А.ГАЙШТУТ

МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

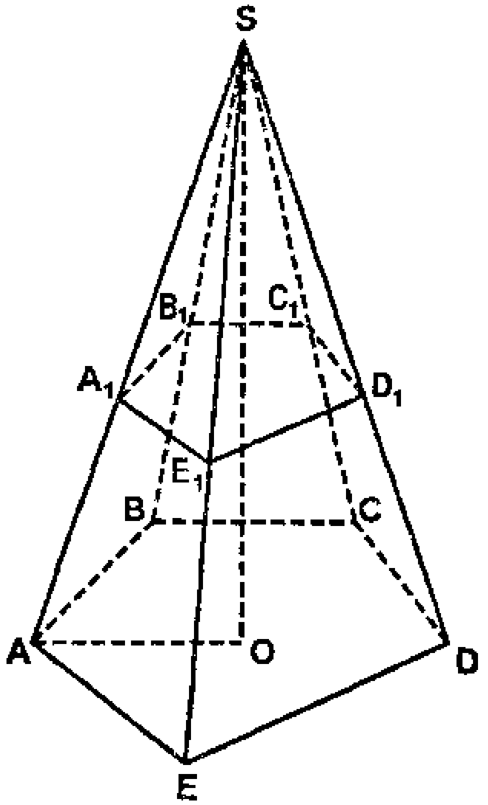
# СТЕРЕОМЕТРИЯ

# СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

# Стереометрия

## Справочный материал

Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:

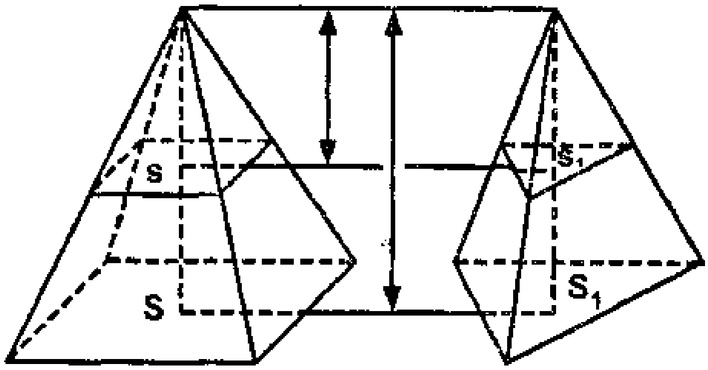



$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \ldots = \frac{SO_1}{SO}$$

$$A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$$

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}} = \frac{SO_1^2}{SO^2}$$

Если две пирамиды с равными высотами рассечены на одинаковом расстоянии от вершины плоскостями, параллельными основаниям, то:




$$\frac{s}{s_1} = \frac{S}{S_1}$$

### ПРИЗМА

**ПРЯМАЯ**

$$V = SH$$
$$S_{бок} = PH$$
$$S_{пол} = S_{бок} + 2S$$

**НАКЛОННАЯ**

$$V = SH = S_{пер}\,AA_1$$
$$S_{бок} = P_{пер}\,AA_1$$
$$S_{пол} = S_{бок} + 2S$$

### ЦИЛИНДР

$$V = \pi R^2 H$$
$$S_{бок} = 2\pi RH$$
$$S_{пол} = 2\pi R\,(H + R)$$

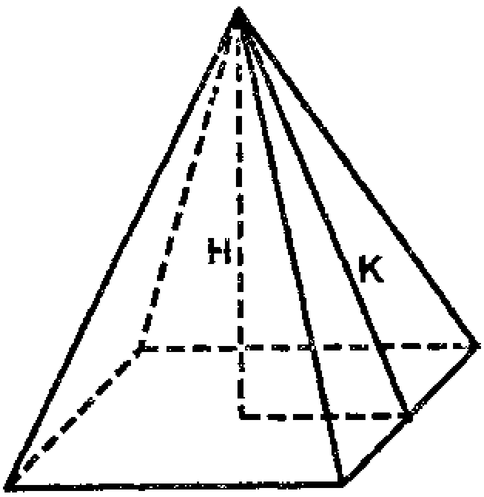
## Справочный отдел

### Обозначения:

$S$ — площадь основания,
$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности,
$S_{пер}$ — площадь перпендикулярного сечения,
$S_{пол}$ — площадь полной поверхности,
$P$ — периметр основания,
$P_{пер}$ — периметр перпендикулярного сечения,
$V$ — объем,
$H$ — высота,
$R$ — радиус цилиндра, конуса, шара,
$K$ — апофема боковой грани,
$L$ — образующая конуса.

