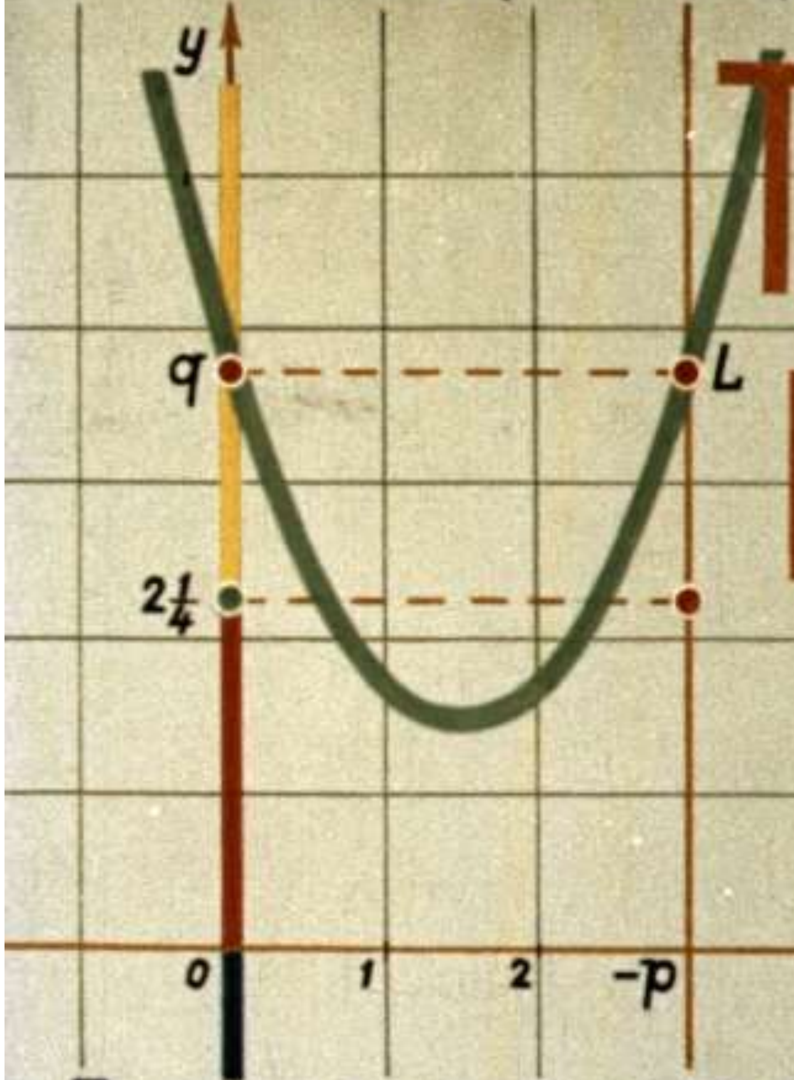
По заказу Министерства просвещения РСФСР

Теорема Виета.

Исследование квадратного уравнения



Диафильм по математике для 8—9 классов

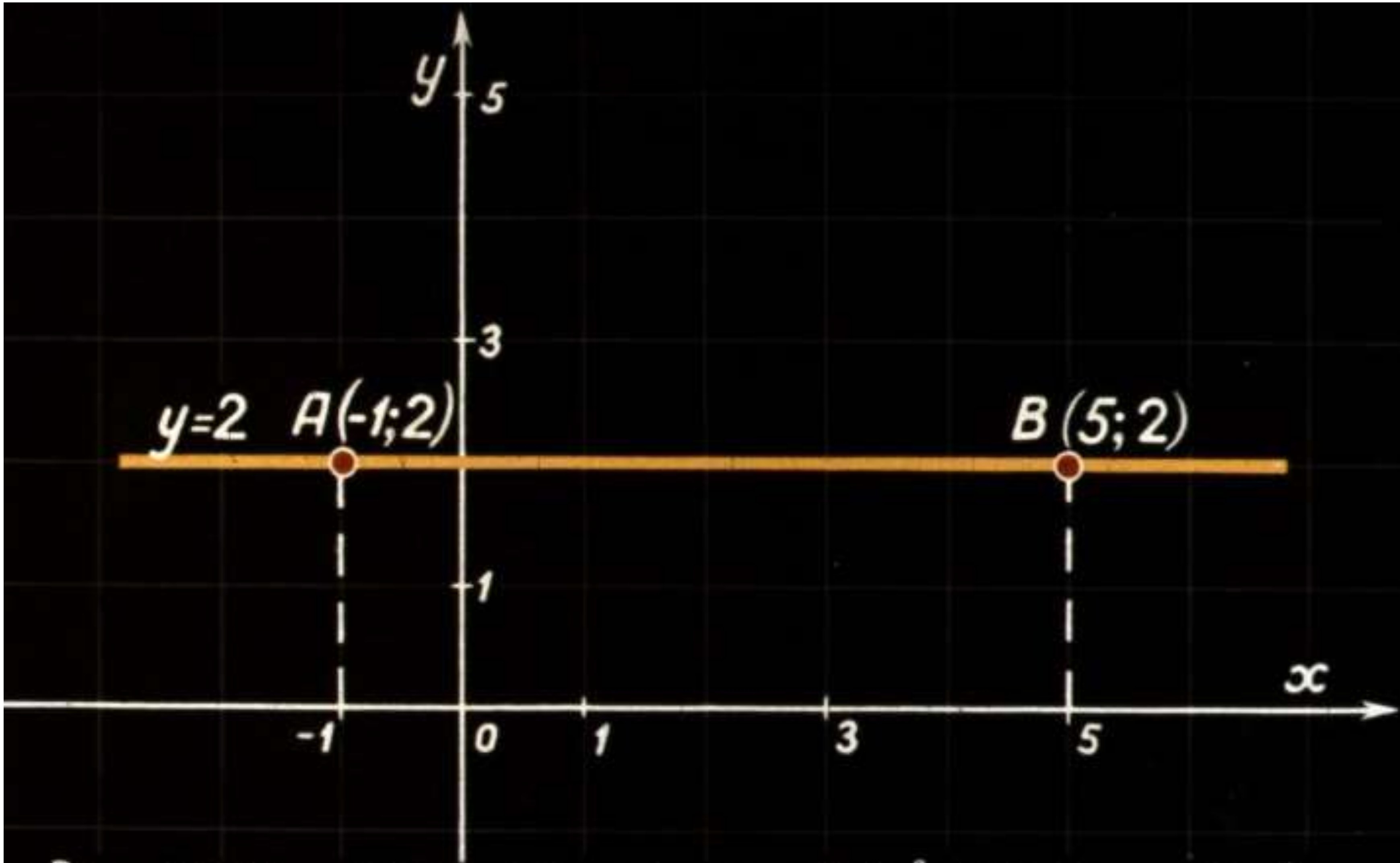
Теорема Виета

Если числа x_1 и x_2 — корни уравнения

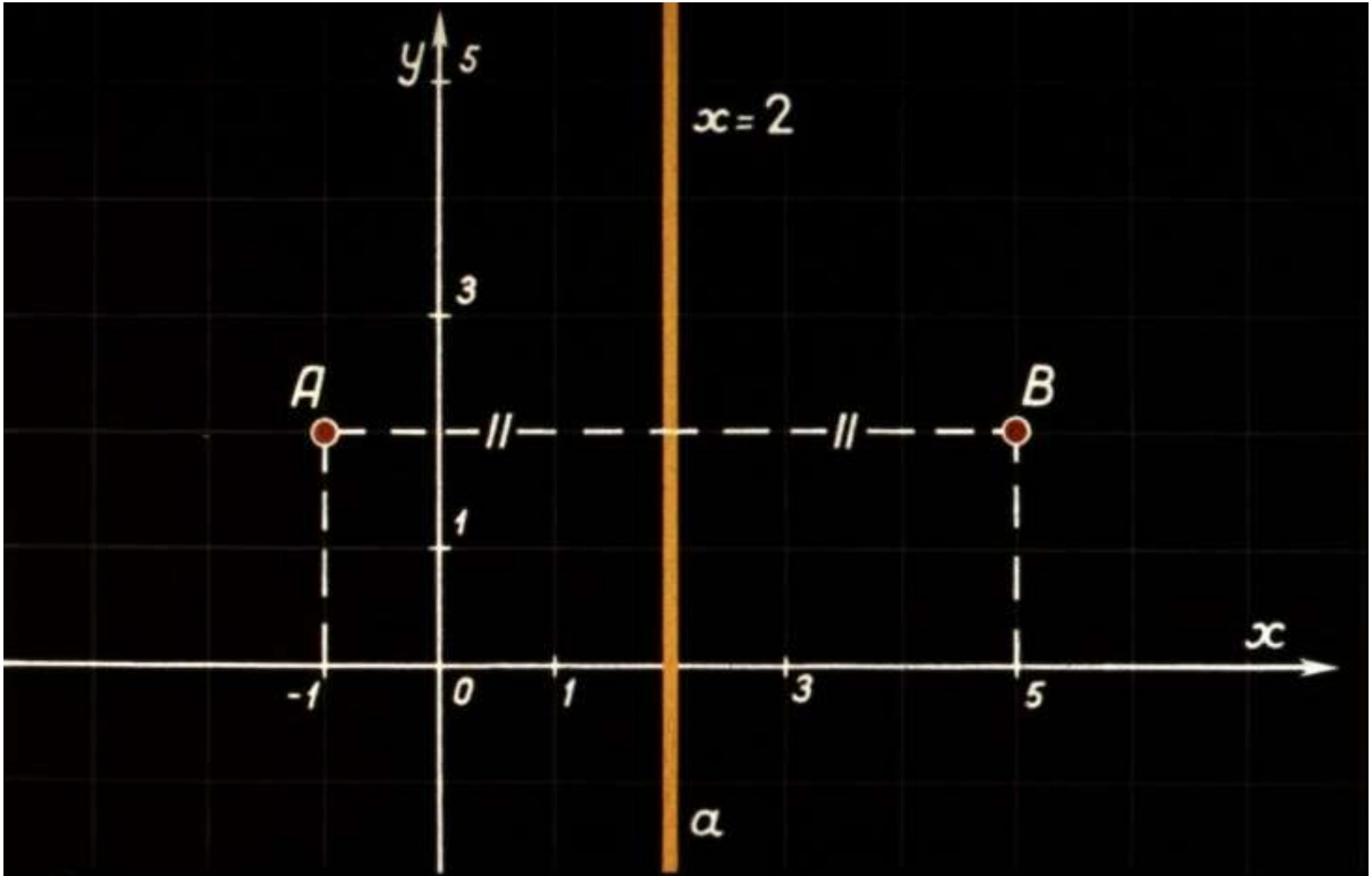
(I) $x^2+px+q=0$,

то верны равенства: $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$.

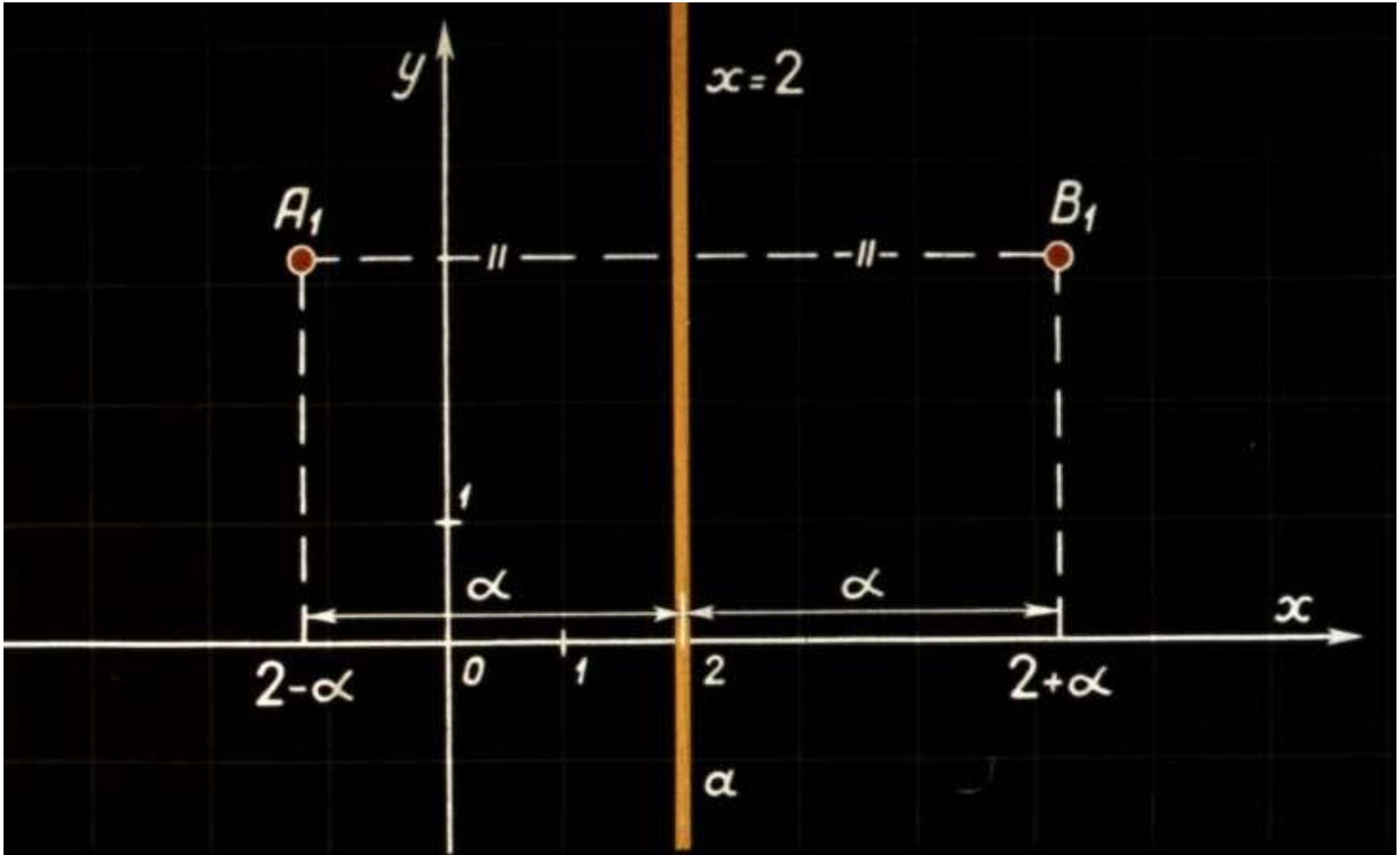
Это утверждение носит название теоремы Виета. Выясним геометрический смысл коэффициентов p и q уравнения (I).



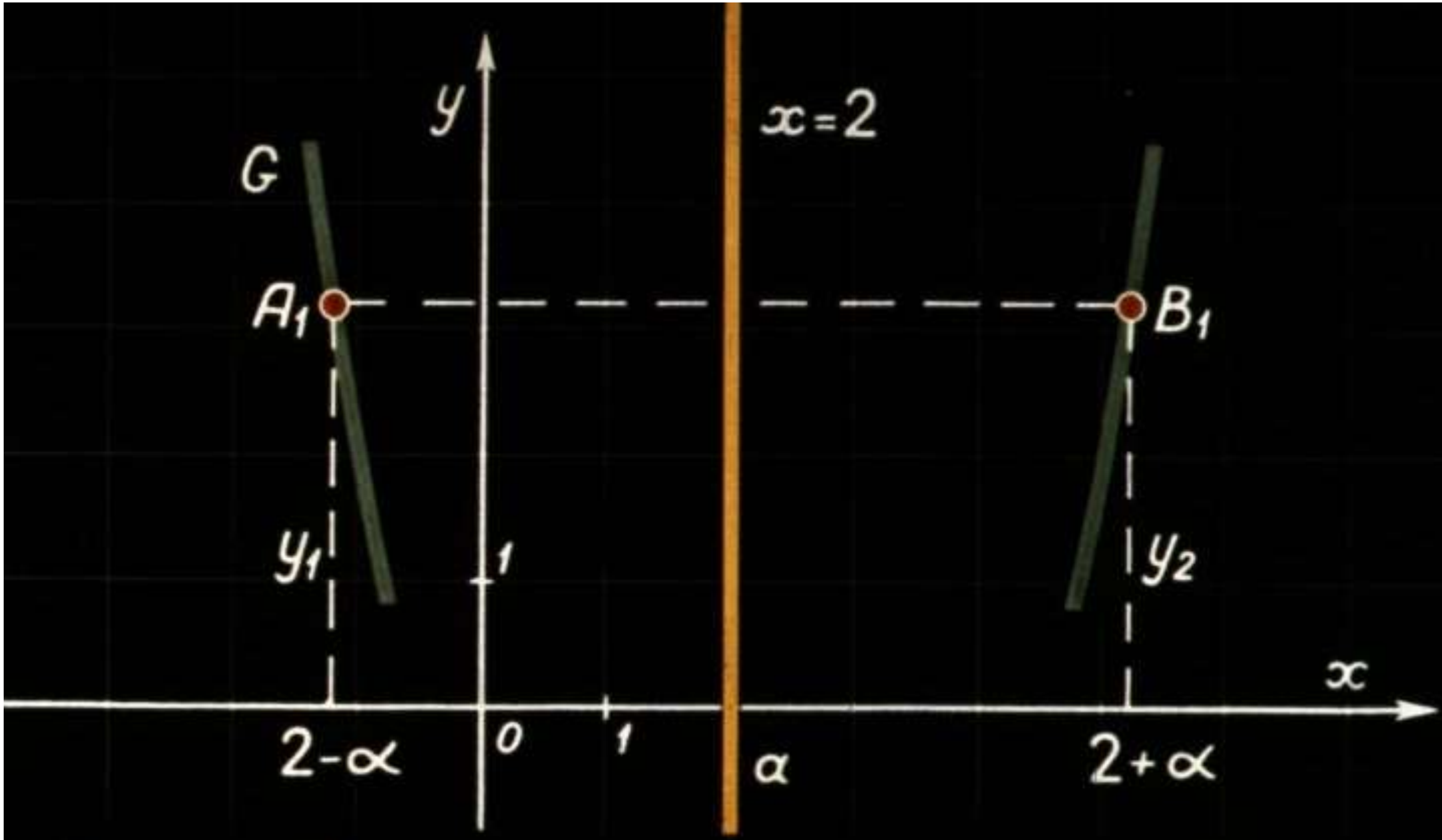
Рассмотрим квадратный трёхчлен $y=x^2+px+q$ при $p=-4$ и $q=-3$. Если $y=2$, то, сделав подстановку в уравнение $y=x^2-4x-3$, можно найти, что $x=-1$ или $x=5$. Значит, точки $A(-1;2)$ и $B(5;2)$ принадлежат графику G этого трёхчлена.



