 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) \cdot (3 \cdot 3^{-1}) \cdot \ldots \cdot (p-1) \equiv p-1 \equiv -1 \pmod p.$$

Следовательно, $(p-1)!+1$ делится на p.

11.61. Неверно, при $n=6$ число $6^3+5\cdot 6-1$ равно $5\cdot 7^2$.

11.62. Если свободный член a многочлена не равен $0, \pm 1$, то значения $F(ka)$ при целых k делятся на a. Если $a=\pm 1$, то можно заменой $n=m+l$ «сдвинуть» многочлен так, чтобы у $F(m+l)$ свободный член стал бы неравным ± 1. Например, в 11.61 положим $n=m+1$, тогда $F(m+1)=(m+1)^3+5(m+1)-1$ свободный член равен 5, и поэтому $F(6)$ делится на 5.

11.63. а) $n=3m$. Пусть $n=3m$, тогда $2^n-1=8^m-1$ делится на $8-1=7$. При $n=3m+1$ имеем $2^n-1=2(7+1)^n-1 \equiv 1 \pmod 7$, при $n=3m+2$ имеем $2^n-1=4(7+1)^m-1 \equiv 3 \pmod 7$. б) Рассматривается аналогично п. а).

11.64. $2^n\sqrt{2}=[2^n\sqrt{2}]+a$, где $0<a<1$. Если $a<1/2$, то $[2^{n+1}\sqrt{2}]$ — чётное число. Если $a>1/2$, то $2^{n+1}\sqrt{2}=2[2^n\sqrt{2}]+2a$ и $2^{n+1}\sqrt{2}$ — нечётное число, причём $\{2a\}<\{a\}$ ($\{x\}$ — дробная часть x). Умножая $2^n\sqrt{2}$ на последовательные степени 2, будем уменьшать дробную часть результата, пока эта дробная часть не станет меньше $1/2$.

11.65. Обозначим $10^{2^{1000}}$ через a, а $2^{974}+1$ — через n. Тогда наше число a^n+1 и оно кратно $a+1$.

11.66. Два из чисел — одной чётности, например, a и b. тогда p — чётное, но оно и простое, значит, $p=2$, $a=b=1$, $q=r$.

11.67. б) Если $a=1^{2m+1}+2^{2m+1}+\ldots+n^{2m+1}$, то достаточно доказать, что a делится на $n(n+1)/2$ (т. е. $2a$ делится на n и $n+1$). Суммируя попарно крайние члены, легко видеть, что $2a$ делится на $n+1$, а затем, отбрасывая член n^n и суммируя таким же образом оставшуюся сумму, покажем, что a делится на n.

11.68. $n=1,4$ и вида $n=4k+2$. Если $x^2-y^2=n^2$, то $x-y$ и $x+y$ имеют одинаковую чётность и n либо делится на 4, либо имеет вид $4k\pm 1$. Обратно: при $n=4k$ имеем $x=k+1$, $y=k-1$, если $n=4k\pm 1=2m+1$, то $x=m+1, y=m$.

11.69. Разность двух соседних чисел равна $9010\ldots 0$, т. е. делится на 53 и первое число делится на 53.

11.70. Числа a, b, c можно сокращать на общий множитель, поэтому считаем НОД$(a,b,c)=1$. Если при этом среди чисел a, b, c есть число, отличное от ± 1, то найдется простое p, делящее одно из этих чисел и не делящее другое. Покажем, что p входит в знаменатель одной из несократимых дробей $m = a/b + b/c + c/a$ или $n = a/c + c/b + b/a$. Тогда это число не может быть целым. Пусть $k(x)$ — максимальная степень p в разложении x на простые множители. Считаем, что $k(a)$ максимальна, тогда $k(a) > 0$. Возможны два случая: $k(a) \geqslant k(b) \geqslant k(c) = 0$ или $k(a) \geqslant k(c) \geqslant k(b) = 0$. В первом случае m — сумма двух дробей со знаменателями, не делящимися на p, и несократимой дроби со знаменателем, делящимся на p. Получаем, что знаменатель m делится на m, т. е. m нецелое. Аналогично, во втором случае n не будет целым.

11.71. Будем искать делитель данного числа в виде $3^k - 2^k$. Положим $k = 2k$, $n = 3^{2^t} - 2^{2^t}$, где $t > 2$. Воспользуемся тем, что при натуральном k и различных целых x, y число $x^k - y^k$ делится на $x - y$. Теперь для доказательства того, что $3^{n-1} - 2^{n-1}$ делится на n, достаточно доказать, что показатель $n - 1$ делится на 2^t, т. е. что число $3^{2^t} - 1$ делится на 2^t (поскольку 2^{2^t} делится на 2^t). Докажем по индукции, что при всех натуральных t число $3^{2^t} - 1$ делится на 2^{t+2}. При $t = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при некотором t. Имеем: $3^{2^{t+1}} - 1 = (3^{2^t} + 1)(3^{2^t} - 1)$. Первый множитель делится на 2, второй — на 2^{t+2}. Утверждение доказано.

11.72. $n = 1$. Если $3^n + 5^n$ делится на $3^{n-1} + 5^{n-1}$, то и $3^n + 5^n - 3(3^{n-1} + 5^{n-1}) = 2 \cdot 5^n$ делится на него.

11.73. Разность двух чисел $30(n - m)$ делится на 7, если $n - m$ делится на 7. Поэтому каждое из 7 данных чисел при делении на 7 дает разные остатки.

11.74. Пусть эти числа p, $p + n$, $p + 2n$. Если $p = 2$, то $p + 2n$ — чётное, поэтому $p > 2$, n — чётно и либо $n = 6k + 2$, либо $n = 6k + 4$. Докажем, что p делится на 3. Если $p = 3m + 1$ и $n = 6k + 2$ ($n = 6k + 4$), то $p + n$ ($p + 2n$) делится на 3 и поэтому не простое. Аналогично рассматривается случай $p = 3m + 2$.

11.75. Пусть $2^{2^t} + 1 = m^5 - n^5 = (m - n)(m^4 + m^3 n + m^2 n^2 + mn^3 + n^4)$. Так как оно простое, то $m - n = 1$, и, значит, $2^{2^t} = 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ делится на 5.

11.76. Суммируя попарно крайние члены, получим $pq/(p-1)! = n$ или $m(p - 1)! = pn$. Так как $(p - 1)!$ не делится на p, то m делится на p.

11.77. n — простое и $n = 9$. Если $n = ab$, где $a > 4, b > 4$, $a \neq b$ то в произведение $(n - 1)!$ входят множители a, $2a$, b, $2b$, поэтому $(n - 1)!$ делится на $a^2 b^2 = n^2$. Если $n = p^2$, где p —

простое число, то при $p^2 - 1 \geqslant 4p$ в $(n-1)!$ входят p, $2p$, $3p$ и $4p$, и оно делится на $p^4 = n^2$. Остаются два случая: n — простое (из теоремы Вильсона $(p-1)!$ при делении на p дает остаток -1) и $n = 9$ (8! делится на 9, но не делится на 81).

11.78. Используем индукцию. При $n = 1$ берем число 2. Если $A = 2^n \cdot B$ — n-значное число, делящееся на 2^n, то одно из чисел $2 \cdot 10^n + A$ или $1 \cdot 10^n + A$ делится на 2^{n+1}, так как одно из чисел $5^n + B$ или $2 \cdot 5n + B$ чётно.

11.79. Если $q = 2$, то для любого натурального (а не только простого) числа p число $(p+1)^q = (p+1)^2$ является квадратом.

Пусть теперь q — простое число, большее 2. Ясно, что q — нечётное число. Представим число $p+1$ в каноническом виде $p+1 = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_s^{a_s}$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ — все простые делители числа $p+1$, а $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — натуральные числа. Число $(p+1)^q = p_1^{a_1q}p_2^{a_2q}\ldots p_s^{a_sq}$ в силу нечётности q будет квадратом тогда и только тогда, когда числа $a_1, a_2, \ldots, a_s$ чётные. В этом случае число $p+1$ является квадратом: $p+1 = m^2$. Значит, $p = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$.Так как m — натуральное число, а p — простое, то $m - 1 = 1$, $m + 1 = p$, и поэтому $p = 3$. Значит, если $q > 2$ — простое число, то число $(p+1)^q$, где p — простое число, является квадратом тогда и только тогда, когда $p = 3$.

11.80. Если $n < 8$, то данное число $N = 2^8 + 2^{11} + 2^n = 2^n(1 + 2^{8-n} + 2^{11-n})$ является произведением чётного числа 2^n и нечётного числа $1 + 2^{8-n} + 2^{11-n}$. Чтобы число N было квадратом, необходимо, чтобы число n было чётным. Но, как показывает проверка, значения $n = 2, 4, 6, 8$ не удовлетворяют условию задачи.

Если n равно 9 или 10, то число N равно соответственно $2^8 \cdot 11$ или $2^8 \cdot 13$ и также не является квадратом. Если $n > 10$, то $N = (2^4)^2(9+2^{n-8})$. Чтобы N было квадратом, необходимо, чтобы нечётный множитель был квадратом некоторого (нечётного) числа: $9+2^{n-8} = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$, где k — натуральное число. Отсюда находим, что $2^{n-8} = 4(k-1)(k+2)$ или $2^{n-10} = (k-1)(k+2)$.

Заметим, что числа $k-1$ и $k+2$ имеют различную чётность (они отличаются на 3). Поскольку единственным нечётным делителем числа 2^{n-10}, $n > 10$, является число 1, то равенство может иметь место только в том случае, когда $k - 1 = 1$. Отсюда следует, что $k = 2$, $n = 12$.

11.81. Вместе с числом $\overline{a_1 \ldots a_6}$ на 37 делятся числа $\overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_4a_5a_6}$, $\overline{a_2a_3a_1a_6a_4a_5}$ и $\overline{a_3a_1a_2a_4a_6a_5}$.

11.82. 9440. Пусть $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot p$. Возьмём p такое, что $p - 1$ делится на 11, а $p + 1$ — на 13. Тогда $n = m - 10$.

11.83. $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 - 1 = b$, $a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$.

11.84. $2^{1982} + 1 = (2^{991} + 1)^2 - 2 \cdot 2^{991} = (2^{991} + 1)^2 - (2^{496})^2$.

11.85. По условию существуют натуральные числа p и q, такие, что $p^2 = 2n+1$, $q^2 = 3n+1$. Очевидно, число p нечётное и больше 1. Пусть $p = 2k+1$, где k — натуральное число. Тогда $2n = p^2 - 1 = 2k(2k+2)$, $n = 2k(k+1)$, и поэтому $q^2 = 6k(k+1)+1$. Из этого равенства следует, что число q нечётное и больше 1. Пусть $q = 2l+1$, где l — натуральное число. Тогда $3n = q^2-1 = 2l(2l+2) = 4l(l+1)$. Так как произведение двух последовательных натуральных чисел всегда делится на 2, то из последнего равенства следует, что n делится на 8, что и требовалось доказать.

11.86. Обозначим данное число $1010\ldots101$ (k нулей и $k+1$ единиц, где $k \geqslant 2$) через A_k. Если число k нечётно ($k = 2m + 1$), то

$$A_k = 101 \cdot \underbrace{100010001\ldots100010001}_{m+1 \text{ единица},\ 3m \text{ нулей}},$$

т. е. составное.

Если k чётно ($k = 2m$), то

$$11A_k = \underbrace{11\ldots11}_{4m+2 \text{ цифры}} = \underbrace{11\ldots11}_{2m+1 \text{ цифры}} \cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{2m \text{ цифр}}1.$$

Второй сомножитель делится на 11 (см. 11.225) и больше 11, значит, A_k — составное число.

11.87. 1 и 9. Если число $n = m^2$ имеет $m > 1$ делителей, то m нечётно ($m = 2p + 1$), а n имеет ровно p делителей, меньших m, и поэтому делится на $2p - 1$.

11.88. При $n \geqslant 2$ $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$; $x = 6$, $y = 8$, $z = 4$; при $n = 2$: $x = 8$, $y = 3$, $z = 7$.

11.89. 376 и 625. Пусть A — искомое число. Так как $A^2 - A = A(A - 1)$ делится на $1000 = 8 \cdot 125$, A и $A - 1$ взаимно просты, то либо A делится на 8 и $A - 1$ — на 125, либо наоборот. Далее из 7 возможных в каждом случае чисел находим ответ.

11.90. $2s = (n^{1987} + 2^{1987}) + \ldots + (2^{1987} + n^{1987}) + 2 = (n + 2)M$, где M — целое число.

11.91. 121, 241, 361, 481, 600. Удовлетворяет набор из n чисел $a_i = i \cdot n! + 1$, $i = 1, \ldots, n$. Сумма m чисел делится на m.

11.92. $4^{545} + 545^4 = (2^{545})^2 + 2 \cdot 2^{545} \cdot 545^2 + (545^2)^2 - 2 \cdot 2^{545} \cdot 545^2 = (2^{545} + 545^2)^2 - 2^{546} - 545^2 = (2^{545} + 545^2)^2 - (2^{273} - 545)^2 = (2^{545} + 545^2 + 2^{273} \cdot 545)(2^{545} + 545^2 - 2^{273} \cdot 545)$.

11.93. 1989.

11.94. Если $2n+1 = k^2$, $3n+1 = m^2$, то число $5n+3 = 4(2n+1) - (3n + 1) = 4k^2 - m^2 = (2k + m)(2k - m)$ является составным, поскольку $2k - m \neq 1$ (в противном случае — при $2k - m = 1$, число $5n + 3$ равно $2k + m = (m + 1) + m = 2m + 1$ и $(m - 1)^2 = m^2 - (2m + 1) + 2 = (3n + 1) - (5n + 3) + 2 = -2n < 0$, что невозможно). Итак, число $5n + 3$ не может быть простым.

11.95. Пусть $n = pq$, где p и q — различные простые числа. По условию $p + q + 1 = 1000$, следовательно, $p + q = 999$. Поэтому одно из чисел p, q чётно.

Пусть, например, чётно число p. Так как p — простое число, то $p = 2$. Значит, $q = 997$, $n = 1994$.

11.96. Покажем, что $p = 3$. Заметим, что $p^2 + 11 = p^2 - 1 + 12 = (p - 1)(p + 1) + 12$. Если $p \geqslant 5$ простое, то числа $p - 1$ и $p + 1$ оба чётные, и одно из них кратно трём. Поэтому произведение $(p - 1)(p + 1)$ делится на 12, значит, $p^2 + 11$ также делится на 12, а значит, имеет не менее 7 делителей (6 делителей числа 12 и само число, $p^2 + 11 > 12$). Осталось проверить $p = 2$ и $p = 3$.

11.97. Докажем, что для любых $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию, найдется такое a_{n+1}, что $A_{n+1} = a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2$ делится на $B_{n+1} = a_1 + \ldots + a_{n+1}$. Из $A_{n+1} = A_n + (a_{n+1} - B_n)(a_{n+1} + B_n) + B_n^2$ следует, что A_{n+1} делится на B_{n+1}, если $A_n + B_n^2$ делится на $B_n + 1$. Итак, достаточно взять $a_{n+1} = A_n + B_n^2 - B_n$. Так как $B_n^2 - B_n > 0$, то $a_{n+1} > A_n > a_n^2 > a_n$.

11.98. Нет. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$ — числа, удовлетворяющие условиям задачи. Тогда $a^2 - 1$ делится на b, a и b взаимно просты. Поэтому $c^2 - 1$, которое по условию делится и на a и на b, должно делиться и на их произведение, откуда следует, что $c^2 - 1 \geqslant ab$. С другой стороны, $a \geqslant c$ и $b \geqslant c$, т. е. $ab \geqslant c^2$. Противоречие.

11.99. Без ограничения общности можно считать, что x и y не делятся на p. Так как n нечётно, то $(x^n + y^n)/(x + y) = x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}$. Обозначим правую часть равенства через A. По условию $p > 2$, значит, хотя бы одно из чисел x, y больше 1, а так как $n > 1$, то и $A > 1$. Так как $A(x + y) = p^k$, то $A \equiv 0 \pmod p$, $x \equiv -y \pmod p$. Тогда $A \equiv x^{n-1} - x^{n-2}(-x) + \ldots - x(-x)^{n-2} + (-x)^{n-1} \pmod p$ или $A \equiv nx^{n-1} \pmod p$. Так как $nx^{n-1} \equiv 0 \pmod p$, а x не делится на p, то n делится на p. Пусть $n = rs$, где r — простое число, отличное от p. Тогда $(x^s)^r + (y^s)^r = p^k$ — противоречие.

11.100. $n = 2$. Ясно, что ни одно из чисел x, y не кратно 3. Поэтому, если k чётно, то x^k и y^k при делении на 3 дают в остатке 1, а значит, их сумма при делении на 3 дает в остатке 2, т. е. не является степенью 3. Пусть k нечётно. Так как k делится на 3 (см. 11.99), считаем, что $k = 3$. Итак, $x^3 + y^3 = 3^n$, $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 3^n$.

Значит, $x^2-xy+y^2=3^n$. Так как $x^2-xy+y^2>xy\geqslant 2$, то $m>0$. С другой стороны $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$ и, значит, так как $x+y$ делится на 3, а xy не делится на 3, то $m<2$. Итак, $m=1$, $n=2$.

11.101. 2. Пусть на последнем месте в строке стоит число x. Сумма всех чисел в строке, кроме x, делится на x; но тогда и сумма всех чисел в строке, равная $1+\ldots+37=37\cdot 19$, делится на x. Отсюда $x=19$, так как число 37 — на первом месте. На третьем месте стоит делитель $37+1=38$, отличный от его делителей 1 и 19, которые уже стоят на других местах.

11.102. Используя формулу бинома Ньютона, докажем тождество

$$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.$$

Остается подобрать числа a и b так, чтобы выражение a^2+ab+b^2 делилось на $7^3=343$. Например, $a=18$, $b=1$.

11.103. В качестве A можно взять множество произведений различных простых чисел вида $q_1q_2\ldots q_{q_1}$, где $q_1<q_2<\ldots<q_{q_1}$ (т. е. таких что число сомножителей равно наименьшему из них: в A входит $2\cdot3$, $2\cdot5$, $2\cdot7$, $\ldots$, $3\cdot5\cdot7$, $3\cdot5\cdot11$,… и т. д.). Тогда для любого множества $S=\{p_1,p_2,\ldots\}$ простых чисел, где $p_1<p_2<\ldots$, положим $k=p_1$, $m=p_1p_2\ldots p_{p_1}$, $n=p_2p_3\ldots p_{p_1}+1$. Очевидно, что $m\in A$, а $n\notin A$.

11.2. Остатки

11.104. $a_1=r_1+km$, $a_2=r_2+lm$, $a_1+a_2=r_1+r_2+(k+l)m$, $a_1a_2=r_1r_2+(r_2k+r_1l+kl)m$.

11.105. а) 1, б) 6. $1989=3\cdot 663$, в) 1.

11.106. а) $\text{ост}_3(a^2)=0,1$; $\text{ост}_3(a^3)=0,1,2$ б) $\text{ост}_4(a^2)=0,1$; $\text{ост}_4(a^3)=0,1,3$; в) $\text{ост}_5(a^2)=0,1,4$; $\text{ост}_5(a^3)=0,1,2,3,4$; г) $\text{ост}_7(a^2)=0,1,2,4,5$; $\text{ост}_7(a^3)=0,1,6$.

11.107–11.110, 11.112. Указание. Используйте 11.106.

11.111. Эти числа делятся на 3 и 8.

11.113. a и b делятся на 3 и 7.

11.114. 59. $a+1$ делится на 2, 3, 4, 5, 6.

11.115. Рассмотреть остатки деления этой суммы на 3.

11.116. x и x^3 дают одинаковые остатки при делении на 6.

11.117. Если d — нечётно, то q — чётно, что невозможно; если d не делится на 3, то среди p, q и r есть число, делящееся на 3, что также невозможно.

11.118. Одно из чисел x, y делится на 3, иначе z^2 дает остаток 2 при делении на 3. Два нечётных быть не могут, так как квадрат нечётного числа при делении на 8 дает остаток 1. Если одно нечётное, то второе делится на 4, иначе квадрат чётного числа, не делящегося на 4, дает остаток 4.

11.119. Если нет трёх чисел с одинаковыми остатками, то есть числа с остатками 0, 1, 2 — они искомые.

11.120. а) 6, б) 9.

11.121–11.123. Последние цифры степеней равны.

11.124. а) 9. Показатель 999^{99^9} нечётен, поэтому последняя цифра равна $\text{ост}_{10}(9999^{999^{99^9}}) = \text{ост}_{10}(9999^{2k+1}) = \text{ост}_{10}(9^{2k+1}) = \text{ост}_{10}(81^k \cdot 9) = 9$. б) Последняя цифра 7^n зависит от остатка деления n на 4. $7^7 \equiv -1 \pmod 4$, поэтому эта цифра — 3.

11.125. 0. Последняя цифра данного числа s — остаток от его деления на 10, поэтому $s \equiv 10 \cdot (1^2 + \ldots + 9^2) \equiv 0 \pmod{10}$.

11.126. а) 00. Указание. Сгруппируйте кубы (кроме 50^3) попарно: $1^3 + 99^3$, $2^3 + 98^3$, $\ldots$, $49^3 + 51^3$. Каждая такая сумма делится на 100. б) 88, 67, 36.

$2^{10} = 1024$, поэтому $2^{10} \equiv -1 \pmod{25}$, $2^{1000} \equiv 1 \pmod{25}$, значит, 2^{1000} может оканчиваться на 01, $01 + 25 = 26$, $01 + 50 = 51$, $01 + 75 = 76$. Но из-за делимости на 4 это могут быть только цифры 76. Тогда 2^{999} может оканчиваться либо на $38 = 76 : 2$, либо на $88 = 176 : 2$. Но опять из-за делимости на 4 число 2^{999} оканчивается на 88.

$$3^{999} = 3^3(3^4)^{249} \equiv 3^3(-19)^{249} \equiv 3^3(-19)(21)^{62} = \\ = 3^3(-19)21^2(21^4)^{15} \equiv 3^3 \cdot 21^2(-19)^{16} \equiv 3^3 \cdot 21^6 = \\ = (3 \cdot 441)^3 \equiv 23^3 \equiv 67 \pmod{100}.$$

$(14^2)^{7 \cdot 14^{13}} \equiv (-4)^{7 \cdot 14^{13}} \pmod{25}$, но $7 \cdot 14^{13} \equiv -2 \pmod 5$, т. е. $7 \cdot 14^{13} = 5p + 3$, а $(-4)^5 \equiv 1 \pmod{25}$, поэтому $14^{14^{14}} \equiv (-4)^3 \equiv 11 \pmod{25}$. Возможные окончания 11, 36, 61, 86, но на 4 делится лишь число с окончанием на 36.

11.127. Если бы $1 + \ldots + n = n(n+1)/2 \equiv 2, 4, 7, 9 \pmod{10}$, то $n(n+1) \equiv 4, 8, 4, 8 \pmod{10}$, но $n(n+1)$ может быть равно только 0, 2, 6 по модулю 10.

11.128. 0000. Квадрат может оканчиваться только цифрами 0, 1, 4, 9, 6, 5. Но $(2k+1)^2 \equiv 1 \pmod 4$, а $(2k)^2 \equiv 0 \pmod 4$, поэтому 11, 99, 66, 55 быть не могут; $(2k)^2 \equiv 0, 4 \pmod{16}$, а $4444 \equiv 12 \pmod{16}$, поэтому 4444 быть также не может.

11.129. $1444 = 38^2$. Из 11.128 квадрат не может иметь более трёх ненулевых цифр.

11.130. 143. Так как $7^4 = 2401$, то из формулы бинома Ньютона (для 2400 и 1) имеем:

$$7^{9999} \equiv 7^3 \cdot 2401^{2499} \equiv 343 \cdot (1 + 2499 \cdot 2400 + 2400^2 N) \equiv \\ \equiv 343 \cdot (1 + 600 + 0) \equiv 143 \pmod{1000}.$$

11.131. 0 или 1. Если число делится на 5, то его 100-я степень делится на 125. Для чисел вида $5n \pm 1$ и $5n \pm 2$ с помощью бинома Ньютона имеем ответ.

11.132. Покажем, что $N^{101} - N = N(N^{100} - 1)$ делится на 1000. При N — нечётном $N^{100} - 1 = (N^{50} + 1)(N^{25} + 1)(N^{25} - 1)$ делится на 8. Из 11.131 следует, что если N не делится на 5, то $N^{100} - 1$ делится на 125. Итак, $N^{100} - 1$ делится на $8 \cdot 125 = 1000$.

11.133. Действительно, $2222^{5555} + 5555^{2222} = (2222^{5555} + 4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222}) - 4^{2222}(4^{3333} - 1)$. Первая скобка делится на $2222 + 4 = 2226 = 7 \cdot 318$, вторая — на $5555 - 4 = 5551 = 7 \cdot 793$, третья скобка — на $64 - 1 = 63 = 7 \cdot 9$.

11.134. $n = 8p$, $n = 2p - 1$.

11.135. а) Пусть $p = 30n + r$. Если r — составное, то так как все составные числа, меньшие 30, имеют общие делители с 30, то составным будет p. б) $p = 109$, $109 = 60 + 49$.

11.136. 107.

11.137. 7. Он равен $\text{ост}_{14}(35)$, так как $A = 1981 \cdot 1982n + 35$.

11.138. Нет. Полученное число дает при делении на 3 остаток 2 (см. 11.106).

11.139. а) Нет. Пусть $a = 2n+1$, $b = 2k+1$, тогда $a^2 + b^2 = 4p+2$ делится на 2, но не на 4. б) Нет. Остаток квадрата нечётного числа от деления на 4 равен 1.

11.140. Рассмотреть остатки при делении на 4.

11.141. Остатки квадратов чисел при делении на 8 — 0, 1, 4.

11.142. Числа вида $4n + 3$. Остатки суммы двух квадратов от деления на 4: 0, 1, 2.

11.143. Числа вида $9n + 4$. Куб при делении на 9 даёт остатки 0, 1 и 8.

11.144. См. 11.106, п. а).

11.145. Нет: $\text{ост}_4(5n + 1) = 0$, $\text{ост}_4(5k - 1) = 2$.

11.146. $5^k + 7$ делится на 4 и на 3 при нечётном k (3^n — нечётно).

11.147. Нет. Так как простое p (объем) равен произведению длин трёх сторон, то две из этих длин равны 1, а третья — p. Тогда площадь поверхности равна $4p+2$.

11.148. Из 11.106 следует, что среди квадратов есть два с равными остатками.

11.149. Ошибся. Сумма всех чисел равна 74, тогда каждая из сумм чисел, названных мальчиками и девочками в отдельности, должна быть 37. Однако из названных сумм нельзя выбрать часть, дающую в сумме 37: все числа, кроме 5, делятся на 3, $5 \equiv 2 \pmod 3$, а $37 \equiv 1 \pmod 3$.

11.150. Любые два из семи чисел дают одинаковый остаток при делении на 5.

11.151. Покажем, что x и $x+3$ при любом x являются либо плохими, либо хорошими одновременно. Пусть, например, x — плохое, $x+3$ — хорошее, тогда с одной стороны $x+18=(x+3)+15$ — хорошее, а с другой $x+18=((x+6)+6)+6$ — плохое. Отсюда все числа с одним остатком при делении на 3 либо хорошие, либо плохие. Значит, плохих чисел может быть 333, 334, 666, 667.

11.152. При нечётных n, больших 4. Так как имеется по 5 корзин с чётным и нечётным количеством яблок, то число n — нечётное. При $n=10p-5$ $(p=1,2,\dots)$ кладем в 5 корзин p яблок и между ними ставим 5 корзин с $p-1$ яблоком, при $n=10p-3$ заменяем одну из корзин с p яблоками на корзину с $p+1$ яблоком, при $n=10p-1$ заменяем аналогично уже две корзины, при $n=10p+1$ — три корзины и т. д.

11.153. 3. Одно из чисел делится на 3.

11.154. 3. **11.155.** 5. **11.156.** $p=3$.

11.157. Одно из чисел 2^n-1, 2^n, 2^n+1 делится на 3. (2^n не делится на 3.)

11.158. Пусть $n=2^m(2p+1)$, $p\neq 0$, обозначим $a=2^{2^m}$. Тогда $2^n=a^{2p+1}$ — составное.

11.159. а) $1,3,7,9$; б) Нет.

11.160. Очевидно, p — чётно, но не делится на 4. Если $p+1=$ $=a^2$, то $p=(a-1)(a+1)$, a — нечётно, поэтому p делится на 4. Если бы $p-1=a^2$, то так как p делится на 3, имеем $p-1=3m+2$ или $a^2=3m+2$, что невозможно.

11.161. Из условий $p=3n\pm 1$, тогда $2p+1=6n\pm 2+1$. Так как $2p+1$ — простое, большее 6, то $2p+1\neq 6n+3$, значит, $2p+1=6n-1$, $p=3n-1$, $4p+1=12n-3=3(4n-1)$.

11.162–11.163. Остатки от деления куба на 9: $0,1,8$.

11.164. Число $1967k+3$ при делении на 7 дает остаток 3.

11.165. Это число при делении на 7 может дать остатки 2 и 3.

11.166. Если $p = 2n$, то $\text{ост}_4(3^p + 1) = 2$, а если $p = 2n + 1$, то $\text{ост}_8(3^p + 1) = 4$.

11.167. Докажем, что любое такое число делится на 11111, значит, степенью двойки не является. Так как 10^5 при делении на 11111 дает в остатке 1, то любое из полученных чисел дает при делении тот же остаток, что и сумма всех чисел на карточках, а эта сумма равна $(11111 + 99999)(10^5 - 1)/2$, т. е. делится на 11111.

11.168. $11 = 36 - 5^2$. Последняя цифра числа $36^k = 6^{2k}$ равна 6, последняя цифра числа 5^l равна 5. Поэтому число $|6^{2k} - 5^l|$ оканчивается либо на 1, либо на 9. Равенство $6^{2k} - 5^l = 1$ невозможно, так как тогда было бы $5^l = (6^k - 1)(6^k + 1)$, а число $6^k + 1$ не делится на 5. При $k = 1$ и $l = 2$ получим 11. Равенство $5^l - 6^{2k} = 9$ также невозможно, так как 5^l при натуральном l не делится на 3.

11.169. 335 и 742. Если натуральное число N удовлетворяет условию задачи, то $100 \leqslant N \leqslant 999$ и $N = 37m + 2$, $N = 11n + 5$, где m и n — целые неотрицательные числа. Значит, нужно найти все неотрицательные целые числа m, n, удовлетворяющие условиям $100 \leqslant 37m + 2 \leqslant 999$, $37m + 2 = 11n + 5$, откуда $3 \leqslant m \leqslant 26$, $37m = 11n + 3$.

Методом перебора по m от 3 до 26 нетрудно найти все пары натуральных чисел $(m; n)$, которые удовлетворяют равенству, $37m = 11n + 3$. Чтобы упростить перебор, запишем это равенство в следующем виде: $11(n - 3m) = 4m - 3$. Тогда видно, что $4m - 3$ должно делиться на 11, а это возможно лишь при $m = 9$ и $m = 20$. Оба значения удовлетворяют условию задачи.

11.170. Рассмотрим n чисел $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$. Если n нечётное и $n > 3$, то все эти числа не делятся на n. Обозначим остатки от деления этих чисел на n через $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Они могут принимать лишь значения $1, 2, \ldots, n - 1$. Так как число этих значений равно $n-1$, а число остатков равно n, то среди остатков есть два равных. Пусть $r_i = r_j$, $i < j$. Тогда число $2^j - 2^i = 2^i(2^{j-i} - 1)$ делится на n. Так как числа 2^i и n не имеют общих делителей, то число $2^{j-i} - 1$ делится на n. Здесь $1 \leqslant j - i \leqslant n - 1$.

11.171. $(3; 5; 7)$. Пусть искомые простые числа — p, q, r и $p < q < r$. Любое простое число, отличное от 3, имеет вид либо $3n + 1$, либо $3n + 2$. Квадрат такого числа при делении на 3 дает остаток 1. Значит, сумма квадратов трёх простых чисел, ни одно из которых не равно 3, делится на 3. Так как число $p^2 + q^2 + r^2$ — простое, то одно из чисел p, q, r должно быть равно 3. Возможны случаи: а) $p = 3$, тогда $q = 5$, $r = 7$ и $p^2 + q^2 + r^2 = 83$ — простое число; б) $q = 3$, тогда $p = 2$, $r = 5$ и $p^2 + q^2 + r^2 = 38$ — составное число; в) $m = 3$, тогда $q = 2$, а простых чисел, меньших 2, нет.

11.172. В записи могут участвовать только цифры 1, 3, 7, 9. Но для любого M: M, $M + 3179$, $M + 9137$, $M + 7913$, $M + 1397$, $M+3197$, $M+7139$ дают разные остатки при делении на 7, значит, одно из них делится на 7.

11.173. Докажем, что числа x, y и z дают одинаковые остатки при делении на 3. Тогда из условия будет следовать, что число $x+y+z$ делится на 27. Если числа x, y и z дают разные остатки при делении на 3, то число $(x-y)(y-z)(z-x)$ не делится на 3, а число $x+y+z$, наоборот, делится на 3. Следовательно, по крайней мере два из трёх чисел x, y, z дают одинаковые остатки при делении на 3. Но тогда число $x + y + z = (x - y)(y - z)(z - x)$ делится на 3, а для этого необходимо, чтобы и третье число давало тот же остаток при делении на 3, что и первые два числа.

11.3. Сравнения по модулю

11.176. 1 при n — чётном и -1 при n — нечётном.

11.177. $30^{99} \equiv -1 \pmod{31}$, $61^{100} \equiv 1 \pmod{31}$.

11.178. $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1})$.

11.179. Суммируем попарно крайние члены.

11.180. $10^3 \equiv -1 \pmod 7$, $10^{3n+1} \equiv \pm 3 \pmod 7$, а сумма двух кубов сравнима с 0, ± 1, ± 2 по модулю 7.

11.181. Если среди 51 числа найдутся два, имеющие одинаковые остатки при делении на 100, то из $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ все следует. Пусть все 51 остаток — разные. Разобьём всевозможные остатки на 50 пар — $(0, 50)$ и $(n, 50-n)$, $n = 1, \ldots, 49$. По принципу Дирихле из 51 остатка найдутся два, попадающие в одну пару. Если эта пара — $(0, 50)$, то оба квадрата чисел делятся на 100, в противном случае на 100 делится разность чисел.

11.182. Если x — удобное число, то $(1000001 - x)$ — также удобное.

11.183. 8, так как $1996 \equiv 4 \pmod 6$.

11.184. Да: 288. $18n + 1 \equiv n + 1 \pmod{17}$, положим $n = 16$.

11.185. а) Нет, б) Нет. **11.186.** Например, -1 или $n - 1$.

11.187. 5. **11.188.** 2858.

11.189. Да. Делимость на 20 очевидна, а делимость на 99 следует из того, что $100 \equiv 1 \pmod{99}$ и равенства $19 + 20 + \ldots + 80 = 99 \cdot 31$.

11.190. Нет, $n^2 + n + 1$ не может даже делиться на 5.

11.191. $11^{n+2} + 12^{2n+1} = (133 - 12)11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n + 12(144^n - 11^n)$.

11.192. б) Если два неравных числа отличаются друг от друга не более чем на 15, то они не могут иметь общих делителей, больших 15. Поэтому достаточно показать, что среди 16 последовательных чисел можно найти число, не имеющее с остальными 15 общих делителей 2, 3, 5, 7, 11 и 13. После вычёркивания чётных чисел останется 8 последовательных нечётных чисел. Из них на 3 могут делиться либо 3, либо 2; на 5 и 7 либо 2, либо 1; на 11 и 13 делится не более одного числа. Если среди этих 8 чисел есть не более 5, делящихся на 3, или на 5 или на 7, то искомое одно число найдется. Рассмотрим случаи, когда чисел, делящихся или на 3, или на 5, или на 7, будет не меньше 6.

Случай 1. Среди 8 последовательных нечётных чисел на 3 делятся 3 числа, тогда на 5 могут делиться два из оставшихся чисел только в том случае, если одно из крайних чисел делится на 3, а второе на 5. Вычеркнув эти 5 чисел, оставим 2-е, 5-е и 6-е числа, или же 3-е, 4-е и 7-е. Рассмотрим первый случай. 2-е, 5-е и 6-е числа в ряду всех 16 чисел это 4-е, 10-е и 12-е или 3-е, 9-е и 11-е. Ни одно из этих чисел не может иметь ни с одним из остальных 15 чисел общий делитель 13, так как каждое из остальных чисел отличается от него меньше чем на 13. В данном случае из этих трёх чисел на 7 и на 11 может делиться по одному числу. Аналогично проводится доказательство во втором случае — когда остаются 3-е, 4-е и 7-е.

Случай 2. Если среди наших 8 чисел на 3 делятся два числа, 3-е и 6-е, то возможно, что из оставшихся на 7 делятся 1-е и 8-е, и на 5 делятся 2-е и 7-е. Вычеркнув эти 6 чисел, оставим из наших 8 чисел 4-е и 5-е, которые не будут уже делиться ни на 3, ни на 5, ни на 7. Оба этих числа будут взаимно простыми с каждым из остальных 15 чисел, так как каждое из остальных чисел отличается от них меньше чем на 11 и поэтому не могут иметь с ними общий делитель 11 или 13.

в) Среди чисел $1184, \ldots, 1200$ нет ни одного взаимно простого со всеми остальными.

11.193. Сумма делителей делится на 3 и на 8.

11.194. $a_n - 22$ делится на a_{n-6}. Проследите за остатками от деления на a_{n-6} членов $a_{n-5}, \ldots, a_n$.

11.195. При $n = 2p$: $19 \cdot 8^{2p} + 17 \equiv 0 \pmod 3$; при $n = 4p + 1$: $19 \cdot 8^{4p+1} + 17 = 13 \cdot 8^{4p+1} + 48 \cdot 64^{2p} + 17 \equiv 0 \pmod{13}$; $n = 4p + 3$: $19 \cdot 8^{4p+3} + 17 = 15 \cdot 8^{4p+3} + 4 \cdot 8^3 \cdot 64^{2p} + 17 \equiv 0 \pmod 5$.

11.196. Пусть в последовательности не более одного составного числа. Чтобы все числа были простые, нельзя приписывать чётные цифры, цифру 5, а 1 или 7 можно приписать не более одного раза, так как приписывание этих цифр увеличивает остаток от деления на 3 на 1. Значит, приписать можно только 3. Но к простому числу p можно приписывать не более p троек, так как из чисел $3, 33, \ldots, 3\ldots3$ (p троек) хотя бы одно кратно p (принцип Дирихле).

11.197. а) Докажем, что все цифры числа, кроме, быть может, первых 50 — нули. Для этого возьмём 51-значное число A и заменим его последнюю цифру a нулем — получим число B. Числа A и B, а, значит, и их разность кратны 2^{50}, откуда $a = 0$, т. е. исходное число кратно 2^{999}.

11.198. Существуют. Если n искомых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уже построены, то новые $n+1$ чисел строим так: $b_0 = \text{НОК}(a_1, \ldots, a_n)$, $b_1 = a_1 + b_0$, $\ldots$, $b_n = a_n + b_0$.

11.199. Все числа вида $6m + 1$, $6m + 2$.

11.200. $m^n = An^m$, $n^k = Bk^n$, $(m^k)^n = (m^n)^k = A^k(n^m)^k = A^k(Bk^n)^m = A^kB^m(k^m)^n$. Если $(m^k)^n$ делится на $(k^m)^n$, то m^k делится на k^m.

11.201. Из равенства $2^{kn}-1 = (2^n-1)(2^{n(k-1)}+\ldots+1)$ следует, что $2^{kn} - 1$ делится на $2^n - 1$, поэтому $2^{kn+d} - 1 = 2^d(2^{kn} - 1) + 2^d - 1 \equiv 2^d - 1 \pmod{2^n - 1}$. Итак, $2^n - 1$ делится на $2^m - 1$ если и только если n делится на m. При $n = km$: $(2^{km} - 1)/(2^m - 1) = 1+2^m+\ldots+2^{m(k-1)}$. Каждое слагаемое равно 1 по модулю 2^m-1, поэтому $(2^{km}-1)/(2^m-1) \equiv k \pmod{2^n-1}$. Тогда $k = n/m$ делится на $2^m - 1$, а это равносильно тому, что n делится на $m(2m - 1)$.

11.202. $n = 103$, $m = 3$. Из условия следует, что $1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1) = 1000a$, где a — некоторое натуральное число. Отсюда видно, что $m \geqslant 3$, так как 1978^m должно делиться на 8. Остается найти значения $n - m$, при которых $A = 1978^{n-m}-1$ делится на 5^3. Легко проверить, что A делится на 5 лишь при $n-m = 4k$. Поскольку нас интересует остаток при делении числа A на 125, можно заменить 1978 на 103, а 103^4 на 6. Далее имеем $6^k-1 = (1+5)^k-1 = 5k+5^2k(k-1)/2+\ldots$, где опущенные слагаемые делятся на 125. Поэтому $2k+5(k-1)k = k(5k-3)$ делится на 25, откуда следует, что k делится на 25. Значит, $n-m = 100k$, а $n + m = 100k + 2m$.

11.203. Пусть для некоторых целых чисел k, m, n имеют место равенства $2d-1 = k^2$, $5d-1 = m^2$, $13d-1 = n^2$. Из первого равенства получаем $2d = k^2 + 1$, здесь k — нечётное и $k^2 + 1$ равно 2 по модулю 4, значит, d — нечётное. Так как d — нечётное, то из второго и третьего равенств следует, что m и n — оба чётные, т. е. $m = 2M$, $n = 2N$. Вычтем из третьего равенства второе; после сокращения на 4 получим $2d = N^2 - M^2$. Значит, число $N^2 - M^2$ равно 2 по модулю 4, чего не может быть, так как если N и M — числа одной чётности, то $N^2 - M^2$ делится на 4, а если разной, то $N^2 - M^2$ — нечётное число. Итак, хотя бы одно из трёх чисел $2d - 1$, $5d - 1$, $13d - 1$ не квадрат.

11.204. Имеем $a_1 = 1$ и $a_2 = p$, где p должно быть наименьшим простым числом, которое не является делителем числа n; $a_k = n-1$ и $r = p-1$ — разность прогрессии. Если n — нечётное число, то $a_2 = 2$, $r = 1$ и прогрессия имеет вид $1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда следует, что n является простым числом. Если n — чётное число, то $p \geqslant 3$.

Случай 1. $p = 3$. Тогда $r = 2$ и прогрессия имеет вид $1, 3, \ldots, n - 1$. Отсюда очевидно, что n является степенью двойки: $n = 2^m$.

Случай 2. $p > 3$. Тогда n делится на 3. Имеем $a_k = a_1 + r(k-1)$, откуда $n - 1 = 1 + (p - 1)(k - 1)$. Значит, $p - 1$ является делителем числа $n-2$. Возьмём произвольный простой делитель q числа $p-1$. Тогда q является делителем числа $n - 2$. Так как $q < p$, то q — делитель n. Общий простой делитель чисел n и $n - 2$ может быть только двойкой, поэтому $p - 1 = 2^i$ и $p = 2^i + 1$. Из того, что число p — простое, следует, что число i — чётное. Далее, $a_3 = a_1 + 2r = 1 + 2(p - 1) = 2p - 1 = 2^{i+1} + 1 = 0 \pmod 3$. Значит, a_3 делится на 3 и n делится на 3, а это противоречит взаимной простоте чисел a_3 и n.

Теорема Дирихле

11.205. Предположим противное и пусть $M = 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot p-1$ (p — наибольшее число вида $3k - 1$), $M \equiv -1 \pmod 3$ и M не делится ни на одно из простых чисел $2, 3, \ldots, p$. Является M простым или же раскладывается на простые множители — в обоих случаях эти простые числа больше p. Покажем, что среди них есть множитель вида $3k - 1$. Если нет, то все простые множители M равны 1 по модулю 3, значит, их произведение равно 1 по модулю 3, но $M \equiv -1 \pmod 3$.

11.206. Рассмотрим $M = 6p_1 \cdot \ldots \cdot p_n - 1$ ($p_1, \ldots, p_n$ — конечное число простых множителей вида $6k - 1$), $M \equiv -1 \pmod 6$. Далее аналогично 11.205, учитывая, что простое число, большее 3, равно ± 1 по модулю 6.

Китайская теорема об остатках

11.207. Разность n-го и p-го чисел ($n > p$), равная $d(n-p)$, не делится на m, иначе оказалось бы, что $n-p$ делится на m, но $n-p < m$. Значит, числа прогрессии попарно не сравнимы по модулю m, т. е. для каждого из остатков ровно одно число сравнимо с ним по модулю m.

11.208. Применим индукцию по n. При $n = 1$ теорема очевидна. Пусть она справедлива при $n = k-1$. Тогда найдется число M такое, что $M \equiv r_i \pmod{m_i}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Пусть $d = m_1 m_2 \ldots m_{k-1}$. Рассмотрим числа $M, M+d, \ldots, M+(m_k-1)d$. Так как d взаимно просто с m_k, из следует, что среди данных чисел найдется число N, дающее при делении на m_k остаток r_k. Число N при делении на $m_1, \ldots, m_{k-1}$ дает остатки $r_1, \ldots, r_{k-1}$ соответственно.

11.209. По 11.208 существует такое a, что $a \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $a \equiv$ $\equiv r_2 - 1 \pmod{m_2}$, ..., $a \equiv r_n - n + 1 \pmod{m_n}$. Тогда $a, a+1, \ldots,$ $a+n-1$ удовлетворяют условию задачи.

11.210. а) $48, 49, 50$ (2^2, 5^2, 7^2) или 548, 549, 550 (2^2, 3^2, 5^2); б) Пусть $p_1^2, \ldots, p_n^2$ — квадраты n различных простых чисел. Тогда по 11.208 найдется такое m, которое дает при делении на $p_1^2, \ldots, p_n^2$ соответственно остатки $p_1^2 - 1, \ldots, p_n^2 - n$. Поэтому числа $m+1, \ldots, m+n$ будут делиться на $p_1^2, \ldots, p_n^2$.

11.211. 788. Из $3n - 1 = 5l - 2$ имеем $n = 3 + 5p$, т. е. только числа вида $3(3+5p) - 1 = 8 + 15p$ делятся на 3 с остатком -1 и на 5 с остатком -2. Далее из $8 + 15p = 7m - 3$ получим, что только числа вида $53 + 105k$ делятся на 3 с остатком -1, на 5 с остатком -2, на 7 с остатком -3 и т. д. (См. задачи из раздела 12.1.)

11.4. Признаки делимости и другие системы счисления

11.213. Степени 10, со 100, делятся на 4.

11.214. Число делится на 2^n (на 5^n) тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на 2^n (на 5^n).

11.215. Две последние цифры числа зависят от двух последних цифр числа — a и b, причём $(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Ясно, что цифра десятков b^2 — нечётна.

11.216. Рассмотрите остатки по модулю 16.

11.217. Например, $1\ldots 19875$ делится на 125.

11.218. а) 9876543210, б) 9876543120, в) 10234567895, г) 1234567980.

11.219. а) Нет, число 9981 не делится на 27, б) Нет, например 54.

11.220. 42048, 42840. Число делится на 8 (3 последние цифры делятся на 8) и на 9.

11.221. Два: 2970 и 6975.

11.222. 1155, 3150, 4155, 6150, 7155, 9150.

11.223. 10234567896.

11.224. Одним нулем. Число делится на 10, но не на 4, и, значит, не на 100.

11.225. $10^{2n-1} \equiv -1 \pmod{11}$, $10^{2n} \equiv 1 \pmod{11}$.

11.226. Числа делятся на 11.

11.227. $\overline{aabb}$ делится на 11, а $\overline{cdcdcdcd}$ — нет.

11.228. Цифры $1, \ldots, 6$ нельзя разбить на две тройки, разность сумм в которых делится на 11.

11.229. Эти два числа имеют одинаковые остатки при делении на 9 и на 11.

11.230. Число $n(n+1)/2$ оканчивается на ту же цифру, что и $(n+20)(n+21)/2$, так как их разность делится на 10.

11.231. 69. Новое число $100a + b + 2a = 102a + b$ делится на 9, значит, и на 3, но 102 делится на 3, поэтому b делится на 3, а так как $a + b$ делится на 3, то a делится на 3. Из $102a + b = 9(10a + b)$ имеем $3a = 2b$, т. е. a делится на 2, значит, на 6.

11.232. 6125, 6375, 4625, 4875, 5216, 6275, 5264, 5784. Так как произведение 8-значно, то искомое число не может оканчиваться на 0. Произведение делится на 1000, поэтому один из сомножитель делится на 125, а второй на 8. Числа, делящиеся на 125 в конце имеют 125, 375, 625, 875.

11.233. Нельзя. Проследите за последней цифрой.

11.234. $\overline{aba} = 101a + 10b = 7(14a + b) + 3(a + b)$.

11.235. $\overline{abc} = 100a + 10b + c \equiv 2a + 3b + c \equiv b - c \pmod 7$, так как $2(a + b + c) \equiv 0 \pmod 7$.

11.236. а) Число 1001 делится на 7, б) Число делится на 7 (на 13) тогда и только тогда, когда на 7 (13) делится знакопеременная сумма чисел, образованных последовательными тройками цифр данного числа. (Число делится на тройки справа налево.)

11.237. Число делится на 37 тогда и только тогда, когда на 37 делится сумма чисел, образованных последовательными тройками цифр данного числа.

11.238. Пусть число a, составленное из данных цифр, делится на c ($c < a$). Тогда $a - c$ делится на c. Разность двух чисел с одинаковой суммой цифр делится на 9, но c и 9 взаимно просты (c на 3 не делится), поэтому $a - c$ делится на $9c$, а $9c$ — число восьмизначное.

11.239. а), б) Нет. Рассмотрите остатки по модулю 9.

11.240. 6. Воспользуйтесь признаком делимости на 9.

11.241. Нет, $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$, $a \neq c$.

11.242. Число состоит из 300 единиц.

11.243. 45. Из условия $100a + b = 9(10a + b)$ имеем $5a = 4b$, т. е. b делится на 5.