## ПИРАМИДА

### ПОЛНАЯ

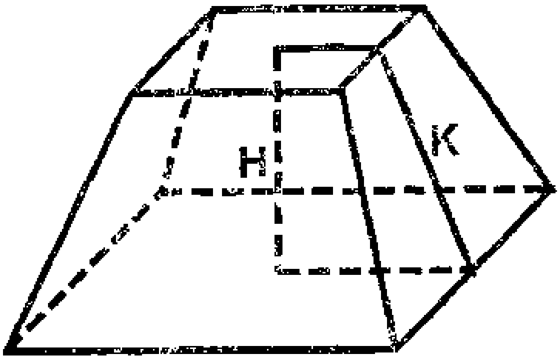



$$V = \frac{1}{3} SH$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} Pk$$

$$S_{пол} = S_{бок} + S$$

### УСЕЧЕННАЯ



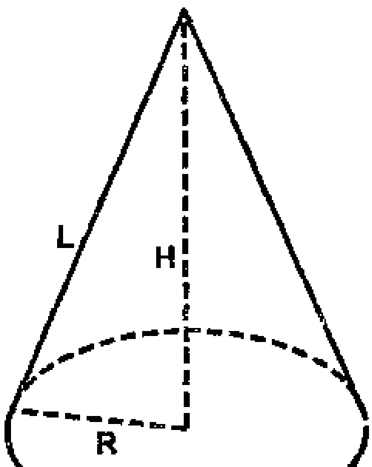

$$V = \frac{1}{3} H \left(S + s + \sqrt{Ss}\right)$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) k$$

$$S_{пол} = S_{бок} + S_1 + S_2$$

## КОНУС

### ПОЛНЫЙ

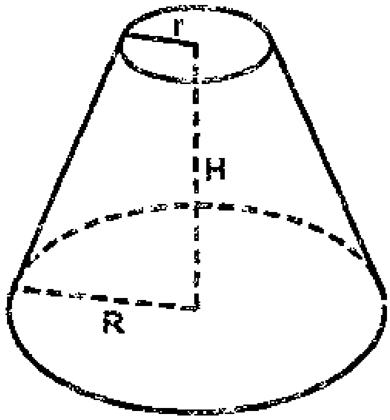



$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$S_{бок} = \pi RL$$

$$S_{пол} = \pi R (L + R)$$

### УСЕЧЕННЫЙ

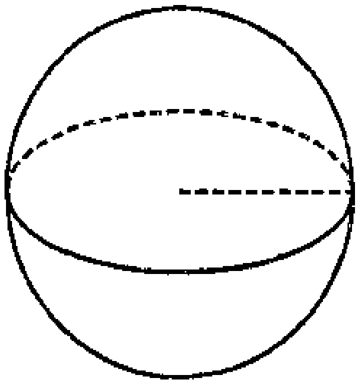



$$V = \frac{1}{3} \pi H \cdot (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$S_{бок} = \pi (R + r) L$$

$$S_{пол} = S_{бок} + \pi R^2 + \pi r^2$$

# ШАР

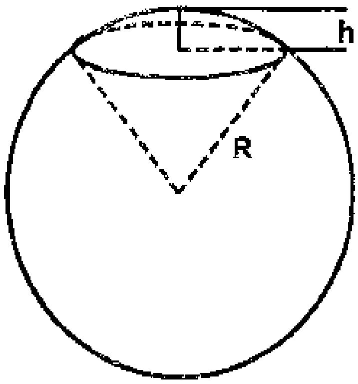


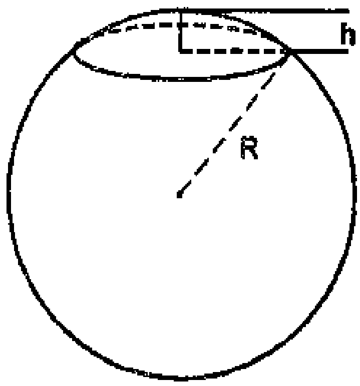
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S_{пол} = 4\pi R^2$$

## ШАРОВОЙ

СЕКТОР | СЕГМЕНТ (СЛОЙ) | ПОЯС



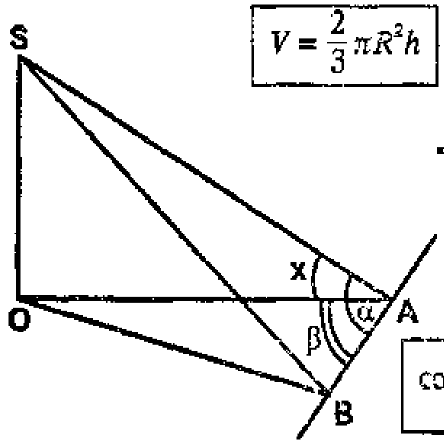




$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$$

$$S_{пол} = 2\pi R h$$

## Теорема о трех косинусах




$$\cos x = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

$\alpha$ — плоский угол при вершине правильной $n$-угольной пирамиды,
$x$ — угол при ребре основания.

$$\cos x = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

$\alpha$ — плоский угол при вершине правильной $n$-угольной пирамиды,
$x$ — угол между боковым ребром и плоскостью основания.

$$\cos x = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$$

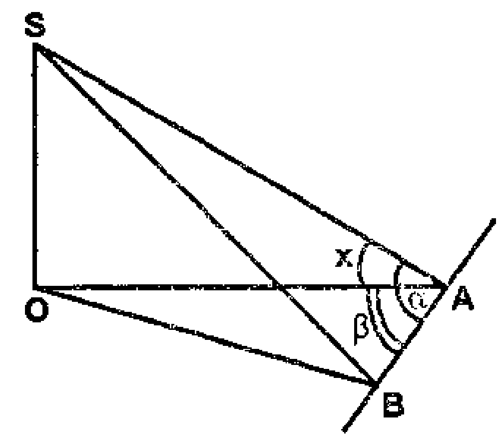
$\alpha$ — плоский угол при вершине правильной $n$-угольной пирамиды,
$x$ — угол при боковом ребре.