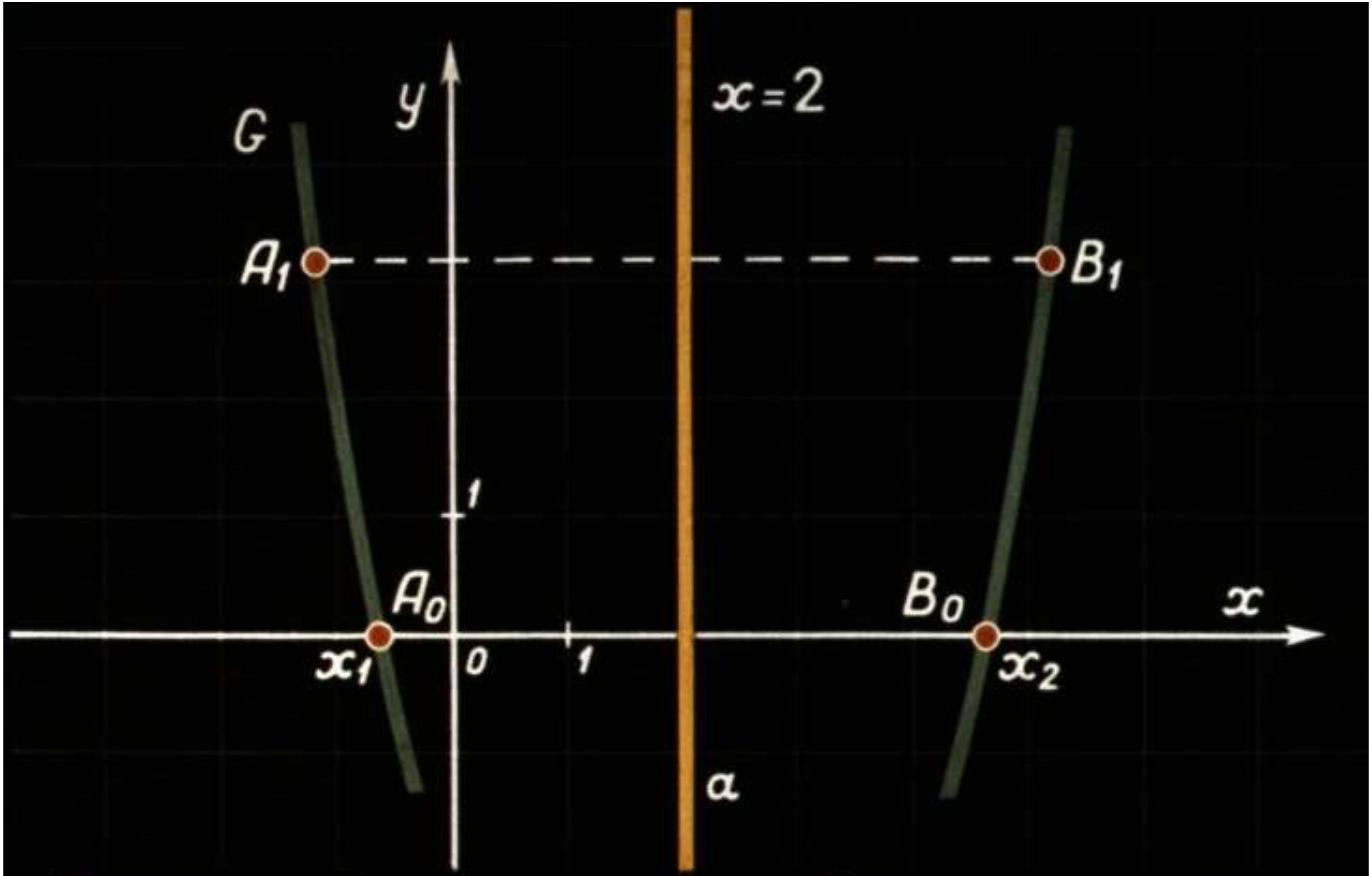
Множество точек, абсциссы которых равны 2, образуют прямую a — ось симметрии точек A и B. Уравнение прямой $a: x=2$ (число 2 равно полусумме абсцисс точек A и B).



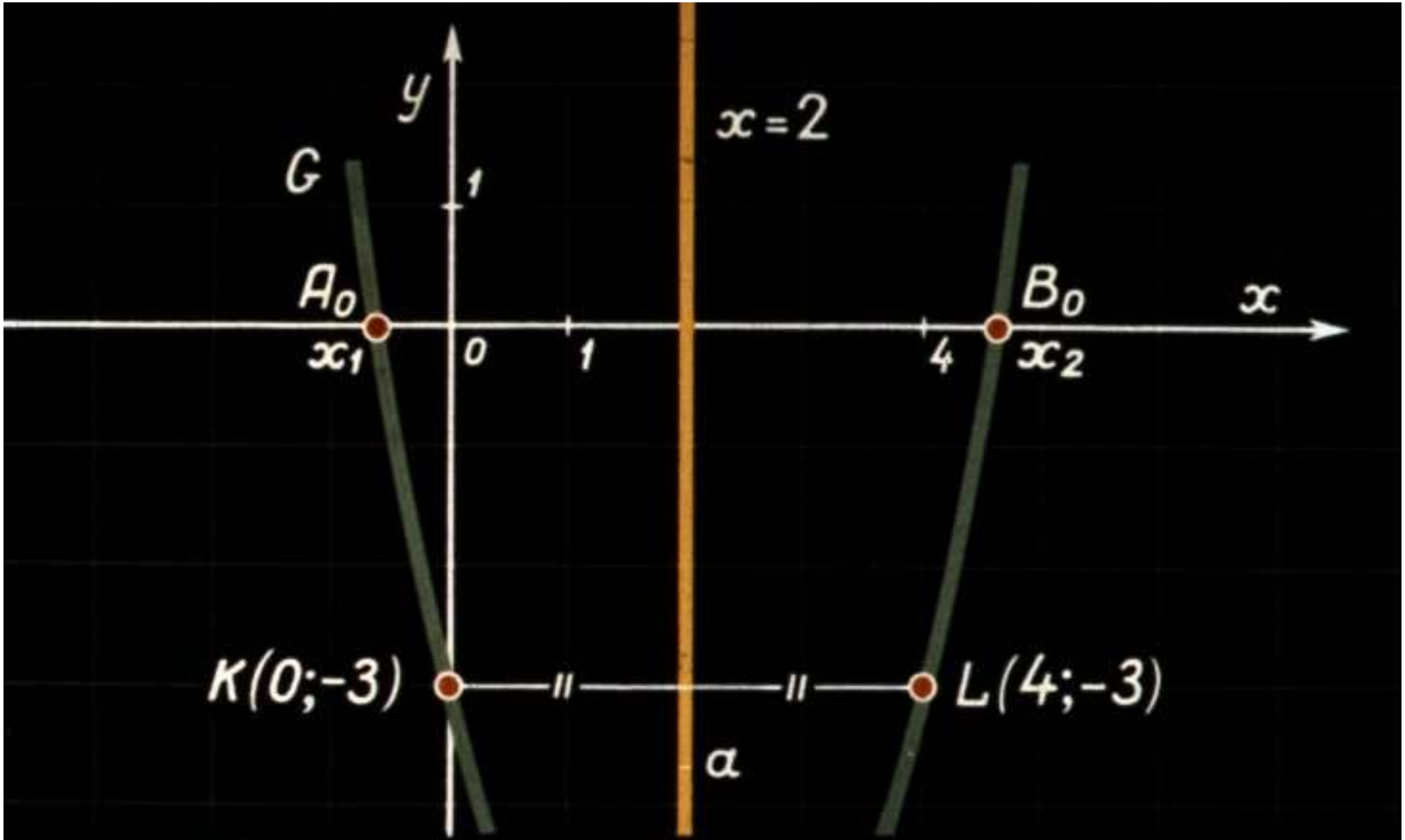
Пусть точка A_1 удалена от прямой a на α единиц ($\alpha \geq 0$); тогда её абсцисса равна $2-\alpha$. Точка B_1, симметричная A_1 относительно прямой a, имеет абсциссу $2+\alpha$.



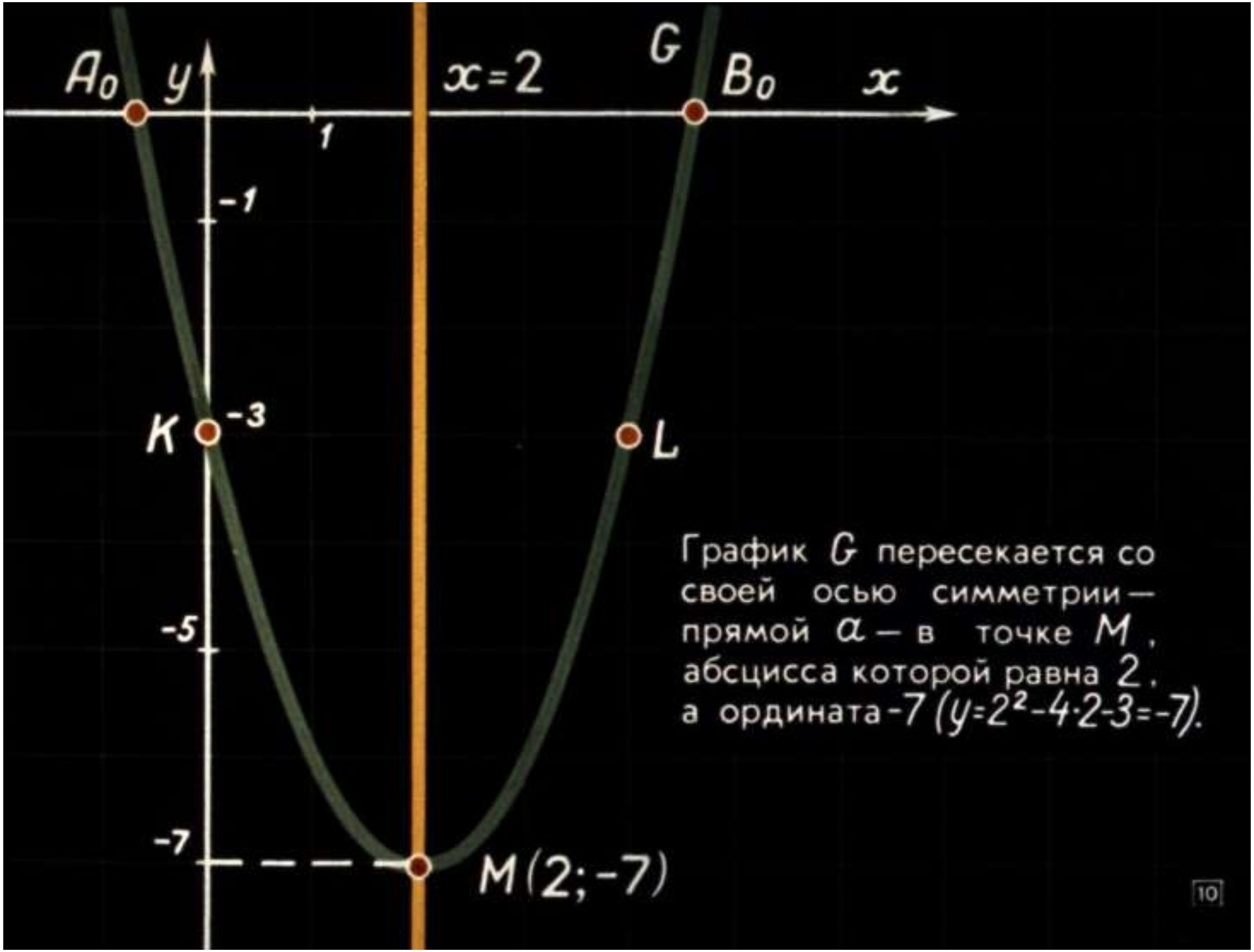
Если точка A_1 принадлежит графику G трёхчлена $y=x^2-4x-3$, то B_1 тоже принадлежит ему (и наоборот). Действительно, $y_1=(2-\alpha)^2-4(2-\alpha)-3=\alpha^2-7$; $y_2=(2+\alpha)^2-4(2+\alpha)-3=\alpha^2-7$, и поэтому $y_1=y_2$. Значит, прямая a — ось симметрии графика G.