11.244. Надо вычеркнуть 2, 7, 9. Число 134 568 должно делиться на 8 и на 9.

11.245. Верна: числа равны по модулю 9.

11.246. Разделим это число на $1\ldots1$ (9 единиц). Получим $10\ldots01\ldots10\ldots01$ (по 8 нулей и всего 9 единиц).

11.247. а) 81 встретится под числом $9\ldots9$ (9 девяток), его номер $1\ldots1$(9 единиц), б) четыре раза подряд 27 встретится раньше — под числами 3969, 3978, 3987, 3996, а 36 — под числом 9999.

11.248. Использовать принцип Дирихле.

11.249. Домножить число на 1111 и доказать, что результат делится на число, состоящее из 1 и 0.

11.250. Нет. $n(n + 1) \equiv 0, 1, 2 \pmod 5$, а $1989 \equiv 3 \pmod 5$.

11.251. 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92. Если a, b — цифры, то $a + b = 11$.

11.252. Доказательство по индукции. Представим число, состоящее из 3^{n+1} единицы в виде

$$\underbrace{1\ldots1}_{3^n}\cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{3^n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{3^n-1}1.$$

Первый сомножитель делится на 3^n по предположению индукции, а второй делится на 3, так как сумма его цифр делится на 3.

11.253. 625 и 376.

11.254. Нет. Сократив $n!$ на максимальную степень 10, получим число, кратное большой степени 2, однако 1976 не делится на 2^4.

11.255. Число 5^{1000} оканчивается на 5. Пусть в десятичной записи этого числа на n-м месте, считая от конца, стоит 0, а все следующие цифры отличны от 0. Прибавим к этому числу $5^{1000}10^{k-1}$. В результате получится число, делящееся на 5^{1000}, у которого отличны от 0 последние n цифр. Продолжая эту процедуру, можно получить число, у которого последние 1000 цифр отличны от 0. Теперь отбросим все цифры, кроме 1000 последних.

11.256. Пусть $B = A^2$ и $A = 10a+5$. Тогда $B = 100a(a+1)+25$ оканчивается на 25. Число $a(a+1)$ оканчивается либо на 2, либо на 6, либо на 0. Поэтому третья справа цифра числа B равна 6. Итак, $B = 1000n + 625$, т. е. B делится на 5^3, и поэтому на 5^4. Отсюда n делится на 5, значит, 4-я справа цифра B — 0 или 5.

11.257. Да. Выписывая трёхзначные числа, делящиеся на 11, можно среди них найти 3 числа, в записи которых участвуют цифры от 1 до 9. Например, такие числа: 275, 396, 418. С их помощью легко составить десятизначное число, делящееся на 11. Например, $2\,753\,961\,180 = 275\cdot 10^7 + 396\cdot 10^4 + 418\cdot 10$.

11.258. 80. Положим $a = 1\ldots 1$ ($n+1$ единиц), $b = 1\ldots 1$ (9 единиц). Так как $A = 11a$, то a должно делиться на $B = 9b$, т. е. a должно делится на b и a/b делиться на 9.

Сумма цифр

11.259. Нет. $a^2 \equiv s(a^2) \equiv 1$ или $0 \pmod 3$, а $1970 \equiv 2 \pmod 3$.

11.260. Если последняя цифра квадрата — 5, то предпоследняя — 2. Тогда $N \equiv s(N) \pmod 3 = 5\cdot 999 + 2 \equiv 2 \pmod 3$, но $a^2 \not\equiv 2 \pmod 3$. Если же квадрат заканчивается на $5*$, то он оканчивается на 56 (достаточно перебрать квадраты до 25^2 — последние две цифры n^2 и $(50-n)^2$ одинаковы). Тогда сумма его цифр — $5\cdot 999 + 6$ — делится на 3, но не на 9.

11.261. 8. $A \equiv s(A) \pmod 9$, $8 \equiv -1 \pmod 9$, $8^{1997} \equiv -1 \equiv 8 \pmod 9$.

11.262. Последняя цифра 2^n может быть 2, 4, 6, 8. Если цифра 6, то всё ясно. Цифра 2 возникает при $n = 4p-3$. $2^{4p-3} \equiv -1 \pmod 3$, поэтому $2^{4p-3} - 2 \equiv 0 \pmod 3$. Цифра 8 рассматривается аналогично. Цифра 4 возникает при $n = 4p-2$. $2^{4p-2} \equiv 1 \pmod 3$, поэтому $2^{4p-2} - 4 \equiv 0 \pmod 3$.

11.263. Сумма цифр, стоящих на чётных местах равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах по модулю 11 (см. 11.225), а сумма всех цифр делится на 9.

11.264. Нет. $46(40x+y) \equiv x+y \pmod 9$, а искомое число равно $1+x+y \pmod 9$.

11.265. Пусть N — данное число, $N \equiv s(N) \equiv 1+\ldots+1967 =$ $= 1967\cdot 1968/2 \equiv 6 \pmod 9$ — делится на 3, но не делится на 9. Значит, N не может быть любой степенью числа.

11.266. Так как $A \equiv s(A) \pmod 9$, то первая разность $A - s(A)$ и последующие делятся на 9. Значит, следующее число (со второго) меньше на 9, 18 или 27. Легко видеть, что при переходе через каждую сотню обязательно встретятся такие два числа, что мы уменьшаем предыдущее число на 18, поэтому числа из 8-й сотни и меньше обратятся в 0 не позднее чем на 93 шаге. А в 9-й сотне 10 чисел, сумма цифр которых равна 18: $909, \ldots, 990$.

11.267. $N \equiv s(N) \pmod 9$, $2N \equiv N \pmod 9$, т. е. $2N - N = N$ делится на 9.

11.268–11.269. Так как $10^k \equiv 1$ (mod $9\ldots 9$ — k девяток), то $(10^k)^n \equiv 1$ (mod $9\ldots9$ — k девяток), далее доказательство следует признаку делимости на 3 (или 9).

11.270. Если бы все цифры были разными, то их сумма равнялась бы $0 + 1 + \ldots + 9 = 45 \equiv 0 \pmod 9$, однако ни одно число в цепочке на 9 не делится.

11.271. Пусть из 2^k получилось 2^n $(n > k)$. Тогда $2^n - 2^k \equiv 0 \pmod 9$ (так как эти числа составлены из одних и тех же цифр) и $2^{n-k} - 1 \equiv 0 \pmod 9$, но $2^{n-k} = 2^n/2^k < 9$, так как при перестановке цифр число не может увеличиваться в 9 и более раз.

11.272. а) Решений нет: $n + S(n) + S(S(n)) \equiv 0 \pmod 3$, но 1993 на 3 не делится, б) Так как $n < 1993$, $S(n) \leqslant 27$, $S(S(n)) \leqslant 10$, $S(S(S(n))) \leqslant 9$. Из уравнения следует, что $n \geqslant 1993 - 27 - 10 - 9 = 1947$. Все числа n, $S(n)$, $S(S(n))$, $S(S(S(n)))$ равны по модулю 9, а $1993 \equiv 4 \pmod 9$, поэтому $n \equiv 1 \pmod 9$. Из чисел от 1947 до 1993 подходит 1963.

11.273. Очевидно, что если при сложении чисел A и B столбиком не происходит переносов в старшие разряды, то $s(A + B) = s(A) + s(B)$ (тогда цифры числа $A + B$ равны суммам соответствующих цифр чисел A и B). Пусть $X = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ — десятичная запись числа A. Умножим 5 на A столбиком. При сложении переносов происходить не будет, так как старшая цифра числа $5a_i$, не превосходит 4 $(5 \cdot 9 = 45)$, а младшая цифра следующего числа — 0 или 5. Значит, $s(X) = s(5a_1) + \ldots + s(5a_k)$.

11.274. С любого числа от 100 до 109. От 0 до 81 имеем цепочку из девяти вычитаний. Число 81 можно получить из 90 и 99. Но 90 не из какого числа не получишь, а 99 получается из $100, \ldots, 109$.

11.275. Нет. Пусть $S(X)$ — сумма цифр числа X. Из алгоритма сложения в столбик видно, что $S(X + Y) = S(X) + S(Y) - 9P(X, Y)$, где $P(X, Y)$ — число переносов при сложении X и Y в столбик. Отсюда $S(1998X) = S(2000X) - S(2X) + 9P(2X, 1998X) = 9P(2X, 1998X)$, так как $S(2000X) = S(2X)$. Но $P(2X, 1998X) \geqslant$

$\geqslant 3$, так как сумма этих чисел имеет на конце на 3 нуля больше, чем каждое из слагаемых.

11.276. Число, записанное при помощи 3^n единиц, делится на 3^n.

11.277. $c = 9$. $a \leqslant 1962 \cdot 9 < 19999$, поэтому $b \leqslant 1 + 4 \cdot 9 = 37$ и $c \leqslant 9$.

11.278. Да, $1962 + s(1962) = 1980$.

11.279. Положим $S_n = S(n) + n$. Если число n оканчивается на 9, то $S_{n+1} < S_n$, если не на 9, то $S_{n+1} = S_n + 2$. Для любого натурального $m > 2$ выберем наибольшее N, для которого $S_N < m$. Тогда $S_{N+1} \geqslant m$, причём последняя цифра N — не 9, и потому либо $S_{N+1} = m$, либо $S_{N+1} = m + 1$.

11.280. Проверка показывает, что из чисел $n = 1, 2, 3, 4, 5$ подходит только $n = 3$. Докажем, что при $n \geqslant 6$ сумма цифр числа 5^n меньше, чем 2^n (т. е. другие значения n не подходят). Действительно, число 5^n не более, чем n-значное, поэтому сумма его цифр не больше, чем $9n$. С другой стороны, при $n \geqslant 6$ справедливо неравенство $2^n \geqslant 9n$. В самом деле, при $n = 6$ оно верно, а при увеличении n на единицу правая часть этого неравенства увеличивается на 9, а левая — не менее, чем на 64, Значит, неравенство верно и при каждом следующем (большем 6) значении n. Итак, единственным значением n, является значение $n = 3$.

11.281. Заметим, что $9A = 10A - A$. При вычитании этих чисел столбиком ни в одном разряде, кроме младшего, не приходится занимать единицу из следующего разряда. Таким образом, сумма цифр разности равна разности суммы цифр чисел $10A$ и A (которые равны) плюс 9.

11.282. Заметим, что $44n$ есть сумма 4 экземпляров числа n и 4 экземпляров числа $10n$. Если складывать эти числа поразрядно, то в каждом разряде окажется сумма учетверённой цифры из этого же разряда числа n и учетверённой цифры из следующего разряда. Если при этом не происходит никаких переносов, то каждая цифра числа n складывается 8 раз, и сумма цифр во всех разрядах оказывается равной 800. При переносах же сумма цифр, очевидно, уменьшается (так как из одного разряда вычитается 10, а к другому прибавляется только 1). Поэтому в ситуации условия задачи переносов не происходит. Это означает, в частности, что любая цифра числа n не превосходит 2. Тогда при умножении n на 3 просто умножается на 3 каждая его цифра, а, значит, и сумма цифр. Поэтому сумма цифр числа $3n$ равна 300.

11.283. 7. Так как $4444 < 10^4$, то число знаков 4444^{4444} меньше, чем $4 \cdot 4444 = 17776$, поэтому $A < 17\,776 \cdot 9 = 159984$, $B \leqslant 5 \cdot 9 = 45$. Найдём остаток от деления 4444^{4444} на 9. $4444 \equiv (-2) \pmod 9$, поэтому

$$(-2)^{4444} = 2^{4444} = 2 \cdot 8^{1481} \equiv 2(-1)^{1481} \equiv 7 \pmod 9.$$

Тогда B равно 7, 16, 25, 34 или 43, т. е. $s(B) = 7$.

Другие системы счисления

11.284. а) $10101_2 = 21$, $10101_3 = 91$, $211_4 = 37$, $113_6 = 69$, $158_{11} = 184$; б) $1000_{10} = 2627_7$, $69_{10} = 126_7$, $158_{11} = 352_7$.

11.285. а) Да (7-ричная система счисления), б) Нет (второе равенство могло бы выполняться только в 5-ричной системе счисления).

11.286. а) $10201_b = 101_b^2$. б) Пусть x — самая большая цифра в данной системе счисления. Тогда $10101_b = 111 \cdot \overline{x1}_b$.

11.287–11.288. Аналогично десятеричной системе счисления.

11.289. Используем троичную систему счисления. Считаем, что троичная запись каждого числа состоит ровно из k цифр (при необходимости заполним пустующие старшие разряды нулями). Выберем те числа, троичная запись которых содержит только цифры 0 и 1. Их ровно 2^k. Покажем, что это искомый набор. Предположим, что среди этих чисел есть три различных числа x, y, z, удовлетворяющих равенству $x + y = 2z$. Так как числа x и y различаются хотя бы в одном разряде, то в троичной записи их суммы $x + y$ в этом разряде стоит 1. А в записи числа $2z$ встречаются только 0 и 2.

11.290. Набор чисел такой же, как и в 11.289.

11.291. а) первый, б) 1925-й. Пусть стоит n ребят. Запишем n в двоичной системе счисления. Перенеся первую цифру (единицу) в конец, получим двоичную запись водящего: а) $64_{10} = 1000000_2$, $0\ldots01_2 = 1_{10}$, б) $1986_{10} = 11111000010_2$; $11110000101_2 = 1925_{10}$.

11.292. Надо задавать вопросы так, чтобы каждый последующий вопрос уменьшал вдвое количество остающихся возможных вариантов. При такой системе, чтобы угадать один из двух вариантов, достаточно n вопросов. Так как по условию имеется всего $10^7 \leqslant 2^{24}$ различных телефонных номеров, то хватит 24 вопросов. Сами вопросы можно задавать по-разному. Например, можно спросить: «Верно ли, что ваш номер больше 5 000 000? Если ответили «да», то второй вопрос может быть такой: «Больше ли он 7 500 000?» и т. д.

Но проще воспользоваться двоичной системой счисления. Каждое число, меньшее 10 000 000, запишется не более, чем 24 такими цифрами. Можно задавать такие вопросы: «Верно ли, что последняя цифра двоичной записи номера вашего телефона — единица?»; «Верно ли, что предпоследняя цифра — единица?» и т. д. Покажем, что 23 вопросов недостаточно. Действительно, различных комбинаций из 23 слов «да» и «нет» имеется $2^{23} < 10\,000\,000$. Поэтому найдутся два различных номера, приводящих к одинаковой последовательности ответов, и у нас не будет никакой возможности решить, какой из них истинный.

11.293. Сначала за 24 вопроса узнаем 24 цифры двоичной записи телефонного номера. Затем нужно выяснить, верны ли найденные цифры, а если нет, то какая именно цифра неверна. Проще всего задать вопрос: «Все ли цифры верные?» Если ответили «да», то это правдивый ответ (иначе ложь содержалась бы в двух ответах, в последнем и в одном из первых 24, а это противоречит условию). Если же получен ответ «нет», те либо один из первых 24 ответов, либо последний ответ ложны. Не более чей 5 вопросами мы можем выяснить в каком же из 25 ответов ложь ($25 \leqslant 2^5$). При таком способе достаточно $24 + 1 + 5 = 30$ вопросов. Однако количество вопросов можно уменьшить, если 25-й вопрос задать так: «Верны ли первые 15 цифр?» (15 — это наибольшее число вида $2^n - 1$, не превосходящее 24). Рассуждая аналогично, заключаем, что после ответа «нет» потребуется 4 вопроса, а после ответа «да» нужно будет выяснить, все ли оставшиеся 9 цифр верные.

11.294. Да, за 4 операции. Будем делить колоду пополам, а потом складывать карты «через одну», начиная с карты нижней половины.

Докажем, что это действительно обращает колоду. Пронумеруем карты числами от 0000 до 1111 в двоичной системе. Тогда достаточно показать, что обращается расположение нулей и единиц в каждом разряде. Легко видеть, что в результате одной операции из каждого расположения на рисунке получается то, что строчкой ниже (а из последнего — первое). Но в начальном положении единицы стоят в положениях, указанных в первых четырёх строках, поэтому в конце оно будет обращено.

0101010101010101
0011001100110011
0000111100001111
0000000011111111
1010101010101010
1100110011001100
1111000011110000
1111111100000000

К 11.294

Покажем, что за три операции перестановку сделать невозможно. При первой операции одна из частей содержит не менее 8 карт, поэтому после неё есть по меньшей мере 8 карт в первоначальном порядке, при второй операции в одну из частей попадёт по крайней мере четыре из них, т. е. будут 4 карты в исходном порядке. Аналогично, после третьей операции найдётся не менее двух карт, у которых не изменился порядок. Значит, трёх операций мало.

11.295. Утверждение 1 очевидно. Для доказательства утверждения 2 достаточно заметить, что после любого хода изменяется число камней в какой-то кучке, а значит, меняется некоторый разряд его двоичной записи и поэтому меняется чётность числа единиц в соответствующем столбце. Для доказательства утверждения 3 нужно, взяв несколько камней из одной кучки, изменить чётность числа единиц во всех столбцах с нечётным числом единиц. (и только в них). Рассмотрим крайний левый столбец с нечётным числом единиц и выделим кучку, у которой в этом разряде стоит 1. Число камней в этой кучке действительно уменьшится: двоичную запись исходного числа камней нужно изменить в разрядах, соответствующих столбцах с нечётным числом единиц и в старшем из изменившихся разрядов вместо 1 будет стоять 0.

12. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

12.1. Наибольший общий делитель. Линейные уравнения

12.1. Если $a = pm$ и $b = pn$, то $a \pm b = p(m \pm n)$.

12.2. Если $a = pm$ и $b = pn$, то r_1 делится на p, и наоборот.

12.3. а) 1, б) 1, в) 191.

12.4. а) 59/13, б) 83/17, в) 359/113, г) 271/883.

12.5. 11. $\text{НОД}(2n+3; n+7) = \text{НОД}(n+7; -11) \leqslant 11$. При $n = 4 + 11k$ ограничение достигается.

12.6. $2^{10} - 1$.

12.7. Указание. $\text{НОД}(2^m - 1; 2^n - 1) = 2^p - 1$, где $p = \text{НОД}(m; n)$.

12.8. а) 1111, б) $1\ldots1$ ($d = \text{НОД}(m; n)$ единиц) из алгоритма Евклида.

12.9. $\text{НОД}(30n+2; 12n+1) = \text{НОД}(12n+1; 6n) = \text{НОД}(6n; 1) = 1$.

12.10. -3, -2, 1. Выделим из дроби целую часть 3 и найдем целые n, при которых дробь $(2n+16)/(7n+11)$ будет по модулю меньше 1, т. е. не целое число. Это будут $n < -3$ и $n > 1$. Затем проверим дробь при $n = -3, -2, -1, 0, 1$.

12.11. При $n \geqslant 2$ эта дробь лежит в интервале $[1, 2]$.

12.12. а) Пусть такие числа $a \neq b$ существуют; без ограничения общности считаем, что $a < b$. Тогда тройка чисел $(a, a+5, b-a)$, будет удовлетворять условиям пункта б) (если подставить их вместо a, b и c соответственно).

б) Предположим, что $\text{НОК}(a; b) = \text{НОК}(a+c; b+c)$. Если числа a, b и c имеют общий делитель d, то сократим на него. При этом обе части рассматриваемого равенства тоже сократятся на d. Поэтому можно считать, что a, b и c взаимно просты. Тогда числа $a+c$ и $b+c$ тоже взаимно просты. Действительно, если они имеют общий простой делитель p, то на p делится также $(a-b)$ (их разность) и $\text{НОК}(a; b)$ (т. к. он равен $\text{НОК}(a+c; b+c)$). Тогда на p делится одно из чисел a или b, а значит, они оба (т. к. на p делится их разность). Но тогда и $c = (a+c) - a$ делится на p, что противоречит взаимной простоте чисел a, b и c. Следовательно, $\text{НОК}(a+c; b+c) = (a+c)(b+c) > ab \geqslant \text{НОК}(a; b)$. Противоречие доказывает, что указанное равенство невозможно.

12.13. $2000^2 - 1$. Пусть $a = 2000m + n$, $b = 2000n + m$, d — наибольший общий делитель a и b. Тогда d делит также числа $2000a - b = (2000^2 - 1)m$ и $2000b - a = (2000^2 - 1)n$. Поскольку m и n взаимно просты, то d делит $2000^2 - 1$. С другой стороны, при $m = 2000^2 - 2000 - 1$, $n = 1$, получаем $a = (2000^2 - 1)(2000 - 1)$, $b = 2000^2 - 1 = d$.

12.14. Пусть $d = \text{НОД}(b; p-a)$, $b = kd$ и $p - a = ld$. Тогда числа k и l взаимно просты. Далее, $ak + bl = ab/d + (p-a)b/d = pk$. Итак, $ak + bl$ делится на p.

12.15. Если $a+b$ и a^2+b^2 делятся на d, то и $(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab$ делится на d. Значит, $2a^2 = 2a(a+b) - 2ab$ и $2b^2 = 2b(a+b) - 2ab$ делятся на d. Но если a и b взаимно просты, то a^2 и b^2 также взаимно просты, поэтому $2a^2$ и $2b^2$ не могут одновременно делиться на $d > 2$.

12.16. Если p и q — взаимно простые числа, то каждое число z представляется в виде $z = px + qy$. Всякое такое представление получается из некоторого фиксированного $z = pa + qb$ по общей формуле $z = p(a - qt) + q(b + pt)$, где t — целое, причём существует единственное представление, для которого $0 \leqslant x \leqslant q-1$. Сопоставим числу пару $(x; y)$ целых чисел такую, что $0 \leqslant x \leqslant q-1$,

$z = px+qy$. Разным числам при этом соответствуют разные пары, причём z будет хорошим при $y \geqslant 0$.

Заметим, что если число $z = px + qy$ — хорошее, то число $z' = (q - 1 - x)p + (-1 - y)q$ — плохое и, наоборот, если z — плохое, то z' — хорошее. Точки $(x; y)$ и $(q-1-x; -1-y)$ симметричны относительно точки $((q - 1)/2; -1/2)$, а сами числа z и z' симметричны относительно точки $z_0 = (p(q - 1) - q)/2$, так как $z + z' = pq - p - q = 2z0 = c$. Итак, доказано утверждение а). Так как наименьшее хорошее число — 0, то наибольшим плохим будет c, а всего плохих чисел будет $(c+1)/2 = (p-1)(q-1)/2$.

12.17. Если бы $1978^m - 1$ делилось на $D = 1000^m - 1$, то и $1978^m - 1000^m = 2^m(989^m - 500^m)$ делилось бы на D. Но это невозможно, так как $989^m - 500^m < D$ и D нечётно.

12.18. Имеем $(a+1)/b+(b+1)/a = (a^2 + b^2 + a + b)/ab$. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b. Так как ab делится на d^2, то $a^2 + b^2 + a + b$ делится на d^2. Число $a^2 + b^2$ также делится на d^2. Поэтому $a + b$ делится на d^2 и $\sqrt{a + b} \geqslant d$.

12.19. Решение 1. Положим $m = kd$, $n = ld$, где $d = \text{НОД}(m; n)$. Тогда $\text{НОК}(m; n) = kld$ и, значит, $kld + d = kd + ld$. Отсюда получаем, что $(k - 1)(l - 1) = 0$, т. е. $k = 1$ или $l = 1$. Это означает, что либо m, либо n равно $\text{НОД}(m; n)$. Следовательно, либо n делится на m, либо m делится на n.

Решение 2. $\text{НОК}(m, n) \cdot \text{НОД}(m, n) = mn$, поэтому НОК и НОД — корни уравнения $x^2 - (m + n)x + mn = 0$. Поэтому либо $\text{НОК} = m, \text{НОД} = n$, либо наоборот.

12.20. $m = n = l = 2$. Положим $d = \text{НОД}(m; n; l)$. Пусть $m = dm_1$, $n = dn_1$, $l = dl_1$, тогда $d(m_1 + n_1) = d^2d^2_{mn}$, где $d_{mn} = \text{НОД}(m_1; n_1)$, откуда $m_1+n_1 = dd^2_{mn}$. Складывая это равенство с двумя аналогичными, получаем

$$2(m_1 + n_1 + l_1) = d(d^2_{mn} + d^2_{ml} + d^2_{nl}). \qquad (*)$$

Покажем, что d взаимно просто с суммой $m_1 + n_1 + l_1$. В самом деле, если у d и этой суммы есть общий делитель $d_1 > 1$, то он будет общим делителем всех чисел m_1, n_1 и l_1 (так как сумма любых двух из них делится на d). Но тогда произведение dd_1 — общий делитель m, n и l, что противоречит определению d. Значит, d — делитель числа 2, откуда $d \leqslant 2$ (равенство $(*)$). Заметим, что d_{mn}, d_{ml}, d_{nl} попарно взаимно просты (иначе у m_1, n_1 и l_1 нашёлся бы общий делитель, не равный 1). Поэтому $m_1 = d_{mn}d_{ml}m_2$, $n_1 = d_{mn}d_{nl}n_2$, $l_1 = d_{nl}d_{ml}l_2$, где m_2, n_2, l_2 — натуральные. Тогда первое из исходных уравнений примет вид $d_{mn}d_{ml}m_2 + d_{mn}d_{nl}n_2 = dd_{mn}^2$. Пусть d_{mn} — наименьшее из чисел d_{mn}, d_{ml}, d_{nl}. Имеем: $d_{ml}m_2 + d_{nl}n_2 \geqslant d_{ml} + d_{nl} \geqslant 2d_{mn} \geqslant$ $\geqslant dd_{mn}$ (так как $d \leqslant 2$). Итак, все неравенства — равенства, отсюда, $m_2 = n_2 = 1$, $d = 2$ и $d_{mn} = d_{ml} = d_{nl}$. Но из взаимной простоты d_{mn}, d_{ml}, d_{nl} следует, что они равны 1, откуда имеем ответ.

12.2. Линейные уравнения

12.21. Пусть $d = \text{НОД}(a; b)$, тогда левая часть делится на d, правая — нет.

12.22. Проверим, что $(x_0 + bk, y_0 - ak)$ являются решениями: $a(x_0+bk)+b(y_0-ak) = ax_0+by_0 = c$. Докажем, что это все решения. Пусть (x, y) — какое-то решение, тогда $ax + by = c = ax_0 + by_0$ или $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Так как число $x - x_0 = b(y_0 - y)/a$ — целое, а b и a взаимно просты, то число $k = (y_0 - y)/a$ — целое. Поэтому $x - x_0 = bk$, $y - y_0 = -ak$.

12.23. а) $|2; 1; 2; 1; 1; 4; 1; 1; 6; 10; 1; 1; 2|$, б) $|3; 7; 15; 1; 292|$, в) $|0; 1; 99|$, г) $|3; 7; 16|$.

12.24. а) Свёртывание цепной дроби в обыкновенную сводится к операциям двух типов: прибавлению целого числа и обращению. Легко показать, что если дробь a/b несократима, то эти операции также приводят к несократимым дробям. Но $1/q_n$ — несократима, значит, несократимы и все δ_k.

б) Доказательство ведётся индукцией по n. База ($n = 2$) очевидна. Пусть теперь утверждение верно для n. Докажем его для $n + 1$. Пусть $|a_1; \ldots; a_{n+1}| = a_1 + x'/y'$, $|a_1; \ldots; a_n| = a_1 + x/y$, Тогда $y'/x' = |a_2; \ldots; a_{n+1}|$ и $y/x = |a_2; \ldots; a_n|$. Следовательно, $(-1)^{n-1}/(xx') = (y'/x') - (y/x) = (xy' - x'y)/(xx')$, т. е. $xy' - x'y =$ $= (-1)^{n-1}$. Отсюда $(a_1 + x'/y') - (a_1 + x/y) = (x'y - xy')/(yy') =$ $= (-1)^n/(yy')$.

12.25. Следует из 12.24, п. б).

12.26. Следует из 12.22 и 12.25.

12.27. а) $x = -4+15p$, $y = -5+19p$, б) $x = 33+17p$, $y = 44+23p$, в) $x = 88 + 47p$, $y = 99 + 53p$, г) $x = -3 + 18p$, $y = 6 + 35p$, д) $x =$ $= -25 + 71p$, $y = -30 + 85p$, е) $x = -28 + 11p$, $y = -105 + 41p$.

12.28. Уравнение $170x + 190y = 3000$ имеет решение $x = 2$, $y = 14$.

12.29. Уравнение $25x - 36y = 1$ имеет решение $x = 13$, $y = 9$.

12.30. Уравнение $8x - 5y = 13$ имеет единственное решение $x = 6$, $y = 7$, удовлетворяющее условиям $x + y \leqslant 20$ и $x, y > 0$.

12.31. а) $324 = 141 \cdot 2 + 42$ (2 квадрата со стороной 141 мм), $141 = 43 \cdot 2 + 15$ (3 квадрата со стороной 42 мм), $42 = 15 \cdot 2 + 12$ (2 квадрата со стороной 15 мм), $15 = 12+3$ (1 квадрат со стороной 12 мм), $12 = 3 \cdot 4$ (4 квадрата со стороной 3 мм). Итак, длина 3 мм. б) Например, $a = 21$, $b = 13$, при этом $13 = F_7$, $21 = F_8$.

Отметим, что для произвольного n такие a и b можно найти с помощью чисел Фибоначчи (F_{n+2} и F_{n+1}). Напомним, что $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1}+F_n$. При этом построенный прямоугольник $a \times b$ будет иметь наименьшие возможные (при данном n) размеры. Цепная дробь для F_{n+1}/F_n имеет очень простой вид: она состоит из одних единиц.

12.32. $5/8 - 8/13 = 1/104$. Уравнение $13n - 8m = 1$.

12.33. Отложив 19 раз угол в 19°, получим $19 \cdot 19 = 361$, но $361^\circ - 360^\circ = 1^\circ$, т. е. от стороны первого угла до стороны 19-го угла ровно 1°.

12.34. $25x - 36y = 1$ решалось в 12.29.

12.35. Решая уравнение, получим $x = -55 - 13k$, $y = -33 - 8k$. Из условий $x < 0$, $y > 0$ находим $-55/13 < k < -33/4$, что невозможно. Итак, на этой прямой таких точек нет.

12.36. Пусть $(x; y)$ — натуральное решение, тогда $a(b - x) = by$, т. е. by делится на a, откуда $y = na$. Аналогично $x = bm$. Подставляя эти соотношения в уравнение, получим $n + m = 1$.

12.37. Продавец кладет на одну чашку 6 банок, а на другую — 2 гирьки и сахар, всего 8 гирек и банок. $100x+450y = 2500$. Общее решение $x = 25+9p$, $y = -2p$. Если гирьки и банки лежат на одной чашке, то $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и наименьшая сумма $x + y = 25 + 7p = 11$ при $p = -2$. Если гирьки лежат на одной чашке, а банки и сахар на другой, то $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$ и наименьшая сумма $x + (-y) = 25$ при $p = 0$. Если банки на одной чашке, а гирьки и сахар на другой, то $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ и наименьшая сумма 8 при $p = -3$.

12.38. $x = 5p + 3q - 11$, $y = 11 - 5p - 2q$, $z = p$; где p и q — любые целые числа.

12.39. Уравнение $16x + 17y + 40z = 140$ имеет решение $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$.

12.40. Если x, y — цены шалтая и болтая, то $125y < 175x < 126y$. Необходимо найти минимальные x и y, удовлетворяющие неравенствам. Деля на 25, получим $5y < 7x < 126y/25$, т. е. $y > 25$. Рассмотрим $7x-5y = 1$, тогда $x = 3+5p$, $y = 4+7p$. Так как $y > 25$, то $p > 3$. При $p = 4$ получим $x = 23$, $y = 32$, но $3 \cdot 23+32 = 101 > 100$.

12.41. Существуют: числа n и $n + 1$, где $n + 1 = 89\ldots90\ldots0$ (221 девятка и 222 нуля). Ищем решение среди чисел вида $n =$

$= \overline{a9\ldots 9}$ (p девяток). Пусть $s(a)$ — сумма цифр числа a, тогда $s(n) = s(a) + 9p$ и $s(n+1) = s(a) + 1$ должно делится на 1997. Для минимального $s(a) = 1996$ имеем $1996 + 9p = 1997k$, минимальное натуральное решение $k = 2$, $p = 222$.

12.3. Нелинейные уравнения и системы уравнений

12.42. $(-4, 9)$, $(20, -33)$, $(4, -9)$, $(-20, 33)$.

12.43. $(\pm 16, \pm 15)$ (4 решения).

12.44. $(5, 2)$, $(2, 5)$, $(0, -3)$, $(-3, 0)$, $(3, 3)$, $(-1, -1)$.

12.45. $(3, 2)$, $(3, -2)$, $(-3, 2)$, $(-3, -2)$.

12.46. Решений нет $\pmod 4$. **12.47.** Решений нет $\pmod 7$.

12.48. Решений нет $\pmod 3$.

12.49. $(5, 6)$, $(-5, -6)$, $(13, 6)$, $(-13, -6)$.

12.50. $(6, -21)$, $(4, 15)$, $(7, -12)$, $(3, 6)$, $(8, -9)$, $(2, 3)$, $(11, -6)$, $(14, -5)$, $(-1, 0)$, $(-4, -1)$, $(23, -4)$, $(-13, -2)$.

12.51. $(5, 6)$, $(-6, -5)$, $(-3, 4)$, $(-4, 3)$. Положим $n = x - y$, $m = xy$, тогда $n(n^2 + 3m) = 91$.

12.52. $(2, 14)$, $(0, -20)$, $(18, -2)$, $(-16, -4)$. Уравнение приводится к виду $(x-1)(y+3) = 17$.

12.53. 1. $(x-1)(x^2+2x+3) = 0$. Второй множитель корней не имеет: $D = 4 - 4 \cdot 3$.

12.54. $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$.

12.55. Решений нет $\pmod 7$. **12.56.** Решений нет $\pmod 5$.

12.57. Решений нет. $x^2 + y^2$ должно делится на 3, значит, $x = 3n$, $y = 3p$ и $19n^2 + 28p^2 = 81$, откуда p может быть 0 и ± 1.

12.58. $(1, 3)$, $(1, -3)$, $(8, 3)$, $(8, -3)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(9, 1)$, $(9, -1)$.

12.59. Решений нет. Преобразовать к виду $t^2 - 8y = 15$ и рассмотреть по модулю 4.

12.60. Решений нет. Если x и y чётны, то левая часть делится на 4, иначе левая часть нечётна.

12.61. Решений нет $\pmod 3$.

12.62. $(\pm 498, \pm 496)$, $(\pm 78, \pm 64)$ (8 решений).

12.63. Решений нет $\pmod 4$. **12.64.** Решений нет $\pmod 8$.

12.65. $(1, 1, 0)$. Из второго уравнения $xy \geqslant 1$, т. е. x и y одного знака, тогда (из первого уравнения) $x > 0$, $y > 0$.

12.66. Решений нет $\pmod 8$.

12.67. Решений нет. Легко видеть, что y нечётно, т. е. $y = 2t + 1$. Подставляя это, получим $x^2 - 10t^2 - 10t = 6$. Но $x^2 \equiv 0, 1$

(mod 4) и $t^2+t \equiv 0, 2 \pmod 4$, поэтому левая часть не может давать остаток 2 при делении на 4.

12.68. $(0, 50)$, $(50, 0)$, $(2, 32)$, $(32, 2)$, $(8, 18)$, $(18, 8)$. Перенеся в левую часть корень из x и возводя в квадрат, получим $y = 50+x - 10\sqrt{2x}$. Тогда $x = 2a^2$, а так как $x \leqslant 50$, то $a^2 \leqslant 25$. По значениям $a = 0, 1, \ldots, 5$ находим x и y.

12.69. $(1, 2)$, $(2, 1)$.

12.70. $(1, \pm 1)$, $(3, \pm 3)$. При $x > 3$ левая часть $1! + 2! + \ldots + x!$ имеет вид $33 + 10n$, но квадрат числа не может оканчиваться на 3.

12.71. $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$.

Решение 1. Приводя к общему знаменателю, получим, что $xyz > 0$, поэтому из натурального решения можно получить целые решения, заменив значения двух переменных на противоположные. Преобразуя уравнение к виду

$$(xy - xz)^2 + (xz - yz)^2 + (yz - xy)^2 = 2xyz((1-x) + (1-y) + (1-z)),$$

получим (из неотрицательности обеих частей) единственное натуральное решение $(1, 1, 1)$.

Решение 2. По неравенству Коши

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 3\sqrt[3]{xyz} \geqslant 3.$$

Равенство достигается лишь если $xy/z = yz/x = zx/y$ и $xyz = 1$.

12.72. $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$. Преобразовать уравнение к виду $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 2$.

12.73. Решений нет $\pmod 4$.

12.74. $(0, 0, 0)$. x^3 чётно, поэтому x^3 делится на 8. Сокращая на 2, видим, что y^3 чётно, поэтому y^3 делится на 8. Сокращая на 2, получим, что z^3 делится на 8.

12.75. Решений нет $\pmod 9$.

12.76. $(4, 1)$, $(4, -3)$, $(-4, 1)$, $(-4, -3)$. Преобразовать уравнение к виду $(x+y+1)(x-y-1) = 12$.

12.77. Решений нет $\pmod 7$.

12.78. $(0, 0, 0)$. Покажем, что других решений нет. Пусть $x = 2^n x_1$, $y = 2^m y_1$, $z = 2^p z_1$, где x_1, y_1, z_1 — нечётные. Сокращая обе части на 2 в минимальном показателе, получим $v^2 + u^2 + w^2 = 2^a vwu$, при этом среди чисел v, u, w чётное число нечётных. Если нечётны два числа, то левая часть не делится на 4, а правая делится. Все числа быть чётными не могут по построению чисел v, u, w.

12.79. $(0, 0, 0, 0)$. **12.80.** $(0, 0, 0)$. Решение аналогично 12.78.

12.81. Решений нет. n^4 даёт при делении на 16 остаток 0 или 1, поэтому $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4$ даёт остаток, не больший 14, а 1599 даёт остаток 15 при делении на 16.

12.82. $(0, 0)$. Пусть x и y — решение. После ряда возведений в квадрат имеем $\sqrt{x+\sqrt{x}} = m$ и $\sqrt{x} = n$ — целые числа, причём $m^2 = n(n+1)$. Если $n > 0$, то должно быть $n^2 < m^2 < (n+1)^2$, тогда $n < m < n+1$ и m — не целое число. Значит, $n = 0$, т. е. $x = 0$.

12.83. Решений нет. Если x, y и z удовлетворяют уравнениям системы, то $z^2 = 2y^2 + 1$ — нечётное число. Так как квадрат чётного числа есть чётное число, то z — число нечётное: $z = 2m+1$. Используя это представление для числа z, получим $2y^2 = z^2 - 1 = 4m^2 + 4m$, т. е. $y^2 = 2(m^2 + m)$ — чётное число, значит, и y чётное: $y = 2k$. Число $x^2 = y^3 + 7z^4$ нечётное. Поэтому x нечётное: $x = 2n + 1$. Из первого уравнения системы теперь следует, что $4n^2 + 4n + 1 - 8k^3 = 7(z^2)^2 = 7(2y^2+1)^2 = 7(4y^4 + 4y^2 + 1)$. Отсюда $3/2 = n^2 + n - 2k^3 - 7y^4 - 7y^2$, что для целых чисел n, k, y невозможно.

12.84. Используя тождество

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x),$$

запишем данное уравнение в виде $(x-y)(y-z)(z-x) = 10$. Обозначая $a = x-y$, $b = y-z$, $c = z-x$, запишем уравнение в виде $abc = 10$. Кроме того, очевидно, $a + b + c = 0$. Легко видеть, что с точностью до перестановки и выбора знаков из равенства $abc = 10$ следует, что числа a, b, c равны либо ± 1, ± 2, ± 5, либо ± 1, ± 1, ± 10. Но во всех этих случаях при любом выборе знаков сумма $a + b + c$ отлична от нуля. Итак, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

12.85. $(5, 4)$, $(4, 5)$ и $(0, 0)$. Положив $p = x + y$, $q = x - y$ и подставив $x = (p+q)/2$, $y = -(p-q)/2$ в исходное уравнение, получим, что $7p = 3(p^2 + 3q^2)/4$, т. е. $28p = 3(p^2 + 3q^2)$.

Отсюда следует, что p неотрицательно и делится на 3, т. е. $p = 3k$. Подставив $p = 3k$, получим $28k = 3(3k^2 + q^2)$. Отсюда следует, что k делится на 3, поэтому $k = 3m$. Подставив $k = 3m$, получим $28m = 27m^2 + q^2$, $m(28 - 27m) = q^2$. Так как $q^2 \geqslant 0$, то либо $m = 0$, либо $m = 1$. Если $m = 0$, то $k = 0$, $p = 0$, $q = 0$, и, значит, $x = y = 0$. Если же $m = 1$, то $k = 3$, $p = 9$, $q^2 = 1$. При $q = 1$, получаем $x = 5$, $y = 4$, а при $q = -1$ — $x = 4$, $y = 5$.

12.86. $(1,0,3,1)$, $(-1,0,-3,-1)$, $(3,1,1,0)$, $(-3,-1,-1,0)$. Из системы получаем:

$$(xz-2yt)^2+2(xt+yz)^2=(x^2+2y^2)(z^2+2t^2)=11,$$

откуда либо $x^2+2y^2=1$, либо $z^2+2t^2=1$.

12.87. Решений нет. Переписав уравнение в виде $(x+y)^3 = 7(x^2y+xy^2)+4$, получим $(x+y)^3 \equiv 4 \pmod 7$, что невозможно.

12.88. Решений нет. Если x и y удовлетворяют данному уравнению, то $x^5 > y^5$ и, значит, $x > y$. Запишем данное уравнение в виде

$$(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=1993.$$

Поскольку 1993 — простое число, а $x-y>0$, то $x-y$ равно 1 или 1993. Первый случай невозможен, так как $1993 \equiv 3 \pmod 5$, а левая часть исходного уравнения (при $x-y=1$) имеет вид $(y+1)^5 - y^5 = 5(y^4+2y^3+2y^2+y)+1 \equiv 1 \pmod 5$. Второй случай также невозможен: второй множитель в уравнении должен быть равен 1, однако

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=(x^3+y^3)(x+y)+x^2y^2=\\ =(x+y)^2(x^2-xy+y^2)+x^2y^2 \geqslant x^2y^2>1.$$

12.89. $(\pm1,0)$, $(\pm4,3)$, $(\pm4,5)$. Правая часть неотрицательна, значит, $y \geqslant 0$, откуда левая часть не меньше $(2y-1)^2$ (модуль разности y^2 и любого квадрата целого числа не меньше $(2y-1)$). Из $(2y-1)^2 \leqslant 1+16y$ имеем $y \leqslant 5$.

12.90. $(-9,\pm12)$, $(-4,\pm12)$, $(1,\pm12)$, $(-8,0)$, $(-7,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$. Положим $z=x^2+8x$, тогда $z^2+7z=y^2$. При $z>9$ имеем $(z+3)^2<z^2+7z=y^2<(z+4)^2$, т. е. число y^2 заключено между квадратами двух последовательных чисел, что невозможно. Поэтому $x^2+8x=z\leqslant 9$, откуда $-9\leqslant x\leqslant 1$. Далее перебираем $x=-9,\ldots,1$.

12.91. $(0,-1)$, $(-1,-1)$, $(0,0)$, $(-1,0)$, $(5,2)$, $(-6,2)$. Умножив обе части уравнения на 4 и прибавив к ним 1, получим

$$(2x+1)^2=(2y^2+y)^2+3y^2+4y+1=(2y^2+y+1)^2-(y^2-2y).$$

Если y отлично от -1, 0, 1 и 2, то $3y^2+4y+1>0$ и $y^2-2y>0$, при этом $(2y^2+y)^2<(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2$. Эти неравенства означают, что $(2x+1)^2$ лежит между двумя последовательными квадратами, а при это при целых x невозможно.

12.92. $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(2,6)$, $(2,-6)$, $(3,12)$, $(3,-12)$.

12.93. Положим $x=n^2-1$, тогда $y=n(n^2-1)$.

12.94. 15 решений. После возведения в квадрат получим $y = 1960 + x - 28\sqrt{10x}$, тогда $x = 10a^2$ (a — целое) и $\sqrt{y} = (14 - a)\sqrt{10}$. Таким образом, получаем 15 решений при $a = 0, \ldots, 14$.

12.95. Избавимся от двух кубов с помощью подстановки $z = -x$. Получим $2x^2 + y^2 = y^3$, $2x^2 = (y-1)y^2$. Решение найдется, если $(y-1)/2$ будет квадратом, тогда $y = 2k^2 + 1$, $x = k(2k^2 + 1)$.

12.96. При делении на 8 квадраты натуральных чисел дают остатки 0, 1 или 4. Тогда, сумма двух квадратов (следовательно, и $a^2 + b^2 - 8c$) не может давать остатка 6 при делении на 8.

12.97. Пусть данное уравнение имеет решение для конечного числа простых чисел $p_1, \ldots, p_n$. Пусть $P = p_1 \ldots p_n$. Тогда число $P^2 + P + 1$ не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$ и, значит, имеет простой делитель q, не совпадающий ни с одним из этих чисел. Отсюда уравнение $x^2 + x + 1 = qy$ имеет целое решение $(P, (P^2 + P + 1)/q)$.

12.98. а) Обозначим левую часть уравнения через $P(x, y)$. Её можно переписать так:

$$\begin{aligned}P(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y-x)^3 - 3(y-x)x^2 - x^3 = \\ = -y^3 + 3y(x-y)^2 + (x-y)^3.\end{aligned}$$

Значит, $P(x,y) = P(y-x, -x) = P(-y, x-y)$. Поэтому если пара чисел (x, y) является решением данного уравнения, то ему удовлетворяют также ещё две пары: $(y-x, -x)$ и $(-y, x-y)$. Все эти три пары различны, так как в противном случае $x = y = 0$, что невозможно при $n \neq 0$.

б) Чтобы убедиться в том, что это уравнение не имеет целых решений, достаточно доказать, что его левая часть ни при каких целых x и y не дает при делении на 9 остаток 2, поскольку $2891 = 9 \cdot 321 + 2$. Для доказательства воспользуемся таблицей, в которой приведены всевозможные остатки от деления на 9 чисел a, $3a$ и a^3.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$3a$	0	3	6	0	3	6	0	3	6
a^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8

К 12.98

Из таблицы видно, что остаток 2 в левой части уравнения может получиться тогда и только тогда, когда остатки от деления x^3, $3xy^2$ и y^3 на 9 соответственно равны 1, 0, 1; 0, 6, 8 или 8, 6, 0. В первом случае $3xy^2$ делится на 9, поэтому x или y делится на 3 и не может давать при делении на 9 остаток 1. Во втором и третьем случаях соответственно x или y делится на 3, поэтому $3xy^2$ делится на 9 без остатка, а не дает остаток 6, как нам требуется.

Показательные уравнения

12.99. $(0, 1991)$. При $x > 0$ левая часть меньше 2, при $x < 0$ левая часть нечётна.

12.100. Решений нет $\pmod 5$.

12.101. $(0, 1)$, $(1, 2)$. При $x \not\equiv 0 \pmod 3$ имеем $y = 2p$, тогда $3^x = (2^x - 1)(2^x + 1)$, отсюда $2^x - 1 = 1$.

12.102. $(0, 0)$, $(1, 2)$. Записывая уравнение в виде $(1+x)(1+x^2) = 2^y$, получим $1+x = 2^m$, $1+x^2 = 2^{y-m}$, или, подставляя, $2^{y-m-1} \times (1 + 2^{2m-y+1} - 2^{3m-y}) = 1$, и при $m > 0$ имеем $y - m - 1 = 0$ и $2m - y + 1 = 3m - y$ или $m = 1$, $y = 2$, $x = 1$. А при $m = 0$ имеем $x = y = 0$.

12.103. $(4, 2)$, $(2, 4)$, (n, n), где n — натуральное. Пусть (x, y), где $x \geqslant y$ — решение. Тогда ясно, что в разложении x и y должны участвовать только одинаковые простые множители, т. е. $x = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ и $y = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$. Подставляя в уравнение, имеем: $\alpha_1/\beta_1 = \ldots = \alpha_k/\beta_k = a/b \geqslant 1$, тогда $x = y^{a/b}$. Подстановка в уравнение дает $ay/b = y^{a/b}$ или $a/b = y^{a/b-1}$, откуда $b = 1$ и $a = y^{a-1}$. Легко показать по индукции, что $a < 2^{a-1}$ при $a > 2$, поэтому $a < y^{a-1}$ (при $y > 2$). Для $a = 2$ и $a = 1$ получаем ответ.

12.104. $(1, \pm 3)$. По модулю 2 имеем $y = 2p + 1$.

12.105. $(3, \pm 3)$. $2^x = (y-1)(y+1)$. Отсюда $y-1 = 2^p$, $y+1 = 2^n$ (достаточно рассмотреть $y \geqslant 0$) и $p < n$. Тогда $2^n - 2^p = 2$, т. е. $2^p(2^{n-p} - 1) = 2$, откуда $n - p = 1$, $p = 1$.

12.106. $(0, \pm 2)$, $(3, \pm 5)$, $(4, \pm 7)$. При $y = 3p + 2$ имеем:

$$2^x = (3p + 1)(p + 1).$$

Подходят $p = 0, 1$, а при $p \geqslant 2$ получим $4(p+1) > 3p+1 > 2(p+1)$, значит, $p + 1$ и $3p + 1$ — не степени 2 одновременно. Аналогично рассматривается случай $y = 3p + 1$.

Уравнения в цифрах

12.107. а) $x = 3$, $y = 4$. $100 \leqslant (x + y)^3 < 1000$ или $5 \leqslant x + y \leqslant 9$, далее действуем перебором. б) $x = 5$, $y = 1$, $z = 2$.

12.108. $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$. Сумма $x + y + z \leqslant 27$ и является делителем 1000, т. е. она может быть равна 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25.

12.109. 145, 150, 295. Основание другой системы — 15. Пусть x, y, z — цифры сотен, десятков, единиц, c — основание новой системы счисления. Тогда $2(100x + 10y + z) = c^2x + cy + z$, откуда $(200 - c^2)x + (20 - c)y + z = 0$. Если $0 < c \leqslant 14$, то

$$(200 - c^2)x + (20 - c)y + z \geqslant 4x + 6y + z \geqslant 4,$$

если же $c \geqslant 16$ —

$$(200 - c^2)x + (20 - c)y + z \leqslant -56x + 4y + z \leqslant -56 + 36 + 9 = -11.$$

Поэтому $c = 15$. Подставляя его в уравнение, имеем: $-25x + 5y + z = 0$. Отсюда $z = 0$ или 5.

Уравнения в натуральных числах

12.110. 14. Пусть x и y — число сороконожек и драконов, n — число ног у дракона. Тогда $x+3y = 26$, $40x+ny = 298$. Из второго уравнения $x \leqslant 7$, а из первого — $x \equiv 2 \pmod 7$. Подставляя такие x в уравнения, находим только одно целое n — 14 (при $x = 5$).

12.111. Один — первое, двое — второе и двое — третье.

12.112. Пусть спортсмен x раз попал в восьмёрку, y раз — в девятку, z раз — в десятку. По условию задачи $8x+9y+10z = 100$. Отсюда следует, что $8x + 8y + 8z = 8(x + y + z) < 100$, т. е. число выстрелов $x + y + z < 100/8 < 13$. Так как $x + y + z > 11$, то получаем, что $x + y + z = 12$. Но тогда уравнение принимает вид $y + 2z = 4$. Отсюда следует, что y — чётное число, $y = 2t$, $t \geqslant 1$, т. е. $t+z = 2$. Так как $t \geqslant 1$ и $z \geqslant 1$, то единственной возможностью являются равенства $t = 1$, $z = 1$, т. е. $y = 2$, и, значит, $x = 9$, $z = 1$.

12.113. $(1, 2, 3)$. Пусть $x < y < z$. Тогда $x+y < 2z$, $(x+y)/z < 2$, откуда $x + y = z$. Отсюда $x + z = 2x + y$ и $2x$ делится на y. Но $2x < 2y$, значит, $y = 2x$ и $x = 1$.

12.114. Нет. Так как порядок замены знаков не важен, считаем, что вначале поменяли знаки в n строках, затем в p столбцах. Число минусов стало $(n+p)100-np = 1970$, т. е. $(100-n)(100-p) = 8030$, при этом $1 \leqslant n, p \leqslant 100$, но таких n и p нет, поскольку $8030 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 73$ нельзя разложить на два множителя, каждый из которых меньше 100.

12.115. $(5, 4, 7)$. Пусть x, y, z — число рыбаков в группах. Тогда имеем $13x + 5y + 4z = 13$, $x + y + z = 16$. Отсюда получим $9x = 49 - y$. Так как $y = 16 - x - z < 16$, то $33 \leqslant 49 - y \leqslant 49$, и $49 - y$ делится на 9. Но $9x = 36$ ($x = 4$, $y = 13$, $z = -1$) — невозможно, поэтому $9x = 45$, откуда $x = 5$, $y = 4$, $z = 7$.

12.116. $(1,1,1)$, $(2,1,1)$, $(3,2,1)$, $(7,3,2)$. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$. При $c=1$ получим три первых решения. Пусть $c \geqslant 2$. Заметим, что a, b, c попарно взаимно просты. Если, например, p — делитель a и b, то p — делитель ac и b и $ac+1$ не делится на p, а тем более на b, значит, $a > b > c$. Число $s = ab+ac+cb+1$ делится на каждое из чисел a, b и c, а в силу их взаимной простоты и на их произведение, поэтому $s \geqslant abc$. Если $b \geqslant 4$, то $a \geqslant 5$, $abc \geqslant 40$ и

$$s = ab+ac+cb+1 \leqslant abc/2 + abc/4 + abc/5 + 1 = \\ = abc - abc/20 + 1 \leqslant abc - 40/20 + 1 < abc.$$

Значит, $b < 4$, откуда $c = 2$ и $a = 7$.

12.117. Кубиков может быть 60, 72, 84, 90, 120. Пусть параллелепипед имеет размеры $m \times n \times p$ $(m \geqslant n \geqslant p)$. Всего неокрашенных кубиков будет $(m-1)(n-1)(p-1)$. Тогда

$$mnp = 2(m-1)(n-1)(p-1),$$

откуда $2 < p < 5$. (Если $p \geqslant 5$, то $2 \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{p-1}{p} \geqslant 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 > 1$.) Далее при $p = 3$ и $p = 4$ решаем уравнение относительно m и n.

12.118. 7 дней. Пусть n и p — число дней, когда дежурило 9 и 10 богатырей, причём каждый из них дежурил m раз. Тогда $9n + 10p = 3m$. При $m = 1$ нет решений, при $m = 2$ получим $n = 4$, $p = 3$.

12.119. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Следует из единственности разложения в цепную дробь.

12.120. $(2,2,1)$, $(1,1,2)$. Пусть $x \leqslant y$, тогда $xyz \leqslant 2y$, т. е. $xz \leqslant 2$, откуда $x \leqslant 2$, $z \leqslant 2$.

12.121. $\{x,y,z\} = \{1,2,3\}$ (6 решений). Пусть $x \leqslant y \leqslant z$, тогда $xyz \leqslant 3z$, т. е. $xy \leqslant 3$.

12.122. $\{x,y,z\} = \{1,2,3\}$ (6 решений).

12.123. а) $\{x,y,z\} = \{2,3,6\}$, $\{2,4,4\}$, $\{3,3,3\}$;

б) $\{x,y,z\} = 1, a, -a$ $(a \neq 0)$.

12.124. $(x,y,z,t) = (3,2,5,1)$, $(2,3,5,1)$, $(3,2,1,5)$, $(2,3,1,5)$, $(1,5,3,2)$, $(5,1,3,2)$, $(1,5,2,3)$, $(5,1,2,3)$ и $(2,2,2,2)$. Сложив уравнения, после преобразований получим:

$$(x-1)(y-1) + (z-1)(t-1) = 2.$$

Либо оба слагаемых равны 1, либо одно равно 2, а другое — 0.

12.125. $(4,1,6,5)$, $(6,5,4,1)$. Возведем уравнения в квадрат и сложим их: $(a^2+d^2)(b^2+c^2) = 1517 = 37 \cdot 41$. Множители 37 и 41 — простые и единственным образом представляются в виде суммы квадратов: $37 = 1^2 + 6^2$, $41 = 4^2 + 5^2$.

12.126. $(1,3)$, $(3,5)$. Пусть $y \geqslant 6$. Тогда $3^x + 5 \equiv 0 \pmod{64}$, что верно лишь при $x = 16n + 11$. Но $3^{16n+11} + 5 \equiv 12 \pmod{17}$, а $2^y \not\equiv 12 \pmod{17}$. Осталось проверить $y = 1, \ldots, 5$.

12.127. $(2;1;1)$. Пусть x, y, z удовлетворяют данной системе уравнений. Тогда из первого уравнения системы следует, что $y < x$ и $z < x$. Так как x, y, z натуральны, то $y \leqslant x - 1$, $z \leqslant x - 1$. Из этих неравенств и второго уравнения данной системы следует, что $x^2 \leqslant 2(x-1+x-1)$, $(x-2)^2 \leqslant 0$, откуда $x = 2$. Так как $y \leqslant x-1 = 1$, то $y = 1$. Аналогично находим, что $z = 1$. Подстановкой в данную систему убеждаемся, что тройка $(2;1;1)$ является решением системы. Других решений данная система не имеет.

12.128. Доказательство проведём методом от противного. Пусть существуют такие натуральные числа m, n, p, что $m^m+n^n = p^p$. Тогда $p^p > m^m$, $p^p > n^n$. Из этих неравенств следует, что $p > m$ и $p > n$. (Действительно, если бы, например, $p \leqslant m$, то $p^p \leqslant m^p \leqslant m^m$, что противоречит неравенству $p^p > m^m$.) Значит, $p \geqslant m+1$, $p \geqslant n+1$. Поэтому $p^p \geqslant (m+1)^{m+1} = (m+1)(m+1)^m \geqslant 2(m + 1)^m > 2m^m$, т. е. $p^p > 2m^m$ и, аналогично, $p^p > 2n^n$. Складывая эти неравенства, получаем $2p^p > 2m^m + 2n^n$. Противоречие.

12.129. $(5,6)$. Положим $x - y = p$, тогда $p^3 \leqslant (3p - 1)y^2 + (3p^2 - p)y + p^3 = 61$, значит $p \leqslant 3$.

12.130. $(11,6)$. $2^y(2^{x-y} - 1) = 1984 = 2^6 \cdot 31$.

12.131. Любая пара чисел, определённая рекуррентным способом: $x_1 = 50$, $y_1 = 7$, $x_{n+1} = 50x_n + 357y_n$, $y_{n+1} = 7x_n + 50y_n$.

12.132. $(1,1)$ и $(2,4)$. Данное уравнение равносильно уравнению
$$(7^x - 1)/(7 - 1) = 2^{y-1},$$
или
$$7^{x-1} + 7^{x-2} + \ldots + 1 = 2^{y-1}.$$
Отсюда вытекает, что $y > 0$. Пара $(1,1)$ является решением уравнения. Если $y > 1$, то справа в уравнении стоит чётное число, а слева — сумма нечётных чисел в количестве x. Значит, x — чётное число и уравнение можно записать в виде
$$(7 + 1)(7^{x-2} + 7^{x-4} + \ldots + 7^2 + 1) = 2^{y-1},$$
или
$$7^{x-2} + 7^{x-4} + \ldots + 1 = 2^{y-4}.$$
Отсюда вытекает, что $y > 3$. Пара $(2,4)$ является решением уравнения. При $y > 4$ справа в уравнении стоит чётное число, а слева — сумма нечётных чисел в количестве $(x/2)$. Значит, $(x/2)$ —

чётное число, т. е. число x делится на 4, и уравнение можно записать в виде

$$(7^2+1)(7^{x-4}+7^{x-8}+\ldots+7^4+1)=2^{y-4}.$$

Левая часть этого уравнения делится на 5 (т. к. $7^2+1=50$), а правая часть — нет. Значит, уравнение при $y>4$ не имеет решений в натуральных числах.

12.133. Рассматривая остатки при делении на 3 получаем, что y чётно. Пусть $y=2t$, тогда $2^{2t}=x^2+615$ и $(2^t-x)(2^t+x)=615=3\cdot5\cdot41$. Осталось представить 615 в виде произведения двух множителей, сумма которых равна степени 2, что можно сделать единственным образом: $615=123\cdot5$, откуда $t=6$, $x=59$, $y=12$.

12.134. Пусть $x=kn$, $y=np$, $z=kp$, где k, n, p — натуральные числа. Для таких чисел произведение любых двух делится на третье, значит, числа будут искомыми, если $kn-np+kp=1$, т. е. $kp=n(p-k)$. Рассмотрим те решения, для которых $p-k=1$, тогда $p=k+1$, $n=k^2+k+1$. Итак, получена бесконечная серия решений: $x=k(k^2+k+1)$, $y=(k^2+k+1)(k+1)$, $z=k(k+1)$.

12.135. Поскольку $1991=11\cdot181$, ищем требуемое разложение в виде $1/1991=1/x+1/(11x)+1/(181x)$. Отсюда $x=11+181+1991=2183$.

Замечание. Существуют и другие тройки чисел, удовлетворяющие условию задачи, например: $1/2123+1/13937+1/384263=1/1991$.

12.136. а) Решение 1. Решение $(13;3;14)$ данного уравнения порождает бесконечную серию его решений вида $(k^3 13;k^2 3;k^3 14)$, где $k\in\mathbb{N}$

Решение 2. Запишем уравнение в виде $y^3=z^2-x^2$. Так как $y^3=((y^3+1)/2)^3-((y^3-1)/2)^3$, то при нечётном $y>1$ можно взять $z=(y^3+1)/2$, $x=(y^3+1)/2$. Таким образом, любая тройка $((y^3-1)/2;y;(y^3+1)/2)$, где y — нечётное число, $y>1$, является решением данного уравнения. б) Решение $(2^8;2^6;2^5)$ данного уравнения порождает бесконечную серию его решений вида $(k^{20}2^8;k^{15}2^6;k^{12}2^5)$.

12.137. $a=1$ (февраль), $b=4$ (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь), $c=7$ (остальные месяцы года).

12.138. Пусть $a+b+c\leqslant 11$. Тогда $28a+30b+31c\leqslant 11\cdot31=341$. Противоречие. Пусть $a+b+c\geqslant 13$. Тогда $28a+30b+31c\geqslant 13\cdot28=364$, причём равенство достигается только при $a=13$, $b=c=0$. Во всех остальных случаях $28a+30b+31c\geqslant 366$. Противоречие. Остаётся единственный случай $a+b+c=12$.

12.139. $(a, b, m, n) = (2^r, 2^r, 2r, 2r+1)$ для любого натурального r. Так как $a^2 + b^2 - 2ab > ab$, то $m < n$. Пусть $d = \text{НОД}(a; b)$, тогда $a = dA$, $b = dB$, $(A^2 + B^2)^m = (AB)^n d^{2(n-m)}$. Если p — делитель A, то он должен быть делителем B. Но A и B взаимно просты, поэтому $A = 1$. Аналогично, $B = 1$. Так как $2(n-m) > 1$, то d — делитель $(A^2 + B^2)^m = 2^m$, т. е. d — степень 2. Значит, $a = b = 2^r$ для некоторого r. Из соотношения $(2r+1)m = 2rn$ и взаимной простоты $2r+1$ и $2r$ имеем $m = 2Mr$, $n = (2r+1)N$. Отсюда $M = N$, но m и n взаимно просты, поэтому $M = N = 1$.

Уравнения в простых числах

12.140. $(2, 2, 5)$. Так как $z > 2$ и простое, т. е. нечётное, то x — чётное, т. е. $x = 2$.

12.141. Решений нет. Из $y^3 = (z^2 - x)(z^2 + x)$ и простоты y получаем либо $z^2 - x = 1$, $z^2 + x = y^3$, либо $z^2 - x = y$, $z^2 + x = y^2$. У этих систем решений в простых числах нет. Действительно, в первом случае имеем $x = (z-1)(z+1)$, откуда $z = 2$, $x = 3$, $y^3 = 7$. Во втором случае имеем $2x = y(y-1)$, поэтому если $y - 1 > 3$, то x — составное (т. к. тогда $(y-1)/2$ — целое, большее 1). В случае $y = 2$ имеем $x = 1$, а при $y = 3$ — $z^2 = 6$.

12.142. $(3, 3, 5)$. Из $2^{x+1} = (z-y)(z+y)$ имеем $z = 2^{n-1} + 2^{x-n}$, $y = 2^{x-n} - 2^{n-1}$, где n — целое. При $n - 1 \geqslant 1$ y и z — два чётных числа и они не могут быть одновременно простыми. Если $n = 1$, то $z = 2^{x-1} + 1$, $y = 2^{x-1} - 1$ — два последовательных нечётных числа, значит одно из них делится на 3, тогда либо $z = 3$, либо $y = 3$. При $z = 3$, $y = 1$ — не простое.

Общие уравнения второй степени с двумя неизвестными

12.143. Легко проверить, что формулы в задаче задают пифагорову тройку. Пусть у пифагоровой тройки $\text{НОД}(x; y; z) = 1$ и для определённости x чётно, а y и z нечётны. Тогда $x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y) = (2a)(2b)$, где $a = (z+y)/2$, $b = (z-y)/2$ — целые числа. Числа a и b взаимно просты: если бы они имели общий делитель, больший 1, то такой же делитель имели бы и числа $z = a + b$, $y = a - b$ и x, т. е. $\text{НОД}(x; y; z) \neq 1$. Раскладывая a и b в произведения простых множителей, заметим, что любой множитель должен входить в произведение $4ab = x^2$ только в чётной степени, причём если он входит в разложение a, то не входит в разложение b и наоборот. Поэтому сами числа a и b являются квадратами целых чисел. Положим $m=\sqrt{a}$, $n=\sqrt{b}$, тогда получим равенства $y=a-b=m^2-n^2$, $z=a+b=m^2+n^2$ и $x=2mn$.

13. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА. ТЕОРЕМЫ ФЕРМА И ЭЙЛЕРА

13.1. а) Например: $2+2-2-2=0$, $(2+2):(2+2)=1$, $(2:2)+(2:2)=2$, $(2+2+2):2=3$, $2\cdot2+(2-2)=4$, $2\cdot2+2:2=5$, $2\cdot2\cdot2-2=6$, $2+2+2+2=8$, $22:2-2=9$, $2\cdot2\cdot2+2=10$; б) Нет.

13.2. а) $99+99/99$, б) $91+5742/638$.

13.3. $97524/10836$.

13.4. а) n раз, поскольку это произведение равно

$$\frac{1\cdot2\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}=\frac{(1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1))\cdot(2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}=$$
$$=1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot2^n,$$

б) Так как среди чисел $1,\ldots,1984$ на 2 делится $[1984/2]=992$ числа, на 4 — $[992/2]=496,\ldots$, на 2^{10} — $[3/2]=1$, то двойка входит в это разложение

$$992+496+248+124+62+31+15+7+3+1=1979 \text{ раз.}$$

13.5. а) $(((((((1:2):3):4):5):6):7):8):9=1/(2\cdot3\cdot\ldots\cdot9)$.

б) $1:(((((((2:3):4):5):6):7):8):9)=3\cdot2\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$.

13.6. Наименьшее число — $1112213\ldots199222\ldots899991$, наибольшее — $9988997\ldots911888\ldots211119$. Их сумма равна $1\ldots10$ (162 единицы и 1 ноль).

13.7. а) 00000123450, б) 99999785960.

13.8. 1941, 470. **13.9.** 3087.

13.10. а) $9=(x+1/x)^2$, $x^2+(1/x)^2=7$, б) 24.

13.11. Индукция.

13.12. а), б) Приведем все слагаемые в суммах M и N к общему знаменателю и рассмотрим ту дробь, в знаменателе которой стоит самая высокая степень 2 (такая дробь только одна). Тогда у этой дроби дополнительный множитель — число нечётное. У всей суммы M (или N) знаменатель — чётное число, а числитель — нечётное, так как состоит из суммы чётных чисел и одного нечётного. в) Рассмотрим в K дробь с самой высокой степенью 3 в знаменателе. Аналогично получим, что знаменатель в K делится на 3, а числитель — не делится.

13.13. 2, 3, 5, 7 и 11. Любое p, большее 11, можно записать в виде $p = (p - 9) + 9$.

13.14. $1, 2, \ldots, 12, 14$. Поскольку $1 + \ldots + 12 + 13 = 91$, лишь одно число больше своего номера при упорядочивании по возрастанию.

13.15. Разобьём натуральные числа на группы по три числа:

$$(1, 2, 3), \ldots, (34, 35, 36), (37, 38, 39), \ldots$$

В первых 12 группах находятся 11 простых чисел, а в каждой из следующих не больше одного простого, так как последнее число в каждой группе делится на 3, а из двух других одно чётно. Поэтому при $n \geqslant 12$ число p_n находится в $(n+1)$-й группе или ещё дальше, что и означает, то $p_n > 3n$.

13.16. а) Да, например, 7125. б) Нет. Пусть x — зачёркиваемая цифра, n — число остальных цифр, y — число, остающееся после зачёркивания. Тогда $10^n x + y = 58y$ или $10^n x = 57y$. Но 57 имеет простой множитель 19, которого слева нет.

13.17. 105263157894736842.

13.18. $1 \ldots 12 \ldots 2 = \underbrace{1 \ldots 1}_{100} \cdot (10^{100} + 2) = \underbrace{3 \ldots 3}_{100} \cdot \underbrace{3 \ldots 34}_{100}$.

13.19. -20. Из условия $a + b + c = 100$ и $a + b/2 = 80$. Вычитая первое уравнение из второго, получим $a - c = -20$.

13.20. $(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \ldots + (n-1)(a_{n-1} - a_n) + na_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

13.21. 30 и 35. Пусть ненулевых чисел — n, из них p отрицательны, $(n - p)$ положительны. Тогда отрицательные произведения получатся при умножении отрицательного числа на положительное, т. е. всего $p(n - p) = 1000$ и $p \geqslant 1$, $n - p \leqslant 100$. У уравнения два решения: $n = 70$ и $n = 65$.

13.22. 100 для чисел, оканчивающихся на 2 нуля.

$$(100a + 10b + c)/(a + b + c) = (99a + 9b)/(a + b + c) + 1 \leqslant$$
$$\leqslant (99a + 9b)/(a + b) + 1 = 90a/3(a + b) + 9 + 1 \leqslant 90a/a + 10 = 100.$$

13.23. 6210001000. Из условия $a_1 + \ldots + a_{10} = 10$.Обозначим $a_1 = n$, по условию, среди цифр числа ровно n нулей, значит, эти нули и цифра n занимают $n+1$ разряд в числе, а сумма этих цифр равна n. Поэтому оставшиеся $10 - (n+1) = 9 - n$ цифр (заведомо не нули) в сумме дают $10 - n$, т. е. сумма этих цифр больше их количества, что возможно лишь, если одна из этих цифр — 2, а остальные $8 - n$ цифр — 1. Итак, $a_1 = n$, $a_2 = 8 - n$, $a_3 = 1$, откуда $a_1 + a_2 + a_3 = 9$, значит, $a_4 + \ldots + a_{10} = 1$, т. е. среди последних цифр одна 1, остальные шесть — 0.

13.24. При нечётном k. Пусть $n+1,\ldots,n+k$ и $m+1,\ldots,m+k$ — две группы чисел. При их сложении получим $p+1,\ldots,p+k$, сумма которых равна сумме всех чисел заданных групп: $(2p+k+1)k/2=(2n+k+1)k/2+(2m+k+1)k/2$, т. е. $2(p-n-m)=k+1$, откуда k должно быть нечётным. Решение при нечётном $k=2q-1$: $n+1,n+3,\ldots,n+2q-1$; $n+2,\ldots,n+2q-2$ и $m+q,m+q-1,\ldots,m+1$; $m+2q-1,\ldots,m+q+1$.

13.25. Пусть A — максимальное множество, которое можно получить. Тогда в нем чередуются чётные и нечётные числа. Легко видеть, что любой (не крайний) элемент равен среднему арифметическому своих соседей, т. е. A является арифметической прогрессией, содержащей n и m. А так как n и m делятся на разность прогрессии, то разность равна 1. Значит, мы получим все числа от 0 до n.

13.26. Пусть M — не степень 2, тогда $M=2^n(2m+1)$. Найдем натуральные a и p, для которых $a+\ldots+(a+p-1)=M$. При $2^n>m$: $a=2^n-m$, $p=2m+1$; при $2^n\leqslant m$: $a=m+1-2^n$, $p=2^{n+1}$. Пусть $M=a+(a+1)+\ldots+(a+k)=(2a+k)(k+1)/2$, тогда $(2a+k)-(k+1)=2a-1$ — нечётно, поэтому одно из чисел чётно, а другое — нечётно и M — не степень 2.

Отметим, что только в случае, если число простое, разложение его в сумму последовательных натуральных чисел единственно.

13.27. 8 способами. Пусть $(p+1)+\ldots+(p+n)=1971$ или $(2p+n+1)n=2\cdot 3^3\cdot 73$. Так как $2p+n+1>n$ и $73>2\cdot 3^3$, то 73 — не делитель n, поэтому $n=1,2,3,6,9,18,27,54$.

13.28. 3025. Квадрат может оканчиваться только на 5, значит, на 25.

13.29. а) $(1996(1996+1)+1)^2$, б) Это число равно $(1994^2-5)^2$, т. к. $(a-3)(a-1)(a+1)(a+3)+16=(a^2-5)^2$.

13.30. $(n-1)n(n+1)(n+2)+1=(n^2+n-1)^2$.

13.31. а) $\underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{5\ldots5}_{n-1}6=\underbrace{3\ldots3}_{n-1}4^2$, поскольку

$$\underbrace{3\ldots3}_{n-1}4^2=(\underbrace{9\ldots9}_{n}/3+1)^2=((10^n-1)/3+1)^2=$$
$$=((10^{2n}-1)+4(10^n-1))/9+1=1\ldots15\ldots56,$$

б) $\underbrace{4\ldots4}_{n}\underbrace{8\ldots8}_{n-1}9=\underbrace{6\ldots6}_{n-1}7^2$.

13.32. $10\ldots030\ldots030\ldots1=(10\ldots01)^3$ (по n нулей).

13.33. $\underbrace{1\ldots1}_{2000}-\underbrace{2\ldots2}_{1000} = \underbrace{1\ldots1}_{1000}\underbrace{0\ldots0}_{1000}-\underbrace{1\ldots1}_{1000} = (10^{1000}-1)\times$ $\times\underbrace{1\ldots1}_{1000} = (10^{1000}-1)^2/9 = \underbrace{3\ldots3}_{1000}{}^2$.

13.34. Может: $(999^2-499)+\ldots+(999^2+499) = 999^3$.

13.35. Пусть $x=a^2+b^2$, $y=c^2+d^2$. Тогда $xy=(ac+bd)^2+$ $+(bc-ad)^2$.

13.36. Нет. Соотношение $m^2+(m+1)^2=n^4+(n+1)^4$ преобразуется к виду $m(m+1)=(n(n+1))\cdot(n(n+1)+2)$. Остаётся доказать, что произведение двух последовательных чисел не может равняться произведению двух чисел, отличающихся на 2.

13.37. $N=10^n$. Пусть N — p-значное число, т. е. $10^{p-1}\leqslant N<$ $<10^p$. Тогда

$$10^{2p-2}\leqslant N\cdot10^{p-1}\leqslant N^2<N\cdot10^p<10^{2p},$$

поэтому N^2 — число $(2p-1)$-значное либо $2p$-значное. Пусть оно $(2p-1)$-значно. Тогда $N^2=N\cdot10^{p-1}+N_1$, или $N(N-10^{p-1})=$ $=N_1$, где N_1 не более чем $(p-1)$-значно. Если $N-10^{p-1}\neq0$, то $N(N-10^{p-1})\geqslant N\geqslant10^{p-1}$ — по крайней мере p-значное число. Поэтому $N-10^{p-1}=0$.

Пусть теперь оно $2p$-значно. Аналогично получим $N(N-10^p)=$ $=N_1$, где N_1 не более чем p-значно. Но $N<10^p$, поэтому N_1 отрицательно, что невозможно.

13.38. Пусть $\overline{a\ldots f}$ — данный набор p цифр. Рассмотрим два числа: $N_1=\overline{a\ldots f0\ldots0}$ и $N_2=\overline{a\ldots f9\ldots9}$ (по p цифр $a\ldots f$ и $3p$ нулей и девяток). Пусть n^2 такой наибольший квадрат, что $n^2<N_1$. Ясно, что $n<10^{2p}$. Тогда $N_1<(n+1)^2=n^2+2n+1<$ $<N_1+2\cdot10^{2p}+1<N_1+10^{3p}-1=N_2$. Поэтому $(n+1)^2$ — искомый квадрат.

13.39. Покажем, что если числа a, b и c не имеют общего делителя, то abc — полный квадрат. Пусть p — простое число и c делится на p^n, тогда из равенства $ab=-c(a+b)$ следует, что одно из чисел a и b делится на p^n, а другое не делится на p; значит, abc делится на p^{2n}. Аналогично рассуждая про делители a и b, получим, что любое простое число входит в произведение abc в чётной степени. Если у чисел a, b, c есть общий делитель, то он войдет в произведение в кубе.

13.40. 10 квартир с суммой цифр 9.

13.41. 44, 50, 47. При двузначном B получим 47.

13.42. 49. Докажите, что больше и меньше 49 не может быть.

13.43. Да, например $1\ldots1$ (50 единиц). **13.44.** 95 210.

13.45. Например число, где стоят 1 в разрядах $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{1000}$, а в остальных разрядах — 0. Его сумма цифр 1001. При возведении в квадрат получим 1 в разрядах с номером 2^{2i} $(i = 0, 1, \ldots, 1000)$, 2 — в разрядах 2^{i+j} $(i, j = 0, 1, \ldots, 1000,\ i \neq j)$ и 0 в остальных разрядах. Сумма цифр этого квадрата равна 1001^2.

13.46. 201. Пусть $n(A)$ — число цифр, равных A. Из условия следует, что если цифры B и C симметричны относительно середины числа, то $n(B) = C$ и $n(C) = B$. Но тогда эти цифры всюду должны стоять на симметричных местах, поэтому $n(B) = n(C)$ и $B = C$. Отсюда, $n(A) = A$, причём цифра на 15-м (среднем) месте встречается нечётное число раз, а все остальные цифры — чётное число раз. Но тогда Значит, в нашем числе ровно 2 двойки, 4 четвёрки, 6 шестёрок, 8 восьмёрок и 9 девяток. Сумма его цифр равна 201.

13.47. Если $s(X)$ — сумма цифр X, то можно вывести, что $s(A+B) \leqslant s(A) + s(B)$ и $s(AB) \leqslant s(A)s(B)$. Тогда в пункте а) имеем: $s(K) = s(1000K) = s(125 \cdot 8K) \leqslant s(125)s(8K) = 8s(8K)$. б) Аналогично, $s(N) = s(10^5 N) = s(2^5 5^5 N) \leqslant s(32)s(5^5 N) = 5s(5^5 N)$. Оценки улучшить нельзя, так как $s(125) = 8s(1000)$, $s(32) = 5s(10^5)$.

13.48. Преобразуем выражение к виду $(x-2y)(x-y)(x+y) \times (x+2y)(x+3y)$. Легко видеть, что все сомножители различны, а 33 нельзя разложить более, чем на 4 разных сомножителя.

13.49. Легко проверить, что $2^{10} = 1024$, поэтому $2^{100} = 1024^{10}$. Так как 1000^{10} представляет собой число, составленное из единицы с 30 нулями, а $1024^{10} > 1000^{10}$, число 2^{100} не может иметь меньше 31 цифры. С другой стороны,

$$\left(\frac{1024}{1000}\right)^{10} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} < \frac{41}{40} \cdot \frac{40}{39} \cdot \ldots \cdot \frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 10.$$

Значит, $2^{100} < 10 \cdot 1000^{10}$, откуда следует, что 2^{100} содержит меньше 32 цифр. Итак, число 2^{100} состоит из 31 цифры.

Эту задачу очень легко решить, если пользоваться логарифмами: так как $\lg 2 \approx 0{,}3010$, то $\lg 2^{100} = 100 \lg 2 \approx 30{,}10$ и, значит, число 2^{100} имеет 31 цифру.

13.50. Одно из слагаемых равно 164, а каждое из остальных равно 163. (Числа должны быть примерно равными.)

13.51. Не может. Пусть $\overline{abcd}$ — искомое 4-значное число и $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1008$. Так как $a > d$, то вычитая с конца, получим $a = d + 2$, $c = b + 1$, но тогда цифра сотен у разности должна быть 9, а не 0.

13.52. Так как $1974^n > 10^{3n}$, то p — число цифр в 1974^n не меньше $3n$. Пусть у $2^n + 1974^n$ больше цифр, чем у 1974^n. Тогда $2n + 1974^n \geqslant 10^p$. Легко видеть, что $987^n < 2^{p-n}5^p \leqslant 987^n + 1$, так как 10^p делится на 2^n. Значит, $2^{p-n}5^p = 987^n + 1$, $p - n \geqslant 2n$. Если $n \geqslant 2$, то $2^{p-n}5^p$ делится на 8, но $987 + 1 \equiv 2, 4, 6 \pmod 8$.

13.53. 410 256. Обозначим число через $x = 4 \cdot 10^n + A$, после перестановки первой цифры в конец получим $y = 10A + 4$. Тогда $4 \cdot 10^n + A = 4(10A + 4)$ или $13A = 4 \cdot 3 \ldots 32$ ($n - 1$ тройка). Деля «в столбик» на 13, находим наименьшее $A = 10256$, откуда $x = 410256$.

13.54. 5 человек. Пусть m — объем молока, p — объем кофе, n — численность семьи. Примем объём чашки за 1, тогда $m+p = n$, $m/4 + p/6 = 1$. Отсюда $m + 2n = 12$, и, значит, m чётно. Но если $m \geqslant 4$, то $n \leqslant m$, что невозможно. Следовательно, $m = 2$, откуда $n = 5$.

13.55. $7 \cdot 143 \cdot 143 = 143\,143$. Пусть x, y — искомые трёхзначные числа. Тогда $7xy = 1000x + y$ или $7y = 1000 + y/x$, y/x — целое число в пределах от 1 до 9, поэтому $1001 \leqslant 7y \leqslant 1009$, $143 \leqslant y \leqslant 144$. Отсюда $y/x = 1$, $y = 143$, $x = 143$.

13.56. Число 180 625 после вычёркивания 8 уменьшается в 17 раз. Пусть b — вычеркнутая цифра, a — часть числа слева от b, c — справа от b, тогда число имеет вид $\overline{abc}$. Рассмотрим отношение исходного числа к полученному:

$$r = \frac{a10^n + b10^{n-1} + c}{a10^{n-1} + c}, \tag{$*$}$$

где $c < 10^{n-1}$, $r - 10 = (b10^{n-1} - 9c)/(a10^{n-1} + c) < b/a \leqslant 9/a \leqslant 9$. Итак, $r \leqslant 19$.

Поскольку r число целое, то $a \leqslant 9$. Поэтому для поиска максимального исходного числа нужно найти максимальное n. Перепишем $(*)$ в виде $(b + 10a - ra)10^{n-1} = (r-1)c$. Число c по условию не оканчивается нулем, поэтому разложение c на простые множители либо не содержит двоек, либо не содержит пятёрок.

Случай 1. c не содержит двоек. Рассмотрим максимальную степень двойки у сомножителя $r - 1$. Это 16. Поэтому $n \leqslant 5$. При $n = 5$: $(b - 7a)5^{4q} = c$. Получаем, что c делится на 625, $a = 1$, $b = 8$ или $b = 9$. При $b = 9$ число оканчивается нулем, и потому не подходит. При $b = 8$ получаем $c = 625$ и ответ 180 625.

Случай 2. c не содержит пятёрок, тогда $r - 1$ делится на степень пятёрки не выше первой, поэтому не больше 2, и число заведомо не будет максимальным.

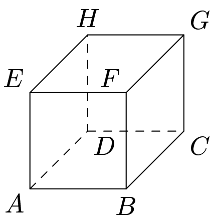
13.57. 57. Разложим 1995 на множители $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Значит, цифрами исходного числа могут быть только 3, 5 и 7. Легко видеть, что трёхзначным или однозначным число быть не может (в первом случае его произведение на $3 \cdot 5 \cdot 7$ равно 1995, т. е. оно равно 19, а во втором оно не делится на 19). Из двузначных чисел, составленных из этих цифр, на 19 делится только 57. Легко убедиться, что 57 удовлетворяет условию.

13.58. Так как каждая цифра участвует в разрядах единиц, десятков и сотен по одному разу, то ответ равен $(0+1+\ldots+9) + (0+10+\ldots+90) + (0+100+\ldots+900) = 4995$.

13.59. Да, 50!. Множитель 1 появится в произведении 100 раз, множитель 2 — 99 раз, 3 — 98 раз и т. д. до единственного множителя 100. Значит, произведение можно представить в виде

$$2^{99} \cdot 3^{98} \cdot \ldots \cdot 99^2 \cdot 100 = a^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100 = a^2 \cdot 2^{50} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 50.$$

13.60. Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам. Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, — это 498. Докажем, что снять 498 долларов возможно. Произведем следующие операции: $500-300 = 200$, $200+198 = 398$, $398-300 = 98$, $98+198 = 296$, $296+198 = 494$. Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов. Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова снять 300. В результате у него будет 498 долларов.



К 13.61

13.61. Обозначим вершины куба буквами A, B, C, D, E, F, G, H так, как показано на рисунке, а числа, стоящие в вершинах куба — соответствующими маленькими латинскими буквами. Рассмотрим наименьшее из этих чисел. Без ограничения общности мы можем считать, что это число a (оно находится в вершине A). Тогда числа в соседних с A вершинах (это вершины B, D и E) могут принимать только значения a или $a+1$ (так как $a-1 < a$). Значит, какие-нибудь два из чисел b, d и e равны. Пусть равные числа стоят в вершинах B и E (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае ответом будут диаметрально противоположные вершины E и C: $e = b$, а числа c и b отличаются не более, чем на 1, поэтому числа e и c отличаются не более, чем на 1.

13.62. Нет, не может. Докажем методом от противного. Предположим, что найдутся два натуральных числа k и n такие, что

$n(n+1) = 2k(2k+2)$. Отметим числа $2k$ и $2k+2$ на числовой оси и рассмотрим два случая: $n \geqslant 2k$ и $n > 2k$. Если $n \leqslant 2k$, то $n+1 < 2k+2$, поэтому $n(n+1) < 2k(2k+2)$. Противоречие. Если $n > 2k$, то $n+1 \geqslant 2k+2$, поэтому $n(n+1) > 2k(2k+2)$. Противоречие.

13.63. Разобьём данные 23 числа на восемь групп из стоящих подряд чисел: три группы по пять чисел и четыре группы по два числа (в каком порядке эти группы расположены, неважно). Каждую группу заключим в скобки, а между группами расставим знаки умножения. Если расставить знаки внутри каждой группы так, чтобы результат операций в группе из двух чисел делился на 2, а в группе из пяти чисел — на 5, то всё выражение будет делиться на $2^4 \cdot 5^3 = 2000$.

Покажем, что такая расстановка знаков в группах существует. Если числа в группе из двух чисел разной чётности, то между ними нужно поставить знак умножения, если одинаковой чётности — сложения. Результат, очевидно, будет делиться на 2. Рассмотрим группу из чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, идущих именно в таком порядке. Выпишем остатки от деления на 5 следующих пяти сумм: a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $a_1+a_2+a_3+a_4$, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$.

Если один из остатков равен 0, то соответствующая сумма делится на 5. В этом случае нужно расставить знаки сложения между числами, входящими в эту сумму, саму сумму (если требуется) заключить в скобки, а все оставшиеся промежутки между числами группы заполнить знаками умножения. Если же ни один из остатков нулю не равен, то, согласно принципу Дирихле, среди них найдутся два одинаковых остатка. Пусть, например, суммы $a_1+\ldots+a_i$ и $a_1+\ldots+a_j$ $(i<j)$ дают одинаковые остатки при делении на 5. Тогда их разность, представляющая собой сумму подряд стоящих чисел $a_{i+1}+\ldots+a_j$, делится на 5, и мы опять расставляем знаки сложения, заключаем эту сумму в скобки, а оставшиеся позиции заполняем знаками умножения. Таким образом, в любом случае нам удастся расставить знаки в группе из пяти чисел так, чтобы результат делился на 5.

13.64. Докажем, что если $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c$, то $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ не могут одновременно быть полными квадратами. Легко убедиться, что $f(4) - f(2) \equiv 2b \pmod 4$ и $f(3) - f(1) \equiv 2b+2 \pmod 4$. Значит, обе эти разности чётны. Поскольку полные квадраты дают остаток 0 или 1 при делении на 4, $f(3)-f(1)$ и $f(4)-f(2)$ делятся на 4. Но тогда $2 \equiv (2b+2)-2b \equiv (f(3)-f(1)) - (f(4)-f(2)) \equiv 0-0 \equiv 0 \pmod 4$. Противоречие.

13.65. $2^{15}3^{10}5^6$.

13.66. Не может. Пусть число, оканчивающееся на 1999, является квадратом натурального числа A и $A = 10B + x$, где x — последняя цифра числа A. Поскольку A^2 оканчивается на 9, то и x^2 оканчивается тоже на 9, поэтому $x = 3$ или $x = 7$. Если $x = 3$, то $A^2 = 10(10B^2 + 6B) + 9$, а $10B^2 + 6B$ чётно, значит, предпоследняя цифра A^2 чётная и не может быть равной 9. Если $x = 7$, то $A^2 = 10(10B^2 + 14B + 4) + 9$, а $10B^2 + 14B + 4$ чётно, значит, предпоследняя цифра A^2 чётная и не может быть равной 9.

13.67. Может. Вместе с компьютером он строит такую последовательность: 123, 225, 327, 429, 531, 135, 237, 327, 429 и т. д.

13.68. Пусть $m(m+1)$ является p-й степенью. Так как m и $m+1$ взаимно просты, то каждое из них должно быть p-й степенью. Но это невозможно: если $m = a^p$, то уже $(a + 1)^p > (a + 1)a^{p-1} = a^p + a^{p-1} > m + 1$ $(p > 1)$.

13.69. $41^2 = 1681$. Пусть n^2 удовлетворяет условию, тогда $n^2 = 100a^2+b$, где $0 < b < 100$. Поэтому $n > 10a$ и, значит, $n \geqslant 10a+1$. Это означает, что $b = n^2 - 100a^2 \geqslant 20a + 1$, откуда $20a + 1 < 100$, и поэтому $a \leqslant 4$. При $a = 4$ лишь $n = 41$ удовлетворяет условию: если $n > 41$, то $n^2 - 40^2 \geqslant 42^2 - 40^2 > 100$.

13.70. Нет. Пусть $y \leqslant x$. Тогда $x^2 < x^2 + y \leqslant x^2 + x < (x+1)^2$, т. е. $x^2 + y$ не является квадратом целого числа.

13.71. 108, 135, 180, 117. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — искомые числа, s — их сумма, a — первая цифра каждого их них. Ясно, что $100a \leqslant x_i \leqslant 100(a+1)$, тогда $x_i+300a \leqslant s < x_i+300(a+1)$, откуда $1+300a/x_i \leqslant s/x_i < 1+300(a+1)/x_i$, значит $1+3a/(a+1) < s/x_i < 4 + 3/a$. При $a = 1$ имеем $2{,}5 < s/x_i < 7$, а при $a \geqslant 2$ — $3 < s/x_i < 5{,}5$. Так как три из четырёх частных s/x_i — целые и разные, то случай $a \geqslant 2$ невозможен. Поэтому $a = 1$ и целые частные могут быть равны 3, 4, 5 и 6. Но 3 и 6 не могут быть одновременно, так как отношение любых двух трёхзначных чисел от 100 до 199 меньше 2. Остались 2 случая: частные 3, 4, 5 и 6, 5, 4. В обоих случаях s делится на 60. В первом случае числа $12n$, $15n$, $20n$ и $13n$. Первая цифра одинакова лишь при $n = 9$, что и дает ответ. Во втором случае числа $10n$, $12n$, $15n$ и $23n$ не подходят, так как отношение $23n$ и $10n$ больше 2.

13.72. $n = k$ и $k = 1, 8, 9$. Если n^n имеет k цифр, а k^k — n цифр, то $10^{k-1} \leqslant n^n < 10^k$ и $10^{n-1} \leqslant k^k < 10^n$. Пусть для определённости $k \leqslant n$. Тогда $n^n < 10^n$, т. е. $n < 10$ и $k < 10$. Непосредственной проверкой получим, что лишь $10^7 < 8^8 < 10^8$ и $10^8 < 9^9 < 10^9$.

13.73. 15 чисел (111, ..., 999, 407, 518, 629, 370, 481, 592). Пусть $A = \overline{abc}$ — искомое число, тогда из условия имеем $222(a+b+c) = 6(100a + 10b + c)$ или $7a = 3b + 4c$, $7(a - b) = 4(c - b)$. Отсюда либо $a = b = c$, либо $a - b = 4$, либо $b - a = 4$.

13.74. 105. Пусть $\overline{xyz}$ — искомое число.По условию задачи $7(10x + z) = 100x + 10y + z$, которое после приведения подобных членов и сокращений принимает вид: $3z = 15x + 5y$. Из уравнения следует, что z делится на 5 и $z > 0$, так как $x > 0$. Поэтому $z = 5$, а цифры x, y удовлетворяют уравнению $3 = 3x + y$, имеющему единственное решение $x = 1$, $y = 0$.

13.75. Рассмотрим сначала случай, когда по кругу записаны 2^n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n-1}, a_{2^n}$. Отправляясь от числа a_1 и вычёркивая каждое второе число, мы за один круг вычеркнем все числа с чётными номерами и снова придём к a_1. Останутся только числа с нечётными номерами, таких чисел, будет 2^{n-1}. После последующего обхода по кругу и соответствующих вычёркиваний снова придём к a_1, а на круге останется 2^{n-2} чисел. Очевидно, после n обходов по кругу останется только одно число a_1. Пусть теперь по кругу записаны числа $1, 2, 3, \ldots, 1909, 1910, 1911, 1912, \ldots, 1978, 1979$. Заметим, что $1979 = 955 + 1024 = 955 + 2^{10}$. Отправляясь от числа 1 и вычёркивая каждое второе число, вычеркнем 955 чисел. После этого на круге останется 2^{10} чисел и первым будет $a_1 = 1911$: $1911, 1912, \ldots, 1978, 1979, 1, 3, \ldots, 1909$. Как показано выше, отправляясь от $a_1 = 1911$, после 10 обходов по кругу и вычёркиваний мы оставим только число $a_1 = 1911$.

13.76. $2 \cdot 10^5$. Пусть n — искомое натуральное число. По условию существуют такие натуральные числа a и b, что $n = 2a^5$, $n = 5b^2$. Из первого из этих равенств следует, что n — чётное число. Тогда из второго равенства вытекает, что и b также чётное число: $b = 2k$. В таком случае $n = 20k^2$, $a^2 = n/2 = 10k^2 = 2 \cdot 5 \cdot k^2$.

Последнее равенство означает, что 2 и 5 — делители числа a (так как никаких других простых делителей, кроме делителей числа a, число a^5 иметь не может). Итак, $a = 2 \cdot 5m$, $k^2 = 10^4 m^5$. Но $m \geqslant 1$. Следовательно, $k^2 \geqslant 10^4$ и $n = 20k^2 \geqslant 2 \cdot 10^5$. Число $n = 2 \cdot 10^5$ удовлетворяет условиям задачи: $n/2 = 10^5$, $n/5 = 200^2$.

13.77. Нет. Последовательность n_k, начиная с некоторого номера p стабилизируется, т. е. $n_p = n_{p+1} = \ldots$

13.78. Нет. Покажем, что если нечётное k-значное ($k \geqslant 2$) число N является квадратом некоторого натурального числа, то у числа N предпоследняя цифра чётная. Пусть N — нечётное число, являющееся квадратом числа M, т. е. $N = M^2$. Ясно, что M

нечётно, и пусть $M = 10a + b$, где a и b — цифры и b нечётно. Тогда $N = M^2 = (10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Мы видим, что две последние цифры числа N определяются суммой $20ab + b^2$. В этой сумме первое слагаемое $20ab$ оканчивается на 0, а его предпоследняя цифра чётна, а второе — квадрат нечётного однозначного числа и совпадает с одним из следующих чисел $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$. Итак, число b^2 либо является нечётным однозначным числом, либо двузначным числом, предпоследняя цифра которого чётна, а последняя — нечётна. Значит, при сложении чисел $20ab$ и b^2 получается число, последняя цифра которого нечётна, а предпоследняя — чётна.

13.79. а) $k = 3$; $720 = 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 8\cdot9\cdot10$. б) Если $m(m+1) = n(n+1)(n+2)(n+3)$, то $m^2 + m + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$, что невозможно.

13.80. $7744 = 88^2$. Искомое число N по условию имеет вид $\overline{aabb}$, поэтому $N = 1000a+100a+10b+b = 1100a+11b = 11(100a+b)$. Так как число N делится на 11 и является квадратом, то оно делится на 11^2, и, значит, число $100a+b$ делится на 11. Из равенства $100a+b = 99a + (a+b)$ следует, что число $a + b$ делится на 11. Так как a, b — цифры, то $0 < a + b < 19$, и, следовательно, $a + b = 11$.

Итак, $N = 11(99a + 11) = 11 \cdot 11(9a + 1)$. Чтобы число N было квадратом, необходимо (и достаточно), чтобы число $9a + 1$ было квадратом. Перебирая цифры находим единственное подходящее значение $a = 7$. Следовательно, $b = 4$.

13.81. $n = 5$. Легко видеть, что наименьшее значение n, удовлетворяющее условию задачи, равно 5. Докажем, что среди чисел $n > 5$ нет таких чисел. При любом n число 2^n оканчивается или на 2, или на 4, или на 6, или на 8. Так как по условию сумма цифр числа 2^n равна 5, то две последние возможности исключаются.

Если число 2^n, $n > 5$, оканчивается на 4 и сумма его цифр равна 5, то оно не делится на 32, так как последние три цифры его не делятся на 8. В то же время число 2^n, $n > 5$, делится на $2^6 = 64$ и тем более делится на 32. Поэтому, если число 2^n при $n > 5$ удовлетворяет условию задачи, то оно не может оканчиваться на 4.

Предположим теперь, что у числа 2^n, $n > 5$, удовлетворяющего условию задачи, последняя цифра в десятичной записи равна 2. Тогда оно оканчивается либо на 02, либо на 22, либо на 12. Первые два случая, очевидно, невозможны, так как эти числа не делятся на 4. Пусть, наконец, число 2^n оканчивается на 12. Тогда оно оканчивается либо на 012, либо на 112, либо на 212. Если число оканчивается на 012, то оно не делится на 8. Если число оканчивается на 212 и сумма его цифр равна 5, то оно равно 212 и не является, значит, степенью числа 2.

Остаётся ещё одна возможность: число 2^n оканчивается на 112, т. е. имеет вид $10\ldots01112$ (m нулей). Этот случай также невозможен, так как для чисел 1112 ($m = 0$) и 10112 ($m = 1$) это проверяется непосредственно. А при $m > 1$ число $10\ldots01112 = 10^{m+3}+112$ не делится на 32, так как 10^{m+3} делится на 32, а 112 на 32 не делится, и, значит, также не является, степенью 2. Итак, если число 2^n при $n > 5$, удовлетворяет условию задачи, то оно не может оканчиваться на 2.

13.82. Рассмотрим произвольное трёхзначное число $\overline{abc}$ и обозначим через F разность $\overline{abc} - (a^3 + b^3 + c^3)$. Тогда

$$F = 100a + 10b + c - a^3 - b^3 - c^3 =$$
$$= (100a - a^3) + (10b - b^3) + (c - c^3) = f_1(a) + f_2(b) + f_3(c),$$

где $f_1(a) = 100a - a^3$, $f_2(b) = 10b - b^3$, $f_3(c) = c - c^3$. Число F будет наибольшим тогда, когда будут наибольшими величины $f_1(a)$, $f_2(b)$ и $f_3(c)$. Подставляя $a = 1, \ldots, 9$ в $f_1(a)$ находим, что наибольшее значение $f_1(a)$ равно 384 и достигается при $a = 6$. Аналогично наибольшие значения $f_2(b)$ и $f_3(c)$ равны 12 и 0 достигаются при $b = 2$ и при $c = 0$ и $c = 1$. Значит, наибольшее значение разности F равно $384 + 12 + 0 = 396$ и достигается при $\overline{abc} = 621$ и $\overline{abc} = 620$.