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{90^\circ(n-2)}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Примечание. При $n$, равном 3, 4, 5, 6 и т.д. получим зависимость между данными углами соответственно в правильных пирамидах: треугольной, четырехугольной и т.д.

# Нахождение зависимостей между углами в пирамиде

**(Использование мнемонического приема для запоминания доказательства)**




$SO$ — перпендикуляр к плоскости,
$SA$ — наклонная, $OB \perp AB$,
$\angle x$ — угол между наклонной и ее проекцией,
$\angle \alpha$ — угол между наклонной и произвольной прямой, лежащей в плоскости $OAB$,
$\angle \beta$ — угол между проекцией наклонной и прямой $AB$.

## Мнемонический прием

1. Запишем наименования треугольника, в котором находится искомый угол.
2. Из трех букв $S$, $A$, $O$ составим различные пары. Получили три отрезка.
3. Зачеркнем тот, который не является общим для треугольников, имеющих данные углы.
4. Добавим по букве, чтобы получить наименование треугольника, включающего один из данных углов: $\alpha$ или $\beta$.
5. Найдем отрезок, состоящий из общих букв.
6. Для нахождения искомой зависимости разделим числитель и знаменатель на найденный отрезок.

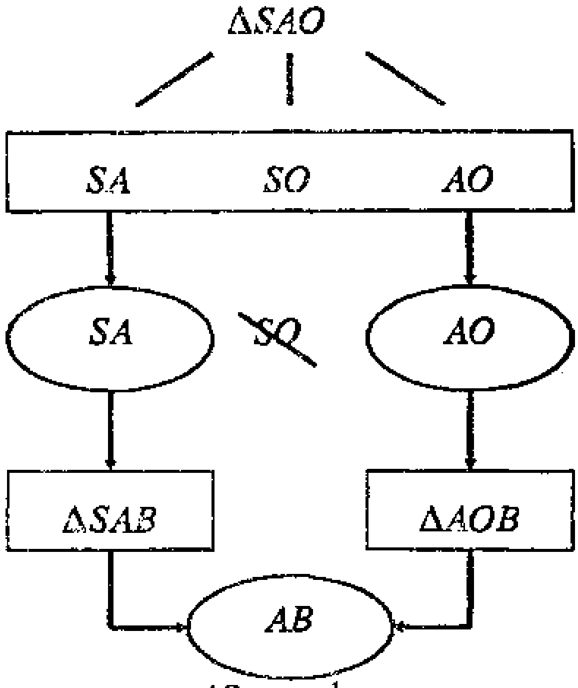
Доказать, что

$$\boxed{\cos x = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}}$$

(теорема о трех косинусах)

**Доказательство.**

$$\cos x = \frac{AO}{SA},$$



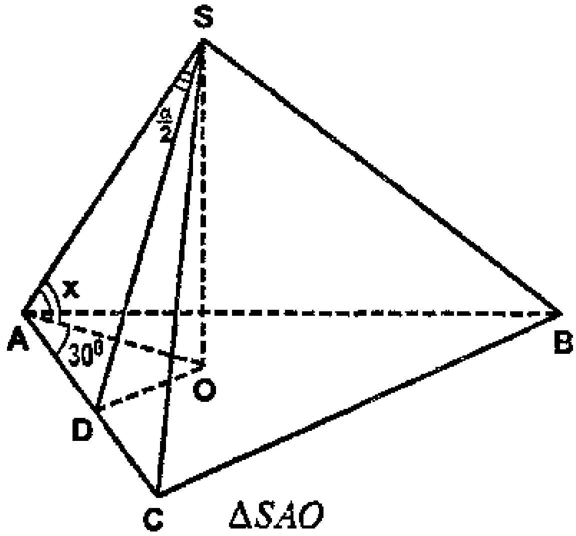

$$\cos x = \frac{\frac{AO}{AB}}{\frac{SA}{AB}} = \frac{\frac{1}{\cos\beta}}{\frac{1}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta},$$

что и требовалось доказать.

# Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом между боковым ребром и плоскостью основания

**Задача 477.**

а) пирамида треугольная




$\Delta SAO$

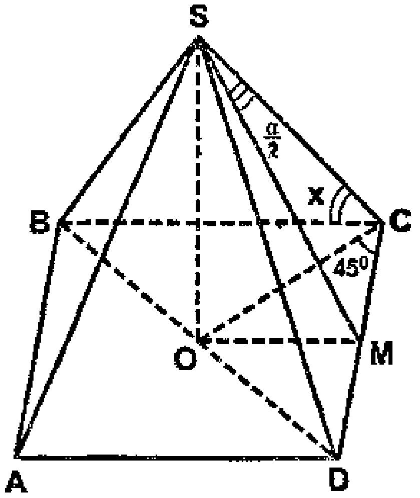
| $SA$ | $\cancel{SO}$ | $AO$ |
|---|---|---|

$\Delta SAD$ → $AD$ ← $\Delta AOD$

$$\cos x = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{AO}{AD}}{\frac{SA}{AD}} = \frac{\frac{1}{\cos 30^\circ}}{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{\cos x = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}}$$

б) пирамида четырехугольная




$\Delta SAO$

| $SC$ | $\cancel{SO}$ | $CO$ |
|---|---|---|

$\Delta SCM$ → $CM$ ← $\Delta COM$

$$\cos x = \frac{CO}{SC} = \frac{\frac{CO}{CM}}{\frac{SC}{CM}} = \frac{\frac{1}{\cos 45^\circ}}{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$\boxed{\cos x = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$$

***Проверить справедливость:***

в) пирамида шестиугольная

$$\boxed{\cos x = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}.}$$

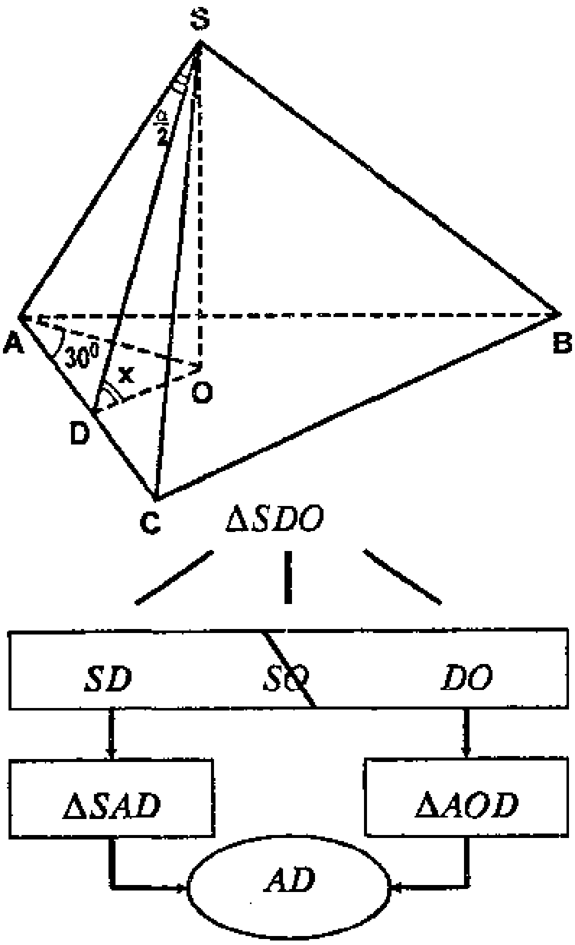
г) пирамида $n$-угольная

$$\boxed{\cos x = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{180^\circ}{n}}.}$$

## Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания

**Задача 478.**

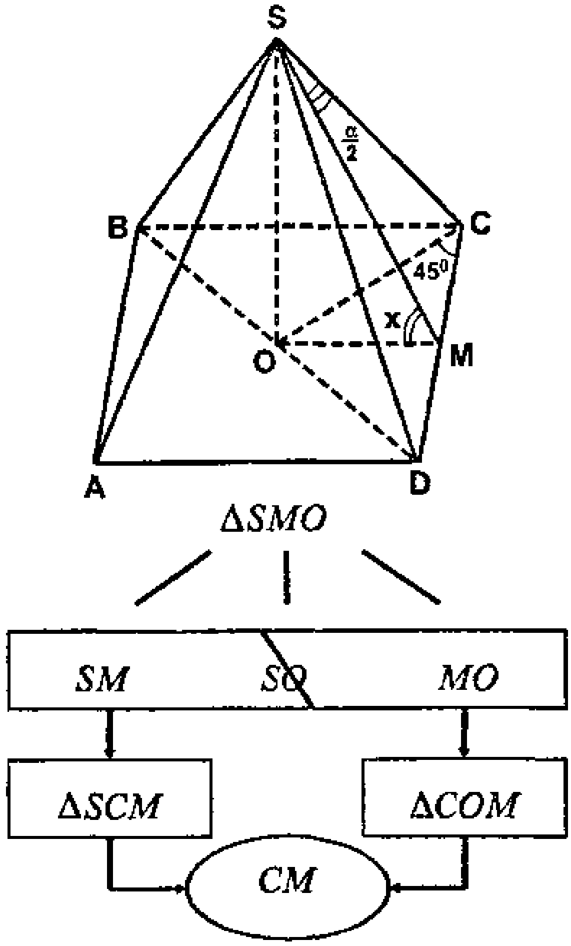
а) пирамида треугольная




$$\cos x = \frac{DO}{SD} = \frac{\frac{DO}{AD}}{\frac{SD}{AD}} = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}}$$

