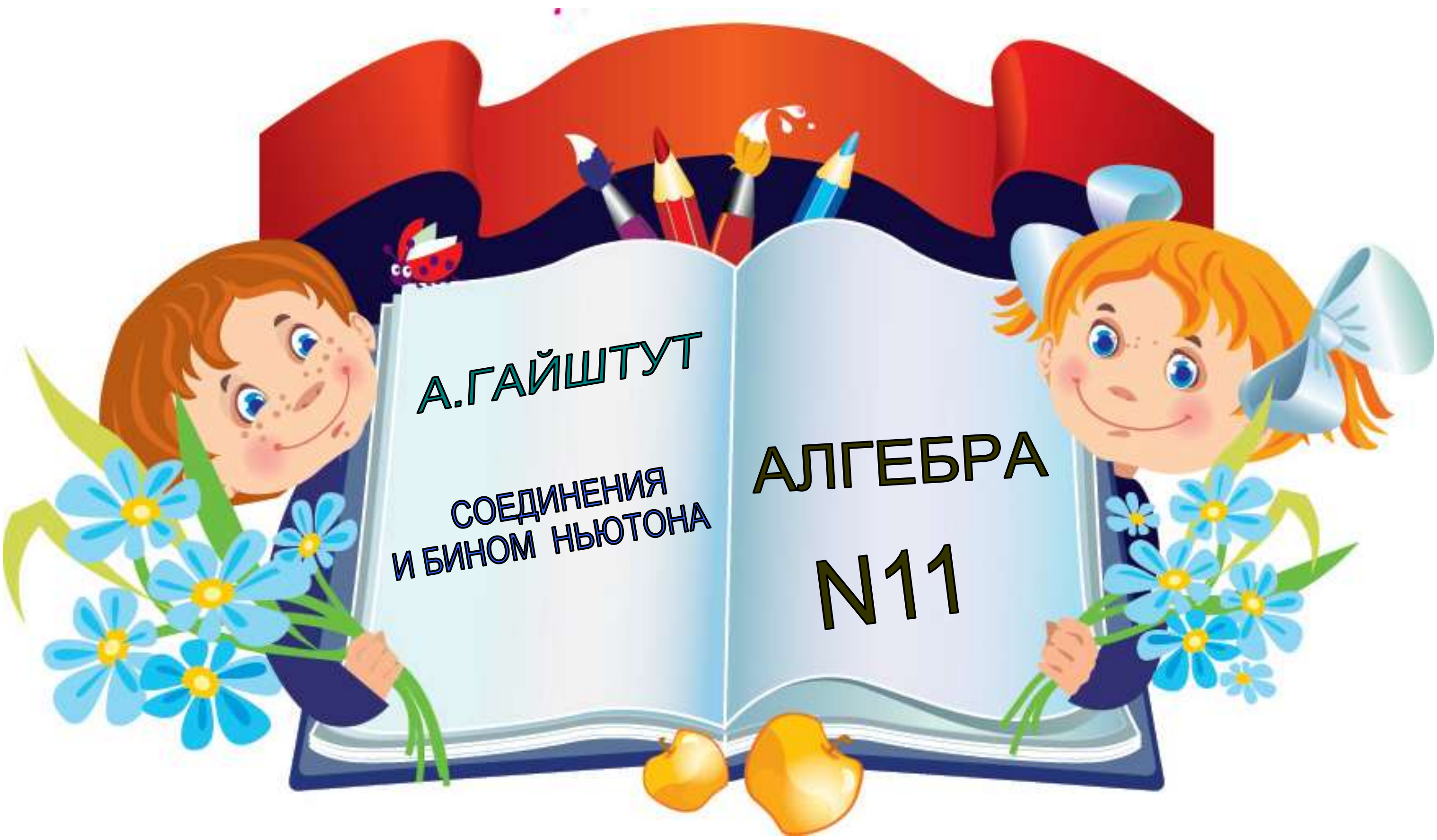

МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

Тема 11. Соединения и бином Ньютона

Содержание

Соединения и бином Ньютона

Соединения и их виды

Пусть A — совокупность различных предметов, имеющих общий признак. Например, A — совокупность четных чисел от 1 до 10, или учащихся данной школы, или заданных точек на плоскости и т.п. Вместо слов «совокупность» будем говорить «множество».

Итак, A — множество, состоящее из конечного количества элементов: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Из разных элементов множества A можно составить группы, которые называются ***соединениями***.

Различают три вида соединений: ***размещения, перестановки, сочетания***.

Соединения, каждое из которых содержит m различных элементов, взятых из данных n элементов множества A ($m \le n$), и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения, называются ***размещениями*** из n элементов по m в каждом.

Количество таких размещений обозначается символом A_n^m (читается: A размещений, взятых из данных n элементов по m элементов в каждом).

Например, различные трехзначные числа, записанные тремя из девяти цифр 1, 2, 3, ..., 9 и не содержащие одинаковых цифр, образуют размещение. Их количество изображается так: A_9^3.

Количество всех возможных размещений из n элементов по m в каждом определяется формулой

$$A_n^m = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-(m-1)).$$

В отдельных случаях формула для A_n^m записывается в виде $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ и называется ***факториалом***.

Пример 1.1013. Вычислить A_9^3.

Решение. $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Пример 1.1014. На каждой из десяти карточек записана одна из цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9. Берут четыре карточки и составляют из цифр, записанных на них, четырехзначное число. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить таким образом?