Так как числа $f_1(a) = 99a-(a-1)a(a+1)$, $f_2(b) = 9b+(b-b^3) = 9b - (b-1)b(b+1)$, $f_3(c) = -(c-1)c(c+1)$ делятся на 3, то на 3 делится число F и наименьшее положительное значение разности не меньше 3. Значение 3 достигается при $\overline{abc} = 437$, 474, 856.

13.83. Если десятичная запись числа A, не являющегося степенью 10, содержит N цифр, то $10^{N-1} < A < 10^N$, т. е. $N-1 < \lg A < N$. Таким образом, $N = \lg A + a$, где $0 < a < 1$. В нашем случае имеем:

$$m = \lg 2^{1984} + a_1 = 1984 \lg 2 + a_1, \text{ где } 0 < a_1 < 1,$$
$$n = \lg 5^{1984} + a_2 = 1984 \lg 5 + a_2, \text{ где } 0 < a_2 < 1,$$

и поэтому $m + n = 1984(\lg 2 + \lg 5) + a_1 + a_2 = 1984 + a_1 + a_2$. Отсюда следует, что число $a_1 + a_2$ целое, а так как $0 < a_1 + a_2 < 2$, то $a_1 + a_2 = 1$. Следовательно, $m + n = 1985$.

Замечания. 1. Аналогично доказывается, что общее количество цифр в десятичных записях чисел 2^q и 5^p равно $p + q$.

2. Вычислив с достаточной точностью $\lg 2$ и $\lg 5$, можно показать, что число цифр в записи числа 2^{1984} равно 598, а число цифр в записи числа 5^{1984} равно 1387.

13.84. $x = 9$, $y = 0$; $x = 4$, $y = 2$.

13.85. 2178. Пусть $\overline{xyzt}$ — искомое число. Тогда: $4 \cdot \overline{xyzt} = \overline{tzyx}$. Отсюда, следует что x — чётное число. Покажем, что $x = 2$. Действительно, при $x \geqslant 3$ число слева является пятизначным. Значит, $x = 2$.

Произведение $4t$ может оканчиваться цифрой 2 только в случаях $t = 3$ и $t = 8$. Цифра $t = 3$ не подходит, ибо само число не меньше 8000. Остаётся лишь возможность $t = 8$. В этом случае условие задачи: $4(2000 + 100y + 10z + 8) = 8000 + 100z + 10y + 2$ или $2z = 13y + 1$. Отсюда $y = 1$, $z = 7$.

13.86. Прямоугольник удовлетворяет условиям, если для его сторон x и y $(x \geqslant y)$ выполнены неравенства $xy > m$ и $x(y-1) < m$. При любом $m > 12$ эта система имеет решения: $x = n-1$, $y = n+2$ при $m = n^2$; $x = n$, $y = n + 1$ при $n^2 < m < n(n + 1)$; $x = n - 1$, $y = n+3$ при $m = n(n+1)$ и $x = y = n+1$ при $n(n+1) < m < (n+1)^2$.

13.87. 142 857. Пусть $\overline{a_1a_2 \ldots a_n}$ — искомое число. По условию $\overline{a_na_1 \ldots a_{n-1}} = 5\overline{a_1a_2 \ldots a_n}$. Отсюда после преобразований получаем: $a_n \cdot 9 \ldots 95$ $(n-2$ девяток$) = 49 \cdot \overline{a_1a_2 \ldots a_n}$. Так как левая часть должна делиться на 49, а a_n — цифра, то $9 \ldots 95$ должен делиться по крайней мере на 7. Наименьшее число вида $99 \ldots 95$, делящееся на 7 — это 99995, которое получается при $n = 6$. Значит, в записи числа содержится по крайней мере 6 цифр. Тогда равенство принимает вид: $99995a_6 = 49 \cdot \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ или $14285a_6 = 7 \cdot \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Число 14285 не делится на 7, значит, $a_6 = 7$.

13.88. Да. Имеется всего 6 четырёхзначных чисел (с 0), делящихся на 1992: 0000, 1992, 3984, 5976, 7968, 9960. Поэтому достаточно взять число, у которого ни одно из цифр не совпадает ни с одной из цифр выписанных чисел, стоящих на соответствующих местах (например, 2111).

13.89. 29. Поскольку однозначные числа не имеют общих цифр, то $N > 9$. А так как числа, соседние с числом 9, должны содержать девятку в своей записи, то меньшее из них не может быть меньше, чем 19, а большее — меньше, чем 29. Следовательно, $N \geqslant 29$. Равенство $N = 29$ возможно, поскольку условиям задачи удовлетворяет, например, такой порядок расстановки чисел от 1 до 29 по кругу:

$$1, 11, 10, 20, 21, 12, 2, 22, 23, 3, 13, 14, 4, 24, 25, 5,$$
$$15, 16, 6, 26, 27, 7, 17, 18, 8, 28, 29, 9, 19.$$

13.90. $2 \cdot 3^{658}$. Пусть наибольшее значение произведения достигается для следующей записи в виде слагаемых числа 1976: 1976 =

$= a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Покажем, что все a_i больше 1. Действительно, если хотя бы одно из них было бы равно 1, то, объединив его с любым другим слагаемым в одно слагаемое, мы получили бы большее произведение, поскольку $1 + a > 1a$. С другой стороны, каждое a_i, меньше 5, так как для $a_k \geqslant 5$ выполнено неравенство $a_k < 3(a_k - 3)$, т. е., заменив a_k на два слагаемых 3 и $a_k - 3$, мы увеличили бы произведение. Наконец, заметим, что при замене четвёрки суммой двух двоек произведение не изменится, поэтому можно считать, что все a_k принимают значения 2 и 3. Остаётся обнаружить, что количество двоек не больше двух. Действительно, $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, но $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$. Поскольку $1976 = 658 \cdot 3 + 2$, нужное нам произведение равно $2 \cdot 3^{658}$.

13.91. $(7; 50)$, $(37; 50)$, $(50; 7)$, $(50; 37)$. Эта задача после прочтения её условия вызывает желание просто перебрать все возможные комбинации.

Сначала оценим число q. Поскольку $44^2 < 1977 < 45^2$, то $q \leqslant 44$. Пусть $q = 44$. В этом случае $r = 41$, и условие $a^2 + b^2 = (a + b)q + r$ можно записать в виде $(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 1009$. Введя обозначения $a - 22 = x$ и $b - 22 = y$, получим уравнение $x^2 + y^2 = 1009$. Так как квадраты целых чисел могут оканчиваться лишь на 0, 1, 4, 5, 6 и 9, то сумма двух квадратов будет оканчиваться на 9 только тогда, когда слагаемые оканчиваются на 0 и 9 или на 5 и 4. Поэтому достаточно в качестве одного из неизвестных рассматривать числа, оканчивающиеся на 0 или 5, а поскольку его квадрат не превосходит 1009, само число может быть лишь одним из 7 чисел: 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30. Рассматривая в качестве x эти 7 чисел, нетрудно убедиться, что число $1009 - x^2$ окажется квадратом целого числа лишь при $x = \pm 15$; при этом $y = \pm 28$. Из соображений симметрии находим второй набор возможных решений: $x = \pm 28$, $y = \pm 15$. Отсюда получаем 4 возможных значения для пары (a, b): $(7, 50)$, $(37, 50)$, $(50, 7)$ и $(50, 37)$. Можно было бы предположить, что дальше будет рассмотрен случай $q = 43$, $r = 128$, затем $q = 42$ и т. д., однако все эти случаи удается рассмотреть вместе, доказав, что при $q \leqslant 43$ решений нет.

Итак, пусть $q \leqslant 43$, тогда $r \geqslant 128$. Воспользовавшись известным неравенством $(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$, получим $(a + b)^2/2 \leqslant (a + b)q + r$. Далее, умножив, обе части последнего неравенства на 2 и разделив на $a + b$, имеем $(a + b) \leqslant 2q + 2r/(a + b)$. Так как $r < a + b$, то $r < a + b \leqslant 2q + 2r/(a + b) < 2q + 2 \leqslant 88$, т. е. $r < 88$ — противоречие с $r \geqslant 128$.

13.92. Заметим сначала, что число k взаимно просто с 10. В самом деле, существует число, делящееся на k и начинающееся с 1, обращённое число также делится на k и оканчивается на 1. Возьмём число $\overline{500ab\ldots z}$, делящееся на k, тогда на k делятся: $\overline{z\ldots ba005}$, $\overline{z\ldots ba00500\ldots 0} + \overline{500ab\ldots z} = \overline{z\ldots ba01000a\ldots z}$, обращённое последнее число $\overline{z\ldots bz00010a\ldots z}$, $\overline{z\ldots a00010a\ldots z} - \overline{z\ldots a01000a\ldots z} = \overline{990\ldots 0}$, откуда 99 делится на k.

13.93. а) Из всех чисел вида $2^{k_1}+\ldots+2^{k_n}$, делящихся на 2^m-1, выберем числа с наименьшим n, а из полученных чисел выберем число с наименьшим $k_1+\ldots+k_n$. Все числа в наборе $(k_1,\ldots,k_n)$ различны. Если $n<m$, то $k_i \leqslant m-1$ и $2^{k_1}+\ldots+2^{k_n} < 2^m-1$. б) Нет. Пусть $P = a_1 10^r + \ldots + k_r$ — наименьшее из чисел, делящихся на $M = 11\ldots 1$ (m единиц) и имеющих сумму цифр, меньшую m. Тогда $m \leqslant r$ и число $P_1 = P - (10^r - 10^{r-m})$, делящееся на M, меньше P и имеет сумму цифр, не большую сумму цифр P.

13.94. а) $49 = 7^2$, $1681 = 41^2$. Пусть $(10x+t)^2 = 100x^2+20xt+t^2$, где $20xt+t^2$ — квадрат натурального числа, меньшего 10, x и t — целые числа от 1 до 9 и $x^2>10$. Тогда $x \geqslant 4$ и $xt \leqslant 4$, что возможно лишь при $x=4$ и $t=1$.

б) Да, например $256\,036 = 506^2$.

в) Чтобы получить нужное особое число вида $(10^5x+1)^2 = 10^{10}x^2 + 2\cdot 10^5x + 1$, достаточно найти целое x такое, что $10^9 < x^2 < 10^{10}$ и $2\cdot 10^5 x + 1 = y^2 < 10^{10}$. Можно взять $x = 5\cdot 10^4 - 1$ (искомым 20-значным числом будет $(4\,999\,900\,001)^2$).

г) Для любого k особым $4k$-значным числом может быть лишь $(10^kx+t)^2 = 10^{2k}x^2 + 2\cdot 10^k xt + t^2$ при $10^{2k-1} \leqslant x^2 < 10^{2k}$, откуда $x > 3\cdot 10^{k-1}$ и $6\cdot 10^{2k-1}t < 10^{2k}$, откуда $t=1$. При этом равенство $2\cdot 10^k x + 1 = (2u+1)^2$, эквивалентное $2^{k-1}5^k x = u(u+1)$, выполняется в трёх случаях: 1) $u+1$ делится на $5\cdot 10^{k-1}$; 2) u делится на 2^{k-1}, $u+1$ — на 5^k; 3) u делится на 5^k, $u+1$ — на 2^{k-1}. Каждый случай дает не более одного решения, удовлетворяющего условию $u < 5\cdot 10^{k-1}$, эквивалентному $2u+1 < 10^k$ (в случаях 2 и 3) достаточно рассмотреть разность двух решений, чтобы прийти в противоречие с этим условием. Поэтому существует не более трёх (более детальные рассуждения показывают, что не более двух) особых чисел.

д) Для любого k существует по крайней мере одно $(4k+2)$-значное число, а именно $z^2 = v + w^2$, где $v = 25\cdot 10^{2k-1}$, w — наименьшее натуральное число, большее $\sqrt{v}$. Пусть $y = w^2 - v$, при этом $z^2 = 4vw^2 + y^2 = 10^{2k+1}w^2 + y^2$ «состоит» из w^2 и y^2 и будет особым, если выполнены неравенства $0 < y^2 < 10^{2k+1}$ и

$10^{2k} \leqslant w^2 < 10^{2k+1}$. Так как $w - 1 < \sqrt{v}$ и $(w-1)^2 \leqslant v - 1$, то $y < 2\sqrt{v}$ и $y^2 < 4v = 10^{2k+1}$; далее $10^{2k} < v < w^2 = v + y < v + 2\sqrt{v} < 3v < 10^{2k+1}$. С помощью компьютера можно найти при $k = 7$ число, квадрат которого — 30-значное особое число: $z = 25 \cdot 10^{13} + 15811389^2 = 500000022109321$.

Малая теорема Ферма

13.95. $ka - kb$ делится на kn, т. е. $k(a-b) = mkn$, поэтому $a - b = mn$.

13.96. а) 1. $2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$ (101 — простое). б) 9. $3^{102} = 9 \cdot 3^{100} \equiv 9 \pmod{101}$.

13.97. $300^{3000} = (300^{500})^6 \equiv 1 \pmod 7$, аналогично $300^{3000} \equiv 1 \pmod{11}$ и $\pmod{13}$. Значит, $300^{3000} - 1$ делится на 7, 11, 13, т. е. на 1001.

13.98. 7. $8(8^{31})^{29} \equiv 8 \cdot 8^{31} \equiv 8^3 \cdot 8^{29} \equiv 64^2 \equiv 6^2 \equiv 7 \pmod{29}$.

13.99. $(7^{12})^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ и $(7^{10})^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, но $11 \cdot 13 = 143$.

13.100. Это число делится на 31.

13.101. $(a+b)^p \equiv a + b \pmod p$, но $a^p \equiv a \pmod p$ и $b^p \equiv b \pmod p$, откуда $a^p + b^p \equiv a + b \pmod p$. Второй способ — с помощью бинома Ньютона.

13.102. Для целого x верно $x^5 \equiv x \pmod{30}$.

13.103. а) Докажите, что $p^q + q^p - p - q$ делится на p и на q.

13.104. Положите $b = a^{p-2}$.

13.105. $(n^8+1)(n^8-1) = n^{16} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$.

13.106. а) $1\ldots1$ (p единиц) $= (10^p - 1)/9$, а $10^p - 1$ не делится на p, так как $10^p - 1 \equiv 10 - 1 = 9 \pmod p$. б) $1\ldots1$ ($p-1$ единица) $= (10^{p-1} - 1)/9$, а $10^{p-1} - 1$ делится на p, так как p взаимно просто с 10 и 9.

13.107. Указание. $10^p \equiv 10 \pmod p$, $10^{2p} \equiv 100 \pmod p, \ldots, 10^{8p} \equiv 10^8 \pmod p$.

Теорема Эйлера

13.108. 4 ломаные. Ломаные с одинаковыми звеньями получатся, если соединять последовательно каждую точку с k-й по счёту после неё до тех пор, пока не вернемся в исходную точку. Перебором $k = 1, \ldots, 19$ получим, что 20-звенные ломаные получаются при $k = 1$ (правильный 20-угольник), 3, 7 и 9. При любом

n разных по форме правильных n-звенных замкнутых ломаных будет $\varphi(n)/2$.

13.109. Взаимно простые с p^α — это те, которые не кратны p. Чисел, кратных p и меньше p^α будет $(p^\alpha/p)-1 = p^{\alpha-1}-1$. Тогда $\varphi(p^\alpha) = (p^\alpha - 1) - (p^{\alpha-1} - 1) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

13.110. Расположим числа от 1 до m так: в 1-й строке от 1 до n, во 2-й — от $n+1$ до $2n$, ..., в m-й — от $(m-1)n+1$ до mn. Тогда в каждой строке $\varphi(n)$ чисел, взаимно простых с n, а в каждом столбце $\varphi(m)$ чисел, взаимно простых с m. Так как m и n взаимно просты, то число взаимно просто с mn тогда и только тогда, когда оно стоит на пересечении столбца с номером, взаимно простым с n, и строки с номером, взаимно простым с m.

13.111. Следует из 13.109 и 13.110.

13.112. Доказательство почти такое же, как у теоремы Ферма. Рассмотрим остатки от деления на m и взаимно простые с m: $a_1 = 1, \ldots, a_{\varphi(m)}$. Пусть остаток от деления a на m есть a', тогда из взаимной простоты a и m следует, что a' совпадает с одним из a_i. Легко видеть, что $(a')^{\varphi(m)} \equiv a^{\varphi(m)} \pmod m$. Рассмотрим $\varphi(m)$ чисел: a', a_2a', ..., $a_{\varphi(m)}a'$. Все остатки от деления на m у них разные, поэтому, перемножив их, получим $a' \cdot a_2a' \cdot \ldots \cdot a_{\varphi(m)}a' = 1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{\varphi(m)}(a')^{\varphi(m)} \equiv 1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{\varphi(m)} \pmod m$. Так как все a_i взаимно просты с m, то по лемме имеем $(a')^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

13.113. $341 = 11 \cdot 31$. $2^{341} - 2 = 2(2^{340} - 1)$. Достаточно доказать, что $2^{340} - 1$ делится на 11 и на 131. Но $2^{340} = (2^{34})^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $2^{340} = 2^{5\cdot 68} = 32^{68} \equiv 1^{68} \pmod{31}$.

13.114. Если a делится на 561, то это очевидно. Пусть a не делится на 561. Тогда достаточно доказать, что $a^{560} - 1$ делится на 11, 3 и на 17 ($11 \cdot 3 \cdot 17 = 561$), $(a^{56})^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $(a^{280})^2 \equiv 1 \pmod 3$, $(a^{36})^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ (при a взаимно простом с 11, 3 и 17). Если a делится, например, на 17, то $a^{561} - a$ делится на 17.

13.115. а) Доказательство аналогично доказательству теоремы Ферма. Рассмотрим числа $1, \ldots, 131$. Тогда

$$\begin{gathered}2^{131} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 131 = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 262 = \\ = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 130 \cdot (263 - 131) \cdot (263 - 129) \cdot \ldots \cdot (263 - 1) \equiv \\ \equiv 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 130 \cdot (-131) \cdot (-129) \cdot \ldots \cdot (-1) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 131 \cdot (-1)^{66} \equiv \\ \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 131 \pmod{263}.\end{gathered}$$

б) Пусть $m = 3^{n+1}$. По теореме Эйлера $2^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, но $\varphi(3^{n+1}) = 3^{n+1} - 3^n = 3^n \cdot 2$ и поэтому $(2^{3^n})^2 - 1 = (2^{3^n} - 1)(2^{3^n} + 1)$ делится на 3^{n+1}. А $2^{3^n} - 1$ не делится на 3, так как по индукции $2^{3^n} \equiv -1 \pmod 3$, значит, на 3^{n+1} делится $2^{3^n} + 1$.

13.116. Простое p не может иметь вид $4k$ и $4k+2$. Пусть $p = 4k+3$. Тогда по теореме Ферма $z^{p-1} = z^{4k+2} \equiv 1 \pmod p$, но $z^{4k+2} = (z^2)^{2k+1} \equiv -1 \pmod p$ из условия. Противоречие. Поэтому p может иметь вид только $4k+1$.

13.117. При $p = 2$ любое из чисел $2^{2k} - (2k)$ делится на p. Пусть $p > 2$, тогда по теореме Ферма $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, $2^{m(p-1)} \equiv 1 \pmod p$. Если же $m \equiv -1 \pmod p$, то $2^{m(p-1)} - m(p-1) = 2^{m(p-1)} + m - mp \equiv 0 \pmod p$. Итак, при $p > 2$ любое из чисел $2^n - n$, где $n = (kp-1)(p-1)$ (k — натуральное), делится на p.

13.118. 1972 раза. Любое число n выписано столько раз, сколько имеется чисел, меньших n и взаимно простых с $n - \varphi(n)$. Но 1973 — простое число.

13.119. Пусть решение есть. Тогда x чётно, иначе $x^2 = (2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod 4$, откуда $y^3 = x^2 + 5 \equiv 2 \pmod 4$, что невозможно (так как в этом случае y чётно, откуда $y^3 \equiv 0 \pmod 4$). Из чётности x следует, что $y^3 = x^2 + 5 \equiv 1 \pmod 4$, поэтому $y \equiv 1 \pmod 4$. Обозначим $x = 2n$, $y = 4m+1$, тогда из уравнения имеем $4(n^2+1) = x^2 + 4 = y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1) = 4m(16m^2+12m+3)$, откуда $n^2 + 1 = md$, где $d = 16m^2 + 12m + 3 \equiv 3 \pmod 4$. Заметим, что хотя бы один из простых делителей числа d должен иметь вид $p = 4l + 3$. Действительно, так как d нечётно, то все его простые делители нечётны. Если бы все они были равны 1 по модулю 4, то и d было бы равно 1 по модулю 4. Итак, $n^2 + 1 = md \equiv 0 \pmod p$, поэтому $n^2 \equiv -1 \pmod p$ и $n^{p-1} = n^{4l+2} = (n^2)^{2l+1} \equiv -1 \pmod p$, что противоречит малой теореме Ферма.

КОМБИНАТОРИКА И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

14. КОМБИНАТОРИКА

14.1. Правила суммы и произведения

14.1. а) 18, б) 36, в) 45. **14.2.** а) 11, б) 21, в) 20.

14.3. а) 10, б) 120, в) 54.

14.4. По правилу произведения имеем $100^2 = 10\,000$ способов.

14.5. 20. **14.6.** а) 8, б) 9. **14.7.** 48. **14.8.** 25; 20. **14.9.** 480; 437.

14.10. 1024; 4032.

14.11. Белый квадрат выбираем 32 способами и вычёркиваем соответствующие горизонталь и вертикаль. На оставшейся части доски есть 24 чёрных квадрата. Всего $32 \cdot 24 = 768$ способов выбора.

14.12. По правилу произведения $12 \cdot 9 \cdot 10 = 1080$.

14.13. $6 \cdot 5 = 30$. **14.14.** 147.

14.15. Можно купить либо по экземпляру каждого романа, либо том, содержащий два романа и экземпляр третьего романа. По правилам суммы и произведения получаем $6 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 134$ способа.

14.16. Можно купить ещё том, содержащий романы «Рудин» и «Отцы и дети» и один экземпляр «Дворянского гнезда». Добавляется $3 \cdot 3 = 9$ способов, а всего имеем 143 способа.

14.17. Большее число выборов, если взято яблоко, так как $11 \cdot 10 > 12 \cdot 9$.

14.18. $6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$; если первые два волчка упали на сторону «1», то третий волчок может упасть 10 способами: аналогично рассматриваются случаи, когда на такую сторону падают другие два волчка; всего получаем $6 + 8 + 10$ способов, но при этом один способ (когда на сторону «1» падают все три волчка) считается трижды; поэтому остается 22 способа.

14.19. 10. По 2 способа, если 2, 3, 4 белых грани, и по 1 в других случаях.

14.20. Если повторяющаяся 3 раза цифра — 0, то, добавляя одну из 9 других цифр, получим 9 чисел. Если повторяется не 0, то чисел $9 \cdot 4 \cdot 9$. Всего 333 числа.

14.2. Размещения, перестановки, сочетания

14.21. Так как порядок красок не играет роли, то $C_5^3 = 10$ способов.

14.22. а) Здесь порядок красок уже важен; поэтому имеем $A_5^3 = 60$ способов. б) Если одна полоса красная, то имеем $3 \cdot A_4^2 = 36$ способов.

14.23. $A_5^2 = 20$ словарей. **14.24.** $A_{10}^2 - A_5^2 = 70$.

14.25. Получаем размещения с повторениями из 13 карт по 4. Всего $13^4 = 28\,561$ способ. Если среди карт не должно быть пар, то имеем размещения без повторений; их число $A_{13}^4 = 17\,160$.

14.26. Так как достаточно выбрать одну чёрную и одну красную карту, то получаем $13^2 = 169$ способов выбора.

14.27. В одной команде играет один юноша, а в другой — двое. Юношей можно разбить на команды тремя способами. После этого надо выбрать в первую команду трёх девушек из пяти. Это можно сделать $C_5^3 = 10$ способами. Всего по правилу произведения получаем $3 \cdot 10 = 30$ способов разбивки на команды.

14.28. Число способов разбить n различных предметов на k групп равно k^n. В нашем случае имеем $3^6 = 729$ способов.

14.29. Из исходного множества $(0, 1, 2, \ldots, 9)$ набираются выборки с повторениями, содержащие по 7 элементов.

14.30. $10(10^7 - 1)/7$. Найти сумму чисел, представляющих количество различных выборок по одному, двум и далее до семи элементов исходного множества.

14.31. 243. **14.32.** A_{10}^7.

14.33. 2^n. Исходное множество состоит из двух элементов, а выборки с повторениями — из n элементов.

14.34. 720.

14.35. а) Разобьём все способы упорядочить ораторов на пары, состоящие из способов, которые получаются друг из друга перестановкой А и Б. В каждой паре есть ровно один способ, удовлетворяющий поставленному условию. Поэтому имеем $5!/2 = 60$ способов.

б) Если А выступает непосредственно перед Б, мы можем считать их за одного оратора. Поэтому имеем $4! = 24$ способа.

14.36. а) Выбор мест для мужчин и для женщин можно сделать двумя способами. После этого мужчин можно посадить на выбранные места $5!$ способами. Столько же способов рассадить женщин. Всего $2(5!)^2 = 28\,800$ способов. б) Получаем в 10 раз меньше способов, чем в пункте а), т. е. 2880 способов.

14.37. Общее число способов вынуть 10 карт равно C_{52}^{10}. Число способов, при которых не выбирают ни одного туза, равно C_{48}^{10}. Поэтому хотя бы один туз будет в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$ случаях. Ровно один туз в $C_4^1 C_{48}^9$ случаях, не менее двух тузов в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4C_{49}^9$ случаях и ровно два туза в $C_4^2 C_{48}^8$ случаях (выбираем двух тузов C_4^2 способами и ещё 8 карт из 48 — C_{48}^8 способами).

14.38. 3^m способов. **14.39.** 2^{32}.

14.40. Выберем, кто из трёх пассажиров, которым неважно как сидеть, сядет лицом к паровозу. Это можно сделать тремя способами. На каждой скамье можно пересаживать пассажиров $5!$ способами. Всего получаем $3(5!)^2 = 43\,200$ способов.

14.41. $A_9^4 = 3024$. **14.42.** $C_{52}^{15} = 2\,598\,960$.

14.43. Номеров, содержащих одну букву — $32 \cdot 10^4$, две буквы — $32^2 \cdot 10^4$ и три буквы — $32^3 \cdot 10^4$. Всего по правилу суммы есть $33\,820 \cdot 10^4$ номеров.

14.44. а) $2 \cdot 29!$; б) $28 \cdot 29!$.

14.45. 968. Найти сумму чисел различных аккордов, содержащих по 3, 4 и далее до 10 звуков. Один аккорд, состоящий из k звуков, — выборка k элементов из исходного множества, содержащего 10 элементов; порядок элементов в выборе несущественен.

14.46. $40 \cdot 39 \cdot C_{38}^5$. Председатель и секретарь образуют выборку без повторений, состоящую из двух элементов исходного множества, содержащего 40 элементов. 5 членов комиссии образуют выборку без повторений некоторого состава из исходного множества, содержащего 38 членов.

14.47. Свойство вытекает из формулы для C_n^r либо использовать то, что r-сочетания и $(n-r)$-сочетания образуют взаимно дополнительные пары.

14.48. Разбить r-сочетания на два класса — содержащие некоторый элемент и не содержащие его.

14.49. Справа стоит число всех n-размещений с повторениями из элементов двух типов. Разобьём их на классы, отнеся в k-й класс те, в которые входят k элементов первого типа и $n-k$ элементов второго типа. Число размещений k-го класса — C_n^k.

14.50. Справа стоит число всех m-сочетаний с повторениями из элементов $n+1$ типа. Разобьём их на классы, отнеся в k-й класс сочетания, в которые k раз входят элементы первого типа. Число сочетаний k-го класса — это число $(m-k)$-сочетаний с повторениями из элементов $n+1$ типа.

14.51. Справа стоит количество путей, ведущих из вершины треугольника Паскаля к числу, стоящему на n-м месте в $2n$-й строке. Каждый такой путь проходит ровно через одно число n-й строки. Количество путей, проходящих через число, стоящее на k-ом месте, равно $(C_n^k)^2$.

14.52. Указание. Разложите каждый член в сумму по 14.48.

14.53. Рассмотрим m-размещения с повторениями из элементов n сортов. Число m-размещений с повторениями, не содержащих элементов первых k сортов, т. е. состоящее из элементов остальных $n-k$ сортов, равно $(n-k)^m$.

14.54. Указание. Используйте математическую индукцию.

14.3. Перестановки и сочетания с повторениями. Комбинированные задачи

14.55. Сначала положим в каждый кошелёк по одному пятаку. Затем распределим 7 пятаков по 5 кошелькам. Это можно сделать $C_{11}^4 = 330$ способами.

14.56. $C_{14}^2 = 91$. **14.57.** C_{30}^8. **14.58.** C_{34}^4.

14.59. а) Из 5 дней надо выбрать два, когда дают яблоки. Всего $C_5^2 = 10$ способов. б) Аналогично получаем C_{m+n}^m. в) $P(2,3,4) = 1260$.

14.60. $\overline{C}_{10}^{12}$, $\overline{C}_{10}^{8}$, C_{10}^8. **14.61.** $P(2,2,2,1,1) = 5040$.

14.62. Каждый из n пассажиров может выбрать любую из m остановок. Поэтому имеем m^n способов распределения. Если учитывать лишь количество пассажиров, вышедших на каждой из остановок, то получаем C_{m+n-1}^{m-1} способов.

14.63. Это число равно $P(m,n,p) = (m+n+p)!/(m!\,n!\,p!)$.

14.64. Камни можно переставлять $P(5,6,7)$ способами. При циклических перестановках и при симметриях (всего 36 преобразований) браслет остается неизменным. Получаем $P(5,6,7)/36 = 18!/(36\cdot 5!\,6!\,7!)$ способов.

14.65. 2520.

14.66. 165. Указание. Выборка с заданным числом повторений объёма 8 набирается из четырёх групп однородных элементов.

14.67. $C_{16}^7 = C_{16}^9$. Выборка с заданным числом повторений объёма 7 набирается из 10 групп одинаковых элементов.

14.68. $52!/(13!)^4$. Это число выборок состава $(13, 13, 13, 13)$.

14.69. C_{m+1}^n. Рассмотрим выборку с заданным числом повторений, имеющую состав $(m+1, n)$, где $m+1$ — число промежутков между m белыми шарами, а n — число чёрных шаров. Число различных расстановок равно числу всевозможных выборок состава $(m+1, n)$.

14.70. $2 \cdot (6!)^2$. Определить, ученики с каким вариантом будут сидеть слева можно двумя способами, а рассадить 6 учеников каждого ряда на места — $6!$ способами.

14.71. Воспользоваться неравенством $C_{2n+k}^n C_{2n-k}^n \leqslant (C_{2n}^n)^2$.

14.72. Ребёнок может получить либо одно, либо два, либо три имени, причём все имена различны. Всего $300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 = 26\,820\,600$ различных имён.

14.73. Отношение соседства сохраняется при циклических перестановках и при симметричном отражении. В случае четырёх человек мы имеем $2 \cdot 4 = 8$ преобразований, сохраняющих отношение соседства. Так как общее число перестановок равно $4! = 24$, то имеем $24 : 8 = 3$ различных способа рассадки. Если за столом сидят 7 человек, то имеем $7!/14 = 360$ способов, вообще, в случае n человек $(n-1)!/2$ способов. Число способов, при которых два данных человека сидят рядом, вдвое больше числа способов посадить 6 человек (в силу возможности поменять этих людей местами). Значит, оно равно $5! = 120$. Точно так же число способов, при которых данный человек имеет данных двух соседей, равно $4! = 24$.

14.74. $C_8^5 C_{10}^2$. **14.75.** $C_{32}^4 C_4^2$.

14.76. $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$. Искомое число равно разности общего числа способов вынуть 10 карт из 52 и числа способов вынуть 10 карт из 48 таким образом, чтобы среди 10 карт не было туза.

14.77. $C_5^4 C_{15}^2 C_{10}^3$. **14.78.** 120. **14.79.** $4 \cdot C_{44}^4$. **14.80.** $A_{10}^4 A_6^4$.

14.81. По правилу произведения $7 \cdot 9 = 63$ способа. Первый может выбрать книги для обмена $C_7^2 = 21$ способом, а второй $C_9^2 = 36$ способами. Всего $21 \cdot 36 = 756$ способов обмена.

14.82. а) Каждая книга может попасть к любому из 8 сыновей. Поэтому имеем $8^5 = 32\,768$ способов. б) $A_8^5 = 6720$ способов.

14.83. $C_{30}^4 = 27\,405$; $A_{30}^4 = 657\,720$.

14.84. Сначала выбираем 6 абонентов C_n^6 способами. Располагаем этих абонентов в любом порядке и разбиваем на пары

(1-й, 2-й, потом 3-й, 4-й и, наконец, 5-й, 6-й). Это можно сделать 6! способами. Так как абонентов можно переставлять внутри каждой пары, а также несущественен порядок пар, то общее число способов надо разделить на $2^3 \cdot 3! = 48$. Всего получаем $n!/(48(n-6)!)$ способов.

14.85. Так как каждый студент может получить три вида оценок, то имеем $3^4 = 81$ способ сдачи экзаменов.

14.86. Так как ожерелья остаются неизменными при циклических перестановках бусинок и переворачивании, то можно составить $7!/14 = 360$ видов ожерелий.

14.87. Виды ожерелий отличаются друг от друга числом маленьких бусинок, заключённых между двумя большими. Поэтому имеем три вида ожерелий.

14.88. $A_{10}^7 = 604\,800$; $C_{10}^3 = 120$. Если две девушки заведомо будут приглашены на танец, то имеется A_7^2 вариантов выбора их партнёров; оставшиеся 5 юношей выбирают партнёршу из числа 8 девушек A_8^5 способами, а всего имеем $A_7^2 A_8^5 = 282\,240$ способов. Наконец, если данные две девушки приглашены на танец, то ещё пять девушек можно выбрать C_8^5 способами.

14.89. Офицера можно выбрать C_3^1 способами, сержантов C_6^2 способами и рядовых C_{60}^{20} способами. Всего по правилу произведения получаем $C_3^1 C_6^2 C_{60}^{20}$ способов выбора. Если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов, то получаем $C_5^1 C_{60}^{20}$ способов выбора.

14.90. Четырёх девушек можно выбрать C_{12}^4 способами. Затем выбираем A_{15}^4 способами юношей (существен порядок). Всего $C_{12}^4 A_{15}^4 = 17\,417\,400$ способов.

14.91. Любая курица либо входит, либо нет в число выбранных. Поэтому имеем 2^3 способов выбора кур. Так как по условию хотя бы одна курица будет выбрана, получаем 7 способов выбора кур. Точно так же есть $2^4 - 1 = 15$ способов выбора уток и $2^2 - 1 = 3$ способа выбора гусей. Всего $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$ способов.

14.92. Можно выбрать двух, трёх или четырёх женщин. Двух женщин можно выбрать C_4^2 способами. После того надо выбрать 4 мужчин, что можно сделать C_7^4 способами. По правилу произведения получаем $C_4^2 C_7^4$ способов. Если выбирают трёх женщин, то получают $C_4^3 C_7^3$ способов, а если четырёх — то $C_7^4 C_7^3$ способов. Всего $C_4^2 C_7^4 + C_4^3 C_7^3 + C_4^4 C_7^3 = 371$ способ.

14.93. Число должно оканчиваться одной из следующих комбинаций: 12, 24, 32, 44, 52; первые же две цифры могут быть произвольными. Всего $5^2 \cdot 5 = 125$ чисел.

14.94. Так как числа не могут начинаться с нуля, то имеем $7^4 - 7^3 = 2058$ чисел.

14.95. а) 1225. Учесть, что первая цифра числа не может быть равна нулю. б) 750.

14.96. Книги в чёрных переплётах можно переставить $m!$ способами, а в красных — $n!$ способами. Всего по правилу произведения $m!n!$ способов. Если книги в чёрных переплётах стоят рядом, то надо ещё выбрать для них место между книгами в красных переплётах. Это можно сделать $n+1$ способами. Всего получаем $m!n!(n+1) = m!(n+1)!$ способов.

14.97. Каждый из 15 человек может или войти или не войти в группу. Так как группа не может быть пустой, то получаем $2^{15} - 1$ способов. Для n человек имеем $2^n - 1$ способов.

14.98. Число p_k может войти в данный делитель с показателями $0, 1, \ldots, \alpha_k$ — всего $\alpha_k + 1$ способами. По правилу произведения число делителей равно $(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_n+1)$. Чтобы найти сумму делителей, рассмотрим выражение

$$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \ldots (1 + p_n + \ldots + p_n^{\alpha_n}).$$

Если раскрыть в нем скобки, то получим сумму, в которую каждый делитель входит ровно один раз. По формуле суммы геометрической прогрессии получаем, что эта сумма равна

$$\frac{(p_1^{\alpha_1-1} - 1)\ldots(p_n^{\alpha_n-1} - 1)}{(p_1 - 1)\ldots(p_n - 1)}.$$

14.99. Искомое число k делится на 2 и 9, поэтому пусть m_1 — кратность 2, m_2 — кратность 3, m_3 — кратность p_3, …, m_n — кратность p_n. Тогда по 14.98 $14 = (m_1+1)(m_2+1)\ldots(m_n+1)$, где $m_1 + 1 \geqslant 2$, $m_2 + 1 \geqslant 3$, откуда $m_1 = 1$, $m_2 = 6$, т. е. $k = 2 \cdot 3^6$.

При замене 14 на 15 получим $k = 2^2 \cdot 3^4$ или $k = 2^4 \cdot 3^2$. Ясно, что k не может иметь 17 делителей (как и любого простого числа делителей).

14.100. Добавим к 32 буквам 5 одинаковых «перегородок» и рассмотрим все перестановки полученных объектов, при которых ни одна перегородка не стоит в начале или конце и никакие две перегородки не стоят рядом. Буквы переставляются 32! способами, а для перегородок имеем 31 место и их можно поставить C_{31}^5 способами. Учитывая, что порядок слов несущественен, получаем $32!C_{31}^5/6!$ способов составить слова.

14.101. Из C_{17}^{12} способов выбрать 12 человек в C_{15}^{10} случаях в выбранных входят данные два человека. Поэтому остаётся $C_{17}^{12} - C_{15}^{10}$ допустимых выборов.

14.102. Добавим к 20 книгам четыре одинаковых разделяющих предмета и рассмотрим все перестановки полученных объектов. Их число равно $24!/4!$ Каждой перестановке соответствует свой способ расстановки книг. Аналогично получаем, что число способов надеть кольца равно $8!/3! = 6720$.

14.103. Чашки расставляются A_4^3 способами, блюдца A_5^3 и чайные ложки A_6^3 способами. Всего по правилу произведения $A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 172\,800$ способов.

14.104. Если муж пригласит в гости k женщин, то число приглашённых им мужчин равно $6-k$. Тогда жена пригласит $6-k$ женщин и k мужчин. По правилам суммы и произведения такой выбор можно сделать числом $(C_5^0)^2(C_7^6)^2+(C_5^1)^2(C_7^5)^2+\ldots+(C_5^5)^2(C_7^6)^2 = 267\,148$ способов.

14.105. На левом борту могут сидеть 0, 1, 2, 3 или 4 человека из числа тех, кому безразличен выбор борта. Если из их числа выбрано k человек, то надо выбрать ещё $4-k$ человек из числа 10, предпочитающих левый борт. После этого остается $12+(9-k)$ кандидатов, из которых выбираем 4 гребцов на правый борт. Всего имеем $C_9^k C_{10}^{4-k} C_{21-k}^4$ способов выбора. Суммируя по k, получаем ответ.

14.106. Число 9 можно разбить на 3 разных слагаемых тремя способами: $9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 2+3+4$. Сумма, меньшая, чем 9, будет в 4 случаях: $1+2+3 = 6$, $1+2+4 = 7$, $1+2+5 = 1+3+4 = 8$. Так как три жетона можно вынуть C_{10}^3 способами, то в $C_{10}^3 - 4 = 116$ случаях сумма не меньше 9.

14.107. Сначала выберем по одной карте каждой масти. Это можно сделать 13^4 способами. После этого выберем ещё две карты. Если они разных мастей, то это можно сделать $12^2 C_4^2 = 864$ способами. Комбинируя эти способы с различными способами выбрать первые 4 карты и учитывая возможность перестановки порядка выбора двух карт одной масти, получаем $216 \cdot 13^4$ способов. Если новые две карты имеют одну и ту же масть, то получаем $4 \cdot C_{12}^2 = 264$ способов выбора. По тем же соображениям они приводят к $88 \cdot 13^4$ способам выбора всех карт. Всего получаем $304 \cdot 13^4$ способов.

14.108. В первый день участников выбираем $C_{10}^6 = 210$ способами, во второй — $C_{10}^6 - 1 = 209$ и в третий — $C_{10}^6 - 2 = 208$ способами. Всего $210 \cdot 209 \cdot 208 = 9\,129\,120$ способов.

14.109. Так как $C_6^3 = 20$, то каждый способ выбора компания будет использован ровно один раз. Число перестановок этих способов равно $20!$.

14.110. Каждый юноша может выбирать из 5 мест работы, а каждая девушка — из 4 мест. Всего получаем $5^3 \cdot 4^2 = 2000$ способов выбора.

14.111. На первом месте можно написать любую из 33 букв, а на каждом из следующих — любую из 32 букв (исключается предшествующая буква). Всего имеем $33 \cdot 32^4 = 34\,603\,008$ слов.

14.112. Сначала выберем призёров, а потом распределим между ними книги. По правилу произведения получаем $C_{20}^6 P(3,2,1)$ способов. Во втором случае сначала выберем, кто получил первую книгу, потом, кто получил вторую, и, наконец, кому досталась третья книга. Всего $C_{20}^3 C_{20}^2 C_{20}^1$ способов распределения.

14.113. Поставим в соответствие каждой кости (p,q) кость $(n-p, n-q)$. Если $p+q = n-r$, то $(n-p)+(n-q) = n+r$. Значит, число костей с суммой очков $n-r$ равно числу костей с суммой очков $n+r$. Общее число всех костей домино равно C_{n+1}^2.

14.114. По условию задачи места, занятые женщинами и мужчинами, чередуются. Поэтому имеем $2(7!)^2$ способов.

14.115. Выберем по одной лошади из каждой пары AA', BB', CC' (8 способов выбора), трёх лошадей из остальных 10 ($C_{10}^3 = 120$ способов) и выберем порядок запрягания лошадей (6! способов) Всего $8 \cdot 6! C_{10}^3 = 691\,200$ способов.

14.116. Согласные можно выбрать C_9^4 способами, а гласные — C_7^3 способами. Выбранные 7 букв можно переставлять 7! способами. Всего получаем $C_9^4 C_7^3 \cdot 7!$ способов. Если никакие две согласные не стоят рядом, то порядок букв такой: СГСГСГС. Здесь мы имеем лишь 3! 4! перестановок и $C_9^4 C_7^3 3!\,4!$ слов.

14.117. а) Мужчин можно разбить на пары $10!/(5!(2!)^5)$ способами (учитывая перестановки внутри пар и перестановки самих пар). Женщины разбиваются $10!/(2!)^5$ способами (здесь играет роль порядок пар). Всего $(10!)^2/2^10 5!$ способов.

б) Сначала выберем одного мужчину и одну женщину, которые окажутся в той же лодке, что и выбранная ранее пара (9^2 способов). Затем разбиваем оставшихся на 4 группы $(8!)^2/(4! \cdot 2^8)$ способами. Всего $(9!)^2/(4! \cdot 2^8)$ способов.

в) Если данные двое мужчин попадают в одну и ту же группу (и в ней же находятся их жены), то остальные могут разбиться на группы $(8!)^2/(4! \cdot 2^8)$ способами. Если же они попадают в разные группы, то эти группы можно дополнить $(A_8^2)^2$ способами, после чего разбить остальных на группы $(6!)^2/(3! \cdot 2^6)$ способами. Всего $17(8!)^2/2^8 4!$ способов.

14.118. Если число, изображённое первыми тремя цифрами, равно x, то число, изображённое последними тремя цифрами, может принимать значения $0, 1, \ldots, 999 - x$ — всего $1000 - x$ значений. Так как x меняется от 100 до 999, то нам надо найти сумму натуральных чисел от 1 до 900. Она равна $901 \cdot 900/2 = 405\,450$.

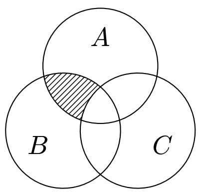
14.119. Белые шашки можно расставить C_{32}^{12} способами. После выбора 12 полей для белых шашек остается 20 полей для чёрных, на которые их можно поставить C_{20}^{12} способами. Всего $C_{32}^{12} C_{20}^{12}$ способов.

14.120. Решение 1. Разбиваем все перестановки букв слова «Юпитер» на классы так, что перестановки одного и того же класса отличаются друг от друга только порядком гласных. Число классов равно $P_6/P_3 = 120$. Лишь одна перестановка из каждого класса удовлетворяет поставленному условию. Поэтому их число равно 120.

Решение 2. Разобьём шесть мест, на которые ставятся буквы, на две группы по 3 места: для гласных и для согласных. (Это можно сделать $C_6^3 = 20$ способами.) Гласные на их места расставляются единственным образом, а согласные — $3! = 6$ способами. Всего 120 способов.

14.121. Последовательность гласных выбирается $2!$ способами, согласных — $4!$ способами. Наконец, перед первой гласной можно поставить 0, 1 или 2 согласные. Всего по правилу произведения имеем $2! \cdot 4! \cdot 3 = 144$ способа.

14.122. Выберем 3 буквы из 5 согласных и поставим их на указанные места (A_5^3 способов). Оставшиеся 5 букв произвольным образом расставим на остальные 5 мест ($5!$ способов). Всего $5! \cdot A_5^3 = 7200$ способов.



К 14.124

14.123. По правилу произведения $C_5^2 C_3^1 = 30$ способов; $C_4^1 C_3^1 = 12$ способов.

14.124. б) Доказательство проводится рассмотрением всех семи областей на рисунке. (Такой рисунок называется *кругами Эйлера* или *диаграммой Эйлера*.) Например, число элементов в заштрихованной области входит в выражение дважды с плюсом ($n(A)$ и $n(B)$) и один раз с минусом ($-n(A \cap B)$), т. е. эти элементы считаются один раз.

14.125. $6 = 20 + 11 - (35 - 10)$. **14.126.** 0%.

14.127. $40 = 100 - 15 - 20 - 25$.

14.128. По формуле включений и исключений число работающих равно $6 + 6 + 7 - 4 - 3 - 2 + 1 = 11$. Только английский язык знают $6-4-2+1 = 1$, только французский знают $7-3-2+1 = 3$.

14.129. По формуле включений и исключений пирожки взяли $92 - 47 - 38 - 42 + 28 + 31 + 26 - 25 = 25$ человек.

14.130. 65, 25, 94. Вводя в качестве неизвестных число абитуриентов, получивших «отлично» по одному или двум из трёх предметов, получим систему из шести уравнений с шестью неизвестными.

14.131. Если a и b стоят рядом, мы можем объединить их в один знак. Учитывая, что a и b можно переставить местами, получаем $2(n-1)!$ перестановок, в которых a и b стоят рядом. Поэтому они не стоят рядом в $n! - 2(n-1)!$ перестановках. Точно так же получаем, что a, b и c не стоят рядом в $n! - 6(n-2)!$ перестановках. Никакие два из элементов a, b, c не стоят рядом в $n! - 6(n-1)! + 6(n-2)!$ перестановках (по формуле включений и исключений).

14.132. Пусть 1-й ковёр и 2-й перекрываются по площади S_1, 1-й и 3-й — по площади S_2, 2-й и 3-й — по площади S_3, а все вместе — по площади S_4. Тогда $6 = 9-(S_1+S_2+S_3)+S_4$, откуда $S_1 + S_2 + S_3 = 3 + S_4 > 3$.

14.133. От 4 ($4 = 10 - 3 - 2 - 1$) до 7.

14.134. От 40 до 75. Ясно, что максимальное число — 75. Посчитаем минимальное. Не имеют красной грани $100 - 80 = 20$ кубиков, синей — 15, зелёной — 25. Сумма 60 есть максимальное число кубиков, не имеющих грани всех трёх цветов. Достигается этот максимум, когда три множества, состоящие из 20, 15 и 25 кубиков, не имеют попарно общих элементов. Значит, минимальное число кубиков, имеющих грани всех трёх цветов, равно $100 - 60 = 40$.

14.135. От 53% до 80%.

14.136. Если $n = 2k$, то наименьшее число перестановок равно $2C_k^2 = k(k-1)$; если $n = 2k+1$, то оно равно $C_k^2 + C_{k+1}^2 = k^2$. Наименьшее число перестановок получается, если всех людей разделить на две одинаковые ($n = 2k$) или отличающиеся на 1 ($n = 2k+1$) группы, разделив круглый стол по диаметру, а затем в каждой половине сделать сначала перестановку одного человека со всеми людьми этой половины, затем перестановку второго со всеми (кроме первого), затем — третьего и т. д.

14.137. $44 \cdot 1985 + 1$. По условию любые два множества пересекаются по одному элементу. Докажем, что существует элемент, содержащийся во всех множествах. Предположим противное. Возьмём первое множество A_1. В нём найдется элемент a, который принадлежит по крайней мере ещё 45 множествам — $A_2, A_3, \ldots, A_{46}$, так как в противном случае общее число множеств не превосходило бы $44 \cdot 45 + 1 = 1981$, что не так. По нашему предположению, имеется множество, не содержащее элемента a. Оно пересекается по одному элементу с $A_1, A_2, \ldots, A_{46}$ и поэтому содержит 46, а не 45 элементов. Противоречие.