б) пирамида четырехугольная




$$\cos x = \frac{MO}{SM} = \frac{\frac{MO}{CM}}{\frac{SM}{CM}} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\boxed{\cos x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

***Проверить справедливость:***

в) пирамида шестиугольная

$$\boxed{\cos x = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.}$$

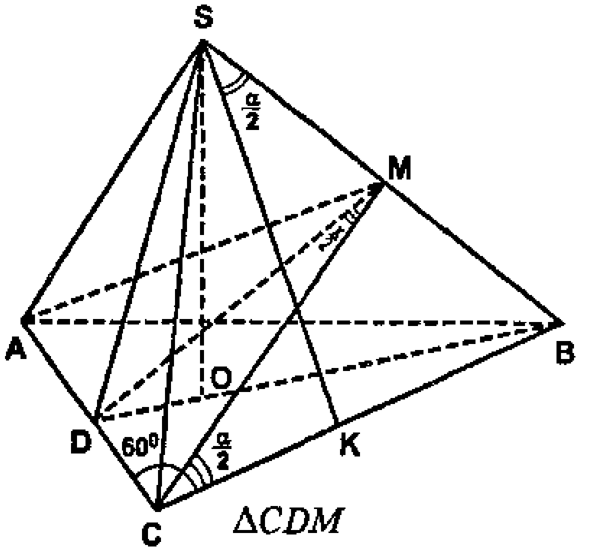
г) пирамида $n$-угольная

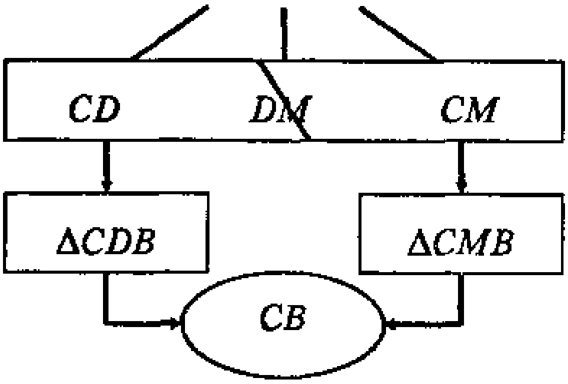
$$\boxed{\cos x = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.}$$

# Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре

**Задача 479.**

а) пирамида треугольная.
Проведем $MD \perp AC$ и $SK \perp CB$, $\angle KSB = \angle MCB$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами).

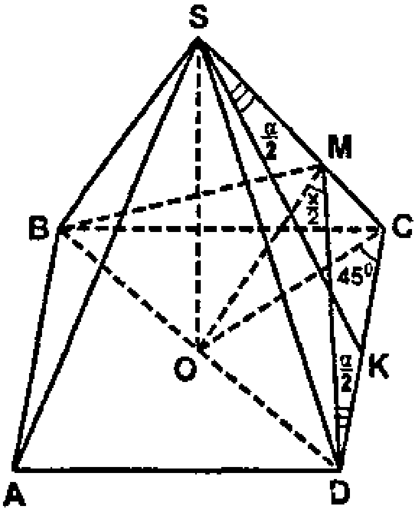


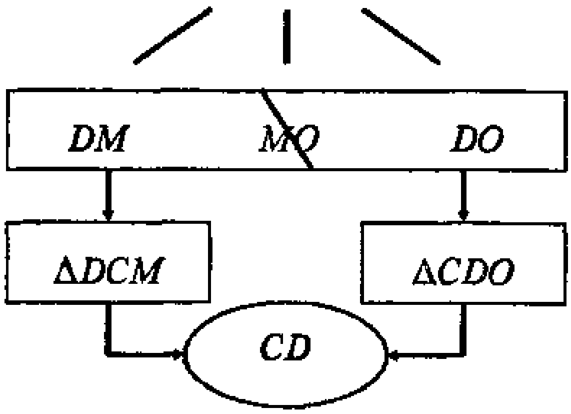




$$\sin\frac{x}{2} = \frac{DC}{CV} = \frac{\frac{DC}{CB}}{\frac{CM}{CB}} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.}$$

б) пирамида четырехугольная.
$MO \perp BD$ и $SM \perp DC$.
$\angle KSC = \angle MDC$.




$$\sin\frac{x}{2} = \frac{DO}{DM} = \frac{\frac{DO}{CD}}{\frac{DM}{CD}} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.}$$