Решение. Всего различных комбинаций из четырех карточек можно составить столько, сколько существует размещений из 10 элементов по 4. Условиям задачи не удовлетворяют комбинации цифр, начинающиеся нулем. Таких комбинаций будет A_9^3. Исключив их из общего числа размещений A_{10}^4, получаем искомое:

$$A_{10}^4 - A_9^3 = \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!} = \frac{9!\,(10-1)}{6!} = \frac{9! \cdot 9}{6!} = 4536.$$

Пример 1.1015. Сколько различных правильных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 так, чтобы в каждую дробь входили два числа?

Решение. Очевидно, всего различных дробей из данных чисел можно составить столько, сколько существует размещений из 8 элементов по 2 (A_8^2). Однако нас интересуют лишь правильные дроби, которых будет в два раза меньше, то есть

$$\frac{1}{2} A_8^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28.$$

Перестановками (P_n) называются соединения из n элементов, отличающиеся между собой только порядком расположения элементов. Их количество вычисляется по формуле:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n = n!.$$

Пример 1.1016. Сколькими способами можно расселить 5 человек в пяти номерах гостиницы?

Решение. $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Ответ: 120.

Пример 1.1017. Сколько различных пятизначных чисел можно составить при помощи цифр 0, 1, 2, 3, 4?

Решение. Из данных пяти цифр можно составить столько чисел, сколько существует перестановок из пяти элементов. Среди этих чисел есть начинающиеся с нуля; они не пятизначные. Чисел, начинающихся с нуля, столько, сколько существует перестановок из четырех элементов. Поэтому искомое количество пятизначных чисел равно $P_5 - P_4 = 120 - 24 = 96$.

Ответ: 96.

Пример 1.1018. Найти x из уравнения $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n\, P_{x-n}} = 132$, где $n \geq 10$ — натуральное число.

Решение. Пользуясь формулами для вычисления перестановок и размещений имеем:

$$\frac{(x+2)!\,(x-n)!}{(x-n)!\,x!} = 132, \text{ или } \frac{(x+2)!}{x!} = 132,$$

где $x + 2 \geq 0$, $x - n \geq 0$ и $x \geq 0$. Сокращая дробь на $x!$, получим квадратное уравнение $x^2 + 3x - 130 = 0$, которое равносильно данному, если x — натуральное. Решая это уравнение, находим, что $x = 10$ (корень $x = -13$ не учитывается).

Ответ: 10.

Соединения, каждое из которых состоит из m различных элементов, взятых из n элементов множества A ($m \leq n$) и отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом, называются ***сочетаниями*** из n элементов по m. Количество таких сочетаний обозначается символом C_n^m. Изменение порядка элементов в одном сочетании не приводит к новому сочетанию. Количество различных сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}, \text{ или } C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Сочетания имеют такие свойства:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

2. Для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство $(n+1)\,C_n^m = (m+1)\,C_{n+1}^{m+1}$.

3. Для всех $m = 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

Пример 1.1019. Сколько различных хоккейных команд можно составить из 9 нападающих, 5 защитников и 3 вратарей, если в состав команды должны войти 3 нападающих, 2 защитника и 1 вратарь?

Решение. Из 9 нападающих можно выбрать трех C_9^3 различными способами. Из 5 защитников можно выбрать двух C_5^2 различными способами. Из трех вратарей можно выбрать одного вратаря тремя способами. Комбинируя каждую тройку нападающих с парами защитников, получаем $C_9^3 \cdot C_5^2$ различных команд без вратарей. Комбинируя эти команды с каждым из вратарей, имеем

$$C_9^3 \cdot C_5^2 \cdot 3 = \frac{9!\ 5! \cdot 3}{6!\ 3!\ 3!\ 2!} = 2880 \text{ различных команд.}$$

Ответ: 2880.

Пример 1.1020. Сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник?

Решение. Каждая пара вершин данного многоугольника определяет либо одну из его сторон, либо одну из его диагоналей. Поэтому количество всех сторон и диагоналей равно C_n^2. Однако многоугольник имеет n сторон, поэтому количество его диагоналей равно

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Ответ: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Пример 1.1021. Решить уравнение

$$12\, C_{x+3}^{x-1} = 55\, A_{x+1}^2.$$

Решение. Поскольку $C_{x+3}^{x-1} = C_{x+3}^{x+3-(x-1)}$, то данное уравнение запишем в виде $12\, C_{x+3}^4 = 55\, A_{x+1}^2$, или

$$12\,\frac{(x+3)(x+2)(x+1)x}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=55\,(x+1)\,x,$$

откуда, помня, что x — только натуральное число, найдем: $x = 8$.

Ответ: 8.

Пример 1.1022. Решить неравенство $C_{10}^{x-1} > 2\,C_{10}^{x}$.

Решение. Левая часть неравенства имеет смысл тогда и только тогда, когда x — целое число, принадлежащее промежутку $[1;\ 11]$. Правая часть имеет смысл тогда и только тогда, когда x — целое число и принадлежит промежутку $[0;\ 10]$. Итак, решениями неравенства могут быть только целые значения x, содержащиеся на промежутке $[1;\ 10]$.