14.138. Всего существует $3^3 = 27$ различных трёхзначных чисел, в записи которых участвуют цифры $1, 2, 3$. Кроме первых двух цифр в последовательности нажатий кнопок, каждая из остальных цифр служит последней цифрой какого-то трёхзначного числа. Значит, в искомой последовательности должно быть не менее $27 + 2 = 29$ цифр. Приведём 29 цифр, которых достаточно для открытия замка:

$$11123222133313121223113233211.$$

14.139. Четырёхзначные числа с неповторяющимися цифрами из цифр $1, 2, \ldots, 9$ можно составить $9\cdot8\cdot7\cdot6$ способами. Для любого числа, принадлежащего этому множеству, в том же множестве существует число, каждая цифра которого дополняет соответствующую цифру исходного числа до 10, т. е. все числа множества можно разбить на пары. Всего — $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/2$ таких пар. Сумма чисел, образующих одну пару, равна $1000\cdot10+100\cdot10+10\cdot10+10 = 11110$. Значит, сумма членов, образующих рассматриваемое множество, равна $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 11110/2$.

14.140. Пусть $F(n)$ — число способов, которыми можно вложить n писем $L_1, \ldots, L_n$ в n конвертов $K_1, \ldots, K_n$ так, чтобы ни одно письмо не попало в «свой» конверт. Требуется вычислить $F(6)$. Пусть, перепутав письма и конверты, мы вложили письмо L_1 в конверт K_i $(i \neq 1)$. Возможны два случая.

Случай 1. Письмо L_i попало в конверт K_1. Тогда остальные 4 письма (ошибочно) вложены в 4 остальных конверта, что можно сделать $F(4)$ способами. Поскольку K_i может быть любым из 5 конвертов, то разложить 6 писем по 6 конвертам так, чтобы письмо L_1 попало в конверт K_i $(i \neq 1)$, письмо L_i — в конверт K_1 и остальные письма также оказались в «чужих» конвертах, нам удастся $5 \cdot F(4)$ способами.

Случай 2. Письмо L_i не попало в конверт K_1. Условимся на минуту считать, что письмо L_i должно быть отправлено в конверте K_1. Тогда ни одно из писем $L_2, \ldots, L_6$ не попало в «свой» конверт. Разложить в полном беспорядке 5 писем по 5 конвертам можно $F(5)$ способами, а K_i, как и прежде, может быть любым из 5 конвертов.

Следовательно, разложить 6 писем по шести конвертам так, чтобы письмо L_1 попало в конверт K_i $(i \neq 1)$, письмо L_i не попало в конверт K_1 и остальные письма также оказались в «чужих» конвертах, нам удастся $5 \cdot F(5)$ способами.

Итак, $F(6) = 5F(5) + 5F(4)$. Аналогично $F(5) = 4F(4) + 4F(3)$, $F(4) = 3F(3) + 3F(2)$, $F(3) = 2F(2) + 2F(1)$. Так как $F(1) = 0$, $F(2) = 1$, то $F(3) = 2$, $F(4) = 9$, $F(5) = 44$, $F(6) = 265$.

В решении этой задачи число 6 не имеет особого значения. Все рассуждения остаются в силе при произвольном числе n писем и n конвертов. Повторяя их, мы получим $F(n) = (n-1)F(n-1) + (n-1)F(n-2)$. Это соотношение вместе с $F(1) = 0$, $F(2) = 1$ позволяют найти зависимость $F(n)$ от n:

$$F(n) = n!(1/2! - 1/3! + \ldots + (-1)^n/n!).$$

Эта задача называется задачей Бернулли — Эйлера о перепутанных письмах.

14.141. Ответ зависит от того, включено ли в число подмножеств пустое множество. В 1-м случае (пустое множество входит в число подмножеств) ответ на 1 больше, чем во 2-м. Далее рассматриваем лишь непустые подмножества.

Пусть p — число всех возможных разбиений множества Z, содержащего n элементов, на 2 непустых подмножества. Тогда $2p$ означает число всех подмножеств множества Z, непустых и отличных от самого множества Z.

Число $2p$ мы найдем как сумму числа подмножества, содержащих $1, 2, \ldots, (n-1)$ элементов. Поскольку подмножеств, содержащих k элементов, существует столько же, сколько способов выбрать k элементов из n, то по формуле бинома Ньютона получаем $2^n - 2p = 2$, откуда $p = 2^{n-1} - 1$

14.142. $12!/(6! \cdot 2^6) = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$. Первое подмножество из двух элементов можно выбрать C_{12}^2 способами. Второе множество из 2 элементов, отличное от 1-го, мы выбираем из 10 оставшихся элементов исходного множества. Сделать это можно C_{10}^2 способами. Аналогично, 3-е множество из 2 элементов можно выбрать C_8^2 способами и т. д. Значит, 6 подмножеств, каждое из которых содержит по 2 элемента, можно выбрать $C_{12}^2 C_{10}^2 \ldots C_2^2 = 12!/2^6$ способами. Однако любое разбиение исходного множества на 6 различных подмножеств, каждое из которых содержит по 2 элемента, встретится при этом 6! раз, поскольку разбиение не зависит от того, в какой последовательности мы выбираем 6 подмножеств.

14.143. $C_{11}^5 = 462$. Докажем, что для каждой группы из 5 человек существует замок, который может открыть любая другая группа. Действительно, если две группы из пяти человек не могут открыть замок, то и их объединение, в котором по меньшей мере шесть человек, не может открыть его, что противоречит условию. Таким образом, число замков не меньше $C_{11}^5 = 462$.

Доказательство этого утверждения показывает и путь построения примера — каждой группе из пяти человек сопоставим замок, ключи от которого будут у остальных шести членов комиссии. Ясно, что тогда никакие пять человек не смогут открыть «свой» замок, а любые шесть смогут открыть все замки, поскольку для каждого замка среди них найдётся человек, не входящий в «его» группу.

14.144. Найдем количество различных пар непересекающихся подмножеств при условии, что в паре выделены первое и второе подмножества. Для каждого из n элементов есть три возможности: его можно или включить в первое подмножество, или включить во второе подмножество, или не включать ни в одно из них. Поэтому количество указанных пар равно 3^n. Среди них есть одна пара, в которой оба подмножества пусты. Оставшиеся $(3^n - 1)$ пары в свою очередь разбиваются на двойки совпадающих пар, если разрешить переставлять в парах местами первое и второе подмножества. Таким образом, существует $(3^n - 1)/2$ (неупорядоченных) пар подмножеств, из которых хотя бы одно не пусто. Всего же $(3^n - 1)/2 + 1 = (3^n + 1)/2$ различных пар подмножеств, удовлетворяющих условию задачи.

14.145. Пусть числа $C_n^k, C_{n+1}^k, \ldots, C_{n+k}^k$ имеют общий делитель $d \in \mathbb{N}$. Тогда числа $C_n^{k-1} = C_{n+1}^k - C_n^k, \ldots, C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k}^k - C_{n+k-1}^k$, также имеют общий делитель d. Аналогично получаем, что числа $C_n^{k-2}, \ldots, C_{n+k-2}^{k-2}$ имеют общий делитель d. Продолжая аналогичные рассуждения и далее, получим в итоге, что число $C_n^0 = 1$ делится на d. Следовательно, $d = 1$.

14.146. Так как для каждого значения $k = 1, 2, \ldots, n-1$ выполнены соотношения $C_n^{k-1} = kC_n^k/(n-k+1), C_n^{k+1} = (n-k)C_n^k/(k+1)$, $C_n^k \neq 0$, то равенство $2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$ равносильно равенству $2 = k/(n - k + 1) + (n - k)/(k + 1)$, или $(n - 2k)^2 = n + 2$.

Следовательно, искомые значения $n \in \mathbb{N}$ обязаны иметь вид $n = m^2 - 2$, где $m \geqslant 2$. Однако если $m = 2$, то $n = 2$ и равенство

$(n-2k)^2 = n+2$ не выполняется при единственно возможном в этом случае значении $k=1$. Если же $m>2$, то это равенство справедливо, например, при $k = m(m-1)/2-1$ (указанное значение k является целым и удовлетворяет неравенствам $0<k<n$, так как одно из чисел m или $m-1$ является чётным и при $m>2$ имеют место оценки $0<m(m-1)/2-1<m^2-2$). Итак, искомые значения n — это все числа вида $n=m^2-2$, где $m \geqslant 3$.

14.147. Найдем количество троек натуральных чисел (x,y,z), для которых $x \leqslant y \leqslant z$ и $x+y+z=6n$. При каждом значении $k=1,2,\ldots,n$ выпишем все тройки, для которых $x=2k-1$ и соответственно $x=2k$:

$$(2k-1;2k-1;6n-4k+2),(2k-1;2k;6n-4k+1),\ldots,\\ (2k-1;3n-k-1;3n-k+2),(2k-1;3n-k;3n-k+1),$$

и соответственно

$$(2k;2k;6n-4k),(2k;2k+1;6n-4k-1),\ldots,\\ (2k;3n-k-1;3n-k+1),(2k;3n-k;3n-k).$$

Поэтому количество всех выписанных троек равно

$$S_k = (3n-k)-(2k-2)+(3n-k)-(2k-1) = 6n-6k+3,$$

а количество всех троек, удовлетворяющих условию задачи, равно $S_1+\ldots+S_n = 3n^2$.

14.148. Каждому набору из 6 различных натуральных чисел от 1 до 49 (без ограничения общности считаем их расположенными в порядке возрастания) $a_1<a_2<\ldots<a_6$ поставим в соответствие набор вида a_1, a_2-1, a_3-2, a_4-3, a_5-4, a_6-5.

Числа в последнем наборе различны в том и только в том случае, если в исходном наборе не было последовательных чисел, и всегда расположены в порядке неубывания. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между множествами наборов из 6 различных чисел от 1 до 49, среди которых нет последовательных чисел, и всех наборов из 6 различных чисел от 1 до 44. Количество элементов в каждом из этих множеств равно C_{44}^6, а количество всех наборов из 6 различных чисел от 1 до 49 равно C_{49}^6. Итак, количество наборов, в которых есть последовательные числа, равно $C_{49}^6 - C_{44}^6$.

14.149. а) Положительное число $C_{2m}^m/(m+1) = C_{2m}^m - C_{2m}^{m-1}$ является целым. б) Пусть дано число m. Так как при $n=m$ число $kC_{2n}^{n+m}/(n+m+1) = k/(2m+1)$, должно быть натуральным, то искомое значение k должно делиться на $2m+1$, поэтому $k \geqslant 2m+1$. Пусть $k = 2m+1$. Тогда при $n = m$ положительное число $kC_{2n}^{n+m}/(n+m+1)$ является натуральным, а при $n > m$ оно равно $C_{2n}^{m+n} - C_{2n}^{n+m+1}$, т. е. является целым. Итак, искомое наименьшее значение k равно $2m+1$.

14.150. Из тождества $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, пользуясь биномом Ньютона, получаем

$$C_{2n}^0 + \ldots + C_{2n}^{2n}x^{2n} = (C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n)(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n).$$

Приравнивая коэффициенты при x^n и учитывая, что $C_n^k = C_n^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, получаем соотношение $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$, откуда легко следует требуемое.

14.151. 927. Обозначим через x_n количество способов выбрать из чисел $1, 2, \ldots, n$ набор из нескольких чисел (возможно, не содержащий ни одного числа), в котором нет никаких трёх последовательных чисел. Несложно показать, что при $n \geqslant 3$ имеет место равенство $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$. А поскольку $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, находим $x_4 = 13$, $x_5 = 24, \ldots, x_{11} = 927$.

14.152. 2^{n-2} дробей. Прежде всего ясно, что в полученной дроби x_1 будет стоять в числителе, а x_2 окажется в знаменателе при любой расстановке скобок (знак деления, стоящий перед x_2, относится либо к самому x_2, либо к какому-либо выражению, содержащему x_2 в числителе). Остальные буквы $x_3, x_4, \ldots, x_n$ могут располагаться в числителе или знаменателе совершенно произвольным образом; отсюда следует, что всего можно получить 2^{n-2} дробей: каждая из $n-2$ букв $x_3, x_4, \ldots, x_n$ может оказаться независимо от остальных в числителе или знаменателе.

Докажем это утверждение по индукции. При $n = 3$ можно получить две дроби: $(x_1 : x_2) : x_3 = x_1/(x_2x_3)$ и $x_1 : (x_2 : x_3) = (x_1x_3)/x_2$, так что утверждение верно. Пусть оно справедливо при $n = k$ в докажем его для $n = k+1$. Пусть выражение $x_1 : x_2 : \ldots : x_k$ после некоторой расстановки скобок записывается в виде некоторой дроби A. Если в это выражение вместо x_k подставить $x_k : x_{k+1}$, то x_k окажется там же, где и было в дроби A, а x_{k+1} будет стоять не там, где стояло x_k (если x_k было в знаменателе, то x_{k+1} окажется в числителе и наоборот).

Теперь докажем, что можно добавить x_{k+1} туда же, где стоит x_k. В дроби A после расстановки скобок обязательно будет выражение вида $(p : x_k)$, где p — буква x_{k-1} или некоторая скобка; заменив $(p : x_k)$ выражением $((p : x_k) : x_{k+1}) = p : (x_kx_{k+1})$, получим, очевидно, ту же самую дробь A, где вместо x_k стоит x_kx_{k+1}.

14.153. Пусть размеры прямоугольника $m \times n$ клеток. Доказательство проводится индукцией по $m+n$. По существу в решении этой задачи доказываются равенства $C_{m+n-1}^{m-1} = nC_{m+n-1}^{m} = (m+n-1)C_{m+n-2}^{m-1}$ (в задаче $n = km$).

14.154. Рассмотрим все пары цифр, стоящих в разных числах в одном разряде. Поскольку пар чисел 10, то всего таких пар цифр будет $10n$. При этом пар разных цифр, т. е. пар $(1, 2)$ в каждом разряде не меньше 4 и не больше 6, так что среди $10n$ выбранных пар общее количество пар $(1, 2)$ заключено между $4n$ и $6n$.

С другой стороны, так как каждые два числа совпадают в m разрядах, то каждая пара чисел дает $n-m$ пар $(1, 2)$. Поэтому общее число таких пар $10(n-m)$. Итак, $4n \leqslant 10(n-m) \leqslant 6n$, откуда $2/5 \leqslant m/n \leqslant 3/5$.

14.155. При $n = 1$ четыре числа 11, 21, 12, 22 удовлетворяют условию. Докажем утверждение задачи по индукции.

Обозначим через a' число, полученное из a заменой цифр 1 на 2 и 2 на 1, а через ab — число, полученное приписыванием к a числа b. Пусть построено множество A_n из 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно, причём каждые два из чисел отличаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах. Рассмотрим множество A_{n+1}, состоящее из чисел aa и aa', где $a \in A_n$. Все такие числа 2^{n+1}-значны, всего их 2^{n+2}. Кроме того, любые два из них отличаются не менее чем в 2^n разрядах. В самом деле, числа aa и aa', а также числа aa и bb' при любых a и b отличаются ровно в 2^n разрядах (в тех разрядах, где a и b отличаются, a' и b' совпадают, и наоборот); числа aa и bb по предположению индукции отличаются не менее чем в 2^n разрядах.

14.156. Нет. Всего существует 128 двухбуквенных слов длины 7. Из них «невозможными» будут $3 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 30 \cdot 2 = 124$ слова.

14.157. $3456 = 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$. Если все цифры десятизначного числа различны, то их сумма равна 45, и поэтому это число делится на 0. Значит, если оно делится на 11111, то оно делится и на 99999. Пусть $a_0, \ldots, a_9$ — цифры десятизначного число. Легко показать, что $a_0 + a_5 = 9$, $a_1 + a_6 = 9$, $a_2 + a_7 = 9$, $a_3 + a_8 = 9$, $a_4 + a_9 = 9$. Итак, последние пять цифр интересного числа полностью определяются его первыми цифрами, а первые пять цифр можно выбирать произвольно, следя только, чтобы никакие две из них не давали в сумме 9 и a_9 не равнялось нулю.

14.158. В соответствии с каждой перестановкой запишем вектор $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ такой, что $l_i = 1$, если $i \in S$ — неподвижная точка данной перестановки, и $l_i = 0$ в противном случае. Так как число перестановок равно $n!$, то получим $n!$ векторов. Подсчитаем общее число единиц во всех этих векторах двумя способами. Число векторов, в записи которых участвует ровно k единиц, равно $p_n(k)$, поэтому общее число единиц во всех векторах составляет $1p_n(1) + 2p_n(2) + \ldots + np_n(n)$.

С другой стороны, число векторов, у которых на i-м месте стоит единица, равно $(n-1)!$. Следовательно, число единиц, стоящих на i-м месте, во всех векторах равно $(n-1)!$, а общее число единиц во всех векторах равно $n(n-1)! = n!$. Итак, $p_n(1) + 2p_n(2) + \ldots + np_n(n) = n!$.

14.159. Вместо множества $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ удобно рассмотреть множество $A = \{-994, -993, \ldots, 993, 994\}$, получающееся вычитанием из каждого элемента данного множества числа 995. Пусть

$$B_1 = \{993, -496, -497\}, \quad B_2 = \{-993, 496, 497\}, \ \ldots$$
$$B_{2k+1} = \{993 - 4k, 2k - 496, 2k - 497\},$$
$$B_{2k+2} = \{4k - 993, 496 - 2k, 497 - 2k\}, \ \ldots$$
$$B_{115} = \{665, -382, -383\}, \quad B_{116} = \{-665, 382, 383\}.$$

Положим $B_{117} = \{-1, 0, 1\}$. Все множества B_i $1 \leqslant i \leqslant 117$ имеют по 3 элемента, сумма которых равна 0. Из соображений чётности следует, что вторые элементы множеств $B_1, \ldots, B_{116}$ не могут совпадать с какими-либо первыми или третьими элементами этих множеств, все первые элементы этих множеств по абсолютной величине больше всех третьих элементов. Значит, множества B_i, попарно не пересекаются. Кроме того, если какое-либо число x является элементом одного из множеств B_i, то число $(-x)$ также является элементом одного из множеств B_i.

Заметим, что $14 \cdot 117$ элементов множества A, которые не принадлежат ни одному из множеств B, разбиваются на $7 \cdot 117$ пар чисел, имеющих противоположные знаки. Добавив произвольным образом по 7 таких различных пар чисел к выбранным выше множествам B_i, получим искомое разбиение множества A на 117 попарно непересекающихся множеств.

Замечание. Можно также доказать, что множество $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ представимо в виде объединения k непересекающихся множеств с одинаковыми суммами элементов, если k является делителем числа n, $1 < k < n$.

14.160. Не более трёх. Указание. Пусть последняя точка A_{1969} лежит между точками A_k и A_l. Тогда A_{1968} находится между точками A_{k-1} и a_{l-1} (за исключением случаев $k = 1$ и $l = 1$, рассматриваемых отдельно), поэтому дуги, возникшие в результате 1968-го разбиения, имеют такие же длины, как и некоторые возникшие ранее.

14.161. а) Последовательность из n «блоков» $123\ldots n$; i-ю цифру любой перестановки можно взять из i-го блока.

б) Выпишем $n-1$ раз подряд «блок» $123\ldots n$ и затем 1. Проверим, что эта последовательность универсальна. В самом деле, если в перестановке $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ хоть одна пара соседних чисел k_j, k_{j+1} стоит в порядке возрастания, то их можно взять из одного блока $12\ldots n$ (j-го по порядку) при этом последняя 1 даже не понадобится. Если это не так, то перестановка обязательно совпадает с $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$; тогда из j-го блока нужно взять $n-j$, и пригодится последняя 1.

в) Отметим для каждого числа k (от 1 до n) первое его вхождение в универсальную последовательность. Одно из отмеченных чисел встречается на n-м месте от начала или даже дальше. Пусть для определённости таким числом будет n. Перед ним стоит по крайней мере $n-1$ чисел. После него стоит последовательность, которая должна быть универсальной для перестановок чисел $(1, 2, \ldots, n-1)$, и по индукции мы можем считать доказанным, что её длина не меньше $n(n-1)/2$. Поэтому длина n-универсальной последовательности не меньше $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

г) Заметим, что если число n входит в n-универсальную последовательность лишь один раз, то до него и после него должна стоять $(n-1)$-универсальная последовательность. Отсюда получим более точную оценку снизу, чем в пункте в).

Пусть l_n — длина минимальной n-универсальной последовательности. Тогда $l_2 = 3$. Докажем, что $l_3 = 7$, Пример: 1213121 или 1231231. Если какое-то число (скажем, 3) входит в последовательность лишь один раз, то её длина не меньше $1 + 2l_2 \leqslant 7$. В другом случае рассмотрим число, которое впервые встретится на 3-м месте или позже (пусть это будет 3). За ним встретится ещё раз 3, а также 2-универсальная последовательность, так что общая длина не меньше $2+1+1+l_2 = 4+l_2 = 7$. Аналогично убеждаемся в том, что $l_4 = 12$. Пример: 123412314231. Оценки: если некоторое число входит в последовательность лишь один раз, то её длина не меньше $1+2l_3 = 15$, в другом случае она не меньше $3+1+1+l_2 = 12$. То же рассуждение показывает, что $l_n \geqslant n(n+1)/2 + n - 2$.

д) Можно доказать, что n-универсальной является такая последовательность длины $n^2 - 2n + 4$:

$$n12\ldots(n-1)n12\ldots(n-2)n(n-1)\ldots 12n3\ldots(n-1)1n2 \qquad (*)$$

где в каждый из $n-2$ блоков $12\ldots(n-1)$ вставлено n (после $n-1$, затем после $n-2$, $\ldots$, наконец, после 2), кроме того, n стоит в начале и в конце, имеющем вид $1n2$. (Так изготовлен второй пример для $n = 4$.) Для этого достаточно убедиться в том, что слева от k-го вхождения n в $(*)$ можно вычёркиванием получить любую последовательность из $k-1$ различных чисел (среди $1, 2, \ldots, n-1$), а справа — любую из $n-k$ таких чисел; дело в том, что обе эти части — левая и правая — после вычёркивания всех вхождений n (правая — также после циклической перенумерации) имеют такой тип: $r-1$ раз блок $12\ldots m$, затем $12\ldots r$, где $r < m = n-1$.

Эта последовательность обладает свойством «(m, r)-универсальности»: из неё вычёркиванием можно получить любую последовательность r разных чисел (среди $1, 2, \ldots, m$).

14.162. а) Разобьём десять цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$ на две группы по 5 цифр в каждой (например, от 0 до 4 — одна группа, от 5 до 9 — другая). Достаточно использовать ящики, у которых обе цифры берутся из одной группы, поскольку такие две цифры есть в любом трёхзначном номере.

б) Кроме 10 ящиков 00, $11, \ldots, 99$, которые точно будут заняты, потребуется не менее 30 ящиков, чтобы разместить билеты с тремя разными цифрами: таких билетов всего $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$, а в каждый ящик с номером $\overline{pq}$ $(p \neq q)$ помещается не более $3 \cdot 8 = 24$ из них ($\overline{zpq}$, $\overline{pzq}$ и $\overline{pqz}$, где z — любая цифра, отличная от p и q).

в) Пусть x — наименьшее количество номеров занятых ящиков, начинающихся с одной какой-либо цифры $(x \geqslant 1)$; поскольку все цифры равноправны, мы можем считать, что меньше всего номеров начинается с 9 и эти номера — $\overline{99}, \ldots, \overline{9y}$, где $y = 10 - x$. Тогда любой билет $\overline{9pq}$, где $p < y$, $q < y$, не может помещаться в ящиках $\overline{9p}$ и $\overline{9q}$, т. е. должен быть занят ящик $\overline{pq}$. Таким образом, заняты по крайней мере все y^2 ящиков с номерами, у которых обе цифры — от 0 до $y-1$, и ещё по крайней мере x^2 ящиков, начинающихся с одной из цифр от y до 9 (не менее чем по x для каждой из этих x цифр), т. е. всего занято не менее $y^2 + x^2 = (10-x)^2 + x^2 \geqslant 50$ ящиков.

г), д) Для данных натуральных чисел k и s, $k < s$, обозначим через $F(k, s)$ наименьшее из чисел $x_1^2 + \ldots + x_k^2$, где $x_1, \ldots, x_k$ — натуральные числа, в сумме дающие s; величину $F(k, s)$ можно выразить через k и s — наименьшее значение суммы квадратов достигается, когда числа x_k «почти равны», точнее, если $s = kq+r$, $0 \leqslant r < k$, то $k-r$ из них равны q и r остальных $q+1$, так что

$$F(k,s) = (k-r)q^2 + r(q+1)^2 = kq^2 + r(2q+1).$$

Удобно рассматривать более общую задачу — для k-значных «билетов» с s «цифрами» от 0 до $s-1$ (в нашей задаче $s = 10$). Докажем, что наименьшее число $M(k,s)$ ящиков с номерами $\overline{pq}$ $(p, q = 0, \ldots, s-1)$, в которые можно поместить билеты, вычеркнув $k-2$ цифры, равно $F(k-1,s)$.

В частности, в задаче г) $M(4,10) = F(3,10) = 3^2+3^2+4^2 = 34$, а ответ к задаче д) дается таблицей

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M(k,10) = F(k-1,10)$	50	34	26	20	18	16	14	12	10

Неравенство $M(k,s) \geqslant F(k-1,s)$ можно доказать индукцией по $k+s$, рассуждая так же, как в пункте в):

$$M(k,s) \geqslant \min_{1 \leqslant x \leqslant s} (M(k-1, s-x) + x^2).$$

Для размещения билетов по $F(k-1,s) = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{k-1}^2$, ящикам достаточно, как в пункте а), разбить s цифр на $k-1$ группу (по $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ цифр) и оставить ящики, у которых обе цифры из одной группы.

15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

15.1. 12/365. **15.2.** 5/12.

15.3. 1/3. Число всех двузначных чисел равно 90. Число двузначных чисел, делящихся на 3, находится из уравнения $99 = 12 + 3(n-1)$.

15.4. 0,4. **15.5.** 3/13.

15.6. $P(A) = 1/8$; $P(B) = 3/8$. Пространство элементарных событий состоит из выборок с повторениями. составленных из букв Ц и Г. Оно содержит $2^3 = 8$ элементов. Событию A благоприятна только одна выборка (Ц, Ц, Ц), а событию B — три: (Ц, Ц, Г), (Ц, Г, Ц), (Г, Ц, Ц). Таким образом, $P(A) = 1/8$; $P(B) = 3/8$.

15.7. 1/6. **15.8.** 1/2. **15.9.** а) 89/99, б) 10/99. **15.10.** 1/8.

15.11. C_n^2/C_{n+m}^2. **15.12.** 1/720. **15.13.** 245/354.

15.14. nmk/C_{n+m+k}^3. **15.15.** C_{30}^4/C_{45}^4. **15.16.** $4/C_{15}^2$.

15.17. Три судьи могут выбрать победителя 10^3 способами. В $A_{10}^3 = 720$ случаях они назовут трёх различных кандидатов.

Поэтому совпадение хотя бы у двух судей будет в 280 случаев. Доля таких случаев равна 0,28.

15.18. 1/60. Пространство элементарных событий состоит из всех перестановок с заданным числом повторений, имеющих состав $(3, 2, 1)$. Благоприятной будет только одна такая перестановка.

15.19. $\frac{5\cdot 3!\cdot 4!}{7!}$. **15.20.** $2 \cdot 4!3!/7!$.

15.21. $24\cdot 48!\,13^4/52!$. Пространство элементарных событий состоит из всех выборок, имеющих состав $(13, 13, 13, 13)$. Благоприятными считаются выборки состава $(12, 12, 12, 12)$, к каждой из которых присоединяют один из четырёх тузов.

15.22. $(5!)^2/10!$. **15.23.** $50/C_{15}^5$. **15.24.** $C_n^k C_{N-n}^{m-k}/C_N^m$.

15.25. $4/C_{48}^6$, $C_6^5 C_{42}^1/C_{48}^6$, $C_6^4 C_{42}^2/C_{48}^6$, $C_6^3 C_{42}^3/C_{48}^6$.

15.26. $C_{48}^5 C_4^1/C_{52}^6$, $C_{44}^4 C_4^1 C_4^1/C_{52}^6$.

15.27. $C_4^2 C_2^1/C_6^3 = 0{,}6$. **15.28.** $2C_{18}^8/C_{18}^{10}$.

15.29. Рассмотрим предпоследний бросок. После него общая сумма должна быть либо 12, $11, \ldots, 8$, либо 7. Если она равна 12, то общий результат будет с равной вероятностью принимать значения $13, \ldots, 18$. Аналогично при сумме 11 конечный результат с равной вероятностью принимает значения $13, \ldots, 17$ и т. д. Число 13 появляется как равный кандидат в каждом случае и является единственным числом такого рода. Итак, число 13 — наиболее вероятное.

В общем случае те же доводы показывают, что наиболее вероятная сумма, впервые превышающая n $(n > 5)$, есть $n + 1$.

15.30. Обозначим через a количество зелёных мячей в красной коробке. Тогда число красных мячей в зелёной коробке плюс количество зелёных мячей в красной коробке равно $2a + 1$. Так как $a \leqslant 5$, то $1 \leqslant 2a + 1 \leqslant 11$. Непростые нечётные числа в этих пределах — 9 и 1 (1 — не простое и не составное), откуда $a = 0$ или $a = 4$. Вероятность получить выборку с $a = 0$ или $a = 4$ равна $C_6^5/C_{14}^5 + C_8^4 C_6^1/C_{14}^5$.

15.31. Вероятность проигрыша B — 0,6, проигрыша C — 0,7; вероятность непроигрыша B — 0,4, непроигрыша C — 0,3. При последовательности BCB не проиграть подряд две партии можно тремя способами:

1. не проиграть все три партии, вероятность этого события $0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4$;

2. не проиграть первые две партии (вероятность $0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6$);

3. не проиграть последние две партии (вероятность $0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4$). Сложив три вероятности, получим число $0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}6$.

При последовательности CBC аналогично получим вероятность не проиграть подряд две партии — $0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}7$. Итак, последовательность CBC лучше.

15.32. Пусть общее количество шаров в первой и второй урнах равно m_1 и m_2 (для определённости $m_1 < m_2$), а количество белых шаров в этих урнах равно k_1 и k_2 соответственно. Тогда вероятность того, что оба вынутых шара белые, равна $(k_1/m_1) \cdot (k_2/m_2)$. Получаем соотношения: $(k_1/m_1) \cdot (k_2/m_2) = 27/50$, $m_1 + m_2 = 25$.

Так как $27m_1m_2 = 50k_1k_2$, то хотя бы одно из чисел m_1, m_2 делится на 5. Но сумма m_1+m_2 тоже делится на 5, поэтому каждое из чисел m_1, m_2 делится на 5. Таким образом, имеем всего две возможности: либо $m_1 = 5$, $m_2 = 20$, либо $m_1 = 10$, $m_2 = 15$. В случае $m_1 = 5$, $m_2 = 20$ получаем $k_1k_2 = 54$, где $0 \leqslant k_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 20$.

Перебрав все возможные значения k_1, найдем $k_1 = 3$, $k_2 = 18$. Тогда в первой урне 2 чёрных шара, во второй тоже 2 чёрных шара, и вероятность вытащить пару чёрных шаров равна $(2/5) \times \times (2/20) = 0{,}04$. Аналогично, в случае $m_1 = 10$, $m_2 = 15$ находим $k_1 = 9$, $k_2 = 9$. Тогда в первой урне 1 чёрный шар, во второй — 6 чёрных шаров, и вероятность вытащить 2 чёрных шара равна $(1/10) \cdot (6/15) = 0{,}04$ (в обоих случаях ответы одинаковы).

15.33. $1 - C_{86}^5/C_{90}^5$. Пусть p — требуемая вероятность, k — число способов, которыми из первых 90 натуральных чисел можно выбрать 5 таких, что любые два из них отличаются между собой больше чем на 1. Тогда $p = 1 - k/C_{90}^5$. Найдем k.

Рассмотрим набор из пяти чисел $1 \leqslant a < b < c < d < e \leqslant 90$, среди которых нет двух последовательных, ему однозначно соответствует набор различных чисел a, $b-1$, $c-2$, $d-3$, $e-4$, которые могут принимать любые значения от 1 до 86. Число способов, которыми можно выбрать 5 разных чисел из первых 86, равно C_{86}^5.

15.34. Обозначим через d вероятность того, что случайно выбранный учащийся даст правильный ответ. Вероятность совпадения ответа случайно выбранного учащегося с ответом учителя равна сумме вероятности αd правильного ответа обоих и вероятности $(1-\alpha)(1-d)$ неправильного ответа обоих. Поэтому условие задачи можно записать в виде $\alpha d + (1-\alpha)(1-d) = 1/2$, или $(\alpha - 1/2)(d - 1/2) = 0$.

Если $\alpha = 1/2$, то это условие выполнено и отношение числа мальчиков к числу девочек в классе может быть любым. Пусть $\alpha \neq 1/2$, тогда $d = 1/2$. Обозначим через x и y число мальчиков и девочек в классе. Вероятность d правильного ответа случайно выбранного учащегося класса равна сумме вероятности $\beta x/(x+y)$ того, что будет выбран мальчик и он даст правильный ответ, и вероятности $\gamma y/(x+y)$ того, что будет выбрана девочка и она даст правильный ответ. Итак, условие задачи имеет вид $\beta x/(x + y) + \gamma y/(x + y) = 1/2$, или $(\beta - 1/2)x = (1/2 - \gamma)y$.

Поэтому, если $\beta = \gamma = 1/2$, то отношение числа мальчиков к числу девочек в классе может быть любым, если $\beta = 1/2$, но $\gamma \neq 1/2$, то класс состоит только из одних мальчиков; если же $\beta \neq 1/2$, то отношение числа мальчиков к числу девочек в классе равно $(1 - 2\gamma)/(2\beta - 1)$ (разумеется, при условии, что дробь неотрицательна).

15.35. Разобьём все возможные пары троек вершин на C_n^6 групп, собирая в одной группе те и только те пары троек, которые образуют одинаковые шестёрки вершин. С одной стороны, каждая такая группа содержит столько элементов, сколькими способами можно разбить шестёрку фиксированных вершин на две тройки, т. е. $C_6^3 = 20$ элементов. С другой стороны, существует ровно 6 способов разбить шестёрку на две тройки, удовлетворяющие требуемому в задаче условию. Поэтому искомая вероятность равна $6/20 = 0{,}3$.

15.36. Если из трёх вершин две уже выбраны, то число способов, которыми можно выбрать третью вершину так, чтобы полученная тройка оказалась односторонней, зависит от углового расстояния l между двумя первыми вершинами. (Угловым расстоянием между вершинами A и B назовем величину $l = \angle AOB \cdot (n/\pi)$, где O — центр $2n$-угольника; при этом всегда $l \leqslant n$, а угловое расстояние между соседними вершинами равно 1.) При $l < n$ третью вершину можно выбрать $(l-1)+2(n-l) = 2n-1-l$ способами; если же $l = n$, то её можно выбрать произвольно, т. е. $2n - 2$ способами. Далее, для каждого значения $l = 1, \ldots, n - 1$ есть ровно $2n \cdot 2 = 4n$ способов выбрать сначала первую, а затем вторую вершину на угловом расстоянии l от первой. Наконец, для $l = n$ есть только $2n$ таких способов. Поэтому общее количество способов последовательного выбора трёх вершин равно

$$2n(2n - 2) + 4n(2n - 2 + 2n - 3 + \ldots + 2n - n) = 6n^2(n - 1).$$

Число односторонних троек подсчитано при условии, что в каждой тройке вершины упорядочены. Если же этого не делать, то число троек уменьшится в 6 раз. Количество способов произвольным образом выбрать 3 вершины равно $C_{2n}^3 = 2n(2n-1)(2n-2)/6$, поэтому искомая вероятность равна $3n/(2(2n - 1))$.

15.37. Так как чётность числа белых шаров, содержащихся в урне, не меняется после каждой операции, то последний шар будет белым тогда и только тогда, когда число n нечётно. Поэтому искомая вероятность равна либо 1 (если n нечётно), либо 0 (если n чётно).

15.38. Пусть у игроков A и B выпадает m и k «орлов» соответственно. Тогда искомая вероятность p события $m > k$ равна вероятности q события $(n+1)-m > n-k$, т. е. вероятности того, что у игрока A выпадает больше «решек», чем у игрока B (так как при каждом бросании монеты «орёл» и «решка» выпадают с равной вероятностью). С другой стороны, событие $m > k$ имеет место тогда и только тогда, когда $n-m < n-k$, т. е. когда $(n+1)-m \leqslant n-k$ (поскольку $n-m$ и $n-k$ — целые числа). Поэтому $p = 1-q$, откуда имеем $p = q = 1/2$.

15.39. Найдем количество строк $(i_1; \ldots; i_n)$, удовлетворяющих условию. Число i_n может принимать четыре значения: $n, \ldots, n-3$. Число i_n может принимать 5 значений: $n, n-1, \ldots, n-4$, за исключением того значения, которое уже занято числом i_n. Итак, число i_{n-1} также может принимать 4 значения. Аналогично, каждое из чисел $i_{n-2}, \ldots, i_4$ может принимать 4 значения. Числа i_1, i_2, i_3 могут быть выбраны произвольным образом из трёх значений, оставшихся после выбора чисел $i_n, \ldots, i_4$. Итак, среди всех $n!$ возможных строк имеется $4^{n-3} \cdot 3!$ строк, удовлетворяющих требуемому условию. Значит, искомая вероятность равна $4^{n-3} \cdot 3!/n!$.

15.40. Лучше изменить свой выбор. При первоначальном выборе вероятность того, что деньги в выбранной шкатулке — 1/3, вероятность того, что деньги в одной из двух других — 2/3. После того как ведущий открыл ту из оставшихся шкатулок, которая была пустой, вероятность нахождения выигрыша в третьей шкатулке становится равной 2/3. (Вероятность выигрыша при сохранении первоначального выбора по-прежнему равна 1/3.)

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

16. НЕРАВЕНСТВА

16.1. Числовые неравенства

16.1. а) $5^3 < 3^5$, б) $2^7 > 5^3$, в) $3^2 > 2^3$, г) $2^{10} < 3^7$, д) 4^{53}, е) 8^{91}.

16.2. $2^{100} < 3^{100}$, поэтому достаточно доказать, что $2 \cdot 3^{100} < 4^{100}$ т. е. что $(4/3)^{100} > 2$.

16.3. а) Обозначим число 1234568 через x. Тогда исходное неравенство превратится в $(x-1)(x+1) < x^2$, что очевидно.

б) $\dfrac{1975}{1987} = 1 - \dfrac{12}{1987} = 1 - \dfrac{120012}{19871987} < 1 - \dfrac{120012}{19871988} = \dfrac{19751976}{19871988}$.

в) Обозначим числитель первой дроби через m, а знаменатель — через n. Тогда вторая дробь равна $(m+1)/(n+2)$. Так как, очевидно, $2m > n$, то $mn + 2m > mn + n$ или $m/n > (m+1)/(n+2)$.

16.4. Обозначим числитель дроби через x. Тогда вся дробь равна $a = x/(10x-9)$, $1/a = 10 - 9/x$ и чем больше x, тем меньше a. Итак, первая дробь больше второй.

16.5. Обозначим числитель первой дроби через m, а знаменатель — через n. Тогда $(m+1)/(n+1) - m/n = (n-m)/(n(n+1))$. Так как $n > m$, вторая дробь больше.

16.6. $16\ldots6/6\ldots64 > 16/70 > 2/9 > 19\ldots9/9\ldots95$.

16.7. а) Первое число равно 0, поэтому оно меньше. б) Введем обозначение $n = 1970$. Имеем:

$$\left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)^2 = 2n + 2\sqrt{n^2-1} < 2n + 2n = \left(2\sqrt{n}\right)^2.$$

16.8. $100^2 > 150 \cdot 50$, поэтому первое число больше.

16.9. $(1{,}01)^{100} > 2$ (по неравенству Бернулли (см. 16.31)), поэтому $(1{,}01)^{1000} > 2^{10} = 1024 > 1000$.

16.10. а) Разобьём слагаемые на пары:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots = \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \ldots > \frac{1}{6} + \frac{1}{20} = \frac{13}{60} > \frac{1}{5}.$$

б) Заметим, что $1+\sqrt[n]{3} > 2\cdot 3^{1/2n}$. Поэтому

$$\left(1+\sqrt{3}\right)\ldots\left(1+\sqrt[11]{3}\right) > 2^{10}\cdot 3^{1/4+1/6+\ldots+1/22} > 2^{10}\cdot 3 > 1991,$$

так как

$$\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{22}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right)\right) > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=1.$$

16.11. Так как $99! > 100$, то $A < B$.

16.12. $\dfrac{1}{5001}+\dfrac{1}{5002}+\ldots+\dfrac{1}{5100} < \dfrac{1}{5000}\cdot 100=\dfrac{1}{50} < 1/49$.

16.13. 8^{85}. $7^{90} > 6^{91}$, так как

$$(7/6)^{90}=(1+1/6)^{90} > 1+90/6=16 > 6.$$

$7^{90} > 5^{100}$, так как

$$(7/5)^{90}=((1{,}4^3)^2)^{15} > (2{,}3^2)^{15} > 5^{15} > 5^{10}.$$

$8^{85} > 7^{90}$, так как $(8/7)^{18}=(((8/7)^2)^3)^3 > 2^3=8$.

16.14. а), в) Решение 1. Обозначим данное произведение через A и рассмотрим также произведение $B=2/3\cdot4/5\cdot\ldots\cdot98/99$. Так как $2/3 > 1/2,\ldots,1 > 99/100$, то $B > A$. Но,как нетрудно видеть, $AB=1/100$. Отсюда следует, что $A^2 < AB=1/100$, а значит, $A < 1/10$. Далее, $B < 2A$, следовательно, $A\cdot 2A > AB=1/100$ и, значит, $A > 1/(10\sqrt{2}) > 1/15$.

Решение 2. Введем, как выше, обозначение A. Тогда

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{99^2-1}{100^2} < A^2 < \frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{99^2}{100^2-1}.$$

Разлагая теперь числители дробей слева и знаменатели дробей справа по формуле разности квадратов, получим:

$$\frac{1}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{4\cdot4}\cdot\ldots\cdot\frac{98\cdot100}{100\cdot100} < A^2 < \frac{1}{1\cdot3}\cdot\frac{3\cdot3}{3\cdot5}\cdot\ldots\cdot\frac{99\cdot99}{99\cdot101}$$

или, после сокращения, $1/200 < A^2 < 1/101$. Тогда $1/15 < A <$ $< 1/10$.

Совершенно так же можно доказать и более общее соотношение

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

б) Докажем, что при $n > 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Доказательство проще всего провести методом математической индукции. При $n = 1$ имеем равенство. Предположим теперь, что для какого-то значения n неравенство выполняется. Умножим обе части на $(2n+1)/(2n+2)$. Так как

$$\left(\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2(3n+4)+n} < \frac{1}{3n+4},$$

то

$$\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n+2)} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

Подставив в это неравенство $n = 50$, получим более сильное неравенство (так как $\sqrt{3\cdot 50+1} \approx 12{,}288 < 12.$)

16.15. $\sin 1 < \sin\pi/3 = \sqrt{3}/2 < 7/8 < \log_3\sqrt{7}$.

16.16. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8}{4} \geqslant 1{,}1.$$

Переходя к десятичным логарифмам, получим:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\lg 5}{\lg 4} + \frac{\lg 6}{\lg 5} + \frac{\lg 7}{\lg 6} + \frac{\lg 8}{\lg 7}\right) > 1{,}1.$$

По неравенству Коши левая часть больше, чем

$$\sqrt[4]{\frac{\lg 5\lg 6\lg 7\lg 8}{\lg 4\lg 5\lg 6\lg 7}} = \sqrt[4]{\log_4 8} = \sqrt[4]{1{,}5} > 1{,}1.$$

Замечание. Вычисления показывают, что $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 \approx 4{,}4289$, т. е. приведённая в задаче оценка весьма точная.

16.17. Осуществим следующие преобразования и оценим результат:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1000} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}\right) <$$
$$< \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{23}{60} < \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

16.18. Второе. Обозначим $1977 = n$. Тогда неравенство следует из того, что

$$(n+1)^{n-1}(n-1)^{n+1} < (n+1)^n(n-1)^n = (n^2-1)^n < n^{2n}.$$

16.19. $\ln 1{,}01 > 2/201$. Функция $f(x) = \ln(1+x) - 2x/(x+2)$ возрастает при $x > 0$, поскольку

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0.$$

16.20. а) Разделим единичный круг на 18 равных секторов с углом 20°. Площадь каждого такого сектора равна $1/18$ площади единичного круга, т. е. $\pi/18$. Так как площадь треугольника внутри сектора меньше площади сектора, то $\sin 20^\circ/2 < \pi/18$, откуда $\sin 20^\circ < \pi/9$. Так как $\pi/9 < 7/20$, то $\sin 20^\circ < 7/20$, ч. т. д.

б) График функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi/6]$ является выпуклым вверх, поэтому при всех $x \in [0; \pi/6]$ он расположен выше графика прямой $y = 3x/\pi$, проходящей через его концевые точки, т. е. через точки с координатами $(0; 0)$ и $(\pi/6; 1/2)$. Значит, при всех $x \in (0; \pi/6)$ выполняется неравенство $\sin x > 3x/\pi$. Полагая в этом неравенстве $x = \pi/9$, получаем: $\sin 20^\circ = \sin(\pi/9) > 1/3$, ч. т. д.

16.2. Доказательство неравенств

16.21. После переноса всех слагаемых влево получим неравенство $(a/2 - b + c)^2 \geqslant 0$.

16.22. Выделим полные квадраты:

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b - \frac{2}{3}c\right)^2 + \frac{2}{3}\left(c - \frac{3}{4}d\right)^2 + \frac{5}{8}\left(d - \frac{4}{5}\right)^2 \geqslant 0.$$

16.23. Неравенство доказывается сложением двух неравенств:

$$(2^k - 1)(2^l - 1)(2^m - 1) > 0 \quad \text{и} \quad 2^{k+l+m} > 2^k + 2^l + 2^m.$$

Второе верно, так как $2^{k+l+m} \geqslant 2^{k+2} = 4 \cdot 2^k > 2^k + 2^l + 2^m$ (при $k \geqslant l \geqslant m$).

16.24. $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = -(a^2+b^2+c^2) \leqslant 0$.

16.25. Неравенство эквивалентно $(x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})/\sqrt{xy} \geqslant 0$.

16.26. Перенесём всё в одну сторону: $(a^3 + b^3 - a^2b - ab^2) + (b^3 + c^3 - b^2c - bc^2) + (a^3 + b^3 - a^2c - ac^2) \geqslant 0$. Каждую скобку разложим на множители: $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a^2 - b^2)(a - b) \geqslant 0$.

16.27. Решение аналогично разобранной задаче.

16.28. Докажем по индукции. Пусть $a_n = 1/2^2 + \ldots + 1/n^2$, $b_n = 1 - 1/n$. База очевидна. Переход: $1/k^2 = a_k - a_{k-1} < b_k - b_{k-1} = 1/(k(k-1))$.

16.29. а) База очевидна. Переход — $(n+1)! = (n+1)n! > 2^n(n+1) > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. б) База очевидна. Переход: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 2n = 4n \geqslant 2(n+1)$.

16.30. При $n \geqslant 10$.

16.31. Первый способ — по индукции, второй — с помощью бинома Ньютона.

16.32. В неравенстве

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

положив $x = a + 1/a$, $y = b + 1/b$, получим

$$\frac{1}{2}\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right) \geqslant \frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2.$$

Выражение $1/ab$ достигает наименьшего значения, когда произведение ab достигает наибольшего значения. Но из неравенства $ab \leqslant ((a+b)/2)^2 = 1/4$ имеем $1/ab \geqslant 4$, $1 + 1/ab \geqslant 5$. Отсюда получим требуемое неравенство. Равенство достигается лишь при $a = b = 1/2$.

16.33. Да. Если каждое из n чисел равно $1/n$, то их сумма равна 1, а сумма их квадратов — $1/n$, и при $n > 100$ она меньше 0,01.

16.34. Неравенство между средним арифметическим и геометрическим для чисел $a, b, b, \ldots, b$ (n чисел b).

16.35. Неравенство Коши–Буняковского для векторов $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{Y} = (1/2, 1/3, 1/6)$ Равенство имеет место только если $x_1 : x_2 : x_3 = 1/2 : 1/3 : 1/6$.

16.36. Положим $f(x) = \sin x$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

16.37. Положим $a = x^5$, $b = y^5$.

16.38. Из $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ следует $a^2 > b^2 + c^2 - 2bc = (b-c)^2$, что равносильно $a > |b - c| \geqslant c - b$ ($a > 0$). Отсюда $a + b > c$.

16.39. Заметим, что $a \leqslant 1$, $b \leqslant 1$, $c \leqslant 1$. Из справедливости неравенства $x(1-x) \leqslant 1/4$ при всех x следует, что $a(1-b)b \times (1-c)c(1-a) \leqslant 1/64$. Но, перемножив данные неравенства, получим $a(1-b)b(1-c)c(1-a) > 1/64$. Противоречие.

16.40. Пусть для определённости $|a| \geqslant |b|$. Тогда $|a+b| \leqslant 2|a|$ и, значит, $(a+b)^{50} \leqslant 2^{50}a^{50} < 2^{50}(a^{50} + b^{50})$.

16.41. Рассмотрим три случая.

1) $x \leqslant 0$. Каждый одночлен неотрицателен.
2) $0 < x < 1$. В этом случае $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = (1-x) + x^4(1-x^5) + x^{12} > 0$.
3) $x \geqslant 1$. Тогда $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = (x^9 + x)(x^3 - 1) + 1 \geqslant 1 > 0$.

16.42. Положим $x = (a^2 + b^2)/(ab)$. Тогда $x > 2$ (по неравенству о средних), поэтому достаточно доказать, что при $x \geqslant 2$ верно, что $x + 1/x \geqslant 2{,}5$, т. е. что $x^2 - 2{,}5x + 1 = (x-2)(x-0{,}5) \geqslant 0$.

16.43. Докажем по индукции, что для любого $k < n$:

$$1 + k/n < (1 + 1/n)^k < 1 + k/n + k^2/n^2.$$

Для $k = 1$ оно очевидно. Пусть оно верно для некоторого k, докажем его для $k+1$. Имеем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} \geqslant \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2} > 1+\frac{k+1}{n}.$$

Заметим, что это неравенство верно для любого целого положительного k. Используя теперь $k < n$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} < \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$
$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{n(k+1)-k^2}{n^3} < 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2},$$

ибо $n(k+1) > k^2$ при $n > k$. Подставив в выведенные неравенства значение $k = n-1$, получим $2 = 1+n/n \leqslant (1+1/n)^n < 1+n/n+ + n^2/n^2 = 3$.

16.44. а) В силу 16.43, $(1{,}001)^{1000} = (1+1/1000)^{1000} > 2$.

б) Первое число:

$$\frac{1001^{999}}{1000^{1000}} = \frac{1}{1001}\cdot\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} = \frac{1}{1001}\cdot\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} < \frac{3}{1001} < 1.$$

16.45. а) Решение 1. Из сравнения разложений $(1+1/n)^n$ и $(1+1/(n+1))^{n+1}$ по формуле бинома Ньютона следует, что второе число больше первого, откуда и следует утверждение.

Решение 2. Исходное неравенство нетрудно привести к виду

$$\frac{n+2}{n+1} > \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n.$$

Теперь воспользуемся оценкой

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^n < \frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{k-n+2}{k-n+1} = \frac{k+1}{k-n+1}$$

для $k = n(n+2)$. Осталось лишь доказать простым перемножением скобок, что $(n+2)/(n+1) > (n+1)^2/(n^2+n+1)$.

б) Неравенство приводится к виду

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} < \frac{n+2}{n+1}.$$

Воспользовавшись оценкой пункта а), получим, что достаточно доказать неравенство

$$\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\cdot\frac{n^2+2n+1}{n^2+n} < \frac{n+2}{n+1}.$$

Избавившись от знаменателей и раскрыв скобки, получим
$$n^5 + 5n^4 + 9n^3 + 8n^2 + 4n < n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1,$$
что верно при всех $n > 0$.

16.46. Неравенство равносильно $(1 + 1/n)^n \leqslant n$. Далее используем 16.43.

16.47. Пусть неравенства задачи справедливы для некоторого n. Чтобы доказать их для $n + 1$, достаточно проверить следующие неравенства
$$\frac{((n+1)/2)^{n+1}}{(n/2)^n} \geqslant n + 1 \geqslant \frac{((n+1)/3)^{n+1}}{(n/3)^n}.$$
После сокращения на $n + 1$ эти неравенства приводятся к неравенствам $(1 + 1/n)^n/2 \geqslant 1 \geqslant (1 + 1/n)^n/3$, которые следуют из неравенств $2 \leqslant (1 + 1/n)^n \leqslant 3$ (см. 16.43). Для $n = 6$ неравенство верно: $(6/2)^6 = 729 > 6! = 720 > (6/3)^6 = 64$.

16.48. Доказательство проведем методом математической индукции.

1. Докажем, что $n! > (n/e)^n$ при любом целом положительном n. Действительно, при $n = 1$ это неравенство, очевидно, выполняется. Предположим, что неравенство доказано, и покажем, что в этом случае будет выполняться неравенство $(n + 1)! > ((n+1)/e)^{n+1}$. Из 16.45, п. а, $e/(1 + 1/n)^n > 1$, поэтому
$$(n+1)! = n!(n+1) > (n/e)^n(n+1) = \frac{((n+1)/e)^{n+1}e}{(1+1/n)^n} > ((n+1)/e)^{n+1}.$$

2. Перейдем к $n! < n(n/e)^n$. С помощью логарифмических таблиц нетрудно проверить, что при $n = 7$ неравенство верно. Из 16.45, п. б, $e/(1 + 1/n)^{n+1} < 1$, поэтому
$$(n+1)! = n!\,(n+1) < (n+1)n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n =$$
$$= \frac{(n+1)((n+1)/e)^{n+1}e}{(1+1/n)^{n+1}} < (n+1)((n+1)/e)^{n+1}.$$

16.49. а) $\sin\beta - \sin\alpha = 2\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})\cos(\frac{\beta+\alpha}{2}) < 2\frac{\beta-\alpha}{2}$ (поскольку $\sin x < x$, $\cos x < 1$).

б) $\beta - \alpha < \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)/(1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha) < \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$ (т. к. $\operatorname{tg} x > x$).

16.50. Неравенство преобразуется к виду
$$(a+b+c)(abc - (a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)) \geqslant 0. \qquad (*)$$
Среди чисел $a+b-c$, $c+a-b$, $b+c-a$ не более одного отрицательного (если $a + b - c < 0$, $b + c - a < 0$, то $2b < 0$). Если отрицательно

ровно одно из этих чисел, то их произведение неположительно и, следовательно, оба сомножителя левой части $(*)$ неотрицательны. Если же они все неотрицательны, то

$$a^2b^2c^2 \geqslant (a^2-(b-c)^2)(b^2-(c-a)^2)(c^2-(a-b)^2) = \\ = (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$$

или $abc-(a+b-c)(b+c-a)(c+b-a) \geqslant 0$, откуда следует $(*)$.

16.51. Левая часть равна $(x^5+y^5)/(x+y)$. Так как $x > \sqrt{2}$ и $y > \sqrt{2}$, то $x^5+y^5 > 2(x^3+y^3)$ и $(x^5+y^5)/(x+y) > 2(x^3+y^3)/(x+y) = 2(x^2-xy+y^2) \geqslant x^2+y^2$.

16.52. Обозначим левую часть через $f(x)$. Легко видеть, что $f(x) = (1+x^{2n+1})/(1+x)$. Если $x \geqslant 1$, то, очевидно, $f(x) \geqslant 1$, если же $0 \leqslant x < 1$, то знаменатель не превосходит 2 и опять же дробь больше 1/2. Наконец, при $x < 0$ каждое слагаемое в $f(x)$ положительно, поэтому $f(x) > 1$.

16.53. Обозначим $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Поскольку $x^2-xy+y^2 \geqslant xy$, имеем: $x^3+y^3 \geqslant xy(x+y)$, откуда

$$\frac{1}{1+a+b} = \frac{z}{z+z(x^3+y^3)} \leqslant \frac{z}{x+y+z}.$$

Складывая полученное неравенство с аналогичными, получим неравенство задачи.

16.54. Данные задачи напоминают теорему Виета. Рассмотрим многочлены

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \quad \text{и} \quad Q(x) = (x-b_1)(x-b_2)(x-b_3).$$

Они отличаются только свободным членом (достаточно раскрыть скобки). Поэтому график одного многочлена получается из графика другого сдвигом вдоль оси ординат. При $x \leqslant b_1$ имеем $Q(x) \leqslant 0$, в частности $Q(a_1) \leqslant 0$. Значит, график $y = Q(x)$ получается из графика $y = P(x)$ сдвигом вниз или совпадает с ним. В частности, $Q(a_3) \leqslant P(a_3) = 0$. Но при $x > b_3$ имеем $Q(x) > 0$, значит $a_3 \leqslant b_3$.

16.55. $(n!)^2 = (1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot\ldots\cdot(n\cdot 1)$. Покажем, что каждая скобка (кроме первой и последней) больше n. Если пара имеет вид $((k+1)\cdot(n-k))$, то $(k+1)(n-k) = k(n-k)+(n-k) > k+(n-k) = n$.

16.56. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

16.57. Решение 1. Предположим противное, т. е. $a+b+c < 3$. Умножая это неравенство на ab, получим $ab^2+(a^2-3a)b+1 < 0$. Это означает, что для функции $y(x) = ax^2+(a^2-3a)x+1$ имеем $y(b) < 0$. Так как $y(x) > 0$ при большом x, то функция имеет два вещественных корня, значит, её дискриминант положителен: $a(a-1)^2(a-4) > 0$. Итак, $a > 4$ и тем более $a+b+c > 4$. Противоречие.

Решение 2. Пусть $x = \ln a$, $y = \ln b$, $z = \ln c$. Тогда $x+y+z = 0$. Функция e^x выпукла вниз, поэтому (по неравенству Иенсена) $(e^x + e^y + e^z)/3 > e^{(x+y+z)/3} = 1$.

16.58. Разделив обе части равенства $a + b + c = 1$ по очереди на a, b, c и сложив, получим

$$1/a + 1/b + 1/c = 3 + (a/b + b/a) + (b/c + c/b) + (c/a + a/c).$$

Используя то, что каждая скобка не меньше 2, получим неравенство задачи.

16.59. Пусть $p = a+b+c > 0$, $q = ab+bc+ac > 0$, $r = abc > 0$. Тогда многочлен $P(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ принимает отрицательные значения при $x \leqslant 0$. Значит, все корни этого многочлена, равные по обратной теореме Виета, числам a, b, c являются положительными.

16.60. Так как $a < b < c < d$, то $y - x = ab + cd - ac - bd = (a-d)(b-c) > 0$, $z - y = ac + bd - ad - bc = (a-b)(c-d) > 0$. Таким образом, $x < y < z$.

16.61. Неравенство равносильно

$$(a^2-bc)^2+(b^2-ac)^2+(c^2-ab)^2+(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 \geqslant 0.$$

Другое решение использует скалярное произведение. Пусть $\vec{X} = (a^2, b^2, c^2)$, $\vec{Y} = (bc, ca, ab)$, тогда исходное неравенство в векторной форме: $\vec{X}\vec{Y} \leqslant \vec{X}^2$. Далее воспользуемся неравенством Коши–Буняковского и тем, что $\vec{Y}^2 \leqslant \vec{X}^2$.

16.62. Это неравенство Чебышева для n чисел. Левая часть представляет собой сумму n^2 слагаемых двух типов: n слагаемых вида a_ib_i, где $i = 1, \ldots, n$ и $n(n-1)$ слагаемых вида a_ib_k, где $i, k = 1, \ldots, n$, $i \neq k$. Слагаемые второй группы можно разбить на пары и для каждой пары справедливо неравенство:

$$a_ib_k + a_kb_i = (a_ib_i + a_kb_k) - (a_i - a_k)(b_i - b_k) < a_ib_i + a_kb_k,$$

поэтому сумма слагаемых второго типа меньше суммы произведений, индекс которых принимает каждое из значений ровно $(n-1)$ раз.

16.63. Из того, что $B < (A+B)/2 < A$ (поскольку $B < A$) и $\dfrac{(a-b)^2}{8(A-B)} = \dfrac{A+B}{2}$, следует искомое.

16.64. Применяя теорему о средних и учитывая, что числа $\log_b a$, $\log_c b$, $\log_a c$ положительны, а их произведение равно 1, получим

$$\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{a+c} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geqslant \\ \geqslant \frac{9}{a+b+b+c+c+a}=\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

16.65. Без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b \geqslant \geqslant c > 0$. Преобразуем разность между правой и левой частями неравенства к виду $(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c)$. Теперь для доказательства требуемого неравенства остается заметить, что полученное выражение неотрицательно, так как $a+b>c$, $b \geqslant c$, $a \geqslant c$, $c>0$.

16.66. Если $a=b=c=0$, то неравенство справедливо. Пусть $s=a+b+c>0$, тогда левую часть преобразуем к виду

$$\frac{a+b+c}{s}-\frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right)- \\ -\frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{c+a+1}-(1-c)(1-a)\right)- \\ -\frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1}-(1-a)(1-b)\right) \leqslant 1,$$

так как $(a+b+c)/s=1$, а каждая скобка неотрицательна: $\dfrac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c) \geqslant 0$, поскольку

$$(1-b)(1-c)(1+b+c)=1-(b+c)^2+bc(b+c)=1-(b+c)(b+c-bc) \leqslant 1.$$

Аналогично доказывается неотрицательность и остальных скобок.

16.67. Из неравенства $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ получим, что $(a^2+b^2)+ +(c^2+d^2) \geqslant 2(ab+cd) \geqslant 4\sqrt{abcd}=4$, $ab+cd \geqslant 2$, $bc+ad \geqslant 2$, $ac+bd \geqslant 2$.

Пользуясь общей теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом, можно решить задачу другим способом, а также доказать, что для любых n положительных чисел с произведением 1 сумма их квадратов не меньше n, а сумма $n(n-1)/2$ их попарных произведений не меньше $n(n-1)/2$.

16.68. Для любого m $(m=1,\ldots,n)$ среди m пар (a_k, b_k) $(k= =1,\ldots,m)$ одно из неравенств $a_k \geqslant b_k$ или $b_k \geqslant a_k$ выполнено не менее чем для $m/2$ пар. Пусть, например, $b_k \geqslant a_k$ не менее чем в $m/2$ парах. Если b_i — наименьшее из этих b_k, то $b_i \leqslant 2/m$. Поэтому $a_i + b_i \leqslant 2b_i \leqslant 4/m$, а поскольку $i \leqslant m$, то $a_m + b_m \leqslant \leqslant a_i + b_i \leqslant 4/m$.

16.69. Возведём все равенства

$$a_1 = 0, \quad |a_2| = |a_1 + 1|, \ldots, |a_{n+1}| = |a_n + 1|$$

в квадрат и сложим. Сокращая, получим $a_{n+1}^2 = 2(a_1 + \ldots + a_n) + +n \geqslant 0$, откуда $a_1 + \ldots + a_n \geqslant -n/2$. Другое решение (по индукции) можно получить, заметив, что удаление пары последовательных членов $a_n \geqslant 0$, $a_{n+1} = -a_n - 1$ со средним $-1/2$ приводит к допустимой последовательности.

16.70. Перемножив первое и второе неравенства, получим $(a+b)^2 < ab + cd$, но $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, поэтому $ab + cd \geqslant 4ab$, т. е. $cd \geqslant 3ab$. Перемножив второе и третье неравенства, имеем $ab(ab+cd) > (a+b)^2 cd \geqslant 4abcd$, откуда $ab + cd > 4cd$, т. е. $ab > 3cd$. Итак, одновременно $ab > 3cd$ и $cd > 3ab$, что невозможно.

16.71. Циклически сдвинем x_i так, что $x_1 \leqslant x_2$ Тогда неравенство вытекает из тождества

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 = \\ = 4(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) = \\ = 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) + 4x_5(x_2 - x_1) + 4x_1x_4.$$

Вообще, неравенство $(x_1 + \ldots + x_n)^2 \geqslant c_n(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1)$ выполнено при всех положительных $x_1, \ldots, x_n$ для следующих (наибольших) c_n: $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$ (причём при этих n неравенство верно для всех x_i, не обязательно положительных), а также для $c_n = 4$ при всех $n \geqslant 5$ (при $x_i > 0$). Последнее утверждение получается из доказанного для $n = 5$ индукцией: если передвинуть циклически номера так, чтобы x_{n+1} было наименьшим, то

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})^2 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geqslant \\ \geqslant -4x_1x_n + 4x_1x_{n+1} + 4x_nx_{n+1},$$

поскольку

$$2x_{n+1}(x_2 + \ldots + x_{n-1}) + (x_{n+1} - 2x_1)(x_{n+1} - 2x_n) \geqslant 0.$$

16.72. Без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b \geqslant \geqslant c$. Тогда $c(a-c)(b-c) \geqslant 0$, откуда $c^3 + abc \geqslant ac^2 + bc^2$. Достаточно доказать, что $a^3 + b^3 + 2abc \geqslant ab(a+b) + a^2c + b^2c$, Последнее неравенство преобразуется к виду $(a-b)^2(a+b-c) \geqslant 0$. Легко видеть, что равенство в данном неравенстве возможно лишь при $a = b = c$.

16.73. Пользуясь неравенством $ab \leqslant (a+b)^2/4$, для произвольного числа $c > 0$ имеем:

$$P = (x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) =$$
$$= \left(\frac{x_1}{c} + \ldots + \frac{x_n}{c}\right)\left(\frac{c}{x_1} + \ldots + \frac{c}{x_n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{c} + \frac{c}{x_1} + \ldots + \frac{x_n}{c} + \frac{c}{x_n}\right)^2.$$

Заметим, что функция $f(t) = c/t + t/c$ принимает наибольшее на $[a; b]$ значение обязательно на том или другом конце промежутка; выберем c так, чтобы эти значения совпадали: $f(a) = f(b)$, т. е. возьмём $c = \sqrt{ab}$. Тогда при $a \leqslant t \leqslant b$ будет $f(t) \leqslant \sqrt{a/b} + \sqrt{b/a}$. Поэтому $P \leqslant n^2(\sqrt{a/b} + \sqrt{b/a})^2/4 = n^2(a+b)^2/4ab$.

Заметим, что при чётном n неравенство дает точную оценку левой части, а при нечётном её можно несколько уточнить. (Для $n = 5$ эта задача предлагалась на олимпиаде США.)

16.74. Положим $f(x) = (x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$. Выделив полный квадрат, получим:

$$f(x) = n(x - b_n)^2 + f(b_n) \qquad (*)$$

(при проверке нужно учесть, что $nb_n = a_1 + \ldots + a_n$). При $n = 1$ нужные неравенства очевидны ($C = D$). Чтобы доказать их, пользуясь методом математической индукции, достаточно доказать неравенства $0 < f(b_{n+1}) - f(b_n) < (a_{n+1} - b_{n+1})^2$, поскольку при добавлении к $a_1, \ldots, a_n$ ещё одного числа a_{n+1} величина C возрастает на $(a_{n+1} - b_{n+1})^2$, а D — на $(a_{n+1} - b_{n+1})^2 + f(b_{n+1}) - f(b_n)$. Левое неравенство сразу вытекает из равенства $(*)$ при $x = b_{n+1}$, правое следует из равенств

$$(n+1)b_{n+1} = nb_n + a_{n+1}, \quad n(b_{n+1} - b_n) = a_{n+1} - b_{n+1},$$
$$f(b_{n+1}) - f(b_n) = n(b_{n+1} - b_n)^2 = (a_{n+1} - b_{n+1})^2/n.$$

Тождество $(*)$, выражающее суммы квадратов расстояний до n точек через квадрат расстояния до их «центра масс» (или «среднего значения»), часто используется в теории вероятностей, статистике, а его аналоги на плоскости и в пространстве — в геометрии.

16.75. Положим $s = x_1 + \ldots + x_n$. Поскольку $x_i \geqslant x_i^2$ для каждого $i = 1, \ldots, n$, то нужное неравенство следует из неравенства $(s+1)^2 \geqslant 4s$, эквивалентного, очевидно, $(s-1)^2 \geqslant 0$.

16.76. Из уравнения следует, что $x^3 - y^3 < x - y$. Поделив обе части на положительное число $(x-y)$ (оно положительно, поскольку $x - y = x^3 + y^3 > 0$), получим $x^2 + xy + y^2 < 1$, откуда следует требуемое неравенство.

16.77. Пусть $f(x) = a\cos x + b\cos 3x$. Тогда $f(\pi n) = (-1)^n a + (-1)^n b$; $f(\pi/3) = a/2 - b$; $f(2\pi/3) = -a/2 + b$. Поэтому $|a+b| \leqslant 1$, $|a - 2b| \leqslant 2$.

16.78. $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}(\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x})} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

16.79. Используем метод от противного. Пусть $\sin\alpha\cos\beta > 1/2$, $\sin\beta\cos\gamma > 1/2$, $\sin\gamma\cos\alpha > 1/2$. Перемножая эти неравенства, получаем

$$\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma > 1/8,$$

или $\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma > 1$,что невозможно. Следовательно, хотя бы одно из исходных неравенств не имеет места.

16.80. $b < a < c$. Докажем, что $\sin(\cos y) < \cos(\sin y)$. Подставляя $x = \cos y$ в неравенство $\sin x < x$, справедливое при $x > 0$, получаем оценку $\sin(\cos y) < \cos y$. Далее, из неравенства $y \geqslant \sin y$ имеем оценку $\cos y \leqslant \cos(\sin y)$, так как функция $\cos x$ убывает на данном интервале. Таким образом, $\sin(\cos y) < \cos y \leqslant \cos(\sin y)$.

16.81. Перемножив неравенства $(a+b)/2 \geqslant \sqrt{ab}$ и $a+b+1/2 \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$, получим искомое.

16.82. $x^{\sin^2\alpha} \cdot y^{\cos^2\alpha} \leqslant \max(x, y) < x + y$.

16.83. $x = \pi m$, $y = \pi n$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. Из условия следует, что $\sin x \sin y \leqslant 0$. Поэтому $|\sin x - \sin y| = |\sin x| + |\sin y| \geqslant |\sin x| \cdot |\sin y|$.

16.84. Достаточно доказать, что при всех x верно неравенство $|\sin x| + |\sin(x+1)| + |\sin(x+2)| > 8/5$.

16.85. Переставим числа $a_1, \ldots, a_n$ так, что $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. При этом левая часть возрастёт. Неравенство теперь следует из оценок:

$$\frac{2}{a_1 + a_2} \leqslant \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{2k-1}{a_1 + \ldots + a_{2k-1}} \leqslant \frac{2k-1}{a_k + \ldots + a_{2k-1}} \leqslant \frac{2k-1}{ka_{k-1}} < \frac{2}{a_{k-1}} \quad \text{при } 2 \leqslant k \leqslant (n+1)/2,$$

$$\frac{2k}{a_1 + \ldots + a_{2k}} \leqslant \frac{2k}{a_{k+1} + \ldots + a_{2k}} \leqslant \frac{2}{a_k} \text{ при } 2 \leqslant k \leqslant n/2.$$

16.86. $k^3 = (a+A)(b+B)(c+C) = abc + ABC + k(aB + bC + cA)$.

16.87. $(1+1/(2n))^n-(1-1/(2n))^n-1 = a_3/(2n)^3+a_5/(2n)^5+\ldots$, где $a_3, a_5, \ldots > 0$.

16.88. $t^4 - t + 1/2 = (t^2 - 1/2)^2 + (t - 1/2)^2$. Оба слагаемых одновременно не равны нулю.

16.89. Так как $1+a = (1-b)+(1-c)$, то $1+a \geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$. Аналогично получим неравенства для b и c, затем полученные три неравенства перемножаем.

16.90. Рассмотрим выражение $a^2 + ab + b^2 - 3(a + b - 1)$ как квадратный трёхчлен относительно a. Его дискриминант равен $-3(b-1)^2 \leqslant 0$.

16.91. Дважды примените неравенство $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$.

16.92. Домножим обе части неравенства на 2 и преобразуем его к виду: $(a+b+c)^2+a^2+b^2-c^2 < 0$, $a^2+b^2-c^2 < -(a+b+c)^2 \leqslant 0$. Отсюда $a^2 + b^2 - c^2 < 0$, или $a^2 + b^2 < c^2$.

16.93. Удобно перейти к новым переменным $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$, также положительным и связанным условием $xyz = 1$. Данное неравенство эквивалентно следующему: $S = x^2/(y + z) + y^2/(z + x) + z^2/(x + y) \geqslant 3/2$. Применяя неравенство Коши–Буняковского к векторам

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right) \quad \text{и} \quad \left(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y}\right),$$

получаем $(x + y + z)^2 \leqslant 2S(x + y + z)$, т. е. $S \geqslant (x + y + z)/2$. Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трёх положительных чисел, получаем:

$$S \geqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}.$$

16.94. Пусть a_{i_1} — максимальное из a_i. Выберем a_{i_2} — наибольшее из чисел в знаменателе дроби с числителем a_{i_1}, и т. д., a_{i_k} — наибольшее из чисел в знаменателе дроби с числителем $a_{i_{k-1}}$. Ясно, что в конце концов мы придём к a_{i_1}, т. е. $a_{i_{r+1}} = a_{i_1}$. Если номера $1, \ldots, n$ расположить по кругу, то i_{k+1} и i_k (а также i_r и i_1) будут стоять рядом или через одно; значит, $r \geqslant n/2$. Данная сумма больше чем

$$\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \ldots + \frac{a_{i_r}}{2a_{i_1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} + \ldots + \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}\right) = \frac{S}{2}.$$

Поскольку среднее арифметическое не меньше среднего геометрического, то

$$S/r \geqslant \sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} \cdot \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}} = 1.$$

Следовательно, $S \geqslant r$, т. е. исходная сумма больше чем $S/2 \geqslant \geqslant r/2 \geqslant n/4$.

Может показаться, что всегда верно более сильное неравенство: $a_1/(a_2+a_3)+a_2/(a_3+a_4)+\ldots+a_n/(a_1+a_2) \geqslant n/2$. В самом деле, это было доказано для нечётных $n \leqslant 11$ и чётных $n \leqslant 12$, но уже для чётных $n \geqslant 14$ и нечётных $n \geqslant 27$ это неверно.

16.3. Текстовые задачи

16.95. 1 руб. 23 коп. Из второго условия книга стоит дешевле 1 руб. 24 коп, а из первого — дороже 1 руб. 22 коп.

16.96. 1 руб. 11 коп. Из первого условия 1 кг ирисок стоит дешевле 10/9 руб., а из второго — дороже 11/10 руб.

16.97. По условию удвоенная сумма денег, вложенных каждым мальчиком, не превосходит суммы, вложенной двумя остальными. Если бы один из мальчиков дал более 2 руб., то два остальных дали бы меньше 4 руб., т. е. меньше удвоенной суммы денег первого. Итак, каждый дал не более 2 руб. Так как мяч стоил 6 руб., то каждый дал 2 руб.

16.98. Расположим грибников по числу найденных грибов, так что 1-й набрал больше всех грибов, а 7-й — меньше всех. Если 4-й набрал не меньше 15 грибов, то первые трое собрали не меньше чем $16+17+18=51$ гриб. Если же 4-й набрал 14 грибов или меньше, то 4-й, 5-й, 6-й и 7-й набрали вместе не больше чем $14+13+ +12+11=50$ грибов, а значит, первые трое — не менее 50 грибов.

16.99. 23. Число Сашиных грибов должно делиться на 3 и на 5.

16.100. На 1. Пусть m, n — количество мальчиков и девочек, a, b — стоимость пирожка и булочки. Тогда $ma+nb+1=mb+na$ или $(m-n)(b-a)=1$, откуда $m-n=1$.

16.101. Сложив все 10 сумм, получим 72. Так как каждое из пяти исходных чисел входит в четыре суммы, то сумма искомых чисел равна $72:4=18$. Сумма двух наименьших, очевидно, равна 0, а двух наибольших — 15. Значит, третье по величине число равно $18-0-15=3$. В ряду сумм второе место занято, очевидно, суммой первого и третьего чисел. Поскольку эта сумма равна 2, наименьшее число равно $2-3=-1$. Ясно, что второе число равно $0-(-1)=1$. Аналогично находим, что два наибольших числа равны 5 и 10.

Во втором случае сумма десяти данных чисел равна 158. Сумма искомых чисел должна равняться $158:4$, что невозможно, так как искомые числа — целые. Значит, ответ на второй вопрос задачи отрицателен.

16.102. Больше доля голубоглазых среди блондинов. Пусть a — количество всех людей, b — количество блондинов, c — количество голубоглазых, d — количество голубоглазых блондинов. Условие задачи означает, что $d/c > b/a$. Умножив обе части неравенства на c/b, получим $d/b > c/a$.

16.103. Если банк начисляет проценты раз в месяц. Пусть проценты начисляются раз в год. Тогда в конце первого года вклад будет равен

$$(1000 + 1000 \cdot 5/100) = 1000(1 + 5/100) \text{ руб.}$$

В конце второго года вклад увеличится на 5% уже от этой суммы и станет равным

$$1000(1 + 5/100)(1 + 5/100) = 1000(1 + 5/100)^2 \text{ руб.}$$

Рассуждая аналогично, увидим, что через 10 лет вкладчик получит $1000(1 + 5/100)^{10}$ руб. Если же проценты начисляют раз в месяц, то таким же образом получим, что вкладчик через 10 лет (120 месяцев) получит $1000(1 + (5/12)/100)^{120}$ руб.

Из неравенства Бернулли следует, что второе число больше первого.

Пусть в банк кладётся K руб. и банк выплачивает p% годовых. Рассуждая аналогично, мы увидим, что через m лет вкладчик получит $K(1+p/100)^m$ руб. (так называемая *формула сложных процентов*).

Из неравенства Бернулли следует, что если сократить сроки выплаты и пропорционально уменьшить процент начисления, то вкладчик получит большую сумму. Это связано с тем, что при $a > 0$ последовательность $x_n = (1 + a/n)^n$ возрастает. Однако слишком большой выгоды от сокращения сроков вкладчик получить не сможет, так как эта последовательность ограничена. Её предел равен числу e^a. Если на калькуляторе подсчитать суммы из задачи, то в первом случае мы получим около 1629 руб., во втором — около 1647 руб., а $1000e^{0,5}$ — около 1649.

16.104. У Подосиновикова. Пусть в колонне оказалось k переполненных и l непереполненных автобусов. Обозначим количество пассажиров, едущих в переполненных автобусах, через A, а количество остальных — через B. Тогда $A > 50k$, $B \leqslant 50l$ и, значит, $A/k > 50$, $B/l \leqslant 50$, поэтому $A/k > B/l$. Из этого неравенства вытекают следующие: $B/A < l/k$, $(A + B)/A < (l + k)/k$, откуда $100\% \cdot A/(A + B) > 100\% \cdot k/(l + k)$.

В последнем неравенстве слева стоит процент людей, едущих в переполненных автобусах, а справа — процент переполненных автобусов.

16.105. а) 7. Пусть в кружке n участников, из них m девочек. Нам надо найти наименьшее натуральное n, при котором существует такое натуральное m, что $2/5 < m/n < 1/2$. Перебирая значения n от 2 до 7, находим, что этому неравенству удовлетворяет только дробь $3/7$ со знаменателем 7. Таким образом, 7 — наименьшее возможное значение n.

б) 33, в) 16. Здесь действовать перебором довольно утомительно.

Поступим следующим образом. Мы должны найти решение неравенств $43/100 < m/n < 44/100$ с наименьшим натуральным n. Разложим $43/100$ и $11/25$ в цепные дроби:

$$\frac{43}{100} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{14}}}, \qquad \frac{11}{25} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}},$$

возьмём общую часть этих разложений, а на том шаге, где разложения отличаются: ($1 + 1/2$ и 14), вставляем наименьшее натуральное число, лежащее в интервале между выписанными, (т. е. 2), и в результате получаем ответ:

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{7}{16}.$$

Этот алгоритм позволяет быстро найти дробь m/n с наименьшим знаменателем n в любом заданном интервале $0 < a < m/n < p$. Докажем это.

Будем проводить доказательство по индукции. Итак, мы ищем такие x_1, z_1, z_0, что выполняется неравенство

$$a_1 + \frac{p_1}{p_0} \leqslant x_1 + \frac{z_1}{z_0} \leqslant b_1 + \frac{r_1}{r_0},$$

и, кроме того, минимальны $\alpha_0 = z_0$ и $x_1 z_0 + z_1$. (Здесь и далее предполагается, что p_1/p_0 и т. п. — правильные дроби.) Если $a_1 \neq b_1$, то ответ очевиден — $x_1 = \lceil a_1 + p_1/p_0 \rceil$,* $z_1 = 0$, $z_0 = 1$. Пусть

* $\lceil x \rceil = -[-x]$ — минимальное целое число, не меньшее x.

теперь $a_1 = b_1$. Тогда, очевидно, $x_1 = a_1$. Сократив на a_1 и развернув дроби, получим:

$$\frac{1}{a_2 + \dfrac{p_2}{p_1}} \leqslant \frac{1}{x_2 + \dfrac{z_2}{z_1}} \leqslant \frac{1}{b_2 + \dfrac{r_2}{r_1}}.$$

Теперь надо минимизировать $\alpha_1 = z_1 x_2 + z_2$. Если $a_2 \neq b_2$, то $x_2 = \lceil a_2 + p_2/p_1 \rceil$, $z_2 = 0$, $z_1 = 1$. При этом $\alpha_1 = x_2$, т. е. минимально. Если же $a_2 = b_2$, то $x_2 = a_2$. Покажем, что если минимизировать сначала z_1, а потом — z_2, то получится минимальное α_1. Пусть z_1 и z_2 — значения, полученные пошаговой оптимизацией, а z_1' и z_2' — значения, при которых α_1 минимально. Если $z_1 = z_1'$, то, очевидно, $z_2 = z_2'$. Если же $z_1 < z_1'$, то $z_2 \leqslant z_2'$. (Если $z_2 > z_2'$, то $z_2 - 1 \geqslant z_2'$, поэтому $(z_2 - 1)/z_1 > z_2'/z_1' \geqslant r_2/r_1$, но тогда z_2 не минимально при данном z_1.) Но тогда $z_1 x_2 + z_2 < z_1' x_2 + z_2'$. Шаг индукции доказан.

16.106. Предположим, что Али-Баба смог унести из пещеры x кг золота и y кг алмазов. В этом случае он сможет получить $20x + 60y$ динаров. Поскольку Али-Баба может поднять не более 100 кг, то $x + y \leqslant 100$.

Кроме того, 1 кг золота занимает 1/200 часть сундука, а 1 кг алмазов занимает 1/40 часть сундука. Значит, взятые Али-Бабой сокровища займут $x/200 + y/40$ часть сундука. В распоряжении Али-Бабы только один сундук, поэтому получаем новое ограничение на количество взятого им сокровища: $x/200 + y/40 \leqslant 1$ или, умножив последнее неравенство на 200, $x + 5y \leqslant 200$.

Таким образом, x и y удовлеворяют системе

$$x + y \leqslant 100x + 5y \leqslant 200 \qquad (*)$$

Сложив эти неравенства и умножив обе части последнего неравенства на 10, получим: $20x + 60y < 3000$. Значит, Али-Баба сможет получить за сокровища не более 3000 динаров. Осталось, показать, что Али-Баба сможет унести сокровища на 3000 динаров. Для этого, необходимо и достаточно чтобы в неравенствах $(*)$ были выполнены равенства. Решив соответствующую систему уравнений, найдём $x = 75$, $y = 25$. Итак, Али-Баба сможет получить 3000 динаров, взяв из пещеры 75 кг золота и 25 кг алмазов.

16.107. Переставим цифры так, чтобы выполнялись неравенства $a_1 \geqslant a_4 \geqslant a_2 \geqslant a_5 \geqslant a_3 \geqslant a_6$. Тогда $0 \leqslant (a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5 + a_6) \leqslant (a_1 + a_2 + a_3) - (a_2 + a_3 + a_6) = a_1 - a_6 \leqslant 9$.

16.108. За 12 минут. Ясно, что если Малыш и Карлсон хотят съесть завтрак за наименьшее время, то начать и кончить есть они должны одновременно, иначе один из них может помочь другому и сократить затраченное время.

Обозначим через x, y, z доли торта, варенья и молока, которые съел Малыш; тогда $(1-x)$, $(1-y)$, $(1-z)$ — доли этих продуктов, которые съел Карлсон, а время, которое они затратили, равно $t = 10x + 13y + 14z = 6(1-x) + 6(1-y) + 7(1-z)$.

Тем самым мы приходим к задаче: найти наименьшее значение величины $t = 10x + 13y + 14z$, если числа x, y, z удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1 \quad \text{и}$$
$$10x + 13y + 14z = 6(1-x) + 6(1-y) + 7(1-z).$$

Из последнего соотношения получим $z = (19 - 16x - 19y)/21$. Подставляя это выражение в формулу для t, получаем:

$$t = \frac{-2x + y + 38}{3}.$$

Из этой формулы мы видим, что t будет тем меньше, чем больше x и чем меньше y. Возьмём самое большое возможное значение x и самое меньшее y: $x = 1$, $y = 0$. При этом $t = 12$ минут, а $z = 1/7$ будет в допустимых пределах. Значит, наименьшее значение t достигается в том случае, когда Малыш съедает торт и выпивает $1/7$ кастрюли молока, а Карлсон съедает всё варенье и выпивает $6/7$ кастрюли молока.

Мы свели задачу к задаче линейного программирования: найти минимум линейной функции при условии, что переменные неотрицательны и удовлетворяют системе линейных неравенств и уравнений. Укажем простое общее правило, указывающее оптимальный план распределения продуктов.

Пусть a_i — время, за которое i-й продукт может съесть Малыш, b_i — время, за которое его может съесть Карлсон, при этом пусть продукты занумерованы в порядке возрастания отношений этих времён:

$$a_1/b_1 \leqslant a_2/b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n/b_n.$$

План, при котором время завтрака будет наименьшим, состоит в следующем: Малыш начинает с первого продукта и ест их дальше по порядку номеров, а Карлсон начинает одновременно с ним с последнего продукта и ест их в обратном порядке.

16.109. Воспользуемся тем, что $x + 1/x \geqslant 2$ при $x > 0$, причём равенство имеет место лишь при $x = 1$. Сложив уравнения, получим:

$$6 = x_1 + \ldots + x_n + 1/x_1 + \ldots + 1/x_n \geqslant 2n, \qquad (*)$$

т. е. $n \leqslant 3$. Если $n = 3$, $(*)$ обращается в равенство, поэтому $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. При $n = 2$, решая квадратное уравнение, получим $x_1 = (3 - \sqrt{5})/2$, $x_2 = (3 + \sqrt{5})/2$. При $n = 1$ система несовместна.

16.110. Заметим, что m и n входят симметрично в условие задачи, поэтому можно считать, что $m \geqslant n \geqslant 2$. При этом $n^{1/m} \leqslant n^{1/n}$. Таким образом, достаточно доказать неравенство $n^{1/n} \leqslant 3^{1/3}$. При $n = 2$ неравенство верно, возьмём теперь натуральный логарифм от обеих частей неравенства и докажем, что $\ln n/n \leqslant \ln 3/3$ при $n \geqslant 3$. Производная функции $\ln x/x$ равна $(1-\ln x)/x^2$. Она отрицательна при $x > 3 > e$. Следовательно, функция $\ln x/x$ убывает при $x \geqslant 3$.

16.111. Либо все три числа равны 0, либо одно из них равно 0, а два других — 1. Заметим, что все три числа неотрицательны, так как каждое из них — квадрат. Обозначим их в порядке убывания: $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$. Тогда $x - z \geqslant y - z \geqslant 0$, откуда $(x - z)^2 \geqslant (y - z)^2$. Но $(x - z)^2 = y$, а $(y - z)^2 = x$. Итак, с одной стороны, $x \geqslant y$, с другой, $y \geqslant x$, откуда $x = y$. Тогда получаем $z = 0$ и $x = x^2$, т. е. $x = 0$ или $x = 1$.

16.112. Наибольшее значение равно 1/4. Это значение достигается, например, при $x_1 = x_2 = 1/2$ и $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Покажем, что $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \leqslant 1/4$ при всех неотрицательных значениях x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. В самом деле, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \leqslant (x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4)$, так как если раскрыть в правой части скобки, то получатся все члены, стоящие в левой части, и ещё несколько неотрицательных членов.

Применив к числам $u = x_1 + x_3 + x_5 \geqslant 0$ и $v = x_2 + x_4 \geqslant 0$, составляющим в сумме 1, неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, получим $(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) = uv \leqslant (u + v)^2/4 = 1/4$.

Аналогично можно доказать, что для любых n неотрицательных чисел $x_1, \ldots, x_n$, дающих в сумме 1, наибольшее значение $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$ равно 1/4.

16.113. Минимальное значение $s_{\min}$ равно $-[n/2]$. а) Сумму s всевозможных попарных произведений чисел $x_1, \ldots, x_n$ можно записать:

$$s = \frac{1}{2}\left((x_1 + \ldots + x_n)^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2\right).$$

Отсюда видно, что $s \geqslant -n/2$. Если n чётно, то, положив половину из x_k равными 1, а половину — равными -1, получим $s = -n/2$. Если же n нечётно, то (поскольку s — целое) $s \geqslant -(n-1)/2$; наименьшее значение s достигается, если в последовательности имеется $(n+1)/2$ единиц и $(n-1)/2$ минус единиц.

б) Сводится к задаче а): каждое из x_k можно последовательно заменить на 1 или -1 так, что величина суммы всевозможных попарных произведений не будет увеличиваться (x_k заменяем на -1, если сумма остальных чисел неотрицательна, и на 1, если отрицательна). Поэтому ответ здесь такой же, как и в а).

16.114. Пусть x, y, $1/(xy)$ — эти числа. Если $x + y + 1/(xy) > 1/x + 1/y + xy$, то после преобразований получим $(x-1) \times (y-1)(1/(xy)-1) > 0$, откуда видно, что положительным должен быть ровно один из сомножителей.

16.115. Наименьшее s, равное $1 - 2^{-1/n}$, достигается при $x_k = 2^{k/n}(1 - 2^{-1/n})$. Положим $y_0 = 1$, $y_k = 1 + x_1 + \ldots + x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда $y_n = 2$, $x_k = y_k - y_{k-1}$. Если все данные числа не превосходят s, т. е. $x_k/y_k = (y_k - y_{k-1})/y_k = 1 - y_{k-1}/y_k \leqslant s$, то $1 - s \leqslant y_{k-1}/y_k$. Перемножив эти неравенства $(k = 1, 2, \ldots, n)$, получим: $(1-s)^n \leqslant y_0/y_n = 1/2$, откуда $s \geqslant 1 - 2^{-1/n}$. Это значение достигается, когда для всех k выполняется равенство $2^{-1/n} = 1 - s = y_{k-1}/y_k$, т. е. y_k образуют геометрическую прогрессию $y_1 = 2^{1/n}$, $y_2 = 2^{2/n}, \ldots, y_n = 2$. Тогда $x_k = 2^{k/n} - 2^{(k-1)/n}$.

16.116. Из условия следует, что

$$\sin\alpha(\sin\alpha - \cos\beta) = \sin\beta(\cos\alpha - \sin\beta).$$

Если $\sin\alpha > \cos\beta$ и $\cos\alpha > \sin\beta$, то $\sin^2\beta + \cos^2\beta < 1$. Неравенства $\sin\alpha < \cos\beta$, $\cos\alpha < \sin\beta$ также невозможны. Поэтому $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$.

16.117. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — данные числа и

$$S_n = (x_n + x_2)/x_1 + (x_1 + x_3)/x_2 + \ldots + (x_{n-1} + x_1)/x_n.$$

а) $S_n = (x_2/x_1 + x_1/x_2) + \ldots + (x_1/x_n + x_n/x_1) \geqslant 2n$.

б) Неравенство $S_n \leqslant 3n$ доказывается по индукции. Для этого следует рассмотреть случай $n = 3$ и заметить, что наибольшее из чисел $x_1, \ldots, x_n$ равно сумме своих соседей.

16.118. Пусть $m = [n/2]$, так что $n = 2m$ или $n = 2m + 1$. Занумеруем данные числа следующим образом: $x_0 = 1$ — «начальное» число; $x_1, \ldots, x_m$ — идущие подряд по часовой стрелке от x_0; $x_{-1}, \ldots, x_{-m+1}$ (и x_{-m}, если n нечётно) — идущие подряд против часовой стрелки от x_0.

а) Если любые два соседние числа различаются не более чем на ε, то $x_1 \geqslant 1-\varepsilon, \ldots, x_m \geqslant 1-m\varepsilon$, $x_{-1} \geqslant 1-\varepsilon$, $\ldots$, $(x_{-m} \geqslant \geqslant 1-m\varepsilon)$. Сложив эти неравенства (без последнего), включая также равенство $x_0 = 1$, и, учитывая, что сумма всех n чисел равна 0, получим:

$$0 > n - (1+2+\ldots+(m-1)+m+(m-1)+\ldots+1)\varepsilon = n - m^2\varepsilon,$$

откуда $\varepsilon \geqslant n/m^2 \geqslant 4/n$ (поскольку $m^2 \leqslant n^2/4$).

При чётном n эта оценка является точной. При нечётном $n = 2m+1$ её можно, используя ещё x_{-m}, слегка улучшить: $\varepsilon \geqslant \geqslant n/(m^2+m) = 4n/(n^2-1)$.

б) Здесь можно дважды воспользоваться результатом а). Пусть наибольшая по модулю разность соседних чисел на окружности равна ε. Согласно а), $\varepsilon \geqslant 4/n$. С другой стороны, «нормированные» разности соседних чисел набора $(x_1, \ldots, x_n)$ — числа $y_k = (x_k - x_{k-1})/\varepsilon$ — в свою очередь удовлетворяют всем условиям задачи а), поэтому для некоторого k

$$\left|\frac{x_{k+1}+x_{k-1}}{2} - x_k\right| = \left|\frac{x_{k+1}-x_k}{2} - \frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right| = \frac{\varepsilon}{2}|y_{k+1}-y_k| \geqslant \frac{8}{n^2}.$$

(здесь иногда индекс нужно, конечно, уменьшить или увеличить на n, так как числа расположены на окружности).

в), г) Покажем, как для любого n получить наилучшую возможную оценку сверху для величины δ — максимальной по модулю разности между числом на окружности и средним арифметическим двух его соседей и построить оптимальный (с наименьшим значением δ) набор. При этом набор (x_k) можно сразу считать симметричным: $x_k = x_{-k}$, поскольку замена x_k на $(x_k + x_{-k})/2$ сохраняет все свойства, оговорённые в условии задачи, и оценку $|x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}| \leqslant 2\delta$. Прежде чем оценивать сами числа x_k, оценим разности $x_{k-1} - x_k$, начиная с x_0, а затем — начиная с противоположной точки (середины набора). Поскольку $x_1 = x_{-1}$, то

$$\begin{gathered}
x_0 - x_1 \leqslant |-x_{-1} + 2x_0 - x_1|/2 \leqslant \delta,\\
x_1 - x_2 \leqslant (x_0 - x_1) + |-x_0 + 2x_1 - x_2| \leqslant 3\delta,\\
x_2 - x_3 \leqslant (x_1 - x_2) + |-x_1 + 2x_2 - x_3| \leqslant 5\delta, \qquad (1)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{k-1} - x_k \leqslant (2k-1)\delta.
\end{gathered}$$

При чётном $n = 2m$, когда x_m и x_{-m} — одно число, аналогично получим:

$$\begin{aligned} x_{m-1} - x_m &\leqslant \delta, \\ x_{m-2} - x_{m-1} &\leqslant 3\delta, \\ \dots\dots&\dots\dots\dots \\ x_{m-j} - x_{m-j+1} &\leqslant (2j-1)\delta. \end{aligned} \tag{2}$$

Если $n = 2m+1$ нечётно (x_m и x_{-m} — два соседних числа), то

$$\begin{aligned} x_{m-1} - x_m &\leqslant 2\delta, \\ x_{m-2} - x_{m-1} &\leqslant 4\delta, \\ \dots\dots&\dots\dots\dots \\ x_{m-j} - x_{m-j+1} &\leqslant 2j\delta. \end{aligned} \tag{2$'$}$$

Нетрудно видеть, что для k, меньшего, чем $m/2$, лучшей оценкой для $(x_{k-1} - x_k)$ будет (1), а для k, большего $m/2$ — (2) или (2$'$); для оптимального набора чисел (x_k) соответствующие неравенства должны стать равенствами, при этом график оптимальной последовательности будет лежать на кусочках парабол.

Чтобы доказать это и привести точную оценку δ для каждого n нужно разобрать отдельно четыре случая, соответствующие разным остаткам n при делении на 4. Пусть, например $n = 4l + 2$. Из (1) и (2) следует, что $x_k = x_{-k} \geqslant 1 - s_k\delta$, где s_k — сумма первых k чисел в строке:

$$1, 3, \dots, 2l-1, 2l+1, 2l-1, \dots, 3, 1.$$

Точная оценка δ получится из условия, что сумма всех x_k равна 0, а оптимальным будет набор $x_k = x_{-k} = 1 - s_k\delta$. В частности, для $n = 30$ ($l = 7$) получим $0 = x_0 + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{14}) + x_{15} \geqslant$ $\geqslant 30 - S\delta$, где $S = 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_{14}) + s_{15}$. Эту сумму удобно считать так: поскольку

$$s_{15} = 1 + 3 + \ldots + 11 + 13 + 11 + \ldots + 3 + 1 = 113 = \\ = s_1 + s_{14} = s_2 + s_{13} = \ldots = s_7 + s_8,$$

то $S = (2 \cdot 7 + l)s_{15} = 15 \cdot 113$. Таким образом, $\delta \geqslant 2/113$, причём $\delta = 2/113$ только для набора $x_k = x_{-k} = 1 - s_k\delta$, равного $1 - k^2\delta$ при $k = 0, \dots, 7$ и равного $-1 + (15-k)^2\delta$ при $k = 8, \dots, 15$.

Аналогично можно получить точные границы δ для любого n и убедиться, что при всех n верно неравенство $\delta \geqslant 16/n^2$ (при больших n эта оценка близка к точной).

Непрерывный аналог этой задачи — найти наибольшую возможную разность между максимумом и минимумом периодической функции с периодом T, у которого вторая производная не превосходит по модулю 1. Эта задача проще, чем «дискретный» вариант. График функции, имеющей наибольшее «колебание», также состоит из кусочков параболы.

17. МНОГОЧЛЕНЫ, УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

17.1. 0. Сумма коэффициентов многочлена $f(x)$, равна $f(1)$.

17.2. Докажите, что при любом рациональном, но не целом x многочлен $P(x)$ не может быть целым числом.

17.3. Доказательство проводится индукцией по степени многочлена. Пусть утверждение доказано для многочленов степени n, тогда $P(0)$ — свободный член рационален, и по предположению индукции коэффициенты многочлена $(P(x) - P(0))/x$ — рациональны.

17.4. Да. Например, $x(x+1)(x+2)\ldots(x+1991)/1992$.

17.5. $f(0) = q$, $f(1) = 1+p+q$, $f(-1) = 1-p+q$. Если все три числа по модулю меньше $1/2$, то

$$1 < |2+2q| = |(1+p+q)+(1-p+q)| < |1+q+p| + |1-p+q| < 1.$$

Противоречие.

17.6. Если $p \geqslant 0$, то функция x^3+px+q строго возрастает (как сумма строго возрастающей функции x^3 и неубывающей $px+q$) и, значит, каждое значение (в частности, 0) принимает не более одного раза. Поэтому уравнение не может иметь трёх корней.

17.7. При $a = -2$. Пусть многочлены $f(x) = x^4 + ax^2 + 1$ и $g(x) = x^3 + ax + 1$ имеют общий корень x_0. Тогда, умножив второй многочлен на x и вычитая из первого, получим многочлен, имеющий тот же корень, а этот многочлен — просто $f(x) - xg(x) = 1 - x$. Его единственный корень $x_0 = 1$. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют этот корень при $a = -2$; чтобы убедиться в этом, достаточно приравнять нулю $f(1)$ и $g(1)$ — оба эти числа равны $a+2$.

Вообще говоря, для того чтобы многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имели общий корень x_0, нужно, чтобы оба они делились на многочлен $x - x_0$ (теорема Безу). Найти общий делитель наибольшей степени двух многочленов можно с помощью алгоритма Евклида — так же, как и наибольший общий делитель двух чисел.

17.8. Пусть многочлен $P(x)$ равен 7 при $x = a$, $x = b$, $x = c$ и $x = d$. В таком случае уравнение $P(x) - 7 = 0$ имеет 4 целых корня a, b, c и d. Это значит, что многочлен $P(x) - 7$ делится на $(x - a)$,

$(x-b)$, $(x-c)$, $(x-d)$, т. е. $P(x)-7=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)p(x)$, где $p(x)$ может равняться 1.

Предположим теперь, что многочлен $P(x)$ принимает при целом значении $x=A$ значение 14. Подставив $x=A$ в последнее равенство, мы получим: $7=(A-a)(A-b)(A-c)(A-d)p(A)$, что невозможно, так как целые числа $(A-a)$, $(A-b)$, $(A-c)$ и $(A-d)$ все различны, а 7 нельзя разложить в произведение 5 множителей, из которых по крайней мере 4 отличны друг от друга.

17.9. -1. Вычитая второе уравнение из первого, получим $x=1$.

17.10. Подберём два числа a и b так, чтобы иметь равенство: $x^3+px+q=x^3+a^3+b^3-3abx$. Тогда $a^3+b^3=q$ и $ab=-p/3$ или $a^3b^3=-p^3/27$. Отсюда по теореме Виета

$$a^3=q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27},\quad b^3=q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}.$$

Теперь из тождества имеем

$$x^3+px+q=x^3+a^3+b^3-3abx=(a+b+x)(a^2+b^2+x^2-ab-ax-bx),$$

откуда решения исходного уравнения — $x_1=-a-b$ и решения квадратного уравнения $x^2-(a+b)x+a^2+b^2-ab=0$.

17.11. а) Да. Удобно искать такой многочлен в виде $p(x)=$ $=ax(x-1)+bx+c$. Подставляя в это тождество $x=0$, $x=1$ и $x=2$, получаем для определения коэффициентов a, b, c удобную «треугольную» систему линейных уравнений

$$c=19,\qquad b+c=85,\qquad 2a+2b+c=1985,$$

из которой находим:

$$c=19,\qquad b=66,\qquad a=917$$

и получаем ответ:

$$p(x)=917x^2-851x+19.$$

Заметим, что точно так же удобно искать многочлен степени не выше n, принимающий в данных $n+1$ точках $c_1,c_2,\ldots,c_{n+1}$, данные значения. Записав $p(x)$ в виде

$$p(x)=b_0+b_1(x-c_1)+b_2(x-c_1)(x-c_2)+\ldots+b_n(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$$

и подставляя в это тождество $x=c_1,c_2,\ldots,c_{n+1}$, мы получаем треугольную линейную систему для определения $n+1$ неизвестных коэффициентов $b_0,b_1,\ldots,b_n$.

Указанный метод нахождения многочлена с данными значениями называется *способом интерполяции Ньютона.*

б) Нет, не существует. Для доказательства воспользуемся следующим утверждением.

Теорема. Если дан многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, то для любых целых чисел c и d целое число $p(c)-p(d)$ делится на число $c-d$.

Доказательство. Пусть $p(x) = a_0 + xa_1 + \ldots + x^n a_n$, тогда $p(c) - p(d) = a_1(c-d) + a_2(c^2-d^2) + \ldots + a_n(c^n-d^n)$. Каждое слагаемое делится на $c-d$.

Согласно этой теореме, число $p(19)-p(1) = 66$ должно делиться на число $19-1 = 18$, что неверно, откуда и следует ответ.

17.12. При $a = -1/8$. Указание. Если график функции $f(x)$ имеет ось симметрии $x = b$, то $f(x) = \alpha(x-b)^4 + \beta(x-b)^2 + \gamma$.

17.13. 1. Все такие трёхчлены имеют вид $(x+p/2)^2+1$.

17.14. $(2,-3,-6)$, $(-2,3,6)$. Пусть a, b, c — корни уравнения. Тогда $ab+ac+bc = 0$. Отсюда и из условия, что $|a|$ и $|b|$ — простые числа, имеем $c = kab$, где k — целое. Получаем $1 + k(a+b) = 0$. Значит, $a + b = \pm 1$. Но среди простых чисел есть лишь одна пара отличающихся на 1. Это 2 и 3. Итак, $|a|$, $|b|$ и $|c|$ равны 2, 3 и 6.

17.15. а) $N(2x^2-1)^2 - 2x^3 + 3x$, б) $N(2x^4-1)^2 - 2x^6 + 3x^2$, где N — целое, большее 1.

17.16. $x = y = \pm \sqrt[1980]{1/2}$. Приведем первое уравнение к виду $(x-y)(x^2+xy+y^2-3) = 0$. Так как x и y по модулю не превосходят 1 (из второго уравнения), то лишь первый множитель может равняться 0. Значит, $x = y$.

17.17. $(0;0;a)$, $(0;a;0)$, $(a;0;0)$. Возведя в куб первое уравнение и вычтя из него третье, получим $3(x+y)(x+z)(y+z) = 0$. Если $x+y = 0$, то $z = a$ (из первого уравнения). Тогда (из второго) $x^2 = y^2 = 0$, т. е. $x = y = 0$. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

17.18. $(1,0)$; $(0,1)$. Из второго уравнения следует, что $x \leqslant 1$ и $y \leqslant 1$. Тогда $x^3 \leqslant 1$ и, следовательно, из первого уравнения $y \geqslant 0$; аналогично $x \geqslant 0$. Если $0 < x < 1$, то $x^3 > x^4$, $y^3 \geqslant y^4$ и уравнения противоречат друг другу.

17.19. $x = y = z = t = 0$. Приведите уравнение к виду

$$x^2/4 + (x/2-y)^2 + (x/2-z)^2 + (x/2-t)^2 = 0.$$

17.20. Из данного уравнения следует, что $x^2 = (4-x^2)^{3/2}$. Возводя обе части в квадрат и извлекая кубический корень, получаем: $4-x^2 = x^2$, откуда $x^2 = 2$. Проверка показывает, что только $\sqrt{2}$ — корень данного уравнения.

17.21. $y = x$ или $y = z$.

17.22. Заменами $x = x_1^2$, $y = y_1^2$, $z = z_1^2$ и возведением обеих частей уравнения в квадрат приходим к 17.21.

17.23. $\{0; 99; 49\frac{50}{99}\}$.

17.24. $(0;0)$, $(2+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$, $(2-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2})$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $f(x) = f(y)$, где $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ строго возрастает (т. к. $f'(x) > 0$).

17.25. $x = y = 0$ и $x = y = -1$. Покажем, что других решений нет.

Случай 1. $x > 0$, тогда $(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+x+\ldots+x^7 > 1 + x^7$. Из первого уравнения имеем $y > x$, значит $y > 0$ и из второго уравнения $x > y$. Противоречие.

Случай 2. $x < -1$, тогда из первого уравнения $y < -1$ и, следовательно, $1+y^7 = 1+(x+x^2)+(x^3+x^4)+(x^5+x^6)+x^7 > 1+x^7$. Отсюда $y > x$. Аналогично из второго уравнения получим $x > y$.

Случай 3. $-1 < x < 0$. Рассматривается аналогично второму.

17.26. $x = \dfrac{\sqrt[5]{12} - 1}{\sqrt[5]{12} + 1}$, $\quad y = \dfrac{\sqrt[5]{9/2} - 1}{\sqrt[5]{9/2} + 1}$.

Указание. Сделайте замену

$$x = \frac{u-1}{u+1}, \quad y = \frac{v-1}{v+1}.$$

17.27. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $a \neq b$. Тогда $x \neq y$. Решим систему относительно параметров a и b. Выразим из второго уравнения a и подставим в первое, получим квадратное относительно b уравнение, из которого $b_1 = y^3 + 3yx^2$, $b_2 = y^3 - 3yx^2$ и далее $a_1 = x^3 + 3xy^2$, $a_2 = x^3 + 3xy^2$. Условие положительности параметров и неизвестных позволяет отбросить (a_2, b_2). Итак, имеем систему: $a = x^3 + 3xy^2$, $b = y^3 + 3yx^2$. Складывая и вычитая уравнения системы, получим $(x+y)^3 = a + b$, $(x-y)^3 = a - b$, откуда ответ $x = (\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a+b})/2$, $y = (\sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a-b})/2$.

Случай 2. $a = b > 0$. Тогда система имеет бесконечно много решений $x = y > 0$ и не имеет решений, для которых $x \neq y$.

17.28. Пусть $P(p) = 0$. Одно из чисел $p - 1$ и p чётно. Пусть, например, p чётно, тогда разность $P(p) - P(0)$ также чётна, поскольку она делится на чётное число p (см. 17.11). Но тогда и $P(0)$ чётно. Противоречие. Аналогично, при чётном $p - 1$ получим, что $P(1)$ чётно.

17.29. Если $a > 0$, то при большом p решений нет вообще. Если $a < 0$, то при большом p меньший корень будет отрицательным (из графика). Значит, $a = 0$.

17.30. По 17.11, если $a \neq b$ — целые числа, то $P(a) - P(b)$ делится на $a-b$. Пусть $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 2$, $P(b) = 3$. Тогда $P(b)-P(a_i) = 1$ делится на $b-a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, откуда $|a_i-b| = 1$. Но это равенство не может выполняться для трёх различных чисел.

17.31. Рассмотрим многочлены

$$\begin{gathered} P_1(x) = P(x) - P(x-1), \\ P_2(x) = P_1(x) - P_1(x-1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n(x) = P_{n-1}(x) - P_{n-1}(x-1) \end{gathered}$$

(многочлен $P_i(x)$ называется *i-й разностью многочлена* $P(x)$). Нетрудно проверить, что степень многочлена $P_i(x)$ равна $n-i$ и что $P_i(x)$ при любом целом x делится на p. Но $P_n(x) = n!$, поэтому $n!$ кратно p.

17.32. Достаточно доказать, что из делимости $4^{m-n} - 1$ на 3^{k+1} следует, что $m - n$ делится на 3^k. Это следует из того, что наименьшее a такое, что $4^a - 1$ делится на 3^{k+1} равно 3^k.

17.33. $x^4 + x^3 - tx^2 + x + 1$ при малом $t > 0$ (можно, например, взять $t = 1/3$). Если требуемое свойство верно для квадрата и куба этого многочлена, то оно верно и для любой его степени.

17.34. Найдём такой многочлен $Q(x)$, что $P(Q(x))$ делится на $P(x)$. Например, таким многочленом является $Q(x) = x + P(x)$ (или, более общо, всякий многочлен вида $P(x)R(x) + x$). Действительно, если $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то

$$\begin{aligned} P(x+z) = P(x)+a_1z+a_2((x+z)^2-x^2)+\ldots+a_n((x+z)^n-x^n)) = \\ = P(x) + z(a_1 + (2x + z)a_2 + (3x^2 + 3xz + z^2)a_3 + \ldots). \end{aligned}$$

Подставляя сюда $z = P(x)$, получим, то $P(Q(x))$ делится на $P(x)$. Поскольку степень $Q(x)$ больше 1, степень $P(Q(x))$ больше степени $P(x)$, поэтому второй сомножитель отличен от константы.

17.35. $Q(x) = \mathrm{const}$, либо $Q(x) = x$. Проверим, что указанные многочлены подходят. Если $P(x) \neq c$ при всех x, то $P(P(x)) = P(y) \neq c$. Если $P(x) \neq x$ при всех x, то в силу непрерывности либо $P(x) > x$, либо $P(x) < x$ при всех x. В первом случае $P(P(x)) > P(x) > x$, а во втором — $P(P(x)) < P(x) < x$. Проверим, что других решений нет. Проще всего искать контрпример в виде $P(x) = Q(x) - c$, поскольку тогда $P(x) \neq Q(x)$ при всех x. Обозначим через $\deg Q$ степень многочлена Q.

Случай 1. $\deg Q = 1$. Тогда $Q(x) = ax + b$. Если $a \neq 1$, то в качестве $P(x)$ можно взять $Q(x) - 1$, а если $a = 1$, то $x + b/2$.

Случай 2. $\deg Q$ — нечётное число, большее 1. Положим $P(x) = Q(x) - 1$. Тогда $P(P(x)) - Q(x)$ есть многочлен степени $(\deg Q)^2$. Но многочлен нечётной степени всегда имеет корень.

Случай 3. $\deg Q$ — чётное число, большее 0. Можно считать, что старший коэффициент многочлена Q положителен. (Поскольку подстановка $Q_1(x) = -Q(-x)$, $P_1(x) = -P(-x)$ изменяет знак старшего коэффициента, а свойства всех интересующих нас уравнений сохраняются.) Пусть $P(x) = Q(x) - c$. При достаточно больших x имеем $P(P(x)) > Q(x)$. Если подобрать такое c, чтобы при некотором x значение $P(P(x))$ было меньше $Q(x)$, то в силу теоремы о промежуточном значении уравнение $P(P(x)) = Q(x)$ будет иметь решение. Теперь подберём c. Пусть a — точка минимума $Q(x)$, x_0 — такая точка, что $Q(x_0) > a$. Положим $c = Q(x_0) - a$. Получим $P(P(x_0)) = P(a) = Q(a) - c < Q(x_0)$, что нам и надо.

17.36. Пусть M — такое натуральное число, что $P(x) > 1$ при $x \geqslant M$. Положим $L = P(M) \ldots P(M + k)$. Докажем, что если $m = M + L$, то числа $P(m)$, $P(m + 1), \ldots, P(m + k)$ являются составными.

Действительно, пусть $0 \leqslant t \leqslant k$. Тогда $P(m + t)$ — составное, поскольку $P(M + L + t) = (P(M + L + t) - P(M + t)) + P(M + t)$ делится на $P(M + t) > 1$. (Первое слагаемое делится на L, т. к. при любых целых $y \neq z$ число $P(y) - P(z)$ делится на $y - z$ (см. 17.11).)

17.37. Пусть $x = a + 1/a$. Докажем по индукции, что $a^n + 1/a^n$ выражается через x многочленом T_n степени n с целыми коэффициентами. В самом деле,

$$T_1(x) = x, \quad a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = x^2 - 2 = T_2(x),$$

$$xT_n(x) - T_{n-1}(x) = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right) = \\ = a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = T_{n+1}(x).$$

Подставляя $a = \sqrt[n]{2 + \sqrt{3}}$, получим, что число $a + 1/a$ является корнем уравнения $T_n(x) = 4$. При $n = 4$ и $n = 5$ получим уравнения $x^4 - 4x^2 - 2 = 0$ и $x^5 - 5x^3 + 5x - 4 = 0$ соответственно.

17.38. Пусть

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

$$G(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots,$$

$$F(x)G(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots .$$

Очевидно, $a_0 = b_0 = 1$. Допустим, что $b_1 = \ldots = b_{t-1} = 1$ и $b_t = 0$, при этом $a_1 = \ldots = a_{t-1} = 0$ и $a_t = 1$. Покажем, что окаймлённых нулями отрезков, длина которых меньше t, также не существует. Предположим противное и рассмотрим самый левый из таких отрезков: $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k}$, где $k+1 < t$. Имеем: $c_i = a_0 b_i, \ldots, c_{i+k} = a_0 b_{i+k}$; далее, $c_{i+t} = a_t b_i$. Рассмотрим отрезок $c_{i+k+1}, \ldots, c_{i+t-1}$, его длина — $d = t-k-1$ $(0 < d < t)$. Посмотрим, как получается $c_{i+k+1} = a_z b_y$. Так как $z \leqslant t$, то $yi + k + 1 - t < i$. Значит, b_y лежит в одном из отрезков длины t. Умножая a_z на все единицы этого отрезка, получаем отрезок длины t, содержащий c_{i+k+1}. Значит, этот отрезок содержит хотя бы одно из чисел: c_{i+k}, c_{i+t}. Противоречие. Следовательно, многочлен с коэффициентами b_i представим в виде произведения многочлена $1 + x + \ldots + x^{t-1}$ на многочлен, все коэффициенты которого — нули или единицы.

17.39. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = x^2+bx+ac$. Из условия следует, что $f(c) = c^2+bc+ac = (a+b+c)c > 0$. В точке c функция $f(x)$ принимает отрицательное значение, следовательно, парабола $y = f(x)$ пересекает ось Ox в двух точках, т. е. имеет два различных корня. Значит, дискриминант этого квадратного трёхчлена положителен: $b^2 - 4ac > 0$.

17.40. Заметим, что $f(x) = (x+6)^2-6$. Тогда $f(f(f(f(f(x))))) = (x+6)^{32} - 6$. Осталось выписать ответ: $x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$

17.41. $(n-q)^2 + (m-p)(mq-np) < 0$. Пусть x_1, x_2 — корни первого трёхчлена, x_3, x_4 — корни второго трёхчлена, один их которых лежит внутри, а другой вне (x_1, x_2). Тогда имеем

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) < 0.$$

Выразив m и n через x_2, x_1, получим $f(x_3)f(x_4) < 0$, где $f(x) = x^2 + mx + n$, далее выражая p и q, получим условие. Обратно, пусть выполнено условие. Тогда все преобразования можно провести в обратную сторону и достаточно доказать вещественность корней. Если x_3, x_4 — невещественные, то они комплексно сопряжены, но тогда $f(x_3)$ и $f(x_4)$ комплексно сопряжены.

Поэтому $f(x_3)f(x_4) \geqslant 0$ — противоречие. Отсюда x_3, x_4 — вещественные числа, $f(x_3)$ и $f(x_4)$ — вещественные числа разных знаков, значит трёхчлен $f(x)$ имеет вещественные корни — x_1, x_2.

17.42. Условия: $2a^3 - 9ab + 27c = 0$ и $a^2 - 3b \geqslant 0$. Если корни образуют прогрессию, то сумма двух из них равна удвоенному третьему, поэтому из теоремы Виета третий корень равен $-a/3$. Подставляя его в уравнение, получим первое условие и квадратное уравнение, которому удовлетворяют два остальных корня. Условие их вещественности — положительность дискриминанта и есть второе условие.

17.43. $b^3 = a^3c$, $c \neq 0$, c заключено между $-a^3/3$ и $a^3/27$. Алгебраический вид последнего условия: $a^2 + 2am - 3m^2 > 0$, где $m^3 = -c$. Условия получаются после подстановки выражения корней через первый член и знаменатель прогрессии в теорему Виета.

17.44. Если x целое, то $f(0) = c$ и $f(1) = a + b + c$ — целые числа, значит, $a+b$ — целое. Далее, $f(2) = 4a+2b+c$, откуда $2a = f(2)-2(a+b)-c$ — целое. Обратно, $ax^2+bx+c = 2ax(x-1)/2 + (a+b)x+c$. Так как $x(x-1)/2$ — целое при целом x, то трёхчлен принимает целые значения.

Несложно показать, что для $ax^3 + bx^2 + cx + d$ аналогичное условие таково: $6a$, $2b$, $a + b + c$ и d — целые числа.

17.45. Многочлен $x^4 + px^2 + q$ имеет четыре действительных корня в том и только в том случае, если многочлен $y^2 + py + q$ (относительно $y = x^2$) имеет два неотрицательных корня, т. е. p и q удовлетворяют условиям $p^2 \geqslant 4q$, $q \geqslant 0$, $p \leqslant 0$. Если исходный многочлен имеет четыре действительных корня (а именно: $-x_1$, $-x_2$, x_2, x_1, где без ограничения общности $x_1 \geqslant x_2 \geqslant 0$), то они образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда совместна система $-2x_2 = -x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2 = -p$, $x_1^2x_2^2 = q$, т. е. когда $q = 0{,}09p^2$. Итак, все искомые пары чисел p, q описываются условиями $p \leqslant 0$, $q = 0{,}09p^2$. ($p^2 \geqslant 4q$ и $q \geqslant 0$ вытекают из последнего равенства).

17.46. а) Значения $P(x)$ при всех целых x имеют одинаковую чётность тогда и только тогда, когда каждое из чисел

$$P(x+1) - P(x) = ((x+1)^2 + p(x+1) + q) - (x^2 + px + q) = 2x + 1 + p$$

делится на 2, т. е. когда p нечётно. При этом чётность всех значений $P(x)$ однозначно определяется по чётности числа $q = P(0)$. Таким образом, все значения $P(x)$ чётны (нечётны) при нечётном p и чётном (соответственно, нечётном) q.

б) Поскольку $Q(x) = x(x^2 + p) + q$, то $Q(3x) = 3x(9x^2 + p) + q$ делится на 3 при всех целых x тогда и только тогда, когда число q делится на 3. При этом $Q(3x \pm 1) = (3x \pm 1)(9x^2 \pm 6x + 1 + p) + q \equiv \pm (1 + p) \pmod 3$ делится на 3 в том и только в том случае, когда число $1 + p$ делится на 3. Таким образом, все значения $Q(x)$ делятся на 3 при условиях $q \equiv 0 \pmod 3$, $p \equiv 2 \pmod 3$.

17.47. Пусть $P(x) = (x + a)Q(x)$, тогда подставив $x = -a$, получим $-a^5 - 3a^4 - 6a^3 - 3a^2 - 9a - 6 = 0$. Это равенство не может выполняться, так как если a делится на 3, то целое число в левой части не делится на 9 (и потому не 0), а при a, не делящемся на 3, не делится на 3. Пусть $x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6=(x^2+a_1x+a_2)\times$ $\times(x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)$, тогда

$$a_2b_3=-6, \qquad a_1b_3+a_2b_2=9,$$
$$a_1b_2+a_2b_1+b_3=-3, \qquad a_1b_1+a_2+b_2=6.$$

Из первого равенства следует, что только одно из чисел a_2, b_3 делится на 3. Если это число b_3, то из второго равенства следует, что b_2 делится на 3, из третьего равенства следует, что b_1 делится на 3, в силу четвёртого равенства a_2 должно делиться на 3. Противоречие. Случай, когда a_2 делится на 3, разбирается аналогично.

17.48. Докажем по индукции. Так как p — нечётное число, то при $n=0$ утверждение выполнено. Предположим, что оно выполнено для некоторого n. Тогда $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}=-p(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})+$ $+(x_1^n+x_2^n)$ — целое, а так как каждый делитель $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ и $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ является делителем $x_1^n+x_2^n$, то $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ и $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ взаимно простые по предположению индукции.

17.49. Легко показать, что если $a=m+n\sqrt{p}$ — корень многочлена с целыми коэффициентами (m, n, p — целые, p — не точный квадрат), то и $b=m-n\sqrt{p}$ также является корнем этого многочлена.

17.50. По теореме Виета имеем равенства $a+b=-p$, $ab=1$, $c+d=-q$, $cd=1$, из которых получаем $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=$ $=q^2-p^2$.

17.51. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $|f(a)|=|f(b)|=|f(c)|=1$, где a, b, c — разные целые числа. Пусть x_0 — целый корень многочлена. Тогда $f(x)=(x-x_0)q(x)$ и $|a-x_0||q(a)|=1$. Так как эти числа целые, то $|a-x_0|=1$ и, аналогично, $|c-x_0|=|b-x_0|=1$. Следовательно, хотя бы два из чисел a, b и c равны. Противоречие.

17.52. По теореме Виета для корней x_1, x_2, x_3 многочлена $\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta$ имеем $x_1+x_2+x_3=1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\beta/\alpha$, $x_1x_2x_3=-\beta/\alpha$. Поэтому

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)= \\ =\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}{x_1x_2x_3}=-1.$$

17.53. Доказательство проведем индукцией по n. При $n=0$ утверждение верно, так как в этом случае $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}=$

$= x^2 + x + 1$. Предположим, что для некоторого значения $n-1$ утверждение выполняется, т. е. многочлен $(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$ делится на многочлен x^2+x+1. Но тогда многочлен $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2} = (x+1)^2(x+1)^{2n-1}+x\cdot x^{n+1} = (x^2+2x+1)(x+1)^{2n-1}+x\cdot x^{n+1} = (x^2+x+1)(x+1)^{2n-1}+x((x+1)^{2n-1}+x^{n+1})$ также делится на многочлен x^2+x+1.

17.54. Любой многочлен вида $P(x) = ax$, где a — константа, удовлетворяет условиям задачи. Докажем индукцией по n, что для каждого искомого многочлена $P(x)$ выполнены равенства $P(n) = nP(1)$. При $n = 0$ и $n = 1$ эти равенства верны. Пусть они уже доказаны для чисел $n-1$ и n. Тогда $P(n+1) = 2P(n)-P(n-1) = (n+1)P(1)$, а значит, равенство справедливо и для числа $n+1$. Поскольку многочлен $P(x)-P(1)x$ имеет бесконечно много корней $x = 0, 1, 2, \ldots$, то он равен нулю. Таким образом, искомые многочлены имеют вид $P(x) = ax$.

17.55. Функция $P(x)$ имеет на прямой одну точку минимума $x_0 = -p/2$. При $x < x_0$ эта функция убывает, а при $x > x_0$ — возрастает. Поэтому для множества A значений функции $P(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ имеем следующее:

если $p < -2$, то $x_0 > 1$ и $A = [P(1); P(-1)] = [1+p+q, 1-p+q]$;

если $-2 \leqslant p \leqslant 2$,то $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$ и $A = [P(x_0); \max\{P(-1); P(1)\}]$, т. е. $A = [q-p^2/4, 1-p+q]$ при $-2 \leqslant p \leqslant 0$ и $A = [q-p^2/4; 1+p+q]$ при $0 \leqslant p \leqslant 2$;

если $p > 2$, то $x_0 < -1$ и $A = [P(-1); P(1)] = [1-p+q, 1+p+q]$.

17.56. Пусть a, b, c, d — корни многочлена $P(x) = (x-a)\times(x-b)(x-c)(x-d)$.

Докажем равенство $(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1 = 0$ (из которого будет вытекать требуемое, поскольку

$$(ab)^6+(ab)^4+(ab)^3-(ab)^2-1 = (ab)^3\left((ab)^3-\frac{1}{(ab)^3}+ab-\frac{1}{ab}+1\right) = 0,$$

так как по теореме Виета $abcd = -1$). Действительно, из равенств $P(a) = P(b) = 0$ имеем $a^3 = 1/(a+1)$, $b^3 = 1/(b+1)$, откуда получаем $(ab)^3 = 1/((1+a)(1+b)) = (1+c)(1+d)/P(-1) = -(1+c)(1+d)$.

Аналогично, $(cd)^3 = -(1+a)(1+b)$. Из этих равенств имеем:

$$(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1 = -(1+c)(1+d)-(1+a)(1+b)+ab+cd+1 = -1-a-b-c-d = 0.$$

($a+b+c+d = -1$ по теореме Виета.)

17.57. Используя теорему Виета ($x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = -1/(2p^2)$) и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел, получаем

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 2x_1x_2(2(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2)) =$$
$$= p^4 + (2p^2 + 1/(2p^2))/p^2 = p^4 + 2 + 1/(2p^4) \geqslant 2 + \sqrt{2}.$$

17.58. Так как все коэффициенты многочлена $P(x)$ неотрицательны, то ни один из его корней $a_1, \ldots, a_n$ не может быть положительным. Следовательно, этот многочлен имеет вид $P(x) = (x + b_1)\ldots(x + b_n)$, где $b_i = -a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Используя теорему о средних, получаем неравенства $2 + b_i = 1 + 1 + b_i \geqslant 3\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot b_i} = 3\sqrt[3]{b_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Учитывая, что по теореме Виета $b_1b_2\ldots b_n = 1$, получаем: $P(2) = (2 + b_1)\ldots(2 + b_n) \geqslant 3^n\sqrt[3]{b_1\ldots b_n} = 3^n$, что и требовалось доказать.

17.59. Так как исходный многочлен имеет n положительных корней $x_1, \ldots, x_n$, то его степень не меньше n. Поэтому $a \neq 0$. По теореме Виета $b \neq 0$ и

$$(x_1 + \ldots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}) =$$
$$= (a/a) \cdot \frac{x_2\ldots x_n + x_1x_3\ldots x_n + \ldots + x_1\ldots x_{n-1}}{x_1\ldots x_n} =$$
$$= \frac{-n^2b(-1)^{n-1}/a}{b(-1)^n/a} = n^2.$$

С другой стороны, по теореме о средних получаем

$$(x_1 + \ldots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}) \geqslant n\sqrt[n]{x_1\ldots x_n} \cdot n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\ldots\frac{1}{x_n}} = n^2,$$

причём равенство достигается лишь в случае $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

17.60. 3. Например, многочлен $x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = x^5 - 5x^3 + 4x$ с корнями $0, \pm 1, \pm 2$. Покажем, что два коэффициента быть не может. У многочлена $x^5 + ax^n$ с $n > 1$ корень 0 — кратный, многочлен $x^5 + ax$ имеет только три действительных корня, $x^5 + a$ — только один корень.

17.61. Пусть $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Разность $P(62) - P(19) = a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19)$ делится на $62 - 19 = 43$ и не может равняться 1.

17.62. Частное равно $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$. Чтобы проверить нужное тождество, удобно положить $x - y = u$, $y - z = v$, тогда $z - x = -(u + v)$, и доказать тождество

$$(u + v)^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u + v)(u^2 + uv + v^2).$$

17.63. $a_{1,2} = \pm\sqrt[20]{2^{20}-1}$; $b_{1,2} = \mp\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}$, $p=-1$, $q=1/4$ (всего два набора коэффициентов). Подставляя $x=1/2$, получим $(a/2+b)^{20}+(1/4+p/2+q)^{10}=0$, откуда $a=-2b$.

Теперь тождество принимает вид

$$(2x-1)^{20} = (-2bx+b)^{20} + (x^2+px+q)^{10}.$$

Приравнивая коэффициенты при x^{20} в обеих частях, получим $2^{20} = 2^{20}b^{20}+1$, откуда найдём b. Теперь тождество принимает вид $(x-1/2)^{20} = (x+px+q)^{10}$, откуда $x^2+px+q = (x-1/2)^2$, т. е. $p=-1$, $q=1/4$.

17.64. Так как $k^n - b^n = (k-b)(k^{n-1}+k^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$, то k^n-b^n делится на $k-b$. Итак, $(k^n-b^n)-(k^n-a) = a-b^n$ делится на $k-b$ при любом $k\neq b$, но это может быть только тогда, когда $a=b$.

17.65. $a=5$. Пусть $f(x) = ax^2-bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где $0<x_1<1$ и $0<x_2<1$, числа a, b, c целые, $a>0$. Тогда $f(0)$ и $f(1)$ — целые положительные числа, поэтому $f(0)\cdot f(1)\geqslant 1$, т. е. $a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)\geqslant 1$.

Заметим теперь, что всегда $x(1-x)\leqslant 1/4$, причём равенство возможно только при $x=1/2$. Поскольку числа x_1 и x_2 различны, а $x_1(1-x_1)$ и $x_2(1-x_2)$ положительные, то $x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)\leqslant 1/16$. Следовательно, $a^2>16$, т. е. $a>4$. При $a=5$ получаем квадратное уравнение $5x^2-5x+1=0$, которое имеет два различных корня, принадлежащих отрезку $[0;1]$.

17.66. Сначала докажем следующие два утверждения:

1) если a^k+b^k делится на a^n+b^n, то и $a^{k-n}-b^{k-n}$ делится на a^n+b^n;
2) если a^l-b^l делится на a^n+b^n, то и $a^{l-n}+b^{l-n}$ делится на a^n+b^n.

Эти утверждения легко следуют из взаимной простоты a и b и тождеств

$$a^k+b^k = a^{k-n}(a^n+b^n) - b^n(a^{k-n}-b^{k-n}),$$
$$a^l-b^l = a^{l-n}(a^n+b^n) - b^n(a^{l-n}+b^{l-n}).$$

Разделим m на n остатком: $m=qn+r$, где $0\leqslant r<n$, вычитая q раз n из m, получим r.

Из условия задачи и утверждений 1) и 2) следует, что $a^r + (-1)^qb^r$ делится на a^n+b^n; но $0\leqslant |a^r+(-1)^qb^r| < a^n+b^n$. Отсюда следует, что $r=0$ (и при этом q нечётно).

17.67. Если уравнение $f(x)=x$ не имеет корней, то либо $f(x)>x$ при всех x (если $a>0$), либо $f(x)<x$ при всех x (если

$a < 0$), но тогда либо $f(f(x)) > f(x) > x$, либо $f(f(x)) < f(x) < x$, а это значит, что уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет корней.

Замечание. Утверждение задачи верно не только для квадратного трёхчлена, но и для любой непрерывной функции.

17.68. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$. Так как $f(1) = g(1)$ и $f(-1) = g(-1)$, то $|g(1)| \leqslant 1$ и $|g(-1)| \leqslant 1$, кроме того, $|c| = |f(0)| \leqslant 1$.

Пусть существует точка x, для которой $|g(x)| > 2$. Тогда вершина параболы $y = g(x)$ — точка с координатами $(x_0, g(x_0))$, причём $|x_0| \leqslant 1$ и $|g(x_0)| > 2$. Выделяя полный квадрат, получим $g(x) = c(x - x_0)^2 + g(x_0)$. Подставим в это равенство вместо x ближайшее к x_0 из чисел -1 и 1 (можно считать для определённости, что это 1). Тогда $|1 - x_0| \leqslant 1$ и поэтому $|g(x_0)| = |g(1) - c(1 - x_0)^2| \leqslant$ $\leqslant |g(1)| + |c| \leqslant 1 + |c| \leqslant 2$, что противоречит неравенству $g(x_0) > 2$. Пример трёхчлена $f(x) = 2x^2 - 1$ показывает, что оценку $|g(x)| \leqslant 2$ улучшить нельзя. (В этом случае $g(x) = -x^2 + 2$.)

17.69. Точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) = 0$. Если x_i и y_i $(i = 0, 1, 2)$ — линейные функции от времени t, то уравнение становится не более чем квадратным относительно t, поэтому оно имеет не более двух корней.

17.70. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ — корни данного уравнения. Обратимся к графику функции $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$. Ее производная $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$ обращается в нуль в трёх различных точках p_1, p_2, p_3, где $x_1 < p_1 < x_2 < p_2 < x_3 < p_3 < x_4$. При этом на интервале (p_1, p_2) функция $f'(x)$ положительна, а на интервале (p_2, p_3) — отрицательна.

Вторая производная $f''(x) = 12x^2 + 6ax$ обращается в нуль в двух различных точках q_1 и q_2, причём пара точек q_1, q_2 совпадает с 0, $-a/2$, и значения в этих точках первой производной имеют разные знаки. Это значит, что $a \neq 0$ и $f'(0) \cdot f'(-a/2) < 0$, т. е. $b(4b + a^3) < 0$. Отсюда следует, что $ab < -4b^2/a^2$, и поскольку $-4b^2/a^2 < 0$, то $ab < 0$.

17.71. Так как $f(1) = f(0) = 1$, то свободный член $P_n(0)$ многочлена $P_n(x) = f(f(\ldots(f(x))\ldots))$ равен 1. Значит, при любом целом m остаток от деления $P_n(m)$ на m равен 1. Заменив здесь m на $m' = P_k(m)$, получим, что $P_{n+k}(m)$ и $m' = P_k(m)$ взаимно просты.

17.72. Покажем, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, в котором $|a| \leqslant 1980$, $|b| \leqslant 1980$, $|c| \leqslant 1980$, не может иметь корень, больший 1981. Предположим противное: пусть $x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0$

и $x_1 > 1981$. Тогда $x_1^3 = -ax_1^2 - bx_1 - c \leqslant |a|x_1^2 + |b|x_1 + |c| \leqslant \leqslant 1980(x_1^2 + x_1 + 1) \leqslant 1980(x_1^3 - 1)/(x_1 - 1) < (x_1^3 - 1)$ и поэтому $x_1^3 < x_1^3 - 1$, что невозможно. Противоречие.

Замечание. Аналогично предыдущему доказывается следующее утверждение: *уравнение $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, в котором все коэффициенты по модулю не превосходят числа b, не может иметь корень, модуль которого больше числа $b + 1$.*

17.73. Если раскрыть скобки, не приводя подобные члены, в выражении

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{100})(1+x+x^2+\ldots+x^{100})(1+x+x^2+\ldots+x^{100}),$$

получится сумма произведений вида $x^p x^q x^r$, где p, q, r — целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant p \leqslant 100$, $0 \leqslant q \leqslant 100$, $0 \leqslant r \leqslant 100$, причём коэффициенты при $x^p x^q x^r$ равны 1. Выражение x^{100} получится только тогда, когда $p + q + r = 100$. Значит, искомый коэффициент равен числу целочисленных решений уравнения $p+q+r = 100$, где $0 \leqslant p \leqslant 100$, $0 \leqslant q \leqslant 100$, $0 \leqslant r \leqslant 100$. Это уравнение имеет 101 решение при $p = 0$, 100 решений при $p = 1$, 99 решений при $p = 2$ и т. д. Значит, число всех решений равно $101 + 100 + 99 + \ldots + 2 + 1 = 5151$.

17.74. а) 3 при $x = y = 1$. $1 + x^2y^4 + x^4y^2 \geqslant 3x^2y^2$ (неравенство о средних).

б) Пусть $P(x, y) = g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y) + \ldots + g_n^2(x, y)$, где $g_i(x, y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — многочлены. Так как $P(x, 0) = P(0, y) = 4$, многочлены g_i не могут содержать одночленов вида ax^n и by^m. Поэтому коэффициент при x^2y^2 должен быть положителен.

17.75. Последовательно проводим: две параллельные прямые, каждая из которых пересекает параболу в двух точках; прямую через середины получающихся отрезков; перпендикуляр к этой прямой, пересекающий параболу в двух точках A и B; серединный перпендикуляр к отрезку AB — это ось Oy. Ось Ox перпендикулярна Oy в точке пересечения с параболой. Единица масштаба — абсцисса пересечения прямой $y = x$ с параболой.

17.76. Верно. Так как $f(-1) = 11$, а $g(-1) = -9$, в какой-то момент корнем полученного трёхчлена будет -1.

17.77. В двух точках. Если есть три точки, удовлетворяющие условию, то какие-то две из них лежат по одну сторону от точки $x = -b/2a$. Осталось оценить $|y(x_1) - y(x_2)|$.

17.78. Заметим, что $\alpha^3 = 5 + 3\sqrt[3]{6}\alpha$. Тогда $(\alpha^3 - 5)^3 = 162\alpha^3$, т. е. $\alpha^9 - 15\alpha^6 - 87\alpha^3 - 125 = 0$. Значит, в качестве искомого многочлена можно взять многочлен $p(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125$. Если этот многочлен умножить на любой многочлен с целыми коэффициентами, то вновь получится многочлен, для которого число α является корнем.

17.79. $[n/2]+1$. Каждому значению $m=0,1,\ldots$ поставим в соответствие многочлен

$$P_m(x)=(a_0+2b_0)+(a_1+2b_1)x+\ldots+(a_n+2b_n)x^n,$$

где a_i и b_i соответственно — цифры записи чисел $n-2m$ и m в двоичной системе. Любой из многочленов $P_m(x)$ допустим и, наоборот, каждый допустимый многочлен совпадает с некоторым из $P_m(x)$.

17.80. Справедливо следующее тождество:

$$P(x)=6a\frac{(x-1)x(x+1)}{6}+2b\frac{x(x-1)}{2}+(a+b+c)x+d.$$

По условию, числа $d=P(0)$ и $a+b+c+d=P(1)$ — целые. Поэтому и число $a+b+c$ целое. Кроме того, поскольку $P(-1)=$ $=2b-(a+b+c)+d$ — целое, $2b$ также целое. Наконец, так как целым является $P(2)=6a+2b+2(a+b+c)+d$, $6a$ — тоже целое число.

При любом целом x числа $(x-1)x(x+1)/6$ и $x(x-1)/2$ являются целыми, так как произведение трёх последовательных целых чисел всегда делится на 6, а произведение двух последовательных целых чисел всегда делится на 2. Отсюда и из того, что числа $6a$, $2b$, $a+b+c$ и d целые, следует утверждение задачи.

Замечание. Справедливо следующее утверждение, обобщающее утверждение задачи: многочлен степени $k\leqslant n$, имеющий целые значения при $n+1$ последовательных целых значениях независимой переменной, принимает целые значения при всех целых значениях независимой переменной.

17.81. Рассмотрим эскиз графика функции $y=f(x)$, где $f(x)=x(x^2-1)(x^2-10)$. При $c=0$ уравнение $f(x)=c$ имеет только три целых корня: -1, 0 и 1. При $c\neq 0$ уравнение $f(x)=c$ вне отрезка $[-1;1]$ имеет; очевидно, не более трёх корней, а на отрезке $[-1;1]$ целых корней не имеет. Следовательно, суммарное число целочисленных корней уравнения $f(x)=c$ при любом c не превосходит трёх.

17.82. Используя формулы Виета для корней x_1, x_2 данного уравнения, можем записать: $198=p+q=-(x_1+x_2)+x_1x_2=$ $=(x_1-1)(x_2-1)-1$. Следовательно, $(x_1-1)(x_2-1)=199$. Так как число 199 является простым, то пара чисел $\{x_1-1;x_2-1\}$ совпадает либо с парой $\{1;199\}$, либо с парой $\{-1;-199\}$. Всего получаем две возможные совокупности целых корней: $\{2; 200\}$ и $\{0; -198\}$.

17.83. Пусть $n-1, n, n+1$ — последовательные целые значения x, при которых данный многочлен равен целым значениям $m-1$, m, $m+1$ соответственно: $2(n-1)^3-60(n-1)^2+a(n-1)=m-1$, $2n^3-60n^2+an=m$, $2(n+1)^3-60(n+1)^2+a(n+1)=m+1$. Складывая первое и третье уравнения и вычитая удвоенное второе, после очевидных преобразований получаем, что $n=10$.

Подставим $n=10$ в первые два уравнения. Из полученной системы находим $a=599$ и $m=1990$. Таким образом, искомые значения равны $1989, 1990, 1991$.

17.84. Пусть ни одно из уравнений не имеет корней. Тогда $b^2 < ac$, $c^2 < ab$ и $a^2 < bc$. Левые части в этих неравенствах неотрицательны, поэтому неотрицательны и их правые части. Перемножив неравенства, получаем неравенство $a^2b^2c^2 < a^2b^2c^2$, что невозможно. Противоречие.

Замечание. К противоречию можно прийти и по-другому. Сложив неравенства $b^2 < ac$, $c^2 < ab$ и $a^2 < bc$, получим, что $a^2+b^2+c^2 < ab+bc+ca$. Но это неравенство равносильно неравенству $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 < 0$, что невозможно.

17.85. Пусть x_1, x_2 — корни данного уравнения. По теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=a$, следовательно, $(x_1+1)(x_2+1) = (x_1+x_2)+x_1x_2+1=1$. Числа x_1+1 и x_2+1 должны быть целыми, поэтому либо $x_1+1=1$ и $x_2+1=1$, либо $x_1+1=-1$ и $x_2+1=-1$. В первом случае $x_1=x_2=0$ и $a=0$, а во втором — $x_1=x_2=-2$ и $a=4$.

17.86. Да. Рассмотрим квадратный трёхчлен $P(x)=x(9x+2)$. Если $n=1\ldots1$ (k единиц), то $9n+2=10\ldots01$ ($k-1$ нулей). Значит, $P(n)=1\ldots1$ ($2k$ единиц), и этот квадратный трёхчлен удовлетворяет условию.

17.87. Пусть a_0 — свободный член многочлена $P(x)$. Тогда $P(x)=xQ(x)+a_0$, где $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Поэтому $P(19)=19n+a_0$, а $P(94)=94m+a_0$, где m и n — целые числа. Из условия вытекает, что $19n=94m$, следовательно, $m=94k$, $m=19k$. Итак, $19\cdot 94k+a_0=1994$, откуда $a_0=1994-1786k$. Из условия $|a_0|<1000$ следует, что $k=1$, и поэтому $a_0=208$.

Заметим, что многочлен, удовлетворяющий условию задачи, существует, например: $-x^2+113x+208=-(x-19)(x-94)+1994$.

17.88. Нет. Предположим противное. Если трёхчлен kx^2+lx+m с целыми коэффициентами имеет два целых корня x_1 и x_2, то m и l

делятся на k, потому что $x_1x_2 = m/k$, а $x_1+x_2 = -l/k$. Из чисел a и $a+1$ одно чётное, например, a. Тогда b и c тоже чётные, а $(b+1)$ и $(c+1)$ — нечётные. Если y_1 и y_2 — целые корни уравнения $(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1) = 0$, то $y_1y_2 = (c+1)/(a+1)$ и $y_1+y_2 = (b+1)/(a+1)$ — нечётные числа. Противоречие: сумма и произведение двух целых чисел не могут одновременно быть нечётными.

17.89. Пусть $n \leqslant m$ — целые корни уравнения $x^2+ax+b = 0$ Тогда из $m+n = -a$, $mn = b$ следует, что $m, n < 0$, $1 \leqslant |n| \leqslant |m| \leqslant$ $\leqslant 1997$, $0 < mn \leqslant 1997$. Рассмотрим уравнение $x^2 - nx + nm = 0$. Его коэффициенты — целые числа от 1 до 1997, и оно не имеет корней, так как $D < 0$. Итак, среди рассматриваемых уравнений любому уравнению с целыми корнями можно поставить в соответствие единственное уравнение, не имеющее корней. Кроме того, все трёхчлены x^2+cx+d, где c чётно, а d нечётно, не представимы в виде $x^2 - nx + mn$. Значит, уравнений не имеющих корней, больше.

17.90. Если сделать замену $x = 2\cos a$, то получим $P_1(x) =$ $= 2\cos 2a$, $P_2(x) = 2\cos 2^2a$, $\ldots$, $P_n(x) = 2\cos 2^na$. Поэтому данное уравнение сводится к уравнению $2\cos 2^na = 2\cos a$, которое преобразуется к виду $\sin((2^n-1)a/2)\sin((2^n+1)a/2) = 0$.

Корни этого уравнения $a_1 = 2k\pi/(2^n-1)$, $a_2 = 2l\pi/(2^n+1)$. Теперь нетрудно найти 2^n различных значений переменной x, удовлетворяющих данному уравнению; их также удобно записать в виде следующих двух серий:

$$x'_k = 2\cos(2k\pi/(2^n-1)), \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1,$$
$$x''_l = 2\cos(2l\pi/(2^n+1)), \qquad l = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}.$$

При указанных значениях k и l аргументы косинусов заключены между 0 и π. На этом промежутке функция $x = \cos a$ монотонно убывает, поэтому все значения x, принадлежащие одной серии, различны. Покажем, что значения x из разных серий также различны. Действительно, пусть $2\cos(2k\pi/(2^n-1)) =$ $= 2\cos(2l\pi/(2^n+1))$. Тогда $2k\pi/(2^n-1) = 2l\pi/(2^n+1)$ (углы лежат на отрезке $[0, \pi]$, поэтому из равенства косинусов следует равенство аргументов) или $k(2^n+1) = l(2^n-1)$.

Но числа 2^n-1 и 2^n+1 взаимно просты, поскольку они нечётны, а их общий делитель должен быть и делителем их разности, которая равна 2. Значит, k делится на 2^n-1, а l — на 2^n+1, что противоречит выбору чисел k и l.

Итак, мы нашли 2^n различных вещественных корней для уравнения $P_n(x) = x$, но легко установить, что многочлен $P_n(x) - x$ при $n \geqslant 1$ имеет степень 2^n, поэтому указанный набор исчерпывает всю совокупность корней рассматриваемого многочлена, а отсюда следует утверждение задачи.

Гораздо интереснее другой способ решения, раскрывающий существо задачи. Заметим, что, когда x пробегает отрезок $[-2, 2]$, функция $P_1(x)$ пробегает тот же отрезок дважды, сначала монотонно убывая, а затем монотонно возрастая. Значит, $P_2(x)$ будет уже четырежды пробегать отрезок $[-2, 2]$, когда x изменяется от -2 до 2. Продолжая эти рассуждения дальше, получаем, что $P_n(x)$ 2^n раз пробегает отрезок $[-2, 2]$ (притом каждый раз монотонно) при изменении x от -2 до 2. Отсюда нетрудно найти, что графики функций $y = P_n(x)$ и $y = x$ будут иметь ровно 2^n точек пересечения. Далее достаточно к этим рассуждениям добавить утверждение о том, что многочлен $P_n(x) - x$ имеет ровно 2^n корней.

17.91. Два многочлена $F(x)$ и $G(x)$ с целыми коэффициентами будем называть эквивалентными, если все коэффициенты их разности $F(x) - G(x)$ чётны, и записывать эту эквивалентность так: $F(x) \equiv G(x)$. Ясно, что если $F_1 \equiv G_1$, $F_2 \equiv G_2$, то $F_1 + G_1 \equiv F_2 + G_2$, $F_1G_1 \equiv F_2G_2$ (поскольку $F_1F_2 - G_1G_2 = F_1(F_2 - G_2) + G_2(F_1 - G_1)$) и $F_1^m \equiv G_1^m$ для любого натурального m. Число нечётных коэффициентов многочлена $F(x)$ будем обозначать через $W(F(x))$ или $W(F)$ и называть весом многочлена $F(x)$; положим $w(i) = W((1 + x)^i)$. Многочлен $(1 + x)^{i_1} + (1 + x)^{i_2} + \ldots + (1 + x)^{i_n}$ в условии задачи обозначим кратко через $P(x)$. Требуемое неравенство $w(i_1) \leqslant W(P)$ можно доказать методом математической индукции — по i_n.