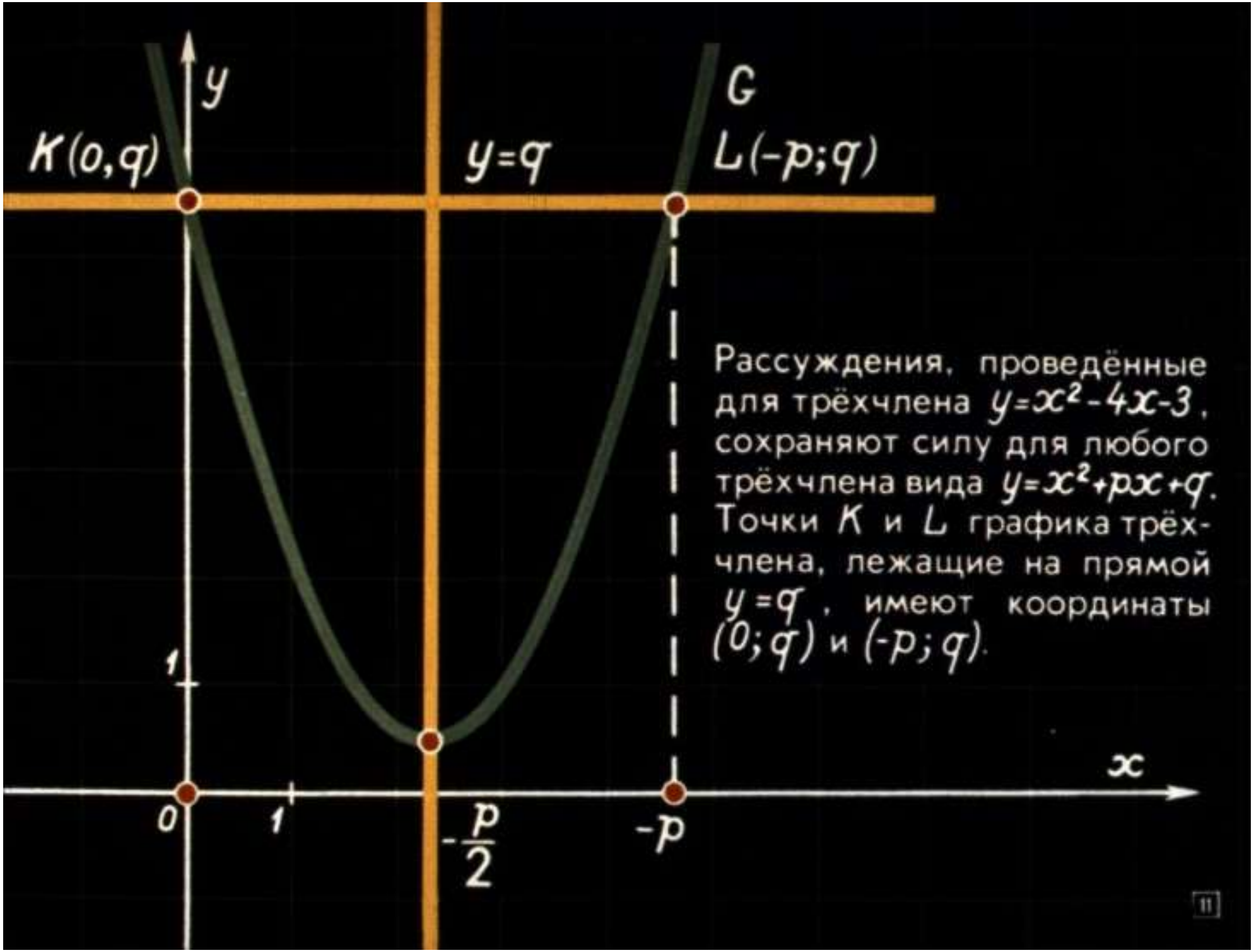


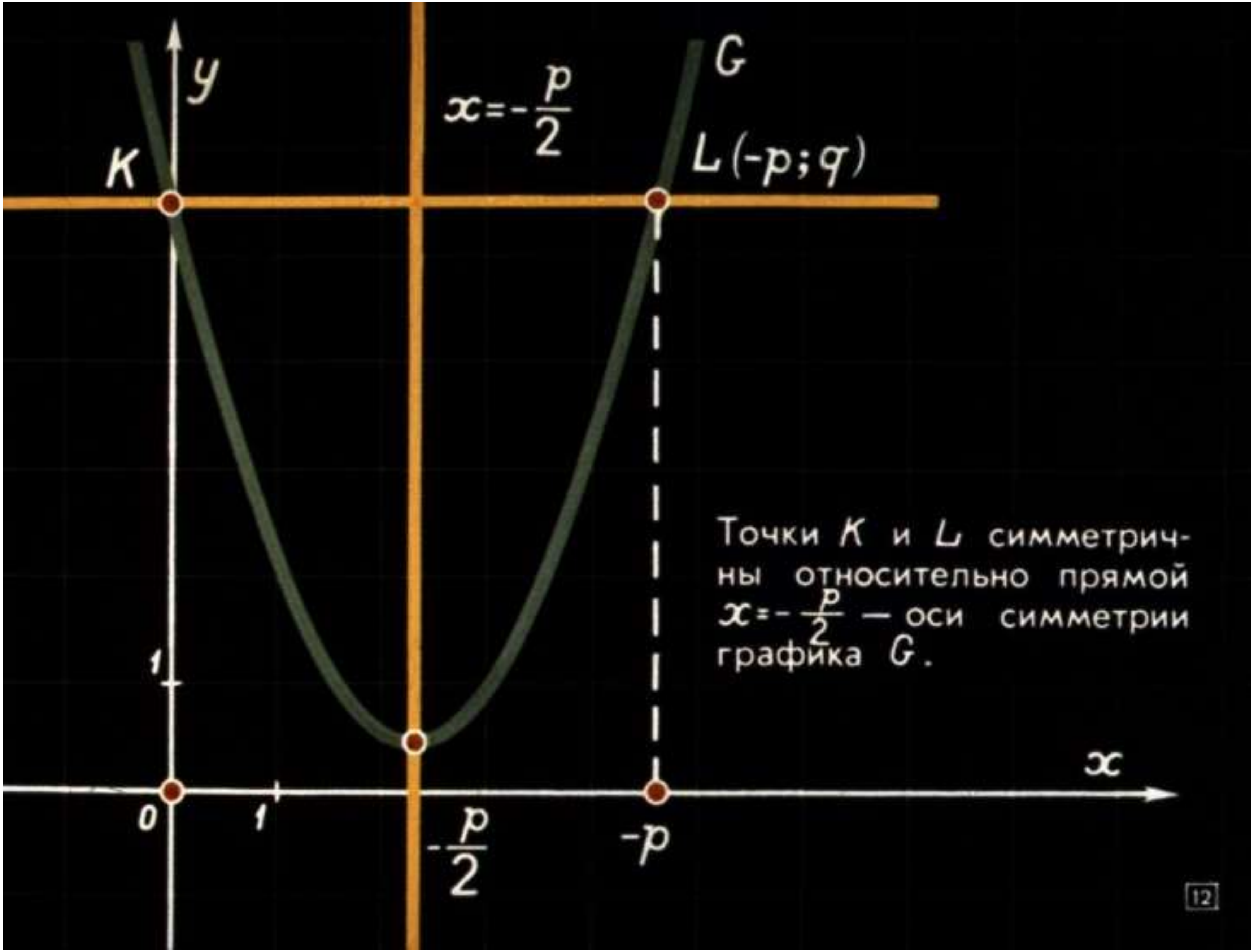
Если график G пересекается с осью Ox, то точки пересечения A_0 и B_0 симметричны относительно прямой a. Их абсциссы x_1 и x_2 являются корнями трёхчлена.

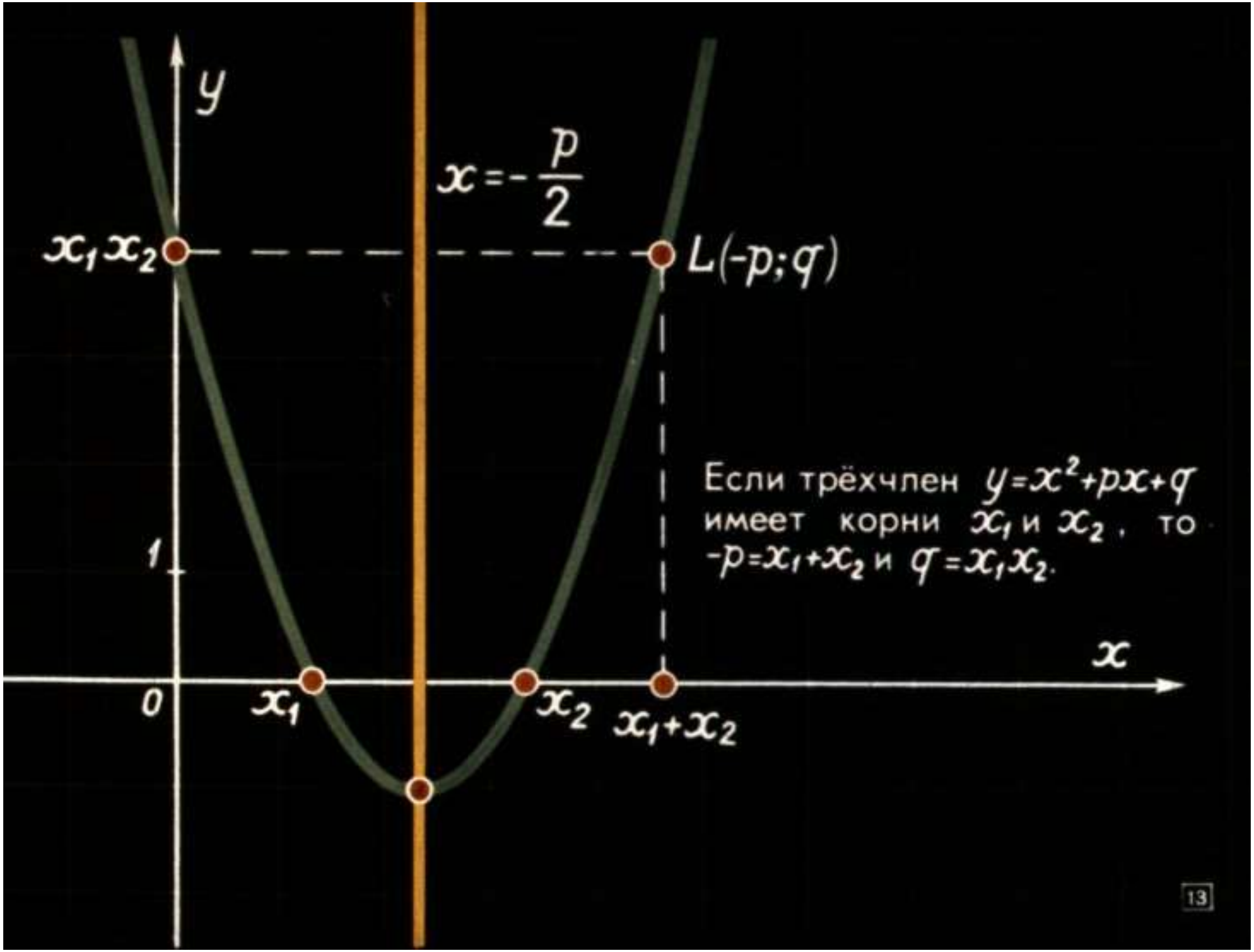


Точка $K(0;-3)$ есть точка пересечения графика G с осью Oy, так как при $x=0$ значение $y=-3$. Точка L, симметричная K относительно прямой a, имеет координаты $(4;-3)$.

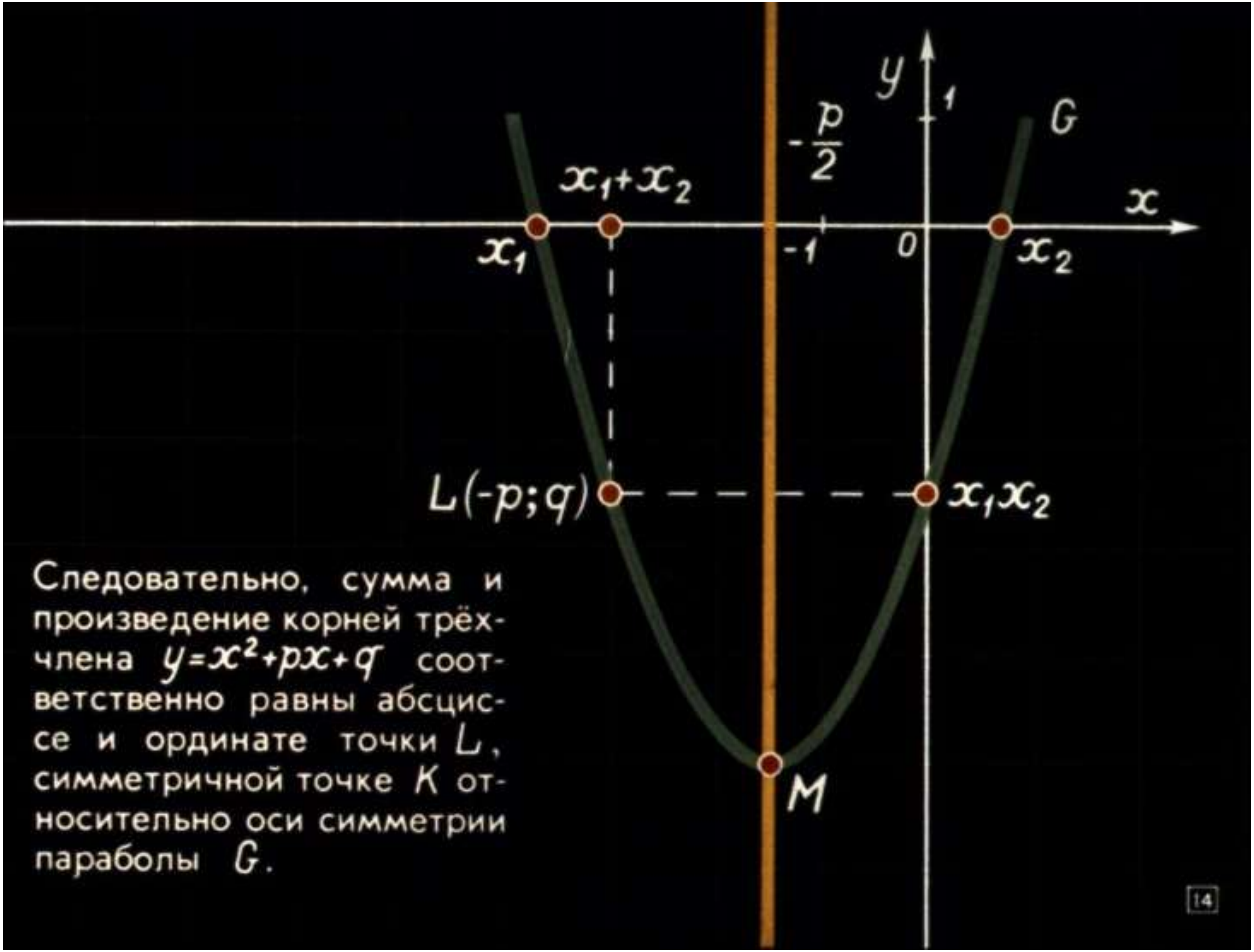

G
A_0
y
$x=2$
B_0
x
1
−1
K
−3
L
−5
−7
M(2; −7)
График G пересекается со своей осью симметрии — прямой a — в точке M, абсцисса которой равна 2, а ордината -7 $(y=2^2-4\cdot2-3=-7)$.
10


y
G
K(0,q)
y=q
L(-p;q)
Рассуждения, проведённые для трёхчлена $y=x^2-4x-3$, сохраняют силу для любого трёхчлена вида $y=x^2+px+q$. Точки K и L графика трёхчлена, лежащие на прямой $y=q$, имеют координаты $(0;q)$ и $(-p;q)$.
1
x
0
1
$-\frac{p}{2}$
-p
11


y
G
x=-p/2
K
L(-p;q)
Точки K и L симметричны относительно прямой x=-p/2 — оси симметрии графика G.
1
x
0
1
-p/2
-p
12



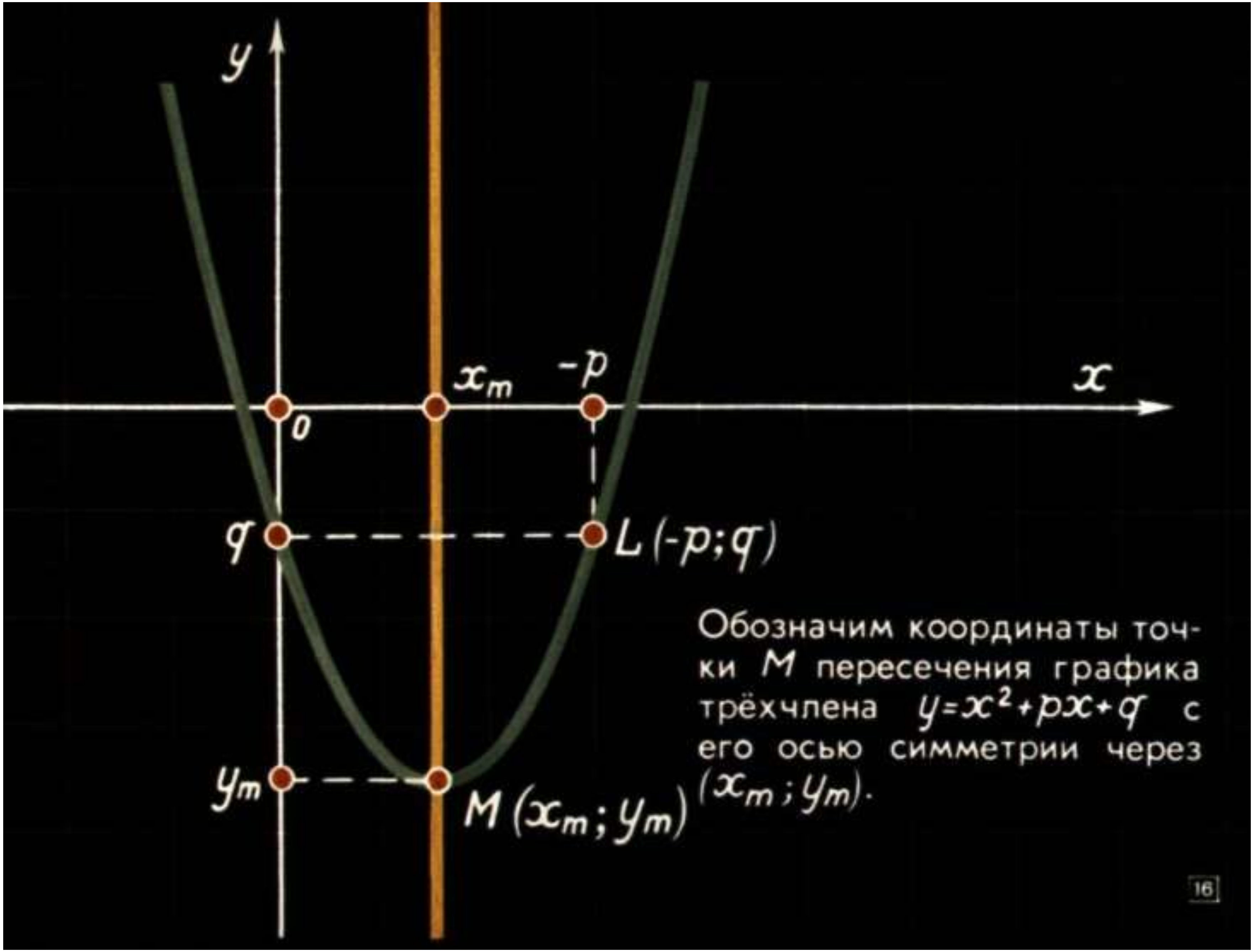
y
$x = -\frac{p}{2}$
$x_1 x_2$
$L(-p; q)$
Если трёхчлен $y = x^2 + px + q$ имеет корни x_1 и x_2, то $-p = x_1 + x_2$ и $q = x_1 x_2$.
1
0
x_1
x_2
$x_1 + x_2$
x
13



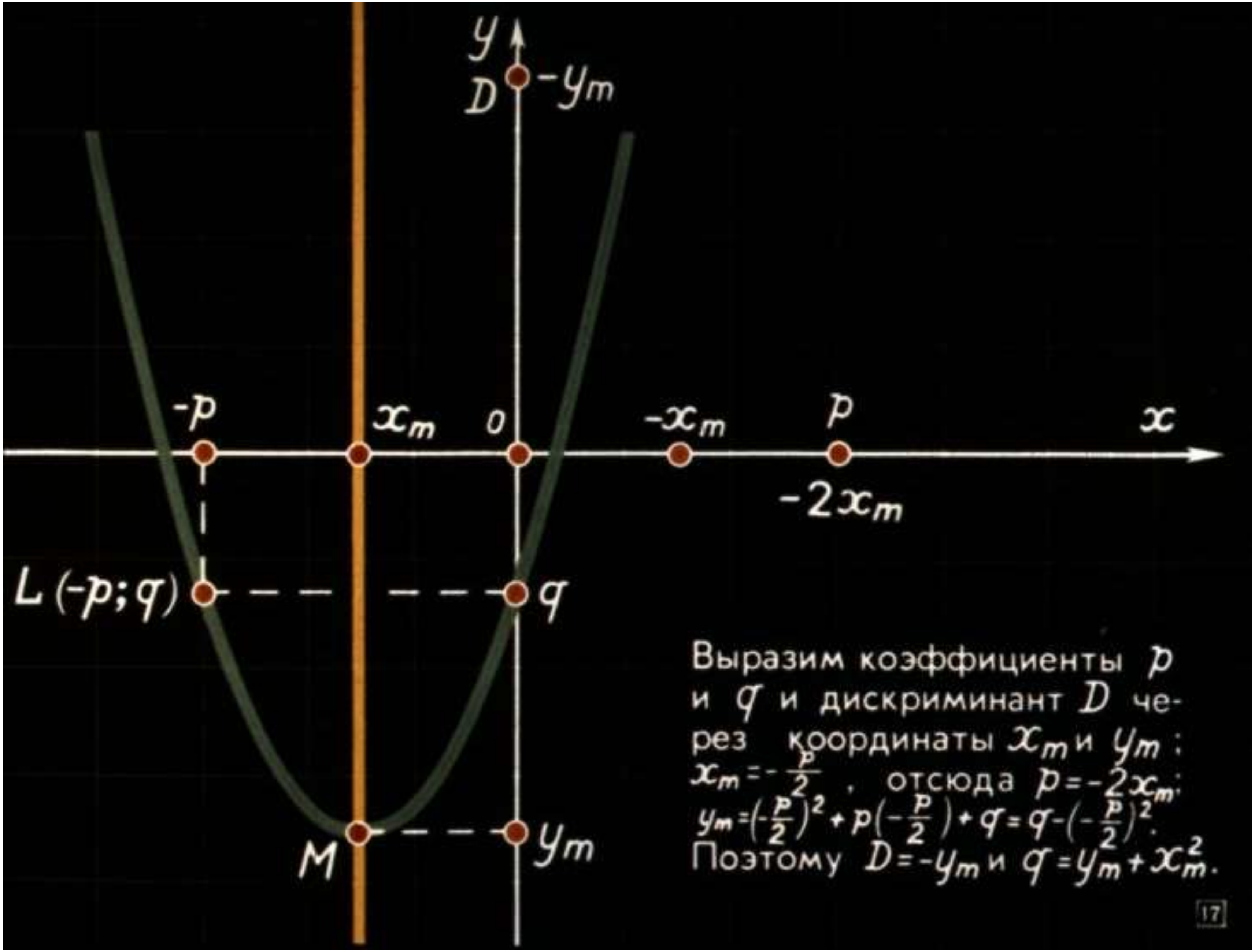
y
1
G
$-\frac{p}{2}$
x_1+x_2
x
x_1
-1
0
x_2
$L(-p;q)$
x_1x_2
M
Следовательно, сумма и произведение корней трёхчлена $y=x^2+px+q$ соответственно равны абсциссе и ординате точки L, симметричной точке K относительно оси симметрии параболы G.
14

Выражение $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ называют дискриминантом уравнения $x^2+px+q=0$ и обозначают буквой D.

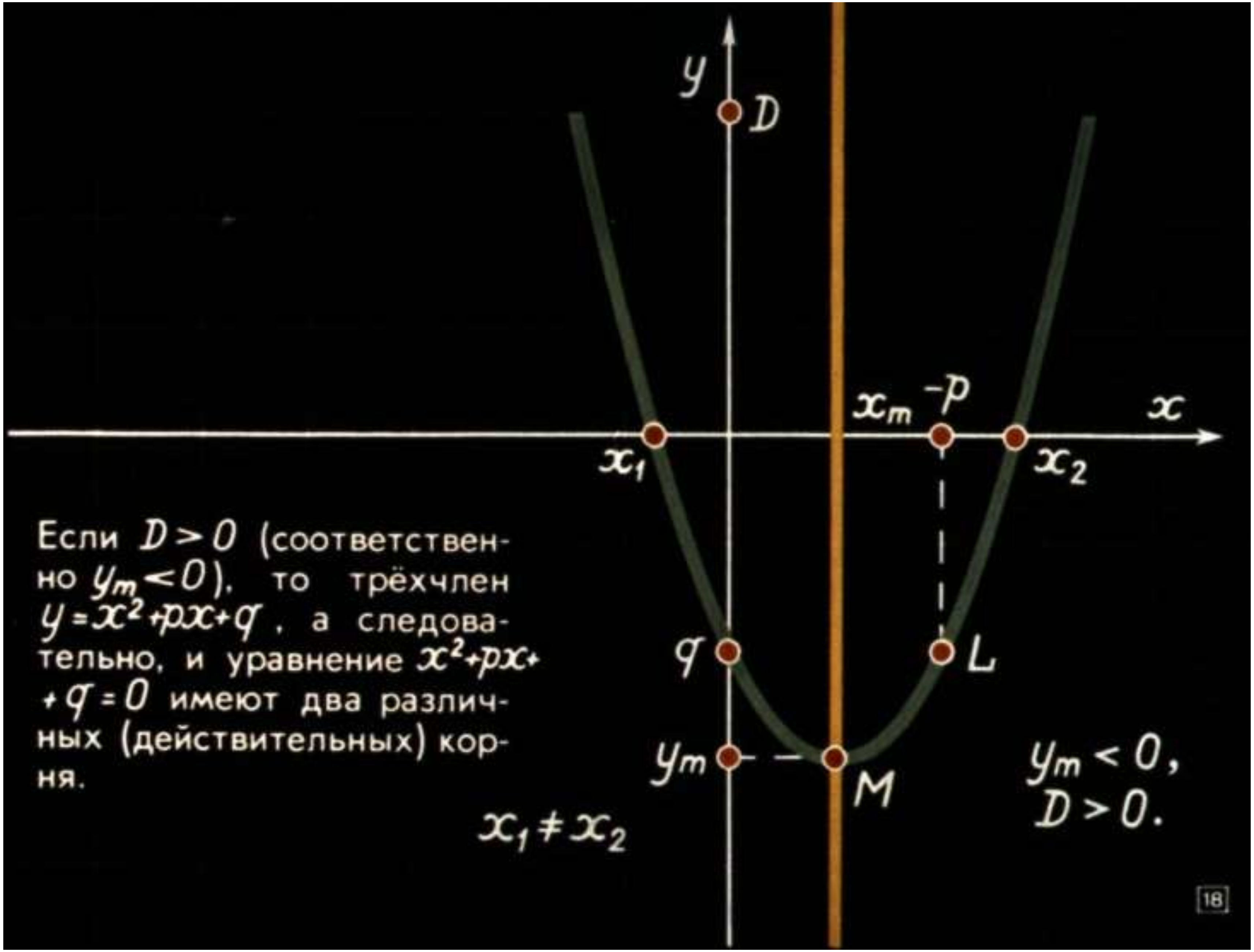
Выясним геометрический смысл дискриминанта.



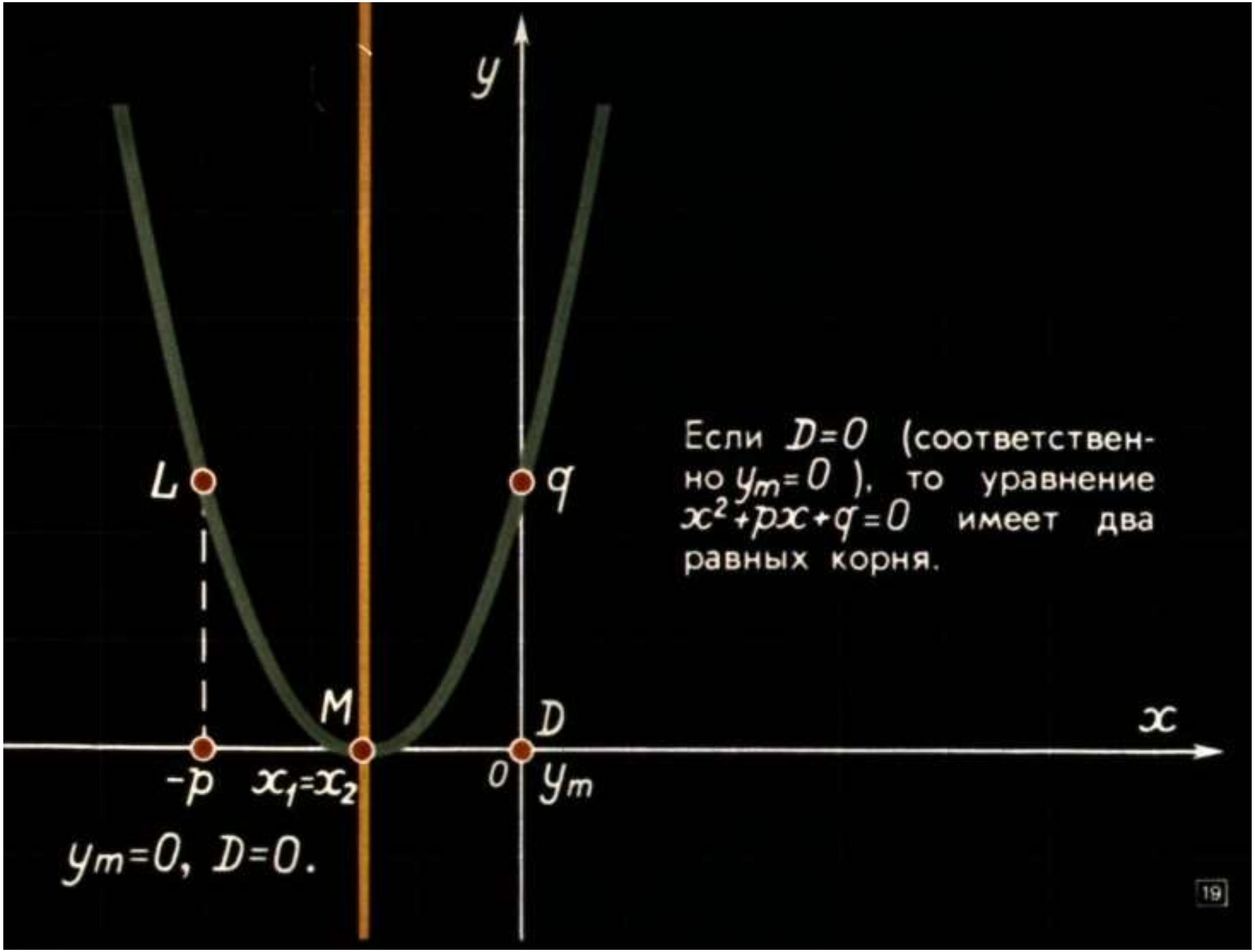
y
x
0
x_m
$-p$
q
$L(-p;q)$
y_m
$M(x_m;y_m)$
Обозначим координаты точки M пересечения графика трёхчлена $y=x^2+px+q$ с его осью симметрии через $(x_m;y_m)$.
16

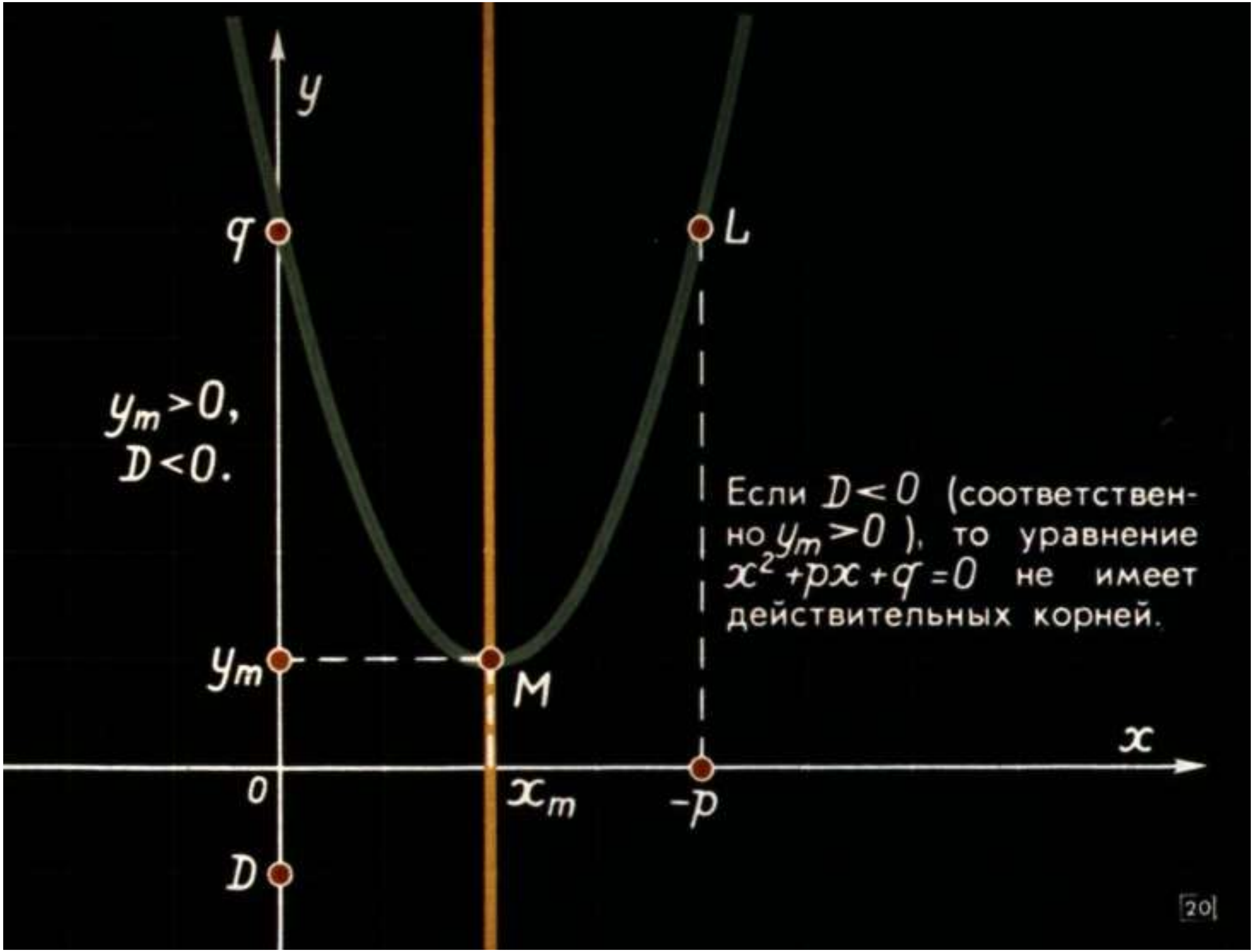


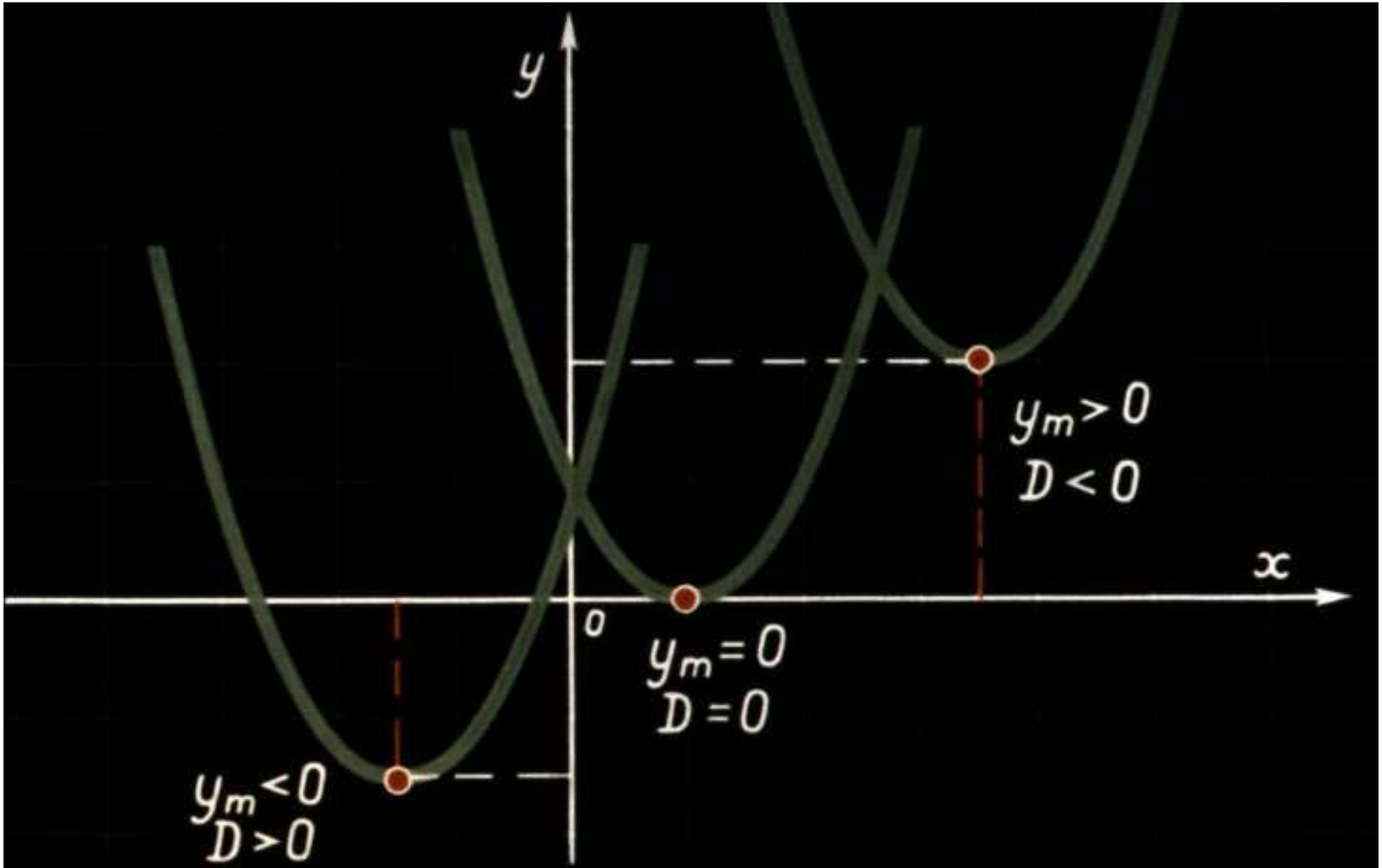
y
D
$-y_m$
$-p$
x_m
0
$-x_m$
p
$-2x_m$
x
$L(-p;q)$
q
M
y_m
Выразим коэффициенты p и q и дискриминант D через координаты x_m и y_m:
$x_m = -\frac{p}{2}$, отсюда $p = -2x_m$;
$y_m = (-\frac{p}{2})^2 + p(-\frac{p}{2}) + q = q - (-\frac{p}{2})^2$.
Поэтому $D = -y_m$ и $q = y_m + x_m^2$.
17



y
D
x_m
$-p$
x
x_1
x_2
Если $D>0$ (соответственно $y_m<0$), то трёхчлен $y=x^2+px+q$, а следовательно, и уравнение $x^2+px+q=0$ имеют два различных (действительных) корня.
q
L
y_m
M
$y_m<0$,
$D>0$.
$x_1 \neq x_2$
18


y
x
L
q
M
D
−p
x₁=x₂
0
yₘ
Если D=0 (соответственно yₘ=0), то уравнение x²+px+q=0 имеет два равных корня.
yₘ=0, D=0.
19

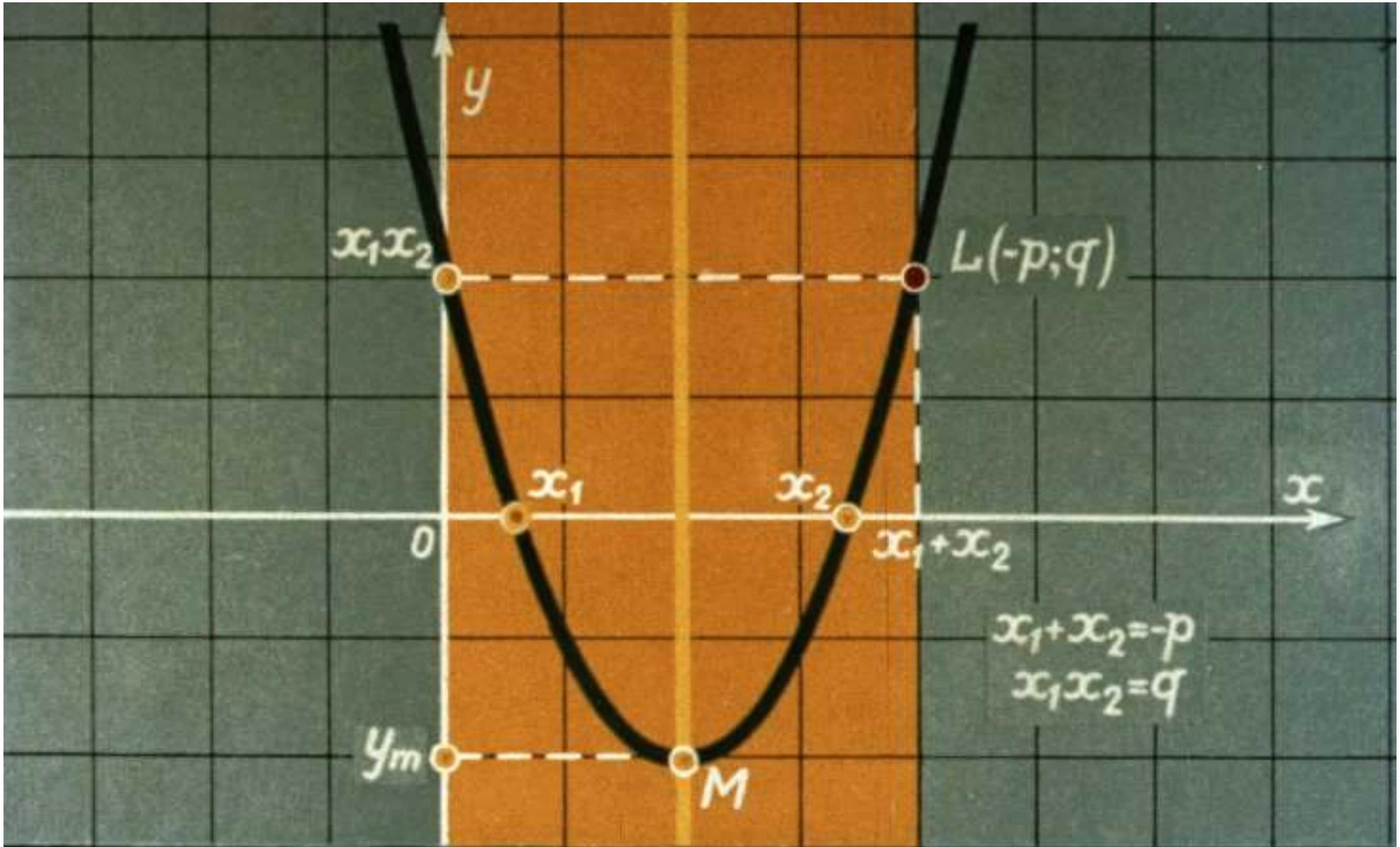

y
q
L
$y_m > 0$,
$D < 0$.
Если $D < 0$ (соответственно $y_m > 0$), то уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет действительных корней.
y_m
M
x
0
x_m
$-p$
D
20



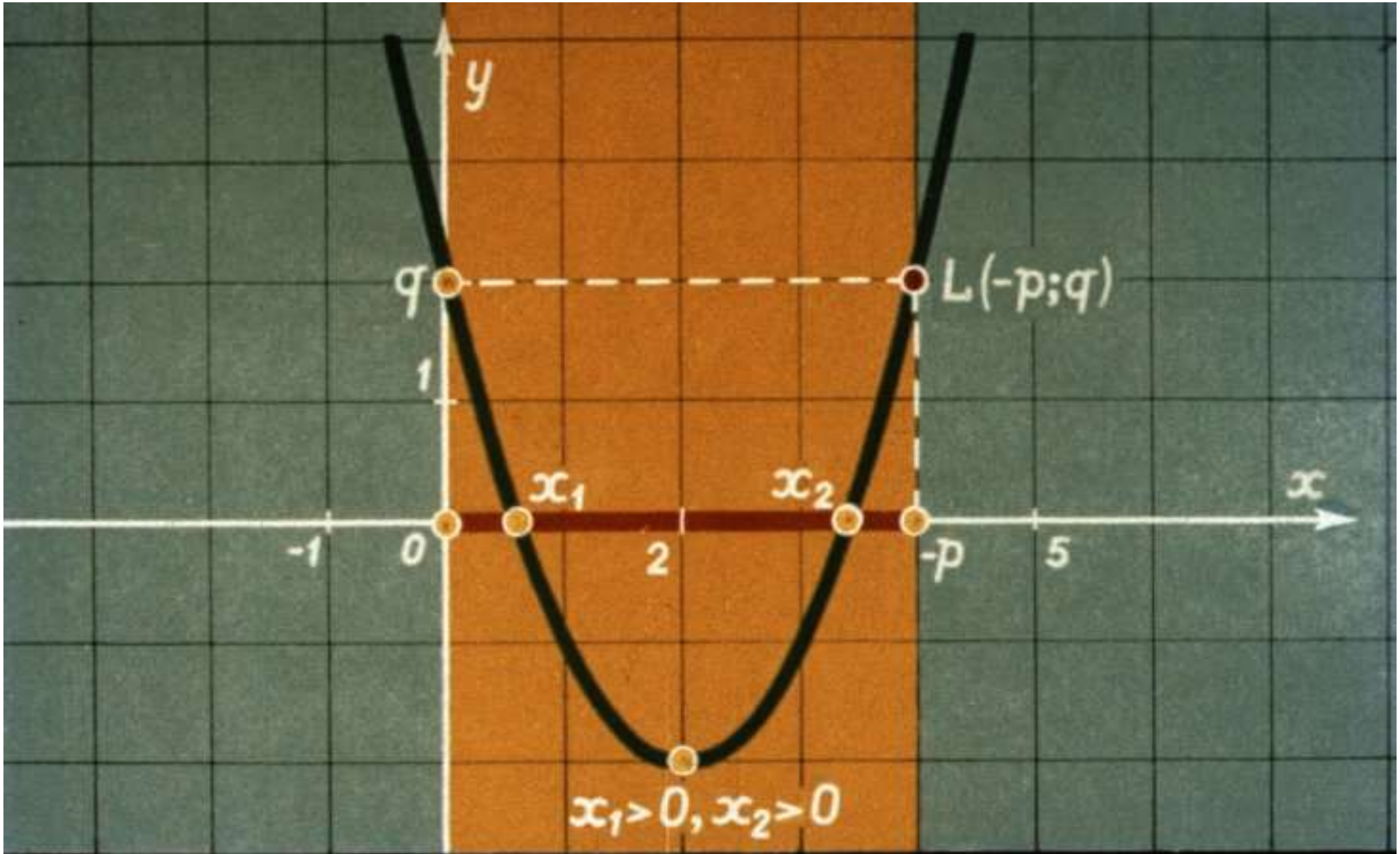
Таким образом, с геометрической точки зрения значение дискриминанта D — это число, противоположное ординате y_m вершины параболы.

Исследование *квадратного* уравнения

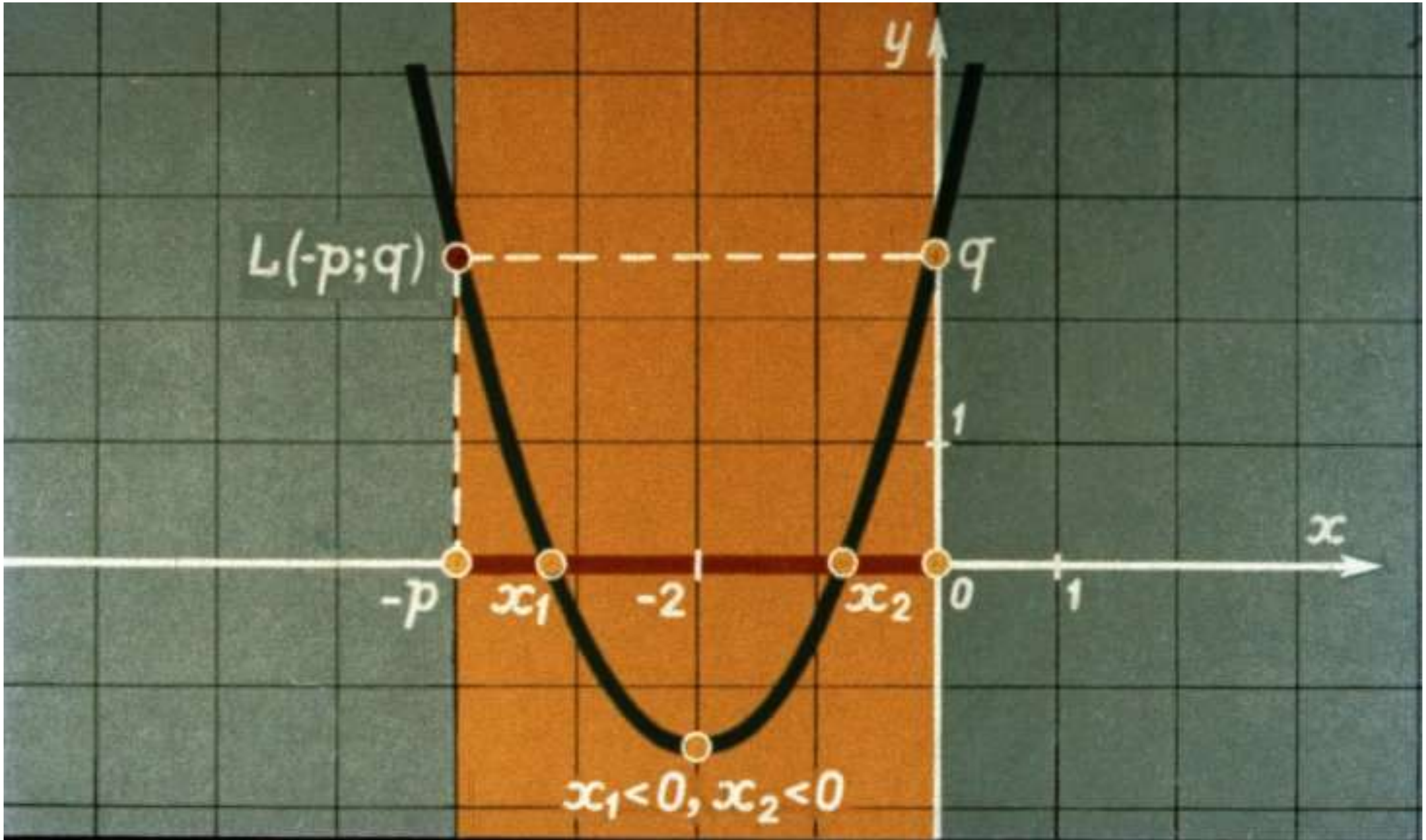
Мы установили, что с помощью дискриминанта можно узнавать, в каком случае уравнение имеет различные корни, равные корни или не имеет корней. Если $D>0$, то по коэффициентам p и q можно выяснить, каковы знаки корней и какой из них по модулю больше другого.



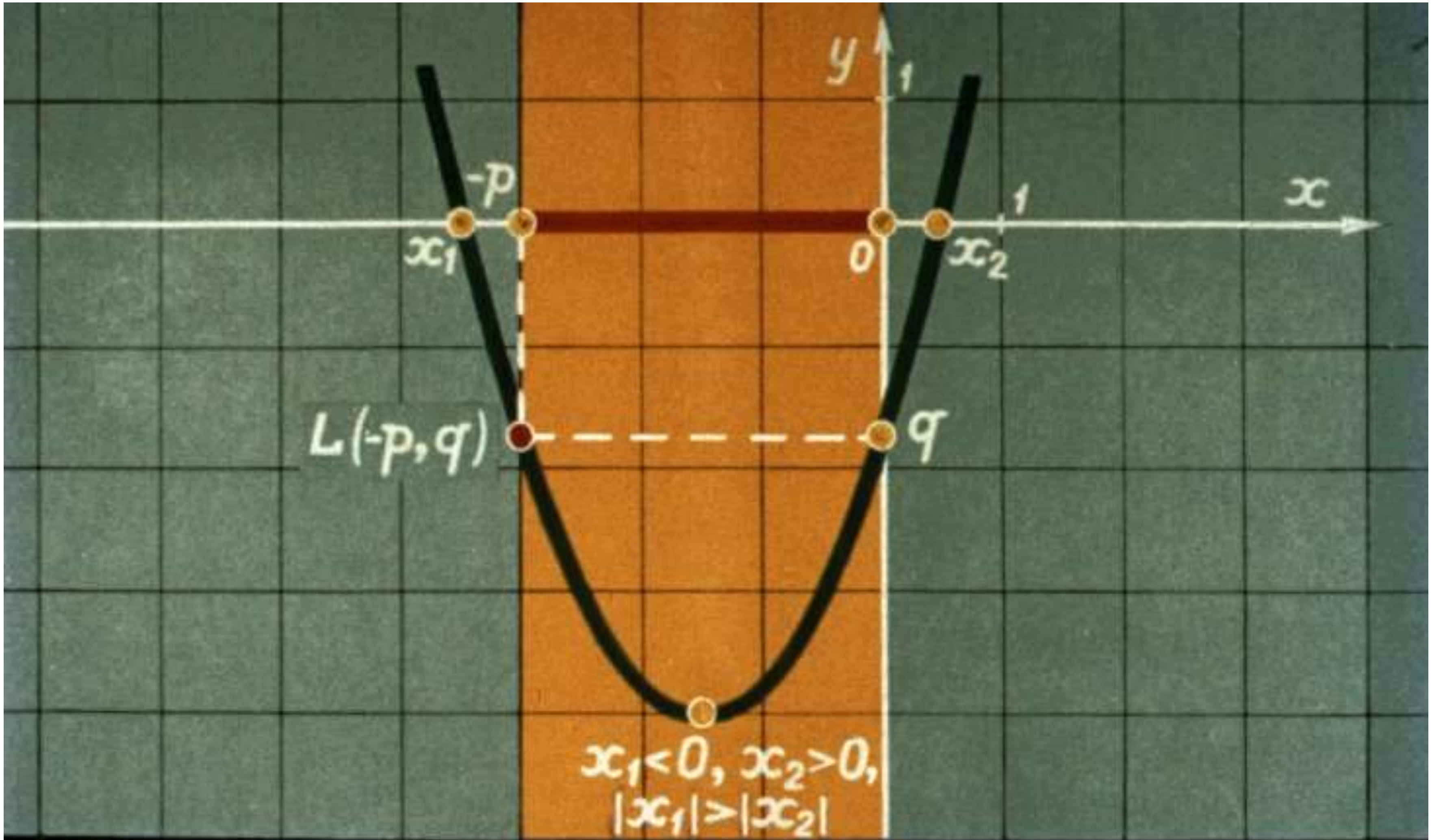
Ответить на поставленные вопросы в случае положительного дискриминанта можно легко, если знать расположение точки $L(-p;\,q)$ в координатной плоскости. Рассмотрим основные случаи.



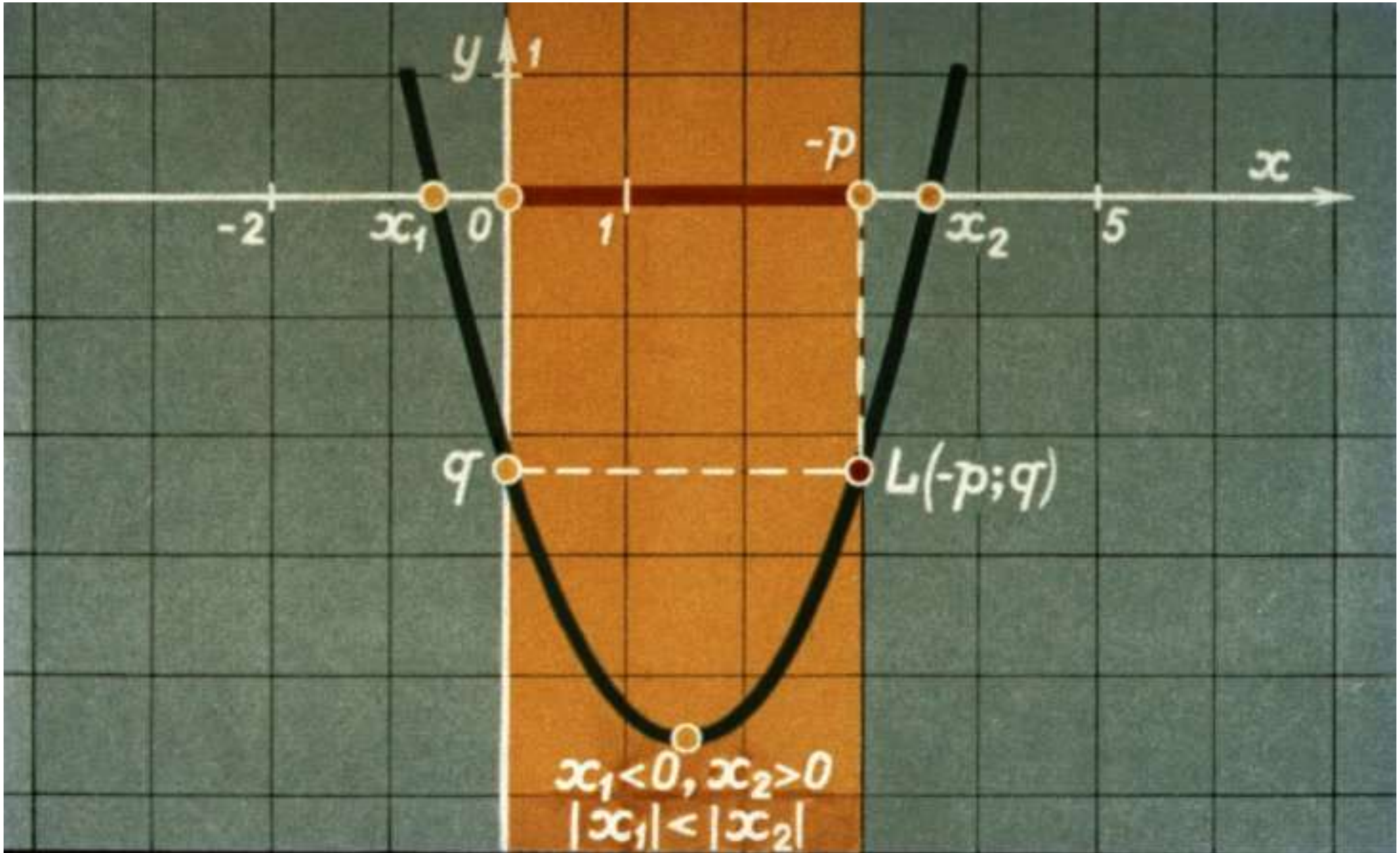
I. Пусть $D>0$. а) Если $-p>0, q>0$. то точка $L(-p; q)$ расположена в первом координатном углу. Уравнение имеет два различных положительных корня.



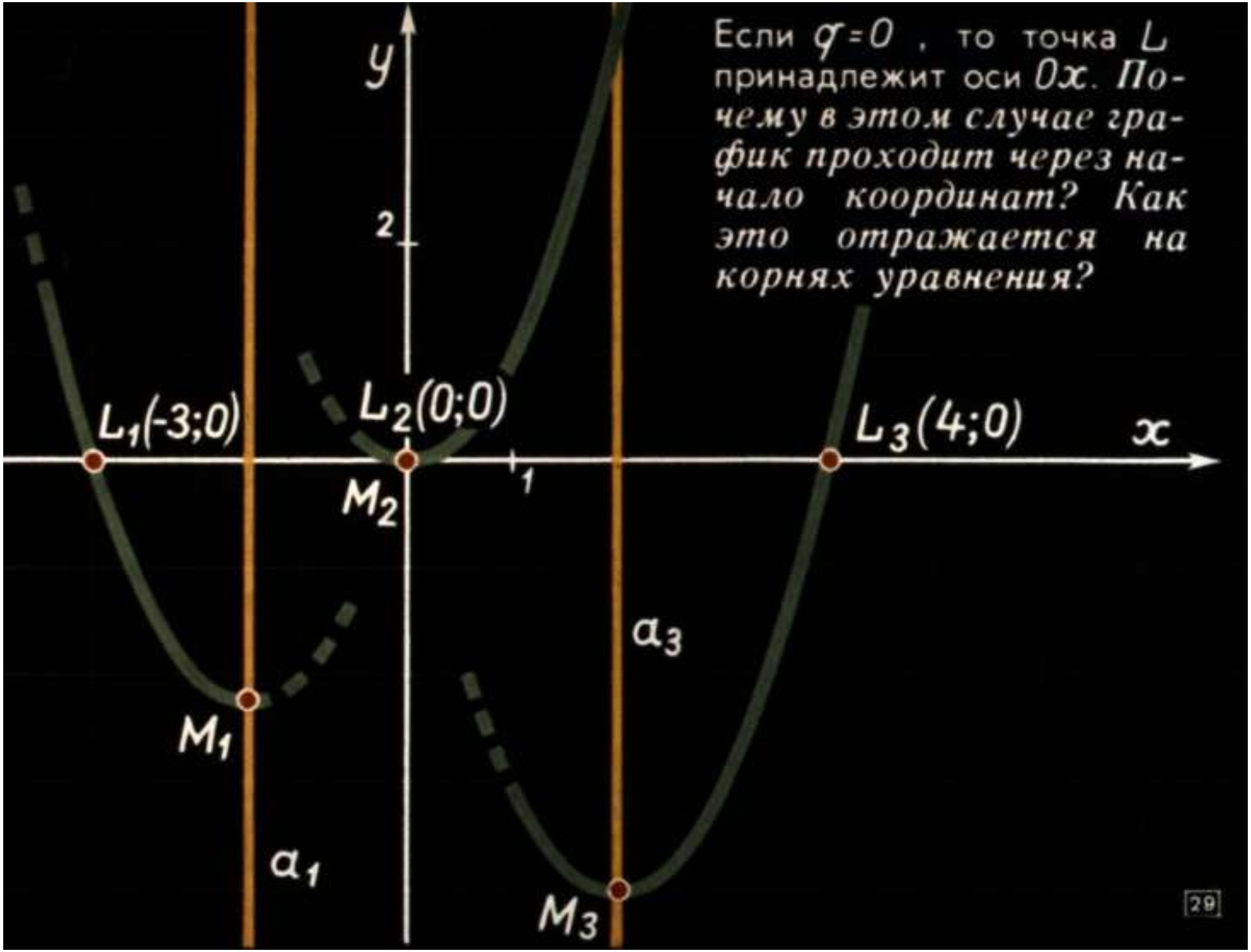
б) Если $-p<0, q>0$, то точка $L(-p;q)$ расположена во втором координатном углу. Уравнение имеет два различных отрицательных корня.



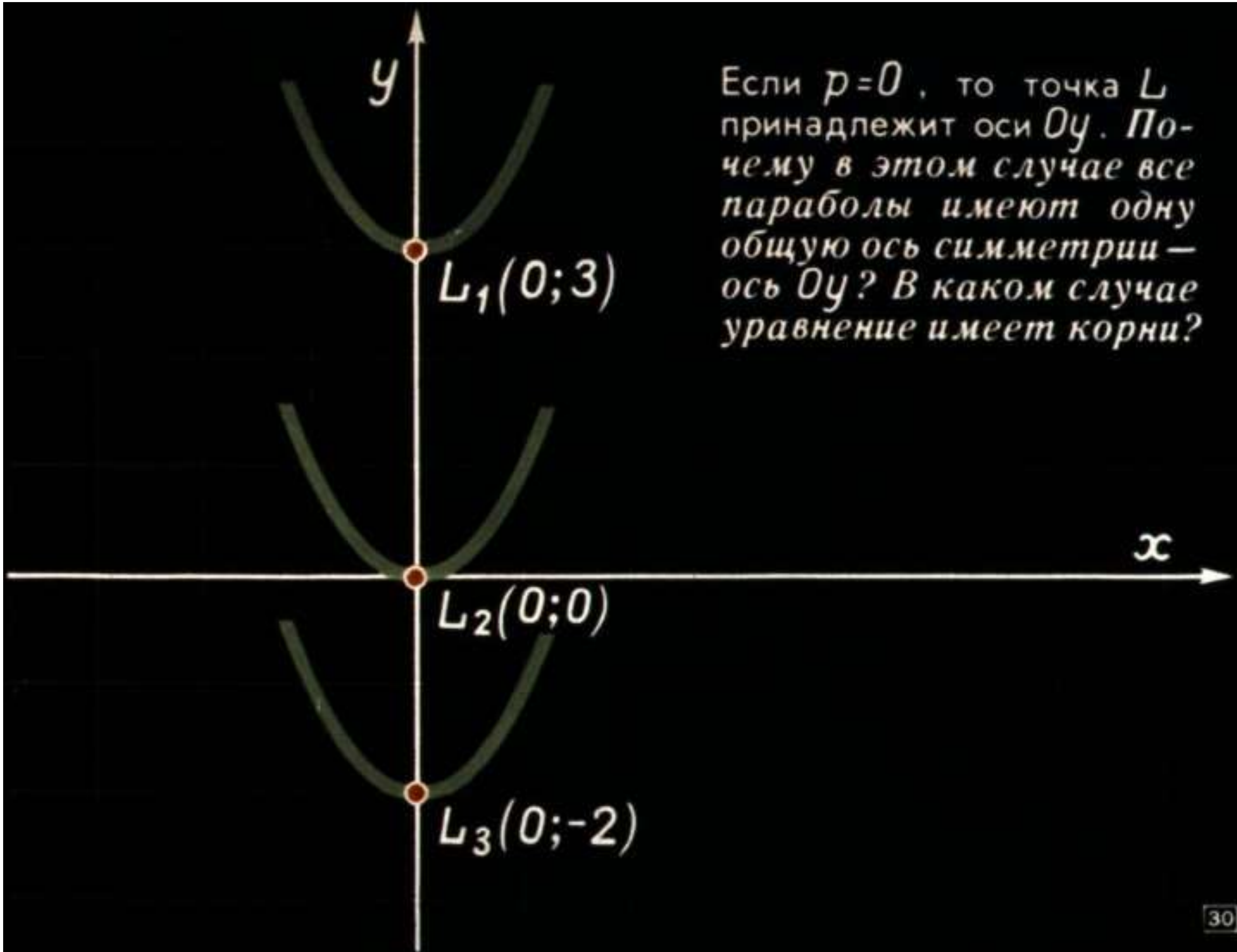
II. При $q<0$ дискриминант $D>0$ и находить его значение не требуется. а) Если $-p<0, q<0$, то точка $L(-p;q)$ расположена в третьем координатном углу. Уравнение имеет корни разных знаков, причём $|x_1|>|x_2|$.



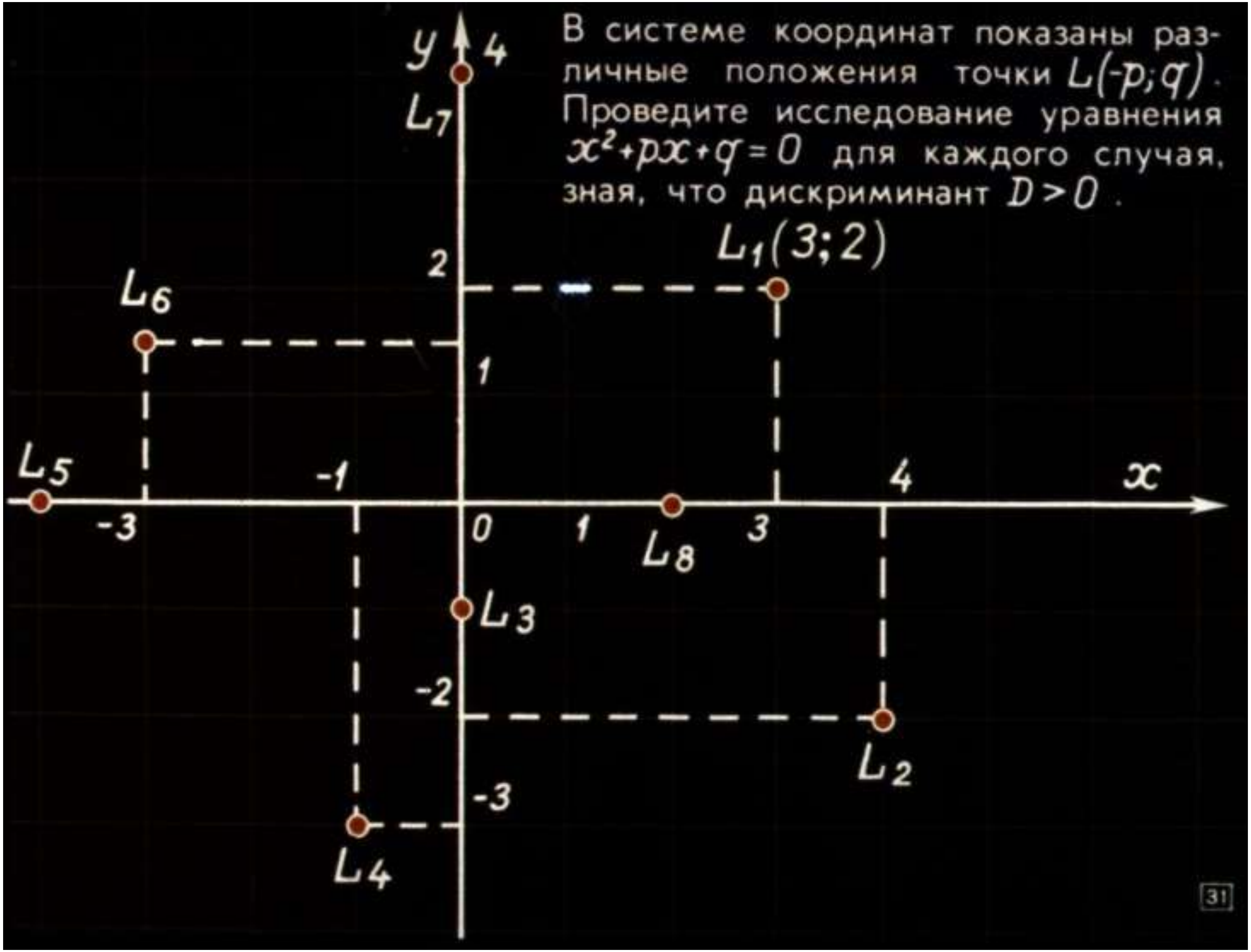
б) Если $-p>0$, $q<0$, то точка $L(-p;q)$ расположена в четвёртом координатном углу. Уравнение имеет корни разных знаков, причём $|x_1|<|x_2|$.

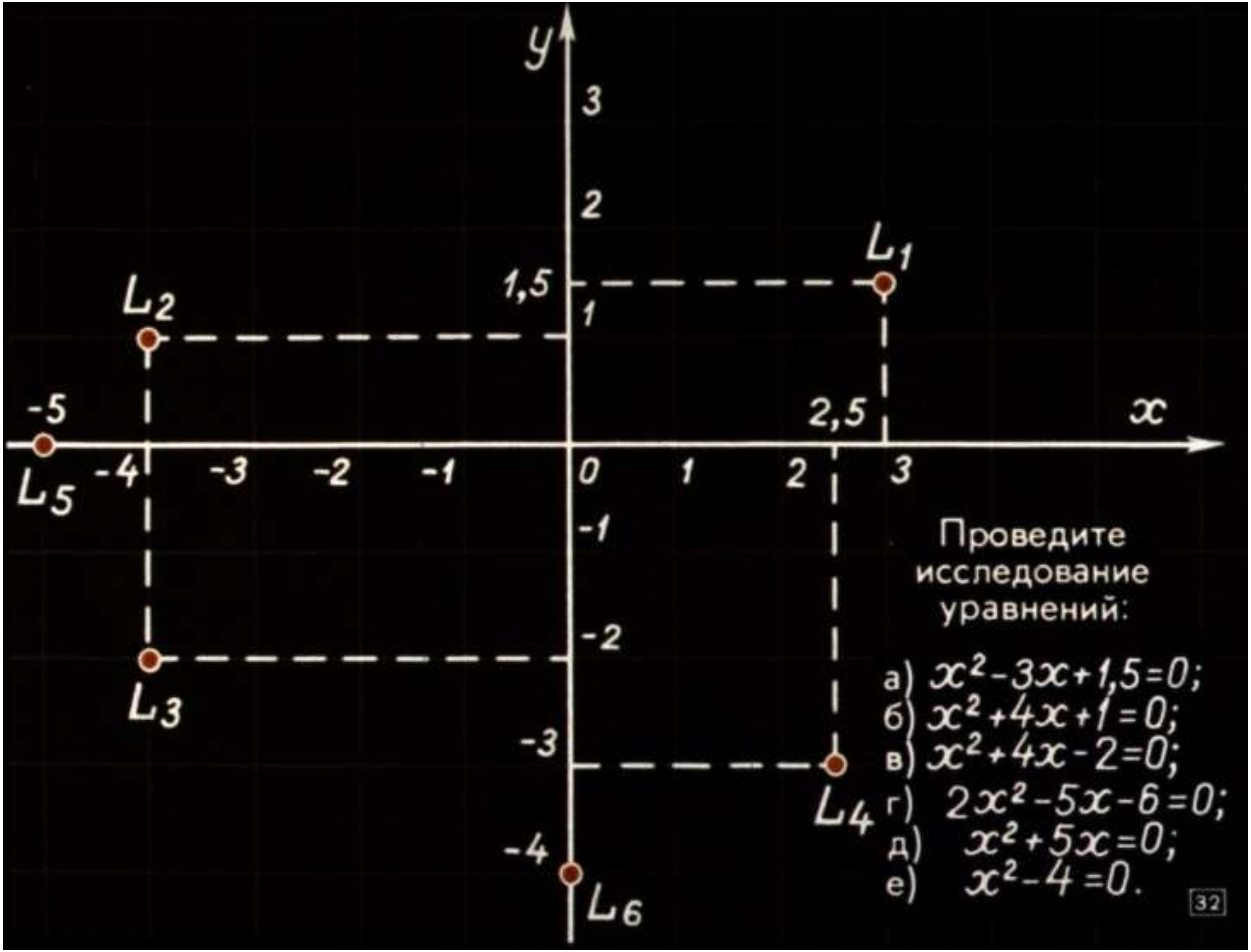


Если $q=0$, то точка L принадлежит оси $0x$. Почему в этом случае график проходит через начало координат? Как это отражается на корнях уравнения?
y
2
$L_1(-3;0)$
$L_2(0;0)$
$L_3(4;0)$
x
1
M_1
M_2
M_3
a_1
a_3
29



Если $p=0$, то точка L принадлежит оси Oy. *Почему в этом случае все параболы имеют одну общую ось симметрии — ось Oy? В каком случае уравнение имеет корни?*

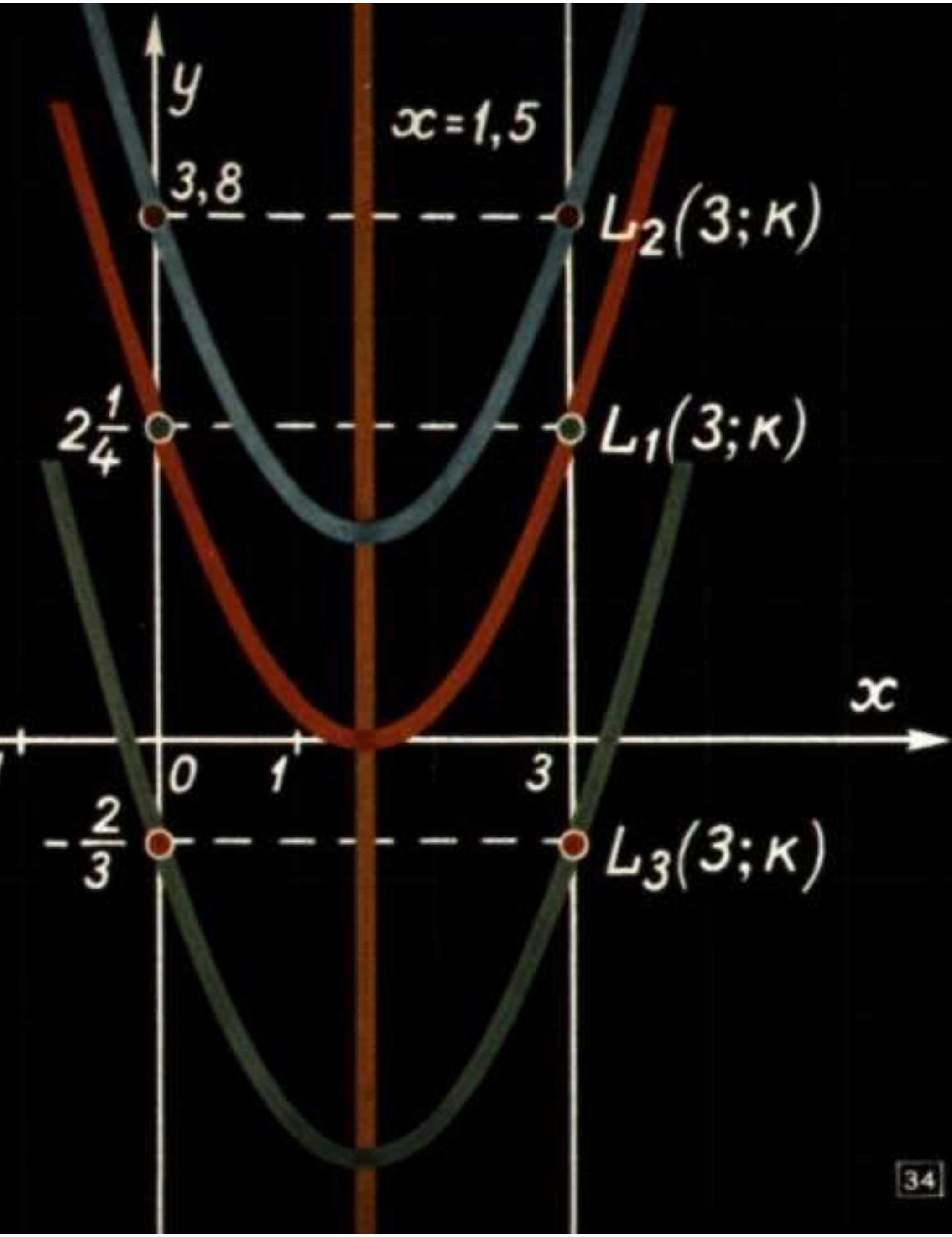

В системе координат показаны различные положения точки $L(-p;q)$.
Проведите исследование уравнения $x^2+px+q=0$ для каждого случая, зная, что дискриминант $D>0$.
$L_1(3;2)$
L_2
L_3
L_4
L_5
L_6
L_7
L_8
x
y
31

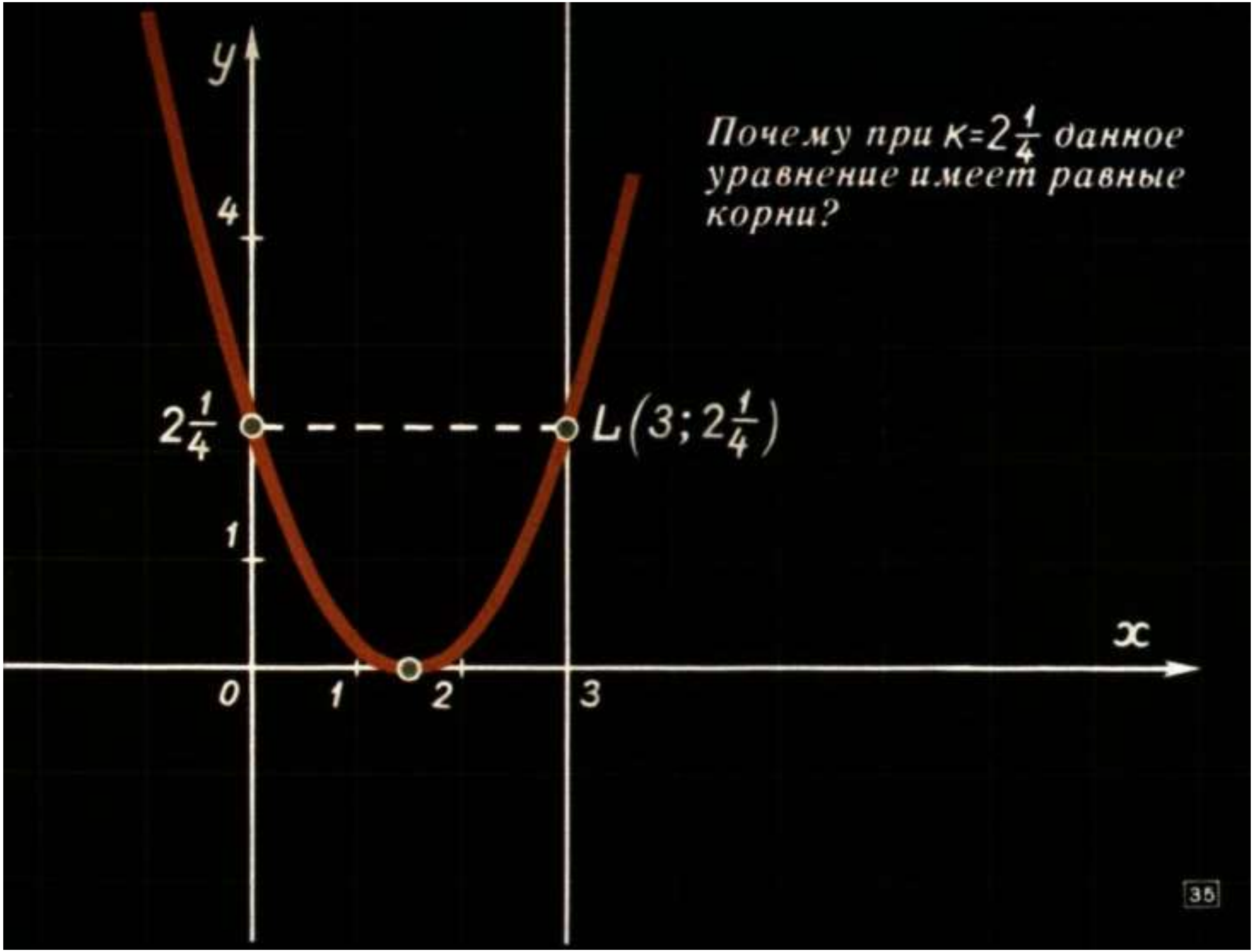


y
x
L1
L2
L3
L4
L5
L6
1,5
2,5
-5
Проведите исследование уравнений:
а) $x^2-3x+1,5=0$;
б) $x^2+4x+1=0$;
в) $x^2+4x-2=0$;
г) $2x^2-5x-6=0$;
д) $x^2+5x=0$;
е) $x^2-4=0$.
32

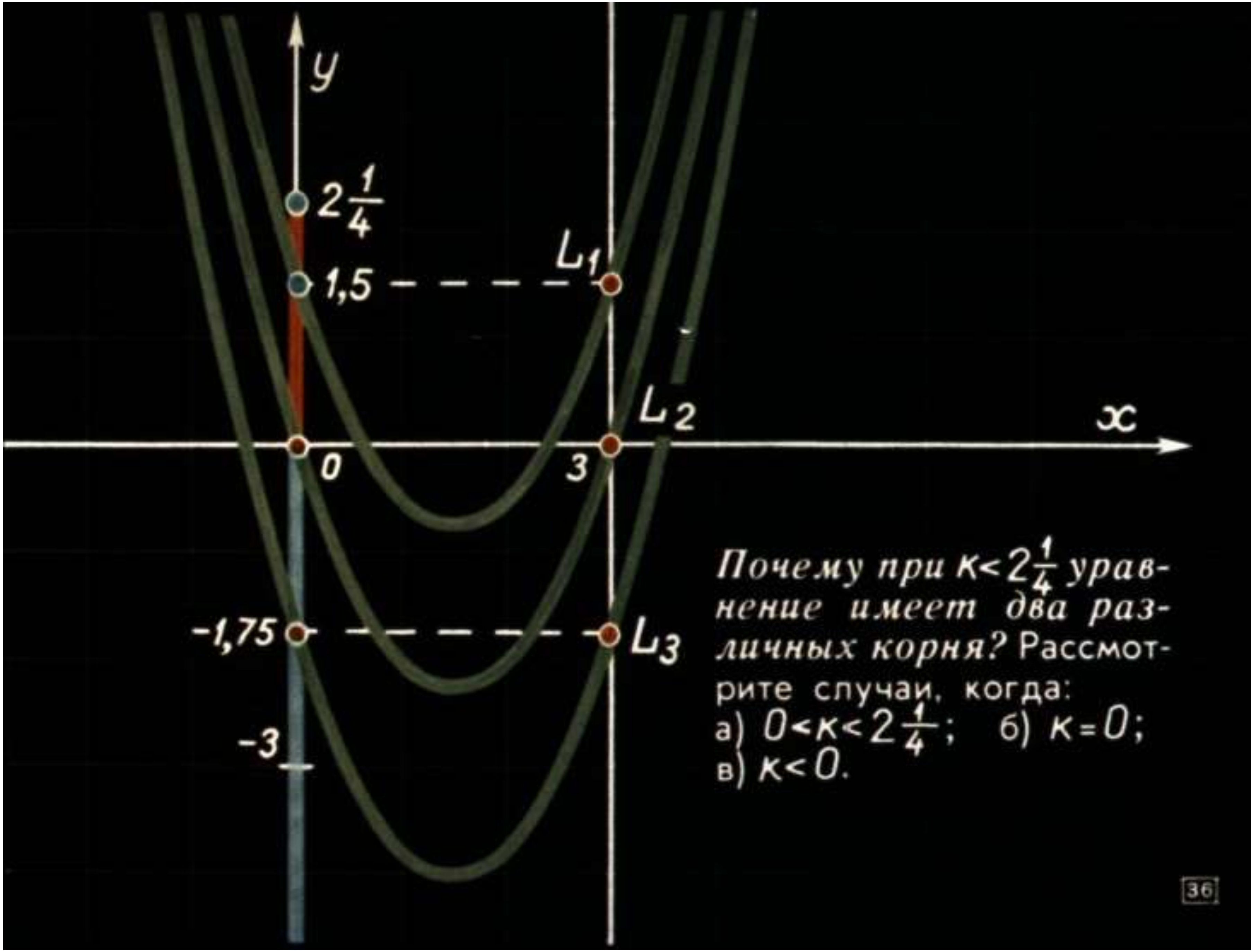
Задачи

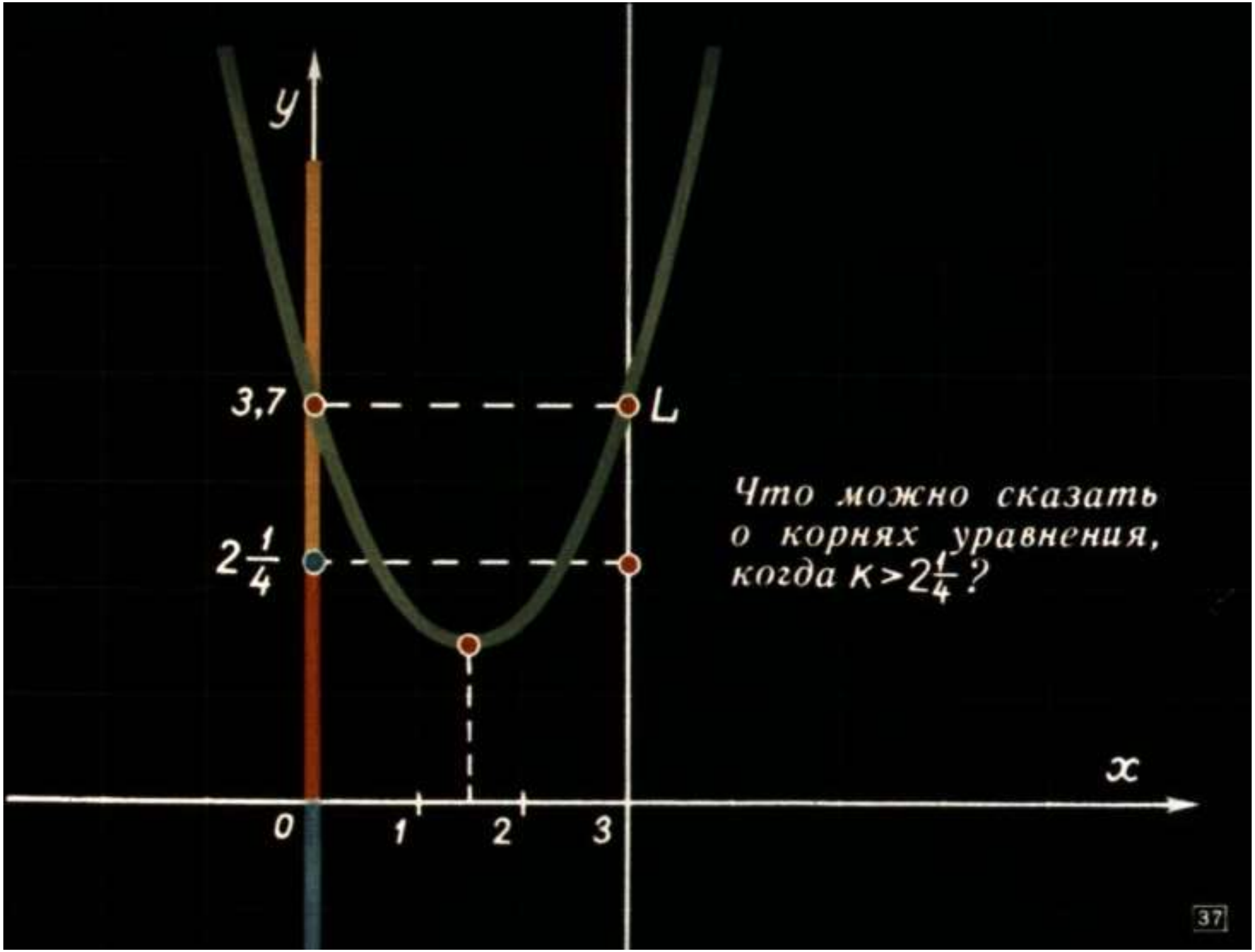
Задача 1. Дано уравнение $x^2-3x+k=0$. В нём $-p=3$, $q=k$, поэтому точка L имеет координаты $(3;k)$. *Объясните, почему прямая* $x=1,5$ *является осью симметрии графика трёхчлена* $y=x^2-3x+k$ *при любом* k ?