Используя формулу для сочетаний, запишем данное неравенство так:

$$\frac{10!}{(x-1)!\,(10-x+1)!} > 2\,\frac{10!}{x!\,(10-x)!}.$$

Разделив обе части неравенства на $\dfrac{10!}{(x-1)!\,(10-x)!}$, получим $\dfrac{1}{11-x} > \dfrac{2}{x}$, откуда $x > 22 - 2x$, то есть $x > \dfrac{22}{3}$. Учитывая, что x — натуральное число, принадлежащее промежутку $[1;\ 10]$, получим, что решениями данного неравенства являются числа 8; 9; 10.

Ответ: 8; 9; 10.

Пример 1.1023. Найти x и y из условия

$$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 5 : 5 : 3.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^{y}, \\ 3\,C_{x+1}^{y} = 5\,C_{x+1}^{y-1}, \end{cases}$$

где $x \ge y$ — натуральные числа.

Из первого уравнения системы следует, что $y + 1 + y = x + 1$, то есть $x = 2y$. Тогда из второго уравнения получаем

$$3\,C_{2y+1}^{y} = 5\,C_{2y+1}^{y-1}, \quad \text{или} \quad \frac{3\,(2y+1)!}{y!\,(y+1)!} = \frac{5\,(2y+1)!}{(y-1)!\,(y+2)!}.$$

Сокращая на общий множитель $\frac{(2y+1)!}{(y+1)!\,(y-1)!}$, имеем $3(y+2) = 5y$, откуда $y = 3$ и $x = 6$.

Ответ: (6; 3).

Упражнения

Вычислить:

1.1024. *а)* A_8^5; *б)* $\frac{A_6^3}{A_5^2}$; *в)* $\frac{A_{10}^6 + A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$; *г)* $\frac{A_8^3 + A_7^4}{A_6^3}$.

1.1025. *а)* P_4; *б)* $\frac{P_8}{P_6}$; *в)* $\frac{P_5 + P_4}{P_3}$; *г)* $\frac{P_6 - P_4}{P_3}$.

1.1026. *а)* C_6^2; *б)* C_{20}^{17}; *в)* C_{100}^{98}; *г)* C_{54}^{52}.

1.1027. *а)* $\frac{A_7^4 - P_5}{A_5^2}$; *б)* $\frac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$.

1.1028. *а)* $\frac{A_n^5 + A_n^4}{A_n^3}$; *в)* $\frac{A_{n+m}^{n-m+2} + A_{n+m}^{n-m+1}}{A_{n+m}^{n-m}}$;

б) $\frac{A_n^{m+2} + A_n^{m+1}}{A_n^m}$; *г)* $\frac{A_n^m \cdot P_{n-m}}{P_{n-1}}$.

1.1029. *а)* $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; *б)* $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

Решить уравнение:

1.1030. *а)* $A_x^3 = 56x$; *в)* $5\,C_x^3 = C_{x+2}^4$;

б) $A_{x+1}^2 = 30$; *г)* $C_x^3 = \frac{5x\,(x-3)}{4}$.

1.1031. *а)* $C_x^3 + C_x^2 = 15\,(x-1)$; *в)* $\frac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$;

б) $C_x^4 = \frac{15A_x^2}{4}$; *г)* $C_{x+1}^5 = \frac{3A_x^3}{8}$.

1.1032. *а)* $\frac{A_{x+1}^{n+1} P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$; *б)* $\frac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$.

1.1033. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \frac{5}{3}; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x, \\ C_{x-1}^y = 10. \end{cases}$

1.1034. Во время встречи 16 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано?

1.1035. 30 учеников захотели обменяться фотокарточками. Сколько всего карточек нужно для этого?

1.1036. Ученики школы изучают 10 разных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день, чтобы при этом было 5 различных предметов?

1.1037. Бригадир должен отправить на работу бригаду из 5 человек. Сколькими способами из 12 человек можно организовать бригаду, содержащую 5 человек?

1.1038. Сколькими способами можно выбрать из 15 человек делегацию в составе 3-х человек?

1.1039. Сколько прямых можно провести через 8 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой?

1.1040. Определить число всех диагоналей правильного 15-угольника.

1.1041. Сколько различных плоскостей можно провести через 10 точек, если никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие четыре точки не лежат в одной плоскости?

1.1042. Сколько различных пятизначных чисел можно записать при помощи цифр 0, 1, 3, 5, 7 (каждая цифра встречается только один раз)?

1.1043. Найти сумму цифр во всех пятизначных числах, записанных при помощи 1, 4, 6, 7, 8.

1.1044. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если есть 80 солдат и 3 офицера?

Соединения с повторениями

Наряду с соединениями, в которые каждый из n различных элементов некоторого множества входит один раз, можно рассматривать соединения с повторениями, допускающие появление одного и того же элемента более одного раза.

Пусть дано n групп элементов. Каждая группа содержит несколько одинаковых элементов. Такое деление на группы бывает, например, в ящике для наборного шрифта, где в одну группу входят одни и те же элементы, в разные группы — разные элементы.

1. *Перестановки с повторениями*

Перестановки из n элементов, в каждую из которых входит α элементов a, β элементов b, γ элементов c и т. д. λ элементов l, где $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = n$, называются **перестановками** из n элементов с повторениями.

Число всевозможных перестановок с повторениями обозначается символом $\bar{P}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\lambda}$, и оно может быть найдено по формуле

$$\bar{P}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\lambda} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!} = \frac{n}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}.$$

Примеры.