Из соотношения $(1 + x)^{2^k} \equiv 1 + x^{2^k}$ следует, что для любого многочлена с целыми коэффициентами степени меньше $q = 2^k$ справедливо равенство

$$W(F(x)(1 + x)^q) = 2W(F(x)). \qquad (*)$$

При $i_n = 0$ и $i_n = 1$ нужное нам неравенство очевидно, так как $W(P) = w(i_1)$. Предположим, что оно верно для $i_n < 2^k$ $(k \geqslant 1)$, и докажем его для $2^k \leqslant i_n < 2^{k+1}$. Положим $q = 2^k$ и рассмотрим два случая.

Если $i_1 \geqslant q$, то, полагая $F(x) = (1 + x)^{i_1 - q} + \ldots + (1 + x)^{i_n - q}$, в силу формулы $(*)$ и предположения индукции получим $W(P) = 2W(F) \geqslant 2w(i_1 - q) = w(i_1)$.

Если же $i_1 < q$, то запишем $P(x)$ в виде $P_1(x) + (1+x)^q P_2(x) \equiv \equiv P_1(x)+P_2(x)+x^q P_2(x)$, где $P_1(x)$ — сумма многочленов $(1+x)^{i_s}$ с показателями $i_s < q$. Тогда каждый нечётный коэффициент многочлена P_1, который «аннулируется» нечётным коэффициентом P_2 при той же степени x, появляется снова в члене, степени на q большей, из многочлена $x^q P_2(x)$. Поэтому $w(i_1) \leqslant \leqslant W(P_1) \leqslant W(P)$.

17.92. По условию $p = f(0)$ — простое число, значит, $p \geqslant 2$. Ясно, что среди значений многочлена f имеются составные числа, например $f(p)$. Выберем наименьшее натуральное число y, для которого $f(y)$ — составное, и обозначим через q наименьший простой делитель числа $f(y)$. Предположим, что $y \leqslant p-2$. Тогда

$$q \leqslant \sqrt{f(y)} \leqslant \sqrt{(p-2)^2 + (p-2) + p} < p.$$

Рассмотрим разность $f(y) - f(x) = (y-x)(x+y+1)$. Если x пробегает значения $0, 1, \ldots, y-1$, то $y-x$ пробегает значения $1, 2, \ldots, y$, а $x+y+1$ — значения $y+1, \ldots, 2y$. Таким образом, в случае $q \leqslant 2y$ найдется число x, $0 \leqslant x < y$, для которого $f(y)-f(x)$ делится на q, и, значит, $f(x)$ делится на q. Но в силу выбора y число $f(x)$ простое, поэтому $f(x) = q$, что невозможно, поскольку $q < p \leqslant x^2 + x + p = f(x)$. Значит, $q > 2y$ или $q > 2y+1$.

Так как q — наименьший простой делитель $f(y)$, то $f(y) \geqslant \geqslant q^2$, поэтому $y^2 + y + p \geqslant 4y^2 + 4y + 1$, т. е. $3y^2 \leqslant p - 3y - 1 < p$ и $y < \sqrt{p/3}$. Но тогда согласно условию $f(y)$ — простое число. Получили противоречие, которое показывает, что при $y \leqslant p-2$ число $f(y)$ не может быть составным. Это завершает решение.

Используя результат этой задачи, убедимся, что значения $f(0), f(1), \ldots, f(39)$ многочлена $f(x) = x^2 + x + 41$ являются простыми числами. Действительно, числа $f(0) = 41$, $f(1) = 43$, $f(2) = 47$ и $f(3) = 53$ — простые и, в силу полученного результата, дальше проверять не нужно, так как $4 > \sqrt{41/3}$. Более того, $f(-x) = x^2 - x + 41 = (x-1)^2 + (x-1) + 41 = f(x-1)$, поэтому многочлен $x^2 + x + 41$ принимает простые значения и при $x = -1, -2, \ldots, -40$. Из многочлена $x^2 + x + 41$ с помощью линейной замены переменной (сдвига) получается многочлен $g(x) = x^2 - 79x + 1601$, у которого значения $g(0), g(1), \ldots, g(79)$ — простые числа. Эти замечательные свойства многочлена x^2+x+41 были открыты в начале XVIII в. Леонардом Эйлером.

Кроме случая $p = 41$, условию рассмотренной задачи удовлетворяют многочлены $x^2 + x + p$ при $p = 2, 3, 5, 11, 17$. Неизвестно, существуют ли ещё такие многочлены. Известно только, что при

$p < 10^9$ кроме указанных шести многочленов ни один не удовлетворяет условию задачи.

17.93. Пусть $x^n + 5x^{n-1} + 3 = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k) \times \times (b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + x^m)$, где все коэффициенты a_i, b_j — целые числа, $k + m = n$. Поскольку $a_0 b_0 = 3$, один из сомножителей по абсолютной величине равен 3, а другой равен 1. Пусть $|a_0| = 3$ и $|b_0| = 1$. Заметим, что рациональные корни многочлена $x^n + 5x^{n-1} + 3$ являются целыми числами и делителями числа 3. Поэтому легко проверить, что этот многочлен не имеет рациональных корней и, следовательно, $1 < k < n - 1$. Сравнивая коэффициенты, имеем:

$$a_0 b_0 = 3, \quad a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \quad a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0, \ldots,$$
$$a_{k-1} b_0 + a_{k-2} b_1 + \ldots + a_0 b_{k-1} = 0, \quad b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 = 0.$$

Первые k равенств показывают, что все числа $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ делятся на 3. Из последнего равенства получаем, что b_0 также делится на 3, тогда как $|b_0| = 1$. Из этого противоречия вытекает требуемое утверждение.

17.94. а) Многочлены $Q_1(x) = x$ и $Q_2(x) = P(x)$ коммутируют с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$ при любом α; многочлен Q степени 3, коммутирующий с $x^2 - \alpha$, существует только при $\alpha = 0$ ($Q(x) = x^3$) и при $\alpha = 2$ ($Q(x) = x^3 - 3x$).

Доказательство, что других многочленов нет, и проверка получаются прямым сравнением коэффициентов. Например, для многочлена степени 3: тождество

$$(x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha)^3 + b_1(x^2 - \alpha)^2 + b_2(x^2 - \alpha) + b_3$$

выполнено, если $b_1 = b_3 = 0$ (сравнение коэффициентов при x^5, x^3 и x), $2b_2 = -3\alpha$ (сравнение коэффициентов при x^4), $b_2^2 = 3\alpha^2 + b_2$ (при x^2), $\alpha = \alpha^3 + b_2\alpha$ (свободный член), откуда либо $\alpha = 0$ и $b_2 = 0$, либо $b_2 = -3\alpha/2 = 1 - \alpha = b_2^2 - 3\alpha^2$; как ни удивительно, три уравнения с двумя неизвестными имеют решение $\alpha = 2$, $b_2 = -3$.

б) Легко проверить, что при одновременном преобразовании двух коммутирующих многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ $P(x) \to P^*(x) = = P(x - y) + y$, $Q(x) \to Q^*(x) = Q(x - y) + y$ (y — число) многочлены $P^*(x)$ и $Q^*(x)$ также коммутируют друг с другом. (Если рассматривать многочлен как функцию, отображающую числовую прямую в себя, то данное преобразование соответствует сдвигу на y начала отсчёта на прямой.) Любой многочлен второй степени со старшим коэффициентом 1 можно (выделив полный квадрат) указанным преобразованием привести к виду $P^*(x) = x^2 - \alpha$.

Поэтому можно сразу считать, что $P(x) = x^2 - \alpha$, и действовать как в пункте а).

Выписывая систему уравнений на коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_k$ из тождества $(Q(x))^2 - \alpha = Q(x^2 - \alpha)$, где $Q(x) = x^k + b_1 x^{k-1} + \ldots + b_k$, получим прежде всего равенства $b_1 = b_3 = \ldots = 0$, а далее — уравнения вида $b_2 = F_2$, $b_4 = F_4$, $\ldots$, где функция F_i зависит от α и от b_{2j}, $2j < i$, так что коэффициенты b_2, b_4, $\ldots$ находятся однозначно (лишь $[k/2]$ из k уравнений, полученных приравниванием коэффициентов при x^{2k-2}, $x^{2k-4}, \ldots, x^2$ и свободного члена, используются для отыскания b_{2j}; остальные — дополнительные условия, которые могут и не выполняться).

в) Это $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$.

г) Будем вместо $P(Q)$, $P(Q(R))$ писать $P * Q$, $P * Q * R$. По условию, $Q * P = P * Q$ и $R * P = P * R$, откуда $(Q * R) * P = Q * R * P = Q * P * R = P * Q * R = P * (Q * R)$ и, аналогично, $(R * Q) * P = P * (R * Q)$.

Итак, многочлены $Q * R$ и $R * Q$ коммутируют с P и имеют одинаковую степень, поэтому согласно б) они совпадают.

д) По индукции можно доказать, что для любого $k \geqslant 2$ существует многочлен P_k степени k такой, что $t^k + 1/t^k = P_k(t + 1/t)$. Например, так как $t^2 + 1/t^2 = (t + 1/t)^2 - 2$, $t^3 + 1/t^3 = (t + 1/t)^3 - 3(t + 1/t)$, то $P_2(x) = x^2 - 2$, $P_3(x) = x^3 - 3x$. Легко видеть, что $P_m(P_n(t + 1/t)) = P_m(t^n + 1/t^n) = t^{mn} + 1/t^{mn} = P_n(t^m + 1/t^m) = P_n(P_m(t + 1/t))$, поэтому $P_m * P_n = P_m * P_n = P_{mn}$.

Эти многочлены получаются простой заменой переменных из многочленов Чебышева T_k, определяемых тождествами $\cos kp = T_k(\cos p)$, $k = 2, 3, \ldots$: $P_k(x) = 2T_k(x/2)$.

18. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И СУММЫ

18.1. Ни одной. Любая конфета забирается на следующем шаге.

18.2. 19 684. Легко видеть, что на n-м шаге для суммы s_n верно $s_n = 3s_{n-1} - 2$.

18.3. 29 минут. Через 30 минут объём грибов был бы равен удвоенному объёму колбы, следовательно, объём колбы был достигнут за минуту до этого, т. е. через 29 минут.

18.4. Назовем «молодыми» бактерии, возраст которых не превосходит получаса, а «старыми» — бактерии, прожившие свыше получаса. Примем за единицу времени полчаса. Обозначим число бактерий к моменту n через a_n. В момент $n - 1$ рождается a_{n-1}

бактерий, значит, к моменту n имеется a_{n-1} молодых бактерий, каждая из которых порождает одну новую бактерию, и $a_n - a_{n-1}$ старых бактерий, каждая из которых порождает одну новую бактерию, а сама умирает. Значит, к моменту $n+1$ число бактерий составляет $a_{n-1} + a_{n-1} + a_n - a_{n-1}$, т. е. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

При этом $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Искомое число бактерий равно a_{13}. Непосредственный подсчёт по рекуррентной формуле показывает, что $a_{13} = 377$.

Последовательность, возникающая в этой задаче, называется последовательностью Фибоначчи и обозначается F_n. Она часто используется при решении задач.

18.5. Докажем, что через $2^n - 1$ секунд будет 2^n частиц, расположенных в ряд на расстоянии 2 друг от друга, причём крайние частицы будут находиться на расстоянии $2^n - 1$ от начального положения, а через 2^n секунд останутся две частицы на расстоянии 2^n от начального положения. Это ясно при $n = 1$ и $n = 2$. Пусть утверждение доказано при $n = k$. Докажем его для $n = k+1$.

Согласно предположению индукции, в момент $t_0 = 2^k$ секунд останутся две частицы на расстоянии 2^k от начального положения. Потом в течение $(2^k - 1)$ секунд «потомство» первой частицы никак не будет взаимодействовать с «потомством» второй и поэтому, как следует из предположения индукции, в момент $t = 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ секунд образуется $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ частиц, расположенных в ряд на расстоянии 2 друг от друга. Ясно, что в момент $t + 1 = 2^{k+1}$ секунд останутся 2 частицы на расстоянии 2^{k+1} от начального положения. При $k = 7$ получаем, что через 128 секунд будут две частицы на расстоянии 128 от начального положения, а число частиц через 129 секунд равно 4.

18.6. $a_{1986} = 2/3$. Последовательность будет повторяться с периодом 6.

18.7. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Заметим, что все члены a_k последовательности положительны и что число $m = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ является корнем уравнения $m = 1 + \frac{1}{m}$. Покажем, что если $a_k < m$, то $a_{k+1} > m$ и $a_{k+2} < m$. Из $a_k < m$ вытекают следующие соотношения: $1/a_k > 1/m$, $a_{k+1} = 1 + 1/a_k > 1 + 1/m = m$, $1/a_{k+1} < 1/m$, $a_{k+2} = 1 + 1/a_{k+1} > 1 + 1/m = m$.

18.8. При $n > 3$, $10^n - 1000 = 10^3(10^{n-3} - 1)$. Число в скобках делится на 9, поэтому данная разность делится на 360. Отсюда все члены, начиная с 4-го, совпадают с $\sin 1000^\circ = \sin(3 \cdot 360 - 80)^\circ < 0$. В последовательности 3 положительных члена.

18.9. Преобразуем данное выражение:

$$1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{200}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{200}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{200}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}.$$

18.10. Покажем, что искомая сумма равна 1989/1990, тогда, поскольку левая часть неравенства, очевидно, меньше суммы (т. к. $1/k^2 < 1/k(k-1)$), будет доказано и неравенство:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{1990^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1989\cdot 1990}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1989}-\frac{1}{1990}\right)=\frac{1989}{1990}.$$

18.11. $1-1/n!$. Представить k-е слагаемое в виде $k/(k+1)! = 1/k! - 1/(k+1)!$.

18.12. Сумма выбранных чисел равна половине суммы всех чисел от 1 до 100. Если $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ — выбранные числа, а $b_1, b_2, \ldots, b_{50}$ — остальные числа, не превосходящие 100, то

$$b_1^2+\ldots+b_{50}^2=(101-a_1)^2+\ldots+(101-a_{50})^2=$$
$$=50\cdot 101^2-2\cdot 101(a_1+\ldots+a_{50})+a_1^2+\ldots+a_{50}^2=a_1^2+\ldots+a_{50}^2.$$

Значит, сумма квадратов наших чисел равна половине суммы квадратов чисел от 1 до 100, т. е. 169 075.

18.13. Да. Полные квадраты $1^2, 2^2, \ldots, n^2, \ldots$ разбивают все натуральные числа на группы. Отнесем к 1-му множеству все числа, принадлежащие нечётным группам, а ко 2-му — все числа из чётных групп (сами квадраты относим к 1-му множеству). Если d — разность арифметической прогрессии, то в группу подряд стоящих чисел «длины», большей d, обязательно попадает хотя бы один член арифметической прогрессии. Но при любом d такие группы имеются в 1-м и во 2-м множествах, так как расстояния между соседними квадратами n^2 и $(n+1)^2$ неограниченно возрастают с увеличением n.

18.14. Пусть 1-й член прогрессии $a_1 = a$, а разность d. Подберём такое натуральное n, чтобы $a+10d < 10^n$. Пусть a_k и a_{k+1} — два соседних члена арифметической прогрессии, для которых выполняются неравенства $a_k < 10^n$, $a_{k+1} \geqslant 10^n$. Очевидно, что

$10^n \leqslant a_{k+1} = a_k + d \leqslant 10^n - 1 + 10^{n-1}$, откуда видно, что число начинается цифрами 10.

Аналогично доказывается, что в этой прогрессии найдется член, начинающийся любым наперёд заданным набором цифр.

18.15. Положим $5^n \sin nx = p_n$, $5^n \cos nx = q_n$. По условию $p_1 = 3$ и, значит, $q_1 = \pm 4$ Из формул $\sin(n+1)x = \sin x \cos nx + \cos x \sin nx$, $\cos(n+1)x = \cos x \cos nx - \sin x \sin nx$ вытекает, что $p_{n+1} = \pm 4p_n + 3q_n$; $q_{n+1} = -3p_n \pm 4q_n$ или

$$p_{n+1} \pm p_n - 3q_n = \pm 5p_n; \quad q_{n+1} \pm q_n + 3p_n = \pm 5q_n. \qquad (*)$$

Отсюда ясно, что при любом n числа p_n и q_n — целые. Обозначим остаток от деления p_n на 5 через r_n, остаток от деления q_n на 5 через s_n и заметим, что в силу формул $(*)$ числа $r_{n+1} \pm r_n - 3s_n$, $s_{n+1} \pm s_n + 3r_n$ делятся на 5. Учитывая, что $r_1 = p_1 = 3$, а $s_1 = q_1 = \pm 4$; из этих формул найдем сначала r_2 и s_2, затем r_3 и s_3 и т. д. Получается, что $r_5 = r_1$, $s_5 = s_1$ и далее $r_5 = r_9 = r_{13} = r_{17} = r_{21} = r_{25} = 3$.

Итак, p_{25} дает при делении на 5 остаток 3, и, значит не делится на 5, что и требовалось доказать.

18.16. При $n = 1$ число заборов $x_1 = 1$, при $n = 2$ можно окружить забором каждый из домов, а затем построить забор, огораживающий оба дома, т. е. $x_2 = 3$. Предполагая в общем случае $x_n = 2n - 1$, докажем эту формулу по индукции. Пусть она верна для $n \leqslant k$, положим $n = k + 1$. Рассмотрим некоторую максимальную систему заборов. Тогда найдётся забор A, который окружается только забором, огораживающим все дома. Если внутри этого забора стоит l домов, то число заборов внутри него не более $2l - 2$ по предположению индукции ($2l - 1$, если учесть сам забор A). Остальные $(n - l)$ домов можно окружить не более $2(n - l) - 1$ заборами. Таким образом, общее число заборов — не более $2n - 1$. Шаг доказан.

18.17. Положим $z_n = up^{n-1} + vq^{n-1}$. Тогда $z_{n+1} = z_n(p + q) - z_{n-1}pq$. Итак, зная z_0, z_1, z_2, z_3, можем найти $x = p + q$ и $y = pq$ из системы линейных уравнений: $z_1x - z_0y = z_2$, $z_2x - z_1y = z_3$. Из теоремы Виета находим p и q, а затем u и v из линейных уравнений $z_0 = u + v$, $z_1 = up + vq$. Итак,

а) $z_n = (2^n + (-1)^{n-1})/3$,

б) $z_n = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \left((\sqrt{5} + 3) \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + (\sqrt{5} - 3) \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$,

в) нет решений.

18.18. 11. Рассмотрим прогрессию, у которой $b_1 = 2^{20}$, а $q = 5/4$. Поскольку $b_1 > 10^6$, $b_{11} = 56^{10} < 10^7$ и все её члены от 1-го до 11-го — целые числа, то 11 первых членов этой прогрессии являются семизначными числами.

Докажем от противного, что прогрессии, содержащей 12 требуемых членов не существует. Пусть $q = m/k$ — знаменатель прогрессии (m/k — несократимая дробь), b_1 — её 1-й член. (Можно считать, что $q > 1$. Иначе рассмотрим 12 этих членов в обратном порядке.) Так как m/k несократима, а $b_{12} = b_1 m^{11}/k^{11}$ — целое число, то b_1 делится на k^{11} и $b_{12} \geqslant m^{11}$. Если предположить, что $m > 4$, то получим $b_{12} \geqslant 5^{11} > 10^7$, что противоречит условию. Значит, $m \leqslant 4$ и наименьшее возможное значение q равно $4/3$. Теперь получаем $b_{12} = q^{11}b_1 > 10b_1 > 10^7$, что противоречит условию.

18.19. $a = 0$, $b = -4$ или $a = -4$, $b = 0$. По теореме Виета сумма корней одного из заданных уравнений равна произведению корней другого, взятому с обратным знаком. Пусть корни данных уравнений образуют прогрессию: $c-d$, c, $c+d$, $c+2d$. Возможны три случая: первые два члена прогрессии — корни одного уравнения, два оставшихся — другого; два средних члена прогрессии — корни одного уравнения, два крайних — другого; первый и третий член прогрессии — корни одного уравнения, второй и четвёртый — другого. В первом и во втором случае система уравнений не имеет решения, а в третьем случае получаем из системы

$$\begin{cases} (c-d)+(c+d) = -c(c+2d), \\ c+(c+2d) = -(c-d)(c+d) \end{cases}$$

приведённый выше ответ.

18.20. Пусть N — натуральное число, большее 1. Покажем, что первые N членов арифметической прогрессии $a_n = N!n + 1$ взаимно просты. Действительно, пусть d — общий делитель чисел a_k и a_l ($1 \leqslant k < l \leqslant N$), тогда d является делителем числа $la_k - ka_l = l(N!\,k+1) - k(N!\,l+1) = l - k < N$. Значит, $1 \leqslant d < N$, поэтому d — делитель $N!$, а так как, по предположению, d — делитель $a_k = N!\,k + 1$, то d — делитель 1, значит, $d = 1$.

18.21. Числа k образуют арифметическую прогрессию $20p+29$, для каждого $p = 1, 2, \ldots$. Рассмотрите отдельно периоды повторения остатков от деления числа k^k+1 на 2, 3 и на 5 (длины периодов равны соответственно 2, 6 и 20).

18.22. Число бактерий через k минут равно $(n-k)2^k$. Поэтому через n минут бактерий не останется.

18.23. Существует. Числа будем выписывать парами. Первая пара $a_1 = 1, a_2 = 2$. Пусть мы смогли построить k пар; построим $(k+1)$-ю пару. Рассмотрим всевозможные разности, реализуемые среди имеющихся k пар чисел, и обозначим через d наименьшую разность, которая ещё не реализована. Положив $a_{2k+1} = 2a_{2k} + 1$, $a_{2k+2} = a_{2k+1} + d$, получаем требуемую последовательность.

18.24. Заметим, что если x_n чётно и равно произведению некоторой степени двойки на нечётное число, $x_n = 2^k m$, то x_{n+k} нечётно. Если же $x_n = 2^k(2m+1)+1$, то таким же рассуждением получаем, что x_{n+k} чётно. Значит, нечётных чисел, так же как и чётных, в данной последовательности бесконечно много.

18.25. Пусть последовательность y_n периодична с периодом T, начиная с некоторого n_0. Тогда $x_{n+T} - x_n$ чётно при всех $n > n_0$, с другой стороны оно равно $(3/2)^{n-n_0}(x_{n_0+T} - x_{n_0})$. При большом n последнее число нечётно. Противоречие.

18.26. При гипотезе $x_n = x_{n-1} + n + 1$ $(n > 3)$ получим $x_n = n(n+3)/2$. Докажем эту формулу по индукции. База $(n = 4)$ верна. Пусть при некотором n утверждение верно. Тогда $x_{n+1} > 2x_n - x_{n-1} = (n+1)(n+4)/2 - 1$ следующее за этим число составное (так как один из сомножителей чётный и каждый из них больше 2). Значит, $x_{1000} = 501\,500$.

18.27. Решение 1. а) Если $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, то $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant 1$. Если x_1 — рациональное число, то все x_n рациональны, причём со знаменателем не больше, чем у x_1. Но таких дробей конечное число. Поэтому какие-то члены последовательности повторяются, и с этого момента начнётся период.

б) Допустим, что $x_{n+k} = x_n$. Раскрывая знак модуля, получим либо $x_{n+1} = 2x_n$, либо $x_{n+1} = 2 - 2x_n$. Поэтому $x_{n+k} = a + b2^k x_n$, где a и b — целые $(b = \pm 1)$. Получаем линейное уравнение с целыми коэффициентами $x_n = a + b2^k x_n$, откуда x_n — рациональное число, и x_1 — тоже.

Решение 2. Запишем число x_0 в двоичной системе счисления. Обозначим $f(x_n) = x_{n+1}$. Легко видеть, что двоичная запись числа $f(x_0)$ получается из двоичной записи числа x_0 сдвигом.

18.28. Достаточно доказать, что любой начальный кусок последовательности первых цифр степеней пятёрки встречается (перевёрнутым) в последовательности первых цифр степеней двойки. Рассмотрим числа: $1/2, 1/4, \ldots, 1/2^n$. Последовательность первых ненулевых цифр их десятичных записей есть в точности последовательность первых цифр десятичных записей чисел $5, 25, \ldots, 5^n$. Итак, если добавить отрицательные степени, то задача будет решена. Достаточно показать существование такой степени двойки $x = 2^n$, десятичная запись которой имеет вид $10\ldots0*$ (здесь $*$ обозначает оставшуюся часть десятичной записи). В этом случае $2^{n-1} = 2^n/2 = 50\ldots0*$, $2^{n-2} = 250\ldots0*$, $2^{n-3} = 1250\ldots0*$.

Заметим, что существует бесконечно много степеней двойки, у которой первые k цифр совпадают, причём k можно выбрать сколь угодно большим. Разделив одну такую степень на другую (меньшую), получим либо степень двойки, начинающую с 1 и нулей (задача решена), либо степень двойки, начинающуюся с девяток. В этом случае удвоим k и повторим операцию. Если опять получится степень, начинающаяся с девяток, то разделим её на полученную в предыдущем делении. Полученная степень двойки начинается с 1 и большого числа нулей.

18.29. Докажем утверждение индукцией по n. При $n = 1$ имеем $a_1^2 \leqslant a_1 - a_2 < a_1$, откуда $a_1 < 1$. Кроме того, $a_2 \leqslant a_1 - a_1^2 = 1/4 - (a_1 - 1/2)^2 < 1/4 < 1/2$, т. е. $a_n < 1/n$ при $n = 2$. Пусть утверждение уже доказано для некоторого числа $n \geqslant 2$. Докажем его для числа $n+1$. Так как функция $f(x) = x - x^2$ возрастает на отрезке $[0; 1/2]$ и $a_n < 1/n$, то $a_{n+1} \leqslant f(a) < f(1/n) = 1/n - 1/n^2 = 1/(n+1) - 1/(n^2(n+1)) < 1/(n+1)$.

18.30. Если h — среднее гармоническое a и b, то $1/h$ — среднее арифметическое чисел $1/a$ и $1/b$. Отсюда переформулировка задачи: доказать, что не существует такой бесконечной последовательности чисел вида $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$), в которой не все члены равны и каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего, или: из чисел, обратных натуральным, нельзя составить бесконечную арифметическую прогрессию (не все числа равны друг другу). Последнее утверждение следует из того, что числа, обратные натуральным, заключены в $[0, 1]$ и не могут быть членами бесконечной арифметической прогрессии.

18.31. $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, поэтому

$$1\cdot1! + 2\cdot2! + \ldots + n\cdot n! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \ldots + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1.$$

18.32. Так как

$$a_n^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} = \frac{1\cdot3}{2^2} \cdot \frac{3\cdot5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)} < \frac{1}{2n+1}$$

при любом натуральном n, то $0 < a_n < 1/(2n+1)$ и $\lim a_n = 0$.

18.33. Замечая, что при каждом $n = 1, 2, \ldots, 99$ верны равенства $a_n = 1/\sqrt{n} - 1/\sqrt{n+1}$ для искомой суммы получаем $a_1 + \ldots + a_{99} = 9/10$.

18.34. Пусть задано натуральное число n, тогда из условия следует, что каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ не превосходит $2n$. Множество чисел $1, \ldots, 2n$ разобьём на n пар: $(1; n+1)$, $(2; n+2), \ldots$, $(n; 2n)$. Поскольку среди чисел $1, 2, \ldots, 2n$ содержится не менее $(n+1)$ членов последовательности, то найдутся два разных числа a_p и a_q, принадлежащие одной паре. Для завершения доказательства остается заметить, что разность между числами в каждой из пар равна n.

18.35. Равенство $a_k = a_{k-1} + a_{k-1}^2/n$ эквивалентно равенству $1/a_{k-1} - 1/a_k = 1/(n + a_{k-1})$.

Поскольку $1/2 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, то справедливы неравенства $1/a_{k-1} - 1/a_k < 1/n$ при $k = 1, \ldots, n$, складывая которые, получаем оценку $1/a_0 - 1/a_n < 1$.

Следовательно, $1/a_n > 2 - 1 = 1$, а значит, $a_n < 1$. Поэтому справедливы неравенства $1/a_{k-1} - 1/a_k > 1/(n+1)$ при $k = 1, \ldots, n$, складывая которые, получаем оценку $1/a_0 - 1/a_n > n/(n+1)$. Значит, $1/a_n < 2 - n/(n+1) = (n+2)/(n+1)$, а значит, $a_n > (n+2)/(n+1) > (n-1)/n$.

18.36. Обозначим $a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n}$, $m = a_{990}$. Тогда $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$. Так как числа $a_0 = 2$, $a_1 = 10$ целые, то a_n — целое и, кроме того, каждое из чисел $a_{n+2} + a_n = 10a_{n+1}$ делится на 10. Поэтому каждое из чисел $a_{n+4} - a_n = (a_{n+4} + a_{n+2}) - (a_{n+2} + a_n)$ также делится на 10, а значит, числа $a_2, a_6, a_{10}, \ldots, a_{990}$ дают одинаковые остатки при делении на 10. Поскольку $a_2 = 98$, десятичная запись числа m оканчивается цифрой 8. Наконец, из $m > (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} > m - (0{,}5)^{1980} > m - 0{,}1$ получим, что в десятичной записи числа $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980}$ в разряде единиц стоит цифра 7, а в разряде десятых — 9.

18.37. Рассмотрим число a_i из набора $a_1 < \ldots < a_n$. Количество трёхчленных арифметических прогрессий, в которых это число является средним членом, не превосходит как $i - 1$, так и $n - i$, поскольку на месте первого члена может стоять только одно из чисел $a_1, \ldots, a_{i-1}$, а на месте последнего — одно из чисел $a_{i+1}, \ldots, a_n$. Поэтому общее число прогрессий не превосходит суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{i-1, n-i\} = S.$$

Если $n = 2l$ $(l \in N \setminus \{1\})$, то

$$S = \sum_{i=1}^{l}(i-1) + \sum_{i=l+1}^{n}(n-i) = l(l-1).$$

Если же $n = 2l - 1$ $(l \in N)$, то $S = l^2$.

Заметим, наконец, что полученные оценки для количества прогрессий достигаются в случае последовательности $a_i = i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

18.38. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — указанная в задаче последовательность. Чётность каждого члена последовательности зависит лишь от чётностей предыдущих четырёх членов. Тогда остатки от деления членов a_n на 2 таковы:

$$1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \ldots.$$

Легко видеть, что эта последовательность периодична с периодом 5 и имеет период $1, 1, 0, 1, 1$. Если бы в исходной последовательности встречались подряд стоящие числа $1, 2, 3, 4$, то в этой — $1, 0, 1, 0$. Противоречие.

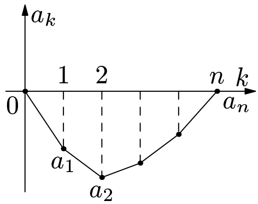
18.39. Построим возрастающую последовательность номеров i_n следующим образом. Пусть a_{i_1} — наименьшее из всех чисел a_i (оно существует, ибо все члены последовательности $\{a_n\}$ — натуральные числа); a_{i_2} — наименьшее из чисел $a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, \ldots$. Тогда бесконечная последовательность $\{a_{i_n}\}$ не убывает. Если теперь b_{i_k} — наименьшее из чисел $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots$, то $i_k < i_{k+1}$, $a_{i_k} \leqslant a_{i_k+1}$, $b_{i_k} \leqslant b_{i_k+1}$, т. е. в качестве искомых номеров p и q можно взять числа i_k и i_{k+1} соответственно.

18.40. Так как все a_i — натуральные, то существует такая возрастающая последовательность номеров $i_1, i_2, \ldots$, что $a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_n} \leqslant \ldots$ (a_{i_1} — наименьшее число последовательности a_n, a_{i_2} — наименьшее из следующих и т. д.). Аналогично, из последовательности номеров $i_1, \ldots, i_n, \ldots$ можно выбрать последовательность $j_1, \ldots, j_n, \ldots$, для которой $b_{j_1} \leqslant b_{j_2} \leqslant \ldots \leqslant b_{j_n} \leqslant \ldots$.

Ясно при этом, что последовательность $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n}, \ldots$ остаётся неубывающей. Теперь осталось из последовательности $\{j_n\}$ выбрать подпоследовательность $\{k_n\}$, для которых последовательность $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_n}, \ldots$ — неубывающая. Тогда все три последовательности $\{a_{k_n}\}$, $\{b_{k_n}\}$, $\{c_{k_n}\}$ будут неубывающими. Взяв за p и q, например, k_1 и k_2, получим утверждение задачи.

18.41. По условию $a_1 - a_0 > 1$. Далее, $a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_0)$, $a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1)$,..., $a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98})$. Перемножив эти 99 равенств, обе части которых положительны, и сократив общие множители $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \ldots, a_{99} - a_{98}$ в обеих частях, получим $a_{100} = a_{99} + 2^{99}(a_1 - a + 0) \geqslant 2^{99}$. Более точная оценка по индукции $a_k \geqslant 2^k$, $a_{k+1} - a_k \geqslant 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ показывает, что $a_{100} \geqslant 2^{100}$.

18.42. Решить эту задачу помогает рисунок: ломаная с вершинами в точках (k, a_k) «выпукла», поскольку $a_{k+1} - a_k \geqslant$ $\geqslant a_k - a_{k-1}$, (т. е. угловой коэффициент каждого следующего звена больше, чем предыдущего), так что вся она, кроме концов, лежит ниже оси $0k$.



К 18.42

Допустим, что при некотором $m \geqslant 1$ будет $a_{m-1} \leqslant 0$, $a_m > 0$. Тогда $a_n - a_{n-1} \geqslant$ $\geqslant a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant \ldots \geqslant a_m - a_{m-1} > 0$ и поэтому $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_m > 0$, что противоречит условию $a_n = 0$.

18.43. Пусть разность прогрессии равна d и один из её членов $a = m^2$, где m — натуральное число. Тогда число $(m + kd)^2 =$ $= m^2 + 2mkd + k^2d^2 = a + d(2km + k^2d)$ также является членом прогрессии при любом натуральном k. Итак, указано бесконечное количество членов прогрессии, являющихся квадратами натуральных чисел.

18.44. $2 \cdot 3^n$. После первого шага сумма всех чисел будет равна $6 = 2 \cdot 3$. Пусть S_n — сумма всех чисел после n-го шага. Нетрудно доказать, что после $(n+1)$-го шага сумма станет равна $2S_n + S_n =$ $= 3S_n$. Итак, сумма всех чисел каждый раз увеличивается втрое, так что на n-м шаге она будет равна $2 \cdot 3^n$.

18.45. 2952. Докажем, что длина (число членов) последовательности, удовлетворяющей условию задачи, у которой наибольший член — второй и равен n, не превосходит $d_n = [3(n + 1)/2]$, причём для последовательности $n - 1, n, 1, \ldots, 1, 1$ длина в точности равна d_n.

Будем рассуждать по индукции. Для $n < 4$ утверждение легко проверить перебором ($d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 6$, $d_4 = 7$). Оценим максимальную длину последовательности с началом $a, n, n - a, \ldots,$ $(a < n)$, считая, что для меньших n утверждение доказано. При $1 \leqslant a < n/2$ её длина не больше $d_{n-a} + 1$, поскольку, убрав первый член a, можно заменить её начало таким: $n - 2a, n - a, \ldots$; при $n/2 \leqslant a < n - 1$ она не больше $d_a + 2$ достаточно убрать первые 2 члена. Итак, остается лишь проверить, что для таких a выполнены неравенства соответственно $d_{n-a} + 1 \leqslant d_n$ и $d_a + 2 \leqslant d_n$. При $a =$ $= n - 1$ для последовательности $n - 1, n, 1, n - 1, n - 2, 1, n - 3, \ldots, 1, 1$

достаточно убрать первые 3 члена и переставить 2 следующих, чтобы осталось лишь проверить равенство $d_{n-3}+3=d_n$.

Из общего утверждения при $n = 1967$ получаем ответ $d_n = [3 \cdot 1968/2] = 2952$.

18.46. Докажем сразу двустороннюю оценку $14 < a_{100} < 18$. При $k > 1$ имеем $a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2 + 1/a_k^2$, причём $a_k > 1$. Поэтому $a_k^2 + 2 < a_k^2 < a_k^2 + 3$. Сложив эти неравенства для всех $1 \leqslant k \leqslant n$, получим (с учётом того, что $a_1 = 1$) $2n-1 < a_n^2 < 3n-2$, откуда $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}$. При $n = 100$ получим приведённую выше оценку.

Можно доказать, что последовательность a_n/n стремится к пределу.

18.47. Если переставить три первых числа в порядке убывания, то для всех членов последовательности будет выполняться условие $x_k \leqslant x_{k-r} - x_{k-1}$, а последовательность станет убывающей $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{21}$. Если предположить, что $x_{21} \geqslant 1$, то из $x_{k-2} \geqslant x_k + x_{k-1}$ следовало бы $x_{20} \geqslant 1$, $x_{19} \geqslant 2$, $x_{18} \geqslant 3$, $x_{17} \geqslant 5, \ldots$. Остаётся только написать 21 член «последовательности Фибоначчи»: $1, 1, 2, \ldots, 6745, 10916$, чтобы получить противоречие $x_1 > 10000$.

18.48. Рассмотрим отрезки последовательности x_m/m, $k^2 \leqslant m \leqslant (k+1)^2 - 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, k-й отрезок состоит из $2k+1$ числа от x_{k^2}/k^2 до $x_{(k+1)^2-1}/((k+1)^2-1)^2$.

Заменив каждый член x_m/m в k-м отрезке наибольшим первым членом x_{k^2}/k^2, получим, что сумма чисел этого отрезка не больше $(2k+1)x_{k^2}/k^2 \leqslant 3kx_{k^2}/k^2 = 3x_{k^2}/k$.

Теперь для любого натурального n получаем

$$\frac{x_1}{1} + \ldots + \frac{x_n}{n} \leqslant 3\left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \ldots + \frac{x_{q^2}}{q}\right),$$

где q — наименьшее число, для которого $q^2 > n$.

18.49. $x_n = 1$, $(n \in \mathbb{N})$ или $x_n = n$ при $n \in \mathbb{Z}$.

18.50. Три числа. По индукции доказывается, что $a_{n-1} < b_n < a_n$ при $n \geqslant 4$.

18.51. Для 1-го числа — нет. Последняя цифра числа α_{2k+1} равна k-й цифре после запятой в десятичном разложении числа. Для 2-го числа — нет. Пусть $y_n = 0$, если β_n чётно и $y_n = l$, если β_n — нечётно. Так как y_{2n+1} совпадает с n-м знаком после запятой двоичного разложения числа $\sqrt{2}$, то y_{2n+1} непериодична.

18.52. Если $T = 2^r \cdot q$ (q нечётно) — период данной последовательности, то при $q = 4m+3$ и $k \geqslant p+2$: $1 = a_{2^k+T} = a_{2^k} = 0$.

Противоречие. При $q = 4m + 1$: $1 = a_{2^k} = a_{2^k+3T} = 0$, что также приводит к противоречию.

18.53. По условию цифра b_1 отлична от 0 и 5, поэтому b_2 есть одно из чисел 2, 4, 6 или 8, но тогда последовательность $b_2, b_3, \ldots$ является периодической с периодом 4. Поэтому для любого $n > 1$ имеем $a_{n+4} = a_n + (2+4+8+6)$ и для любого $s > 1$ — равенство $a_{n+4s} = a_n + 20s$. Из двух членов последовательности $a_n = 10m+2$ и $a_{n+1} = 10m + 4$ хотя бы одно число делится на 4, например, $a_n = 4l$. Тогда $a_{n+4s} = 4(l + 5s)$ и среди чисел вида $l + 5s$ бесконечно много степеней двойки, так как остатки от деления на 5 степеней двойки образуют периодическую последовательность: $1, 2, 4, 3, 1, \ldots$ и, значит, бесконечно много степеней двойки дают при делении на 5 такой же остаток, как и число l.

18.54. Покажем, что 3 разных простых числа не могут входить в одну геометрическую прогрессию. Предположим противное: $p_1 < p_2 < p_3$ — простые числа, $p_1 = aq^{k-1}$, $p_2 = aq^{r-1}$, $p_3 = aq^{m-1}$. Тогда $p_2/p_1 = q^{r-k} = q^s$, $p_3/p_2 = q^{m-r} = q^n$. Отсюда $p_2^{s+n} = p_1^n p_3^s$, что невозможно, так как n и s — ненулевые целые числа. Утверждение задачи следует из того, что среди чисел от 1 до 100 содержится 25 простых чисел, а в одну прогрессию могут входить не более двух из них.

18.55. Заметим, что a_i делится на i при любом i: НОД$(a_i, a_{2i}) =$ $=$ НОД$(i, 2i) = i$. Покажем, что a_p делится только на p для простого p. Пусть $a_p = qn$, где q — простое, $q \neq p$, и $q, n \neq 1$. С одной стороны, НОД$(a_p, a_q) =$ НОД$(p, q) = 1$, с другой, так как $a_q = ql$, то НОД$(a_p, a_q) =$ НОД$(qn, ql) \geqslant q$. Итак, $a_p = p^k$. Докажем, что $k = 1$: $p^k =$ НОД$(p^k, a_{p^k}) =$ НОД$(a_p, a_{p^k}) =$ НОД$(p, p^k) = p$. Отсюда $k = 1$. Значит, $a_p = p$ для всех простых p.

Осталось доказать, что если для некоторого m $a_m = m$, то $a_{mp} = mp$ при простом p. Пусть это не так, т. е. $a_{mp} =$ $= mpx$. Если x делится на простое $q \neq p$, то НОД$(a_{mp}, mq) \leqslant$ $\leqslant$ НОД$(a_{mp}, a_{mq}) =$ НОД$(mp, mq) = m$, откуда a_{mp} не делится на mq. Значит, $a_{mp} = mp^t$. Тогда $mp^t \leqslant$ НОД$(mp^t, a_{mp^t}) =$ $=$ НОД$(a_{mp}, a_{mp^t}) =$ НОД$(mp, mp^t) = mp$, откуда $t = 1$.

18.56. Пусть сумма чисел в наборе равна M, тогда число a из набора заменяется на число $b = a - M$. Просуммируем эти равенства для всех a: $b_1 + \ldots + b_{1997} = 1997M - (a_1 + \ldots + a_{1997})$, откуда $M = 0$, так как $b_1 + \ldots + b_{1997} = a_1 + \ldots + a_{1997} = M$. Значит, для любого a число $b = -a$ также входит в набор и числа разбиваются на пары a, $-a$. Из нечётности их количества следует, что в набор входит число $a = -a$, т. е. $a = 0$.

18.57. Преобразуем данную сумму:

$$1-\frac{1}{2}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1319}-2\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1318}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1319}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{659}\right)=\frac{1}{660}+\ldots+\frac{1}{1319}.$$

Число слагаемых в сумме чётно, а сумма дробей, равноотстоящих от концов, равна

$$\frac{1}{659+k}+\frac{1}{1320-k}=\frac{1979}{(659+k)(1320-k)},$$

где $k=1,\ldots,330$. Итак, после сложения дробей имеем: $p/q = 1979A/(660\cdot 661\cdot\ldots\cdot 1319)$, где A — некоторое натуральное число. Число 1979 — простое, а каждый из множителей в знаменателе меньше, чем 1979. Поэтому после сокращения дроби на НОД числителя и знаменателя, 1979 останется множителем в числителе.

Отметим, что для более общей постановки задачи: «Пусть $p/q = 1-1/2+1/3-\ldots+1/(4k-1)$ — несократимая дробь и число $(6k-1)$ — простое, тогда p делится на $(6k-1)$», метод решения остается тем же (первоначальное утверждение получается при $k=330$).

18.58. Покажем, что условию задачи удовлетворяет последовательность $4\{n\sqrt{2}\}$, где $\{x\}=x-[x]$ — дробная часть числа x $(n=1,2,\ldots)$. Действительно, если p и q — натуральные числа, $p<(4-\sqrt{2})q$, то

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|=\frac{\left|2q^2-p^2\right|}{q(q\sqrt{2}+p)}>\frac{1}{4q^2},$$

поэтому при $m>k\geqslant 1$

$$\left|\{m\sqrt{2}\}-\{k\sqrt{2}\}\right|=\left|(m-k)\sqrt{2}-l\right|>\frac{1}{4(m-k)},$$

где $l=[m\sqrt{2}]-[k\sqrt{2}]<m\sqrt{2}-k\sqrt{2}-1\leqslant(m-k)(\sqrt{2}+1)<(4-\sqrt{2})(m-k)$.

Здесь использован тот факт, что иррациональное число $\sqrt{2}$ плохо приближается дробями с небольшими знаменателями. Другое решение — например, конструкция последовательности с помощью десятичных дробей длиннее.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Агаханов Н.Х., Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В. и др. *Математические олимпиады школьников, 9. Книга для учащихся.* — М., Просвещение,1997.

[2] Бабинская И.Л. *Задачи математических олимпиад.* — М., Наука, 1975.

[3] Берлов С.Л., Иванов С.В., Кохась К.П. *Петербургские математические олимпиады.* — СПб, Лань, 1998.

[4] Бугаенко В.О. *Турниры им. Ломоносова (конкурсы по математике).* — М., МЦНМО, 1998.

[5] Васильев Н.Б. *Избранные задачи математических олимпиад.* — М., МЦНМО, 1999.

[6] Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббо Ж.М., Тоом А.Л. *Заочные математические олимпиады.* — М., Наука, 1986.

[7] Васильев Н.Б., Егоров А.А. *Задачи Всесоюзных математических олимпиад.* — М., Наука, 1988.

[8] Васильев Н.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Савин А.П. *Математические соревнования. Геометрия.* — М., Наука, 1974.

[9] *Венгерские математические олимпиады.* (Кюршак Й. и др.) — М., Мир 1976.

[10] Виленкин Н.Я. *Комбинаторика.* — М., Наука, 1969.

[11] Галкин Е.В. *Нестандартные задачи по математике. Задачи логического характера.* — М., Просвещение, 1996.

[12] Гальперин Г.А., Толпыго А.К. *Московские математические олимпиады.* — М., Просвещение, 1986.

[13] Гарднер М. *Математические головоломки и развлечения.* — М., Оникс, 1994.

[14] Гарднер М. *Математические досуги.* — М., Оникс, 1995.

[15] Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. *Ленинградские математические кружки.* — Киров, АСА, 1994.

[16] *Двенадцать турниров. Математические турниры городов с 1 по 12-й.* Под ред. Н.Н. Константинова. — М., ИЦТГ, 1991.

[17] Дориченко С.А., Ященко И.В. *LVII Московская математическая олимпиада. Сборник подготовительных задач.* — М., ТЕИС, 1994.

[18] Дынкин Е.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л. *Математические соревнования. Арифметика и алгебра.* — М., Наука, 1970.

[19] Дынкин Е.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Толпыго А.К. *Математические задачи.* — М., Наука, 1971.

[20] *Задачник „Кванта“. Математика. Ч. 1-3.* Под ред. Васильева Н.Б. — М., Бюро «Квантум», 1997.

[21] *Зарубежные математические олимпиады.* Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др. — М., Наука, 1987.

[22] Игнатьев Е.И. *Математическая смекалка. Занимательные задачи, игры, фокусы, парадоксы.* — М., Омега, 1994.

[23] Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. *Как решают нестандартные задачи. 60-я Московская математическая олимпиада. Подготовительный сборник.* — М., МЦНМО, 1998.

[24] Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Васильев Н.Б. *Подготовительные задачи к LVII Московской математической олимпиаде 1994 года, 8–11 класс.* — М., 1994.

[25] Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. *Сборник задач по алгебре и теории чисел.* — М., Просвещение, 1993.

[26] Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В., Резниченко С.В., Слинько А.М. *Математические олимпиады школьников, 10. Книга для учащихся.* — М., Просвещение, 1998.

[27] Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В., Резниченко С.В., Слинько А.М. *Математические олимпиады школьников, 11. Книга для учащихся.* — М., Просвещение, 1999.

[28] Купцов Л.П., Резниченко С.В., Терёшин Д.А. *Российские математические олимпиады школьников. Книга для учащихся. (под ред. Г.Н. Яковлева)* — Ростов-на-Дону, Феникс, 1996.

[29] *Математический кружок* (сост. Егоров А.А.). Вып 4. — М., Бюро «Квантум», 1999.

[30] Медников Л.Э., Мерзляков А.С. *Математические олимпиады.* — Ижевск, Свиток, 1997.

[31] *Международные математические олимпиады* (сост. А.А. Фомин, Г.М. Кузнецова). — М., Дрофа, 1998.

[32] Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А. *Международные математические олимпиады.* — М., Просвещение, 1976.

[33] *Московские математические олимпиады 60 лет спустя* (под ред. Ю.С. Ильяшенко, В.М. Тихомирова). — М., ИНП РАН, 1997.

[34] Прасолов В.В. *Задачи по планиметрии* (в двух частях). — М., Наука, 1986.

[35] Произволов В.В. *Задачи на вырост.* — М., МИРОС, 1995.

[36] *Пятая Соросовская олимпиада школьников 1998–1999.* — М., МЦНМО, 1999.

[37] Сергеев И.Н., Олехник С.Н., Гашков С.Б. *Примени математику.* — М., Наука, 1990.

[38] Спивак А.В. *Математический праздник.* — М., МЦНМО, 1995.

[39] Страшевич С., Бровкин Е. *Польские математические олимпиады.* — М., Мир, 1978.

[40] *Третья Соросовская олимпиада школьников 1996–1997.* — М., МЦНМО, 1997.

[41] *Физико-математические олимпиады.* (Брук Ю.К., Савин А.П.) — М., Знание, 1977.

[42] Хорнсберг Р. *Математические изюминки.* — М., Наука, 1992.

[43] Цыпкин А.Г., Пинский А.И. *Справочник по методам решения задач по математике.* — М., Наука, 1989.

[44] *Четвёртая Соросовская олимпиада школьников 1997–1998.* — М., МЦНМО, 1998.

[45] Шарыгин И.Ф., Шеврин А.В. *Математика. Задачи на смекалку.* — М., Просвещение, 1996.

[46] Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.* — М., Наука, 1976.

[47] *Школа в „Кванте“. Арифметика и алгебра* (под ред. Егорова А.А.). — М., Бюро «Квантум», 1994.

[48] *Школьные математические олимпиады* (Сост. Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин, Г.М. Кузнецова). — М., Дрофа, 1999.

[49] Ященко И.В. *Приглашение на математический праздник.* — М., МЦНМО, 1998.

Николай Васильевич Горбачёв

Сборник олимпиадных задач по математике

...