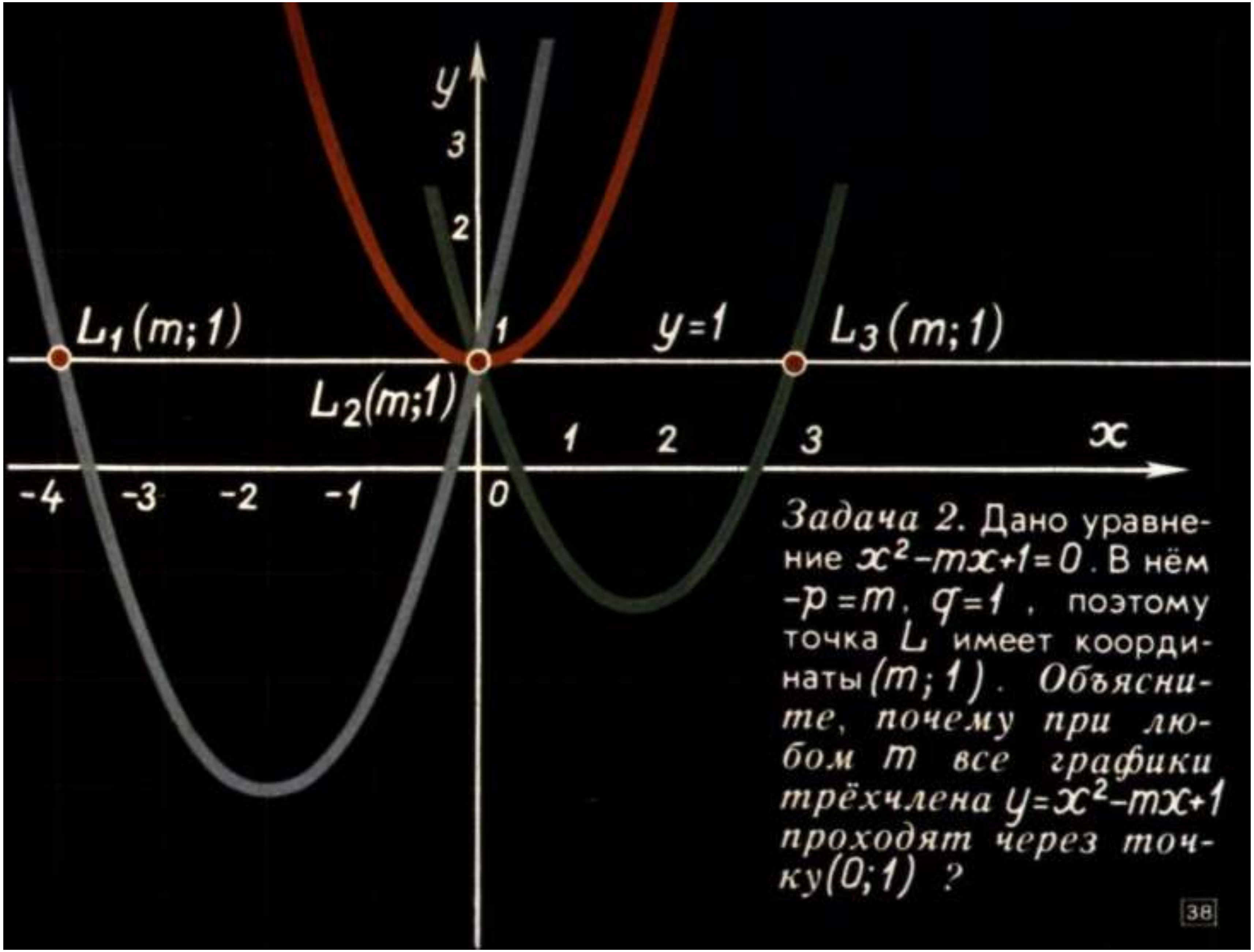




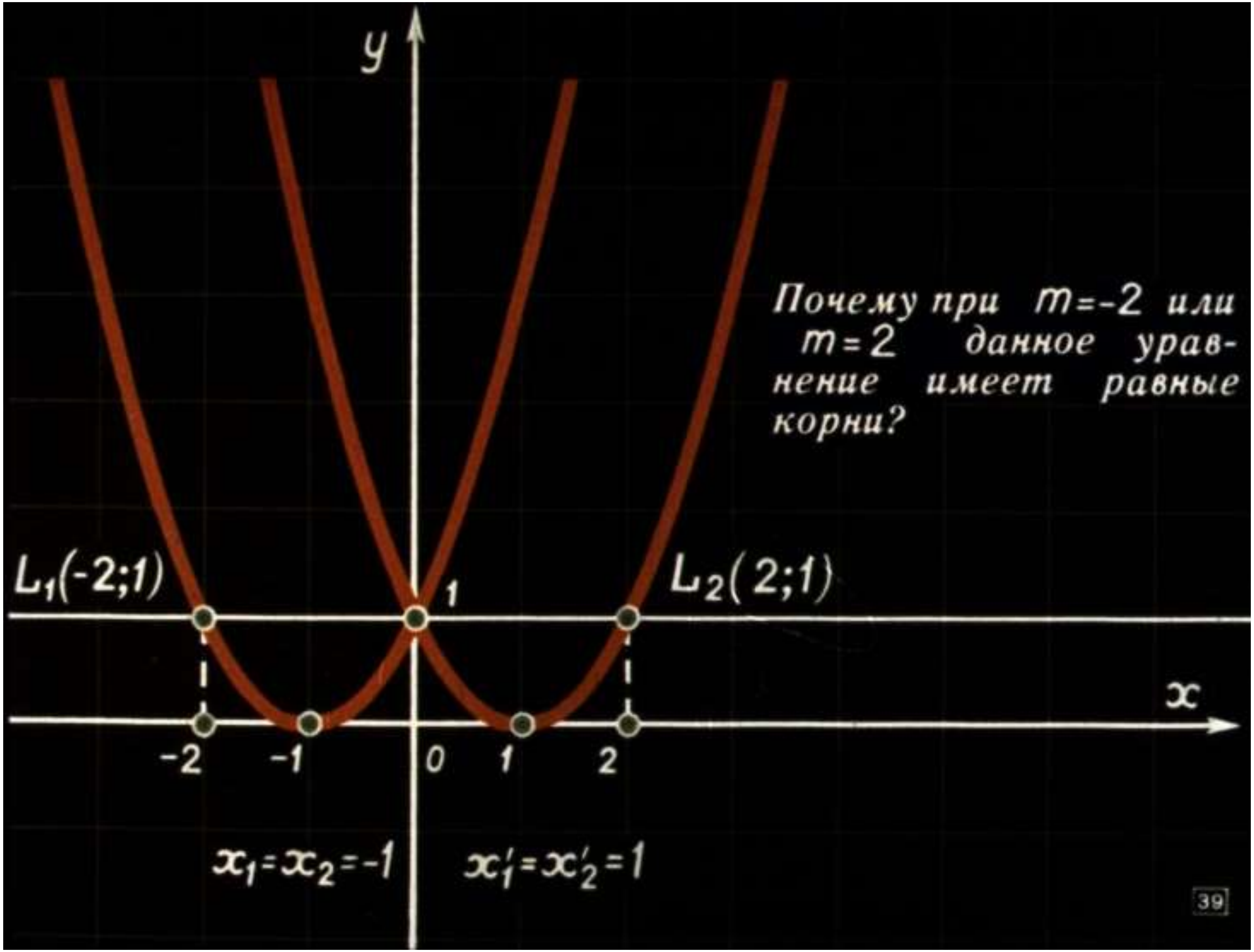
Почему при к=2¼ данное уравнение имеет равные корни?
y
4
1
2¼
L(3; 2¼)
x
0
1
2
3
35

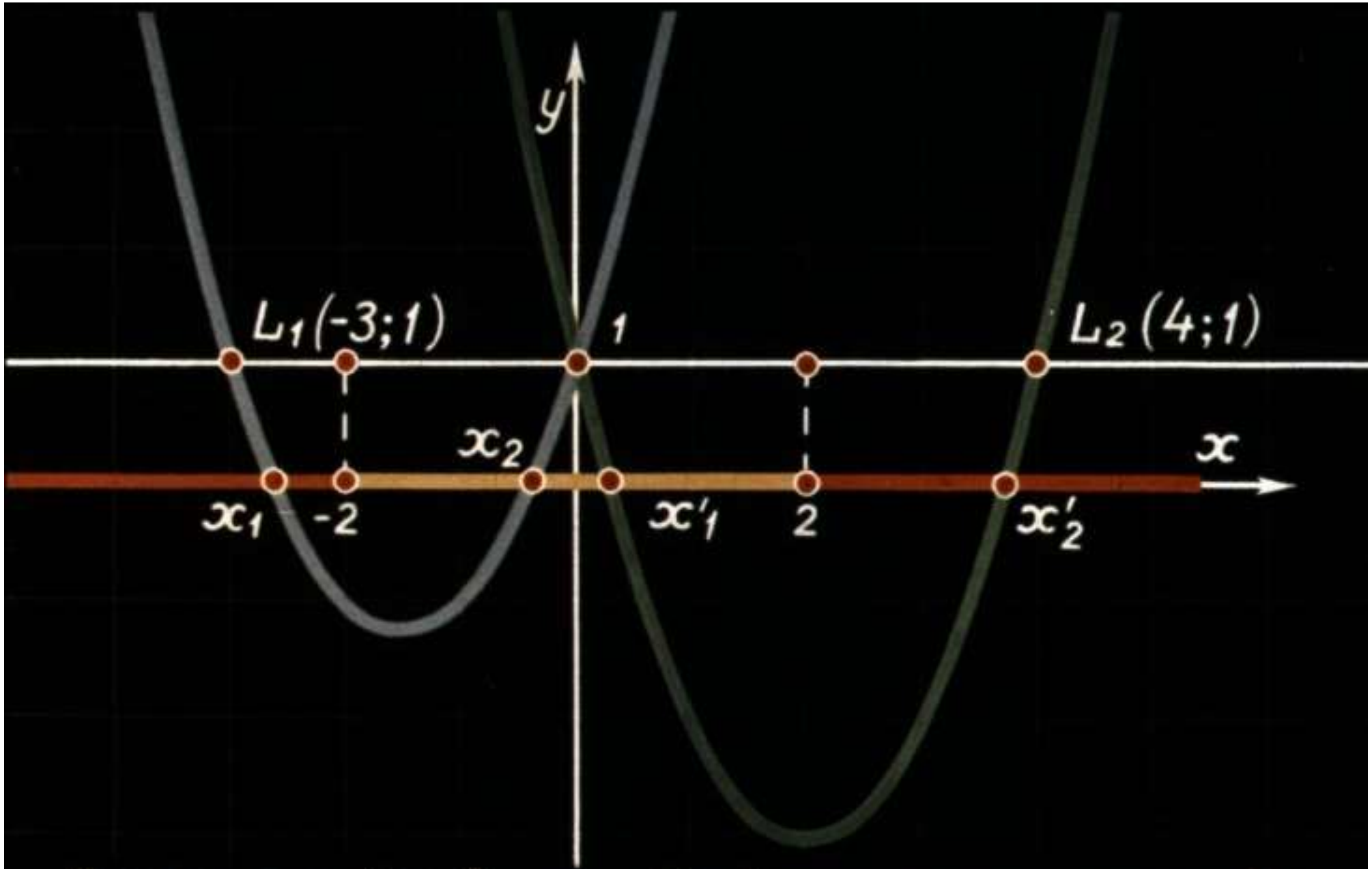

y
x
$2\frac{1}{4}$
1,5
0
3
−1,75
−3
L_1
L_2
L_3
Почему при $к < 2\frac{1}{4}$ *уравнение имеет два различных корня?* Рассмотрите случаи, когда:
а) $0 < к < 2\frac{1}{4}$; б) $к = 0$;
в) $к < 0$.
36


y
3,7
L
$2\frac{1}{4}$
Что можно сказать о корнях уравнения, когда $k > 2\frac{1}{4}$?
x
0
1
2
3
37

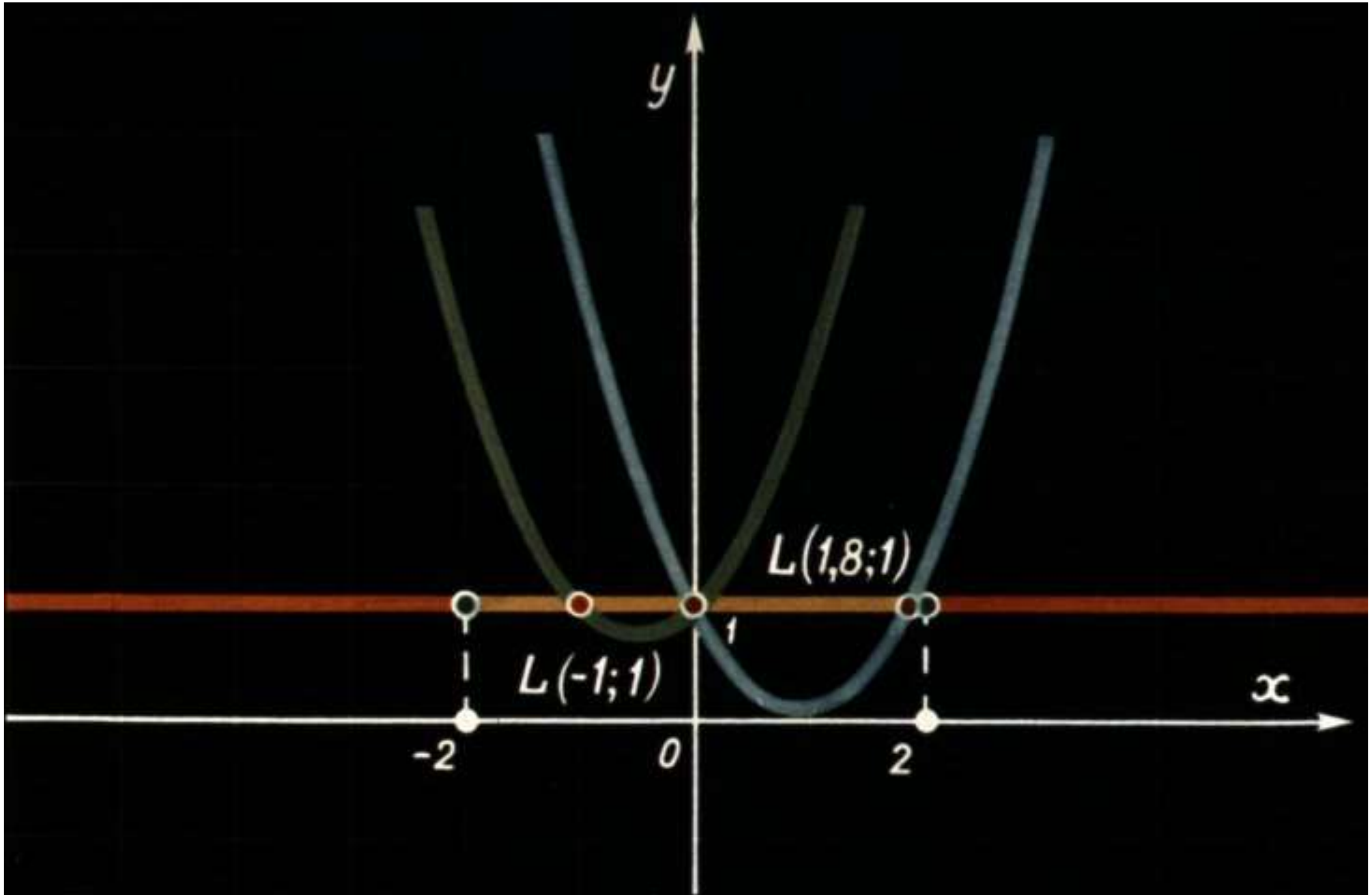


y
3
2
1
$L_1(m;1)$
$y=1$
$L_3(m;1)$
$L_2(m;1)$
x
1 2 3
-4 -3 -2 -1 0
Задача 2. Дано уравнение $x^2-mx+1=0$. В нём $-p=m$, $q=1$, поэтому точка L имеет координаты $(m;1)$. *Объясните, почему при любом* m *все графики трёхчлена* $y=x^2-mx+1$ *проходят через точку* $(0;1)$ *?*
38


y
Почему при m=-2 или m=2 данное уравнение имеет равные корни?
$L_1(-2;1)$
$L_2(2;1)$
1
x
-2
-1
0
1
2
$x_1=x_2=-1$
$x'_1=x'_2=1$
39



Почему при $m<-2$ *или* $m>2$ *уравнение имеет два различных корня? Какие корни имеет уравнение при а)* $m<-2$ *; б)* $m>2$ *?*



Почему при условии, что $-2<m<2$ *, уравнение не имеет корней?*

КОНЕЦ

Автор Ю. Н. Макарычев
Чертежи и оформление Г. Г. Рожковского
Редактор Л. Б. Книжникова

Д-241-68

Студия «Диафильм», 1968 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Цветной 0-30