1. Имеется 5 кружков: 3 белых и 2 черных. Сколько различных узоров можно составить из этих кружков, располагая их в ряд?

Решение. $\bar{P}_{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10.$

2. Сколько анаграмм можно составить из слова «математика»?

Решение. $\bar{P}_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10}{2!3!2!1!1!1!} = 151\,200.$

2. *Размещения с повторениями*

Размещения из n элементов, в каждое из которых входит m элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом размещении любое число раз, но не более m, называются размещениями из n элементов по m с повторениями.

Число всевозможных размещений с повторениями из n элементов по m элементов в каждом обозначается символом $\bar{A}_n^m$ и вычисляется по формуле $\bar{A}_n^m = n^m$.

Пример. В стену здания вмонтированы 8 гнезд для флажков. В каждое гнездо вставляется либо голубой, либо красный флажок. Сколько различных случаев распределения флажков на здании?

Решение. $\bar{A}_2^8 = 2^8 = 256$.

3. *Сочетания с повторениями*

Сочетания из n элементов, в каждое из которых входит m элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом сочетании любое число раз, но не более m, называются сочетаниями из n элементов по m с повторениями и обозначаются $\bar{C}_n^m$.

Число $\bar{C}_n^m$ всевозможных сочетаний с повторениями вычисляют по формуле

$$\bar{C}_n^m = C_{m+n-1}^m = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots m}.$$

Пример. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить 12 открыток?

Решение. Порядок покупки открыток несуществен. Поэтому всякий набор купленных открыток представляет собой сочетание с повторениями из 10 по 12. Таким образом, число способов произвести покупку 12 открыток равно $\bar{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12}$.

§ 1. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

При решении комбинаторных задач необходимо вначале определить вид соединения. При этом можно руководствоваться правилами для установления вида соединений, вытекающими из признаков, определяющих понятие того или иного из этих видов. Таких правил несколько. Приведем одно из них.

Обращают внимание на **порядок** расположения элементов

↓

если порядок не имеет значения, то это — **сочетания**

↓

если порядок имеет значение, то это — размещения или перестановки

↓

размещения, если не все элементы входят в соединение

↓

перестановки, если все элементы входят в соединение

Пример. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами могут быть сделаны эти выборы, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

Решение. Так как производятся выборы на различные должности, то порядок элементов имеет значение. Следовательно, имеем либо перестановки, либо размещения. В соединения из 25 элементов входят 4 элемента, т. е. не все элементы, значит, каждый набор представляет собой размещение из 25 элементов по 4. Таким образом, выборы могут быть сделаны

$$A_{25}^{4} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\ 600 \text{ способами.}$$

Во многих комбинаторных задачах полезно использовать следующие два правила:

Правило суммы. Если объект A может быть выбран m способами, а объект B — n способами, то выбор «либо A, либо B» может быть осуществлен $m + n$ способами.

Правило произведения. Если объект A может быть выбран m способами и после каждого из таких выборов объект B, в свою очередь, может быть выбран n способами, то выбор «A и B» в указанном порядке может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

Пример. Из трех инженеров и девяти экономистов должна быть составлена комиссия в составе 7 человек. Сколькими способами может быть составлена комиссия, если в нее должен входить хотя бы один инженер?

Решение. В комиссии может быть: а) 1 инженер и 6 экономистов, б) 2 инженера и 5 экономистов, в) 3 инженера и 4 экономиста.

а) Выбор одного инженера из трех возможен $C_3^1 = 3$ способами, а шести экономистов из девяти — C_9^6. По правилу произведения число способов выбора одного инженера и шести экономистов равно $C_3^1 \cdot C_9^6$.

б) Выбор двух инженеров из трех возможен C_3^2 способами, а выбор пяти экономистов из девяти — C_9^5. По правилу произведения, число способов выбора двух инженеров и пяти экономистов равно $C_3^2 \cdot C_9^5$.

в) Выбор трех инженеров из трех возможен C_3^3 способами, а выбор четырех экономистов из девяти — C_9^4. По правилу произведения число способов выбора трех инженеров и четырех экономистов равно $C_3^3 \cdot C_9^4$.

Таким образом, общее число способов выбора комиссии, в состав которой входил бы хотя бы один инженер, по правилу суммы равно:

$$C_3^1 \cdot C_9^6 + C_3^2 \cdot C_9^5 + C_3^3 \cdot C_9^4.$$

Решить задачи.

1. Какие два математических термина, состоящих из одинаковых букв, но разно расположенных, зашифрованы в слове «фаримгол»? Сколько слов из этих букв пришлось бы составить, чтобы найти зашифрованные термины?

2. Сколькими способами можно выбрать из 15 человек партию людей для работы? В партию может входить любое число людей: 1, 2, 3, … , 14, 15.

3. Сколько размещений из m элементов по n будет начинаться с первого элемента?

4. Сколько размещений из m элементов по n будет начинаться любым элементом за исключением первого?

5. Сколько можно составить четырехзначных чисел из 5 разных цифр: 0, 1, 2, 3, 4?

6. Сколько четных четырехзначных чисел можно изобразить цифрами 2, 3, 5 и 7?

7. Сколько четных пятизначных чисел можно изобразить цифрами 2, 3, 4, 5, 9?

8. Сколько пятизначных чисел, кратных 5, можно изобразить цифрами 0, 1, 2, 3, 5?