***Проверить справедливость:***

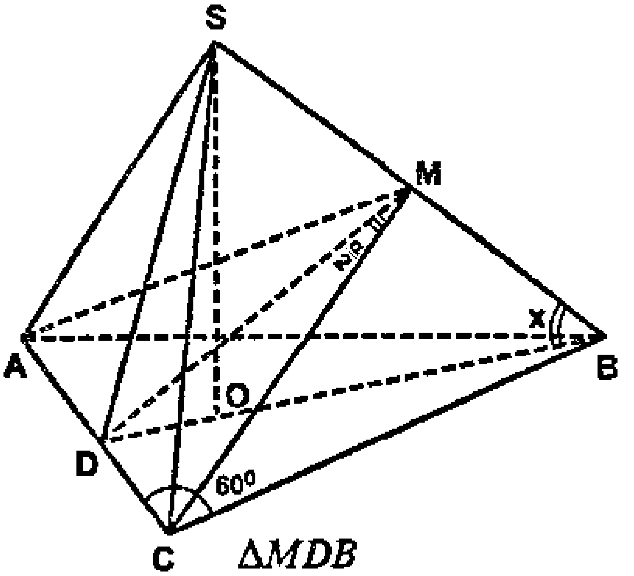
в) пирамида шестиугольная

$$\boxed{\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.}$$

# Зависимость между углом при боковом ребре и плоскостью основания правильной пирамиды

**Задача 480.**

а) пирамида треугольная




$\Delta MDB$

$DM \quad \cancel{MB} \quad DB$

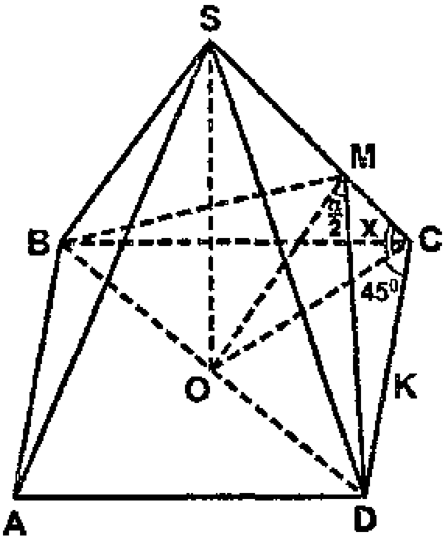
$DM \to \Delta DMC$, $DB \to \Delta DBC$

$\Delta DMC,\ \Delta DBC \to DC$

$$\sin x = \frac{DM}{DB} = \frac{\frac{DM}{DC}}{\frac{DB}{DC}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.}$$

б) пирамида четырехугольная




$\Delta CMO$

$MO \quad \cancel{CM} \quad CO$

$MO \to \Delta DMO$, $CO \to \Delta CDO$

$\Delta DMO,\ \Delta CDO \to DO$

$$\sin x = \frac{MO}{CO} = \frac{\frac{MO}{DO}}{\frac{CO}{DO}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg} 45^\circ} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\boxed{\sin x = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.}$$

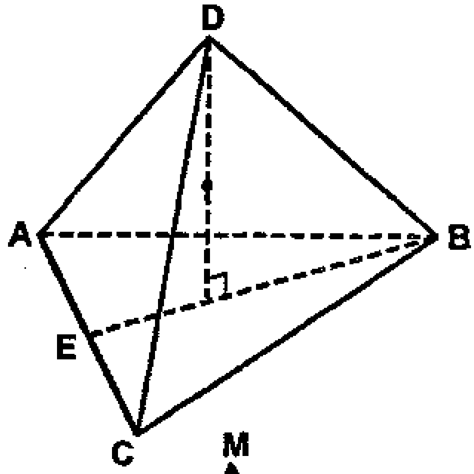
***Проверить справедливость:***

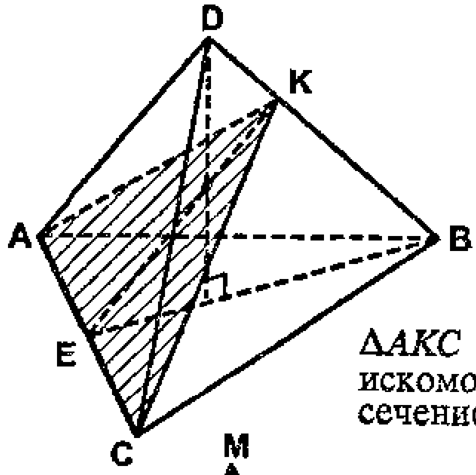
в) пирамида шестиугольная

$$\boxed{\sin x = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.}$$

## Построение сечений, проходящих через линии и точки, выделенные на рисунке

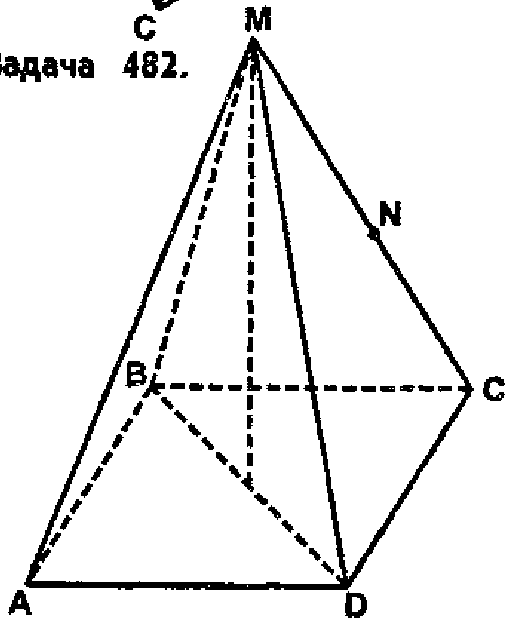
**Задача 481.**

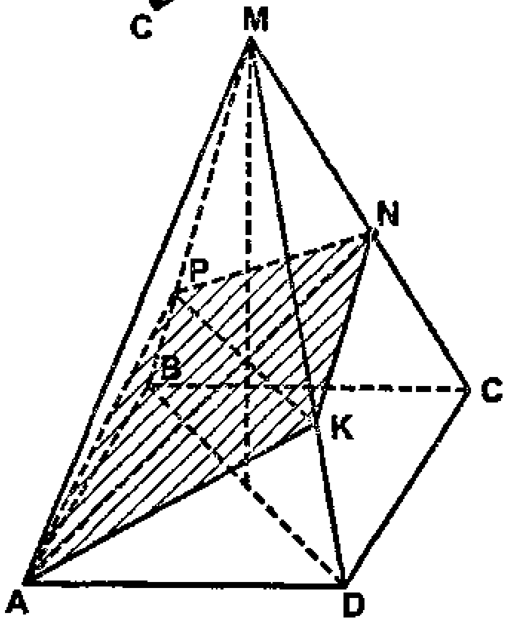



$\Delta AKC$ — искомое сечение

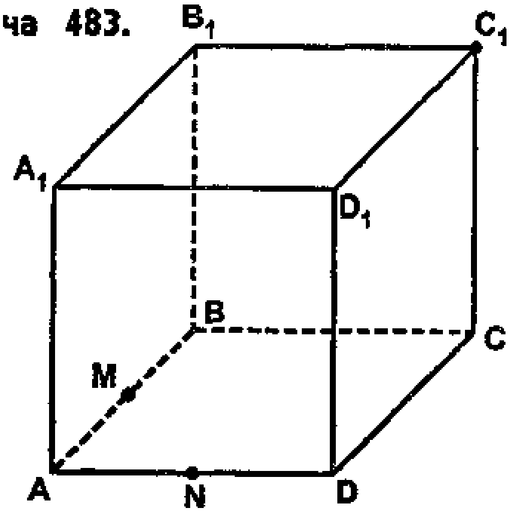
**Задача 482.**

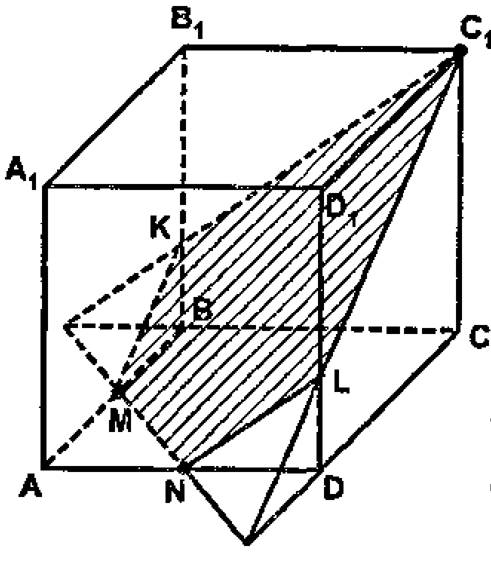



$APNK$ — искомое сечение

**Задача 483.**



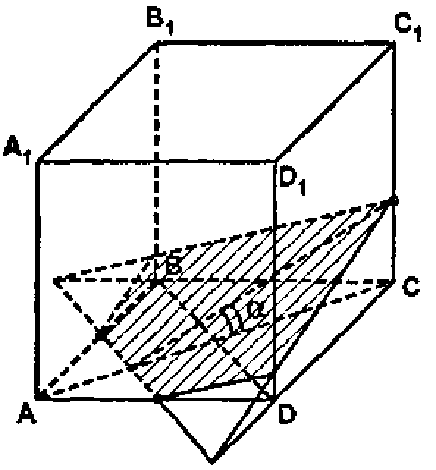

$MKC_1LN$ — искомое сечение

# Внимание, параметр!

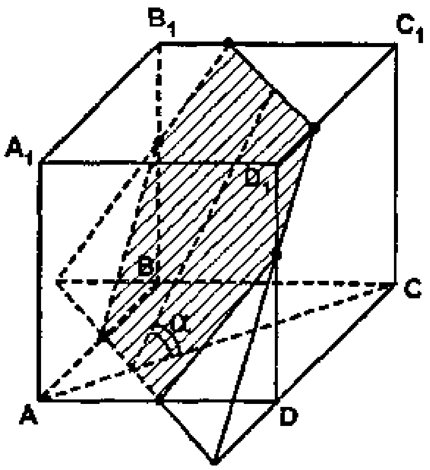
**Задача 484.**

В правильной четырехугольной пирамиде провести сечение, проходящее через середины смежных ребер основания под углом $\alpha$ к нему.

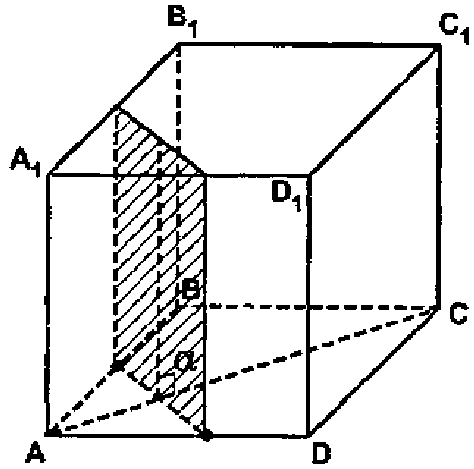
1 случай



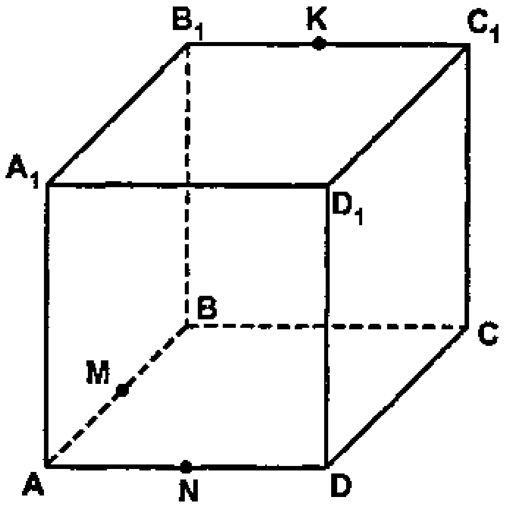

2 случай

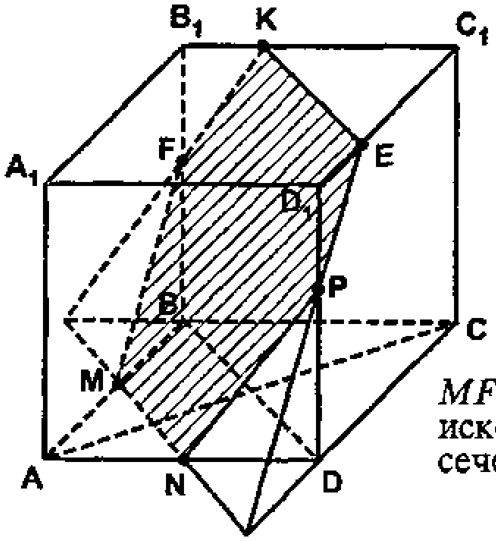



3 случай



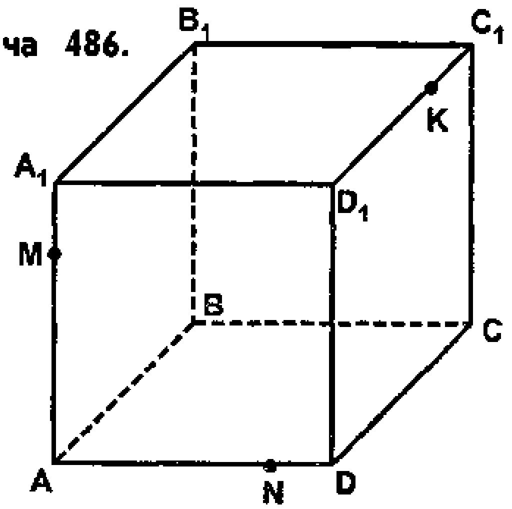

**Задача 485.**

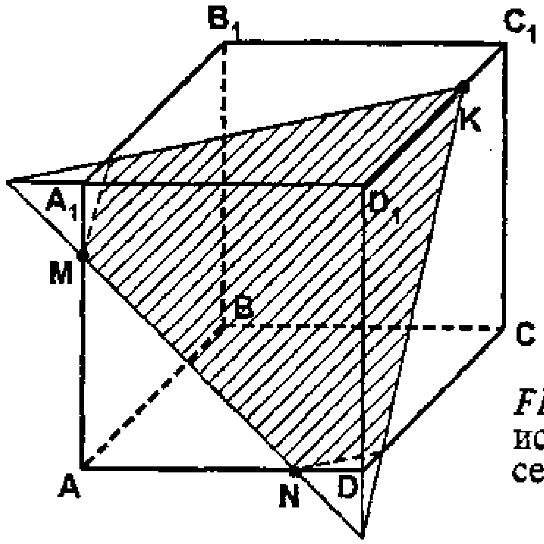



*MFKEPN* — искомое сечение

**Задача 486.**




*FKENM* — искомое сечение

**Задача 487.**