А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2009

УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

**Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено**

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*
(Наказ від 02.02.2009 р. № 56)

Відповідальні за підготовку до видання:

Головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України
Н. С. Прокопенко
Методист вищої категорії Інституту інноваційних технологій
і змісту освіти *О. О. Литвиненко*

*Експерти, які здійснювали експертизу
та рекомендували підручник до видання:*

І. В. Горобець, заступник директора ліцею «Перспектива» м. Запоріжжя
О. В. Горбачик, учитель Кузнецовської гімназії Рівненської області
Л. М. Кастранець, методист Чортківського районного методичного кабінету Тернопільської області
О. М. Бончук, методист із математики методичного кабінету Новоодеської РДА Миколаївської області
І. Г. Величко, доцент кафедри алгебри і геометрії Запорізького національного університету, кандидат фізико-математичних наук
Ю. А. Дрозд, завідувач відділу алгебри Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор
О. І. Глобін, старший науковий співробітник лабораторії математичної та фізичної освіти АПН України, кандидат педагогічних наук

ISBN 978-966-474-045-3

Від авторів

ЛЮБІ ДЕВ'ЯТИКЛАСНИКИ!

У цьому навчальному році ви продовжуватимете вивчати алгебру. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу і красиву науку, а отже, з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі у тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

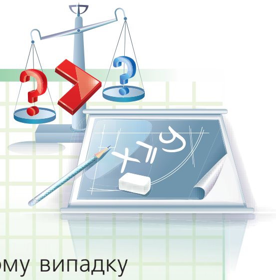
n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

⊙ доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

▲ закінчення доведення теореми;

 рубрика «Коли зроблено уроки».

§ 1 НЕРІВНОСТІ



- У цьому параграфі ви дізнаєтеся, у якому випадку число a вважають більшим (меншим), ніж число b, які властивості мають числові нерівності, у яких випадках можна додавати і множити числові нерівності, що називають розв'язком нерівності з однією змінною, розв'язком системи нерівностей з однією змінною.
- Ви навчитеся оцінювати значення виразів, доводити нерівності, розв'язувати лінійні нерівності і системи лінійних нерівностей з однією змінною.

1. Числові нерівності

На практиці вам часто доводиться порівнювати величини. Наприклад, площа України (603,7 тис. км^2) більша за площу Франції (551 тис. км^2), висота гори Роман-Кош (1545 м) менша від висоти гори Говерли (2061 м), відстань від Києва до Харкова (450 км) дорівнює 0,011 довжини екватора.

Коли ми порівнюємо величини, нам доводиться порівнювати числа. Результати цих порівнянь записують у вигляді числових рівностей і нерівностей, використовуючи знаки $=$, $>$, $<$.

Якщо число a більше за число b, то пишуть $a > b$; якщо число a менше від числа b, то пишуть $a < b$.

Очевидно, що $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$, $\sqrt{2} > 1$. Справедливість цих нерівностей випливає із правил порівняння дійсних чисел, які ви вивчали в попередніх класах.

Проте числа можна порівнювати не лише за допомогою правил, які було вивчено раніше. Інший спосіб, більш універсальний, заснований на таких очевидних міркуваннях: якщо різниця двох чисел є додатною, то зменшуване більше за від'ємник, якщо ж різниця від'ємна, то зменшуване менше від від'ємника.

Ці міркування підказують, що зручно прийняти таке означення.

Означення. **Число a вважають більшим за число b, якщо різниця $a - b$ є додатним числом. Число a вважають меншим від числа b, якщо різниця $a - b$ є від'ємним числом.**

Це означення дозволяє задачу про порівняння двох чисел звести до задачі про порівняння їх різниці з нулем. Наприклад, щоб порівняти значення виразів $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ і $2-\sqrt{3}$, розглянемо їх різницю:

$$\frac{2}{2+\sqrt{3}} - \left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-(4-3)}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Оскільки $\frac{1}{2+\sqrt{3}} > 0$, то $\frac{2}{2+\sqrt{3}} > 2-\sqrt{3}$.

Зауважимо, що різниця чисел a і b може бути або додатною, або від'ємною, або рівною нулю, тому *для будь-яких чисел a і b справедливе одне і тільки одне з таких співвідношень: $a > b$, $a < b$, $a = b$.*

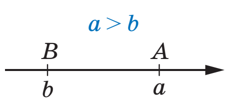


Рис. 1

Якщо $a > b$, то точка, яка зображує число a на координатній прямій, лежить правіше за точку, яка зображує число b (рис. 1).

Часто у повсякденному житті ми користуємося висловами «не більше», «не менше». Наприклад, відповідно до санітарних норм кількість учнів у 9 класі має бути не більшою ніж 35. Дорожній знак, зображений на рисунку 2, означає, що швидкість руху автомобіля має бути не меншою від 30 км/год.

Рис. 2

У математиці для вислову «не більше» використовують знак $\leqslant$ (читають: «менше або дорівнює»), а для вислову «не менше» — знак $\geqslant$ (читають: «більше або дорівнює»).

Якщо $a < b$ або $a = b$, то нерівність $a \leqslant b$ є правильною.

Якщо $a > b$ або $a = b$, то нерівність $a \geqslant b$ є правильною.

Наприклад, нерівності $7 \leqslant 7$, $7 \leqslant 15$, $-3 \geqslant -5$ є правильними. Зауважимо, що, наприклад, нерівність $7 \leqslant 5$ є неправильною.

Знаки $<$ і $>$ називають знаками **строгої** нерівності, а знаки $\leqslant$ і $\geqslant$ — знаками **нестрогої** нерівності.

ПРИКЛАД 1

Доведіть, що при будь-яких значеннях a є правильною нерівність

$$(a + 1)(a + 2) > a(a + 3).$$

Розв'язання

Для розв'язання достатньо показати, що при будь-якому значенні a різниця лівої і правої частин даної нерівності є додатною. Маємо:

$$(a + 1)(a + 2) - a(a + 3) = a^2 + 2a + a + 2 - a^2 - 3a = 2.$$

У таких випадках говорять, що **доведено нерівність**

$$(a + 1)(a + 2) > a(a + 3).$$

ПРИКЛАД 2

Доведіть нерівність $(a - 3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$, де a — будь-яке дійсне число.

Розв'язання

Розглянемо різницю лівої і правої частин даної нерівності:

$$(a - 3)^2 - (2a^2 - 6a + 10) = a^2 - 6a + 9 - 2a^2 + 6a - 10 = -a^2 - 1 = -a^2 + (-1).$$

При будь-якому значенні a маємо, що $-a^2 \leqslant 0$. Сума недодатного і від'ємного чисел є число від'ємне. Отже, $-a^2 + (-1) < 0$. Звідси випливає, що $(a - 3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$ при будь-якому значенні a.

ПРИКЛАД 3

Доведіть нерівність $\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, де $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Розв'язання

Розглянемо різницю лівої і правої частин даної нерівності. Маємо:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Вираз $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ набуває невід'ємних значень при будь-яких невід'ємних значеннях змінних a і b. Отже, нерівність, що доводиться, є правильною.

Зауважимо, що вираз $\sqrt{ab}$ називають **середнім геометричним** чисел a і b.

ПРИКЛАД 4

Доведіть, що $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$ при будь-яких значеннях a і b.

Розв'язання. Маємо:

$$a^2-ab+b^2=a^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2.$$

Оскільки $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2 \geqslant 0$ і $\frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$ при будь-яких значеннях a і b, то $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$ при будь-яких значеннях a і b.

Отже, $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$ при будь-яких значеннях a і b.

1. У якому випадку число a вважають більшим за число b?
2. У якому випадку число b вважають меншим від числа a?
3. Скільки різних співвідношень і яких саме може бути при порівнянні чисел a і b?
4. Як розташована на координатній прямій точка, яка зображує число a, відносно точки, яка зображує число b, якщо $a > b$?
5. Який символ використовують для вислову «не більше» і як цей символ читають?
6. Який символ використовують для вислову «не менше» і як цей символ читають?
7. У якому випадку є правильною нерівність $a \leqslant b$?
8. У якому випадку є правильною нерівність $a \geqslant b$?
9. Поясніть, які знаки називають знаками строгої, а які — нестрогої нерівності.

1.° Порівняйте числа a і b, якщо:
1) $a - b = 0{,}4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$.

2.° Відомо, що $m < n$. Чи може різниця $m - n$ дорівнювати числу: 1) 4,6; 2) −5,2; 3) 0?

3.° Яке з чисел x і y більше, якщо:
1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$?

4.° Як розташована на координатній прямій точка A (a) відносно точки B (b), якщо:
1) $a - b = 2$; 2) $a - b = -6$; 3) $a - b = 0$; 4) $b - a = \sqrt{2}$?

5.° Чи можуть одночасно виконуватися нерівності:
1) $a > b$ і $a < b$; 2) $a \geqslant b$ і $a \leqslant b$?