9. Составлены размещения из 10 элементов по 7 элементов. Сколько из этих размещений будут содержать: а) первый элемент, б) второй и четвертый элементы?

10. Составлены размещения из 10 элементов по 7 элементов. Сколько из этих размещений не будут содержать: а) первого элемента, б) третьего и пятого элементов?

11. Составлены размещения из m элементов по n. Сколько из этих размещений будут содержать k данных элементов, если $k \leqslant n$?

12. Составлены размещения из m элементов по n. Сколько из этих размещений не будут содержать k элементов, если $k \leqslant n$?

13. Сколько всех делителей у числа 210?

14. Сколько всех делителей у числа 30 030?

15. Определить число всех диагоналей 5-, 8-, 12- и 15-угольника.

16. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами можно это сделать?

17. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого — 9 книг. Сколькими способами они могут обменять друг с другом по две книги?

18. Из состава конференции, на которой присутствуют 52 человека, надо избрать делегацию, состоящую из 5 человек. Сколькими способами можно это сделать?

19. В местком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

20. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

21. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4 *см*, 5 *см*, 6 *см*, 7 *см*?

22. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь число голосов, поданных за каждое предложение?

23. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, два экземпляра другой и один экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек и никому не дают двух книг сразу? Та же задача, если никому не дают двух экземпляров одной и той же книги, но могут быть вручены две или три различные книги.

24. В библиотеке имеются учебники по физике трех различных авторов, учебники по химии двух различных авторов и учебники по математике пяти различных авторов. Каково наибольшее число студентов, которые взяли не меньше чем по одной книге каждого из трех видов при условии, что ни один студент не взял все книги, одинаковые с другим студентом?

25. Лифт, в котором находятся 9 пассажиров, может останавливаться на 10 этажах. Пассажиры выходят группами по два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

26. 12 ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно посадить в два ряда, чтобы рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

27. Сколькими способами можно переставить буквы слова «логарифм» так, чтобы 2, 4 и 6-е места были заняты согласными буквами?

28. Из лаборатории, в которой работают 20 человек, 5 сотрудников должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если начальник лаборатории, его заместитель и главный инженер одновременно уезжать не должны?

29. Из 10 спортсменов, из которых 2 гребца, 3 пловца, а остальные бегуны, нужно выделить команду из 6 человек для предстоящих соревнований. Сколько может быть случаев создания команды, в которую бы вошли не менее одного спортсмена от каждого вида спорта?

30. На полке находится $m+n$ различных книг, из которых m — в черных переплетах, а n — в красных. Книги переставляются всевозможными способами. Сколько существует различных положений книг, при которых книги в черных переплетах занимают m первых мест? Сколько таких положений, при которых книги в черных переплетах стоят рядом?

31. Из 15 рабочих, в число которых входят 5 плотников и 4 штукатура, требуется создать бригаду в 8 человек. Сколькими способами можно укомплектовать бригаду так, чтобы в нее вошли не менее трех плотников и не менее двух штукатуров?

32. Во скольких точках пересекаются 10 прямых линий, если между ними нет параллельных прямых и через каждую точку пересечения проходит не более двух прямых?

33. Во скольких точках пересекаются 8 прямых линий, если две из них параллельны между собой и через каждую точку пересечения проходит не более двух прямых?

34. Во скольких точках пересекаются 15 прямых линий, если четыре из них параллельны между собой и через каждую точку пересечения проходит не более двух прямых?

35. Вычислить сумму пяти средних элементов девятой строки треугольника Паскаля (биномиальные коэффициенты для $n = 1, 2, \ldots$ записаны в виде последовательности строк).

36. Вычислить сумму четырех средних членов десятой строки треугольника Паскаля.

37. Вычислить сумму четырех крайних членов одиннадцатой строки треугольника Паскаля.

38. Сколькими способами можно разместить 10 пассажиров в трех вагонах?

§ 2. КОМБИНАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА И УРАВНЕНИЯ

Комбинаторные тождества могут быть доказаны:

а) путем тождественных преобразований с использованием основных формул;

б) методом математической индукции;

в) с помощью теоретико-множественных соображений.

Примеры.

Доказать тождества.

1. $\dfrac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} P_{2x-n}} = 2x(2x+1).$

Решение. Преобразуем правую часть равенства, используя формулы числа размещений и перестановок.

$$\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1}\, P_{2x-n}} = \frac{(2x+1)!}{\dfrac{(2x-1)!}{(2x-n)!}\,(2x-n)!} = \frac{(2x+1)!}{(2x-1)!} = 2x(2x+1).$$

2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = C_{n+1}^2 + 2(C_n^2 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_2^2).$ (1)

Решение. Вычислив сумму $C_{n+2}^2 + C_{n+1}^2$, находим

$$C_{n+2}^2 + C_{n+1}^2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = (n+1)^2.$$

Итак, $(n+1)^2 = C_{n+2}^2 + C_{n+1}^2.$ (2)

а) Допустим, что равенство (1) верно при $n = k$, т. е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = C_{k+1}^2 + 2\,(C_k^2 + C_{k-1}^2 + \ldots + C_2^2).$$

Докажем, что при этом равенство (1) верно и при $n = k + 1$. Для этого сложим его с тождеством (2). Тогда получим:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = C_{k+2}^2 + 2(C_{k+1}^2 + C_k^2 + C_{k-1}^2 + \ldots + C_2^2).$$

Таким образом, равенство (1) остается верным при переходе от $n = k$ к $n = k + 1$. Но оно верно при $n = 2$, что проверяется непосредственным вычислением. В силу принципа математической индукции равенство (1) справедливо при любом натуральном $n \geqslant 2$.

3. $C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-2}^{n-1} + C_{m-3}^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1}.$

Решение. Число сочетаний из m элементов по n разделим на группы так, чтобы в первую группу вошли сочетания, начинающиеся первыми элементами, во вторую — вторыми, в третью — третьими и т. д. до тех пор, пока не будут исчерпаны все сочетания. Элементы в сочетаниях записаны в порядке возрастания их индексов. Определим, на сколько групп по указанным признакам разбились сочетания из m элементов по n. Каждая группа не может содержать начальных элементов предыдущих групп. Поэтому число элементов, из которых составляется каждая последующая группа, уменьшается, а число элементов, входящих в сочетание, остается постоянным, равным n. Следовательно, индекс начального элемента последней группы будет таким, что разность между числом всех элементов и этим номером будет равна числу элементов, входящих в сочетание, уменьшенному на единицу, т. е. если x — порядковый номер последней группы, то $m - x = n - 1$, или $x = m - n + 1$.

Доказать тождества.

41. $\dfrac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4} = (n-4)^2$.

42. $\dfrac{A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1}}{A_{n+k}^{n}} = k^2$.

43. $A_n^k = \dfrac{P_n}{P_{n-k}}$.

44. $A_n^{n-1} = P_n$.

45. $A_n^k \cdot P_{n-k} = n!$

46. $\dfrac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{n-1}} = 1$.

47. $A_{10}^n \cdot P_{10-n} = 10 \cdot P_9$.

48. $A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}$.

49. $A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}$.

50. $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}$.

51. $C_n^m + C_{n-1}^m + \ldots + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-10}^{m+1}$.

52. Доказать, что если $C_m^k = C_m^l$ и $k \neq l$, то $l + k = m$.

53. Найти x, если $C_x^7 = C_x^5$.

54. $C_{n+1}^{n-1} = 36$. Найти P_n.

55. Найти n и r, если $A_n^r = 272$ и $C_n^r = 136$.

56. Доказать, что $C_{4n}^{2n} : C_{2n}^n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (4n-1)}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)]^2}$.

57. Найти n и m, если $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3$.

58. Найти n и r, если $C_n^{r-1} : C_n^r : C_n^{r+1} = 2 : 3 : 4$.

59. На сколько увеличится число сочетаний из 7 элементов по 2, если ввести 8-й элемент, оставив сочетания парными?

60. Показать, что непосредственное определение числа парных сочетаний приводится к суммированию разностной прогрессии.

61. На сколько увеличится число сочетаний из 7 элементов по 3, если ввести 8-й элемент, оставив сочетания тройными?

62. Пользуясь общей формулой члена парных сочетаний, вывести формулу суммы квадратов m членов натурального ряда чисел.

63. Пользуясь общей формулой числа тройных сочетаний, вывести формулу суммы кубов m членов натурального ряда чисел.

64. Показать, что непосредственное определение числа тройных сочетаний сводится к суммированию ряда парных произведений.

45. $A_n^k \cdot P_{n-k} = n!$

46. $\dfrac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{n-1}} = 1.$

47. $A_{10}^n \cdot P_{10-n} = 10 \cdot P_9.$

48. $A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}.$

49. $A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}.$

50. $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}.$

51. $C_n^m + C_{n-1}^m + \ldots + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-10}^{m+1}.$

52. Доказать, что если $C_m^k = C_m^l$ и $k \neq l$, то $l + k = m.$

53. Найти x, если $C_x^7 = C_x^5.$

54. $C_{n+1}^{n-1} = 36.$ Найти $P_n.$

55. Найти n и r, если $A_n^r = 272$ и $C_n^r = 136.$

56. Доказать, что $C_{4n}^{2n} : C_{2n}^n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (4n-1)}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)]^2}.$

57. Найти n и m, если $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3.$

58. Найти n и r, если $C_n^{r-1} : C_n^r : C_n^{r+1} = 2 : 3 : 4.$

59. На сколько увеличится число сочетаний из 7 элементов по 2, если ввести 8-й элемент, оставив сочетания парными?

60. Показать, что непосредственное определение числа парных сочетаний приводится к суммированию разностной прогрессии.

61. На сколько увеличится число сочетаний из 7 элементов по 3, если ввести 8-й элемент, оставив сочетания тройными?

62. Пользуясь общей формулой члена парных сочетаний, вывести формулу суммы квадратов m членов натурального ряда чисел.

63. Пользуясь общей формулой числа тройных сочетаний, вывести формулу суммы кубов m членов натурального ряда чисел.

64. Показать, что непосредственное определение числа тройных сочетаний сводится к суммированию ряда парных произведений.

Решить уравнения.

65. $\dfrac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89.$

66. $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4} P_3} = 720.$

67. $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5 P_{x-5}} = 720.$

68. $A_n^x = xA_n^{x-2}.$

69. $\dfrac{P_{x+6}}{A_{x+4}^{n+4} P_{x-n}} = 240.$

Бином Ньютона

Формула

$$(x + a)^n = C_n^0\, x^n + C_n^1\, x^{n-1}\, a + C_n^2\, x^{n-2}\, a^2 + \ldots + C_n^n\, a^n,$$

где n — натуральное число, называется ***формулой бинома Ньютона****, а ее правая часть называется* ***разложением бинома****.*

Коэффициенты $1, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^b, \ldots, 1$ называются биномиальными. Записывая разность $x - a$ в виде $x + (-a)$, имеем

$$(x - a)^n = x^n - C_n^1\, x^{n-1}\, a + c_n^2\, x^{n-2}\, a^2 - \ldots + (-1)^k\, C_n^k\, x^{n-k}\, a^k + \ldots + (-1)^n\, a^n.$$

Отметим такие свойства разложения бинома.

1. Количество всех членов разложения на единицу больше показателя бинома.
2. Сумма показателей степеней x и a каждого члена разложения равна показателю степени бинома.
3. Общий член разложения T_{k+1} имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k\, x^{n-k}\, a^k.$$

Положив в формуле $k = 0, 1, 2, \ldots$, получаем первый, второй, третий, ..., $(n + 1)$-й члены разложения.

4. Биномиальные коэффициенты членов, равноудаленных от концов разложения, равны между собой, поскольку

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

5. Биномиальный коэффициент $(k + 1)$-го члена разложения связан с предыдущим биномиальным коэффициентом соотношением

$$C_n^k = \frac{n + 1 - k}{k}\, C_n^{k-1},$$

из которого следует такое правило:

Каждый биномиальный коэффициент разложения, начиная со второго, равен предыдущему биномиальному коэффициенту, умноженному на показатель степени буквы x предыдущего члена и разделенному на количество предшествующих ему членов.

6. Если показатель бинома — число нечетное ($n = 2p + 1$), то биномиальные коэффициенты

$$C_{2p+1}^0,\ C_{2p+1}^1,\ \dots,\ C_{2p+1}^p$$

возрастают ($p < p + 1$), а

$$C_{2p+1}^{p+1},\ C_{2p+1}^{p+2},\ \dots,\ C_{2p+1}^{2p+1}$$

убывают. Коэффициенты $C_{2p+1}^p = C_{2p+1}^{p+1}$ — наибольшие.

Если показатель бинома — число четное ($n = 2p$), то биномиальные коэффициенты $C_{2p}^0, C_{2p}^1, \dots, C_{2p}^p$ — возрастают $\left(p < \dfrac{2p+1}{2}\right)$, а $C_{2p}^p, C_{2p}^{p+1}, \dots, C_{2p}^{2p}$ — убывают. Разложение имеет один наибольший коэффициент C_{2p}^p.

7. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n. Действительно, положив в формуле Ньютона $x = a = 1$, имеем

$$(1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n.$$

8. Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах, и равна 2^{n-1}, то есть

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}.$$

Пример 1.1045. Найти все рациональные члены разложения бинома $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$.

Решение. Пусть искомый член равен T_{k+1}. Тогда

$T_{k+1} = C_5^k (\sqrt[3]{3})^{5-k} \cdot (\sqrt{2})^k = C_5^k \cdot 3^{\frac{5-k}{3}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Из этих чисел требуется выбрать такое k, при котором показатели $\dfrac{5-k}{3}$ и $\dfrac{k}{2}$ будут целыми числами. Очевидно, что $k = 2$ и есть искомый член

$$T_{2+1} = C_5^2 \cdot 3 \cdot 2 = 60.$$

Ответ: 60.

Пример 1.1046. Найти средний член разложения

$$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}.$$

Решение. Разложение имеет 13 членов. Поэтому средним членом является седьмой. Имеем:

$$T_7=C_{12}^6\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6(\sqrt[3]{x})^6=C_{12}^6\frac{1}{x^3}x^2=C_{12}^6\,x^{-1}.$$

Ответ: $C_{12}^6\,x^{-1}$.

Пример 1.1047. Найти член разложения

$$\left(\sqrt[9]{\frac{1}{x^8}}-\sqrt[3]{x^2}\right)^7,\ \text{не содержащий } x.$$

Решение. Запишем общий член разложения:

$$T_{k+1}=C_7^k\,(-\sqrt[3]{x^2})^k\left(\sqrt[9]{\frac{1}{x^8}}\right)^{7-k}=(-1)^k\,C_7^k\,x^{\frac{2k}{3}}\,x^{\frac{8k-56}{9}}=$$

$$=(-1)^k\,C_7^k\,x^{\frac{14k-56}{9}}.$$

В искомом члене $\frac{14k-56}{9}=0$, откуда $k=4$. Поэтому искомым является пятый член: $T_5=(-1)^4\,C_7^4\,x^0=C_7^3$.

Ответ: C_7^3.

Пример 1.1048. Найти член разложения

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21},$$

содержащий a и b в одинаковых степенях.

Решение. Запишем общий член разложения

$$T_{k+1}=C_{21}^k\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^k\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-k}=$$

$$=C_{21}^k\,\frac{b^{\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{b}}}\cdot\frac{a^{\frac{21-k}{3}}}{b^{\frac{21-k}{b}}}=C_{21}^k\,a^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}}\,b^{\frac{k}{2}-\frac{21-k}{6}}=$$

$$= C_{21}^k\, a^{\frac{42-3k}{6}}\, b^{\frac{4k-21}{6}}.$$

По условию задачи $\frac{42-3k}{6} = \frac{4k-21}{6}$, или $7k = 63$, $k = 9$. Тогда $T_{10} = C_{21}^9\, a^{\frac{5}{2}}\, b^{\frac{5}{2}} = C_{21}^9\, a^2\, b^2\, \sqrt{ab}$.

Ответ: $C_{21}^9\, a^2\, b^2\, \sqrt{ab}$.

Пример 1.1049. Найти наименьшее значение n в разложении $(x + a)^n$, при котором отношение двух соседних коэффициентов разложения равно 5 : 8.

Решение. По условию задачи

$$C_n^k : C_n^{k+1} = 5 : 8, \text{ или } \frac{k+1}{n-k} = \frac{5}{8}.$$

Отсюда $n = \frac{13k+8}{5}$, или $n = 2k + 1 + \frac{3(k+1)}{5}$.

Поскольку k — натуральное число, то оно будет наименьшим при наименьшем натуральном k, при котором $k + 1$ делится на 5, то есть при $k = 4$. Тогда

$$n = 8 + 1 + 3 = 12.$$

Ответ: 12.

Пример 1.1050. Найти пятый член разложения

$$(\sqrt[3]{2} - \sqrt{2^{-1}})^n,$$

если последний член разложения равен $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}\right)^{\log_3 8}$.

Решение. По условию последний член разложения

$$(-\sqrt{2^{-1}})^n = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}\right)^{\log_3 8}.$$

Поскольку показательная функция положительна, то задача имеет решение при четном n. Тогда

$$2^{-\frac{n}{2}} = \left(3^{-\frac{5}{3}}\right)^{\log_3 8}, \text{ или } 2^{-\frac{n}{2}} = (3^{\log_3 8})^{-\frac{5}{3}}, \quad 2^{-\frac{n}{2}} = 2^5,$$

откуда $-\frac{n}{2} = -5$ и $n = 10$.

$$T_5 = C_{10}^4 (\sqrt{2^{-1}})^4 (\sqrt[3]{2})^6 = 210.$$

Ответ: 210.

Пример 1.1051. Определить показатель n в разложении $\left(\frac{x}{5} + \frac{2}{5}\right)^n$, если 10-й член этого разложения по убывающим степеням величины x имеет наибольший коэффициент.

Решение. По формуле общего члена находим

$$T_{k+1} = C_n^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}x\right)^{n-k} = \left(C_n^k \cdot \frac{2^k}{5^n}\right) x^{n-k}.$$

Коэффициент $(k+1)$-го члена равен $C_n^k \cdot \frac{2^k}{5^n}$.

По условию коэффициент 10-го члена разложения больше коэффициента 9-го и 11-го членов, то есть

$$\begin{cases} C_n^9 \cdot \frac{2^9}{5^n} > C_n^8 \cdot \frac{2^8}{5^n}, \\ C_n^9 \cdot \frac{2^9}{5^n} > C_n^{10} \cdot \frac{2^{10}}{5^n}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2(n-8) > 9, \\ 10 > 2(n-9), \end{cases}$$

откуда следует $12{,}5 < n < 14$, а значит, $n = 13$.

Ответ: 13.

Пример 1.1052. Найти x, если известно, что третий член разложения бинома $(x + x^{\lg x})^5$ равен 1 000 000.

Решение. Имеем

$$T_3 = C_5^2 x^{5-2} (x^{\lg x})^2 = 10x^{3+2\lg x}.$$

По условию

$$10x^{3+2\lg x} = 1\ 000\ 000.$$

Логарифмируя данное равенство по основанию 10 $(x > 0)$, получаем уравнение

$$2\lg^2 x + 3\lg x - 5 = 0,$$

откуда находим, что $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-\frac{5}{2}}$.

Ответ: $10, 10^{-\frac{5}{2}}$.

Упражнения

1.1053. Найти разложение бинома:

а) $(x+a)^7$; в) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$;

б) $(x-a)^8$; г) $(2\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x})^4$.

1.1054. Найти девятый член разложения $(a+\sqrt{b})^{12}$.

1.1055. Найти средний член разложения $(x\sqrt{x}-1)^{14}$.

1.1056. Найти член разложения $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a})^{20}$, содержащий a^7.

1.1057. Найти член разложения $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x^8})^{12}$, содержащий $x^{\frac{22}{3}}$.

1.1058. Найти член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, не содержащий a.

1.1059. Найти член разложения $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{z^8}}+\sqrt[3]{z^2}\right)^7$, не содержащий z.

1.1060. Найти член разложения $(\sqrt[3]{c^{-2}}+\sqrt[5]{c^3})^{20}$, не содержащий c.

1.1061. Найти показатель степени бинома, если шестой член разложения $(\sqrt[30]{a^{-1}}+\sqrt[5]{a})^n$ не содержит a.

1.1062. Найти показатель степени бинома, если биномиальные коэффициенты четвертого и шестого членов разложения соответственно равны 120 и 252.

1.1063. В разложении $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ коэффициент пятого члена относится к коэффициенту третьего члена, как 7 : 2. Найти тот член разложения, который содержит букву x в первой степени.

1.1064. Найти член разложения бинома $\left(z\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^n$, который после упрощения содержит z^5, если сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 128.

1.1065. Определить x при условии, что пятый член разложения бинома $(\sqrt{x}+x^{-1})^6$ равен $\frac{5}{9}$.