6.° Порівняйте значення виразів $(a - 2)^2$ і $a(a - 4)$ при значенні a, що дорівнює: 1) 6; 2) −3; 3) 2. Чи можна за результатами виконаних порівнянь стверджувати, що при будь-якому дійсному значенні a значення першого виразу більше за відповідне значення другого виразу? Доведіть, що при будь-якому дійсному значенні a значення першого виразу більше за відповідне значення другого виразу.

7.° Порівняйте значення виразів $4(b + 1)$ і $b - 2$ при значенні b, що дорівнює: 1) −1; 2) 0; 3) 3. Чи є правильним твердження, що при будь-якому дійсному значенні b значення виразу $4(b + 1)$ більше за відповідне значення виразу $b - 2$?

8.° Доведіть, що при будь-якому дійсному значенні змінної є правильною нерівність:
1) $(a + 3)(a + 1) > a(a + 4)$;
2) $3(b - 4) + 2b < 5b - 10$;
3) $(c - 4)(c + 4) > c^2 - 20$;
4) $x(x + 6) - x^2 < 2(3x + 1)$;
5) $(y + 5)(y - 2) \geqslant 3y - 10$;
6) $8m^2 - 6m + 1 \leqslant (3m - 1)^2$;
7) $a(a - 2) \geqslant -1$;
8) $(b + 7)^2 > 14b + 40$.

9.° Доведіть, що при будь-якому дійсному значенні змінної є правильною нерівність:
1) $(p - 3)(p + 4) < p(p + 1)$;
2) $(x + 1)^2 > x(x + 2)$;
3) $(a - 5)(a + 2) > (a + 5)(a - 8)$;
4) $y(y + 8) < (y + 4)^2$;
5) $(2a - 5)^2 \leqslant 6a^2 - 20a + 25$;
6) $a^2 + 4 \geqslant 4a$.

10.• Чи є правильним твердження:

1) якщо $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$;
2) якщо $a > 1$, то $\frac{2}{a} < 2$;
3) якщо $a < 1$, то $\frac{2}{a} > 2$;
4) якщо $\frac{a}{b} > 1$, то $a > b$;
5) якщо $a^2 > 1$, то $a > 1$?

11.• Доведіть нерівність:
1) $2a^2 - 8a + 16 > 0$;
2) $4b^2 + 4b + 3 > 0$;
3) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;
4) $(3a + 2)(2a - 4) - (2a - 5)^2 > 3(4a - 12)$;
5) $a(a - 3) > 5(a - 4)$;
6) $(a - b)(a + 5b) \leqslant (2a + b)(a + 4b) + ab$.

12.• Доведіть нерівність:
1) $28a - 32 \leqslant 7a^2 - 4$;
2) $9x^2 - 6xy + 4y^2 \geqslant 0$;
3) $3(b - 1) < b(b + 1)$;
4) $(4p - 1)(p + 1) - (p - 3)(p + 3) > 3(p^2 + p)$.

13.• Доведіть, що:
1) $a^3 - 6a^2 + a - 6 \geqslant 0$, якщо $a \geqslant 6$;
2) $ab + 1 > a + b$, якщо $a > 1$ і $b > 1$;
3) $\frac{a+3}{3} + \frac{3a-2}{4} < a$, якщо $a < -6$.

14.• Доведіть, що:
1) $ab(b - a) \leqslant a^3 - b^3$, якщо $a \geqslant b$;
2) $\frac{a-1}{2} - \frac{a-2}{3} > \frac{1}{2}$, якщо $a > 2$.

15.• Порівняйте:
1) суму квадратів двох довільних дійсних чисел та їх подвоєний добуток;
2) суму квадратів двох додатних чисел і квадрат їх суми.

16.• Дано три послідовні натуральні числа. Порівняйте:
1) квадрат середнього з цих чисел і добуток двох інших;
2) подвоєний квадрат середнього з цих чисел і суму квадратів двох інших.

17.• Порівняйте суму квадратів двох від'ємних чисел і квадрат їх суми.

18.• Як зміниться — збільшиться чи зменшиться — правильний дріб $\frac{a}{b}$, якщо його чисельник і знаменник збільшити на одне й те саме число?

19.• Як зміниться — збільшиться чи зменшиться — неправильний дріб $\frac{a}{b}$, якщо його чисельник і знаменник збільшити на одне й те саме число?

20.• Доведіть, що сума будь-яких двох взаємно обернених додатних чисел не менша від 2.

21.• Доведіть, що сума будь-яких двох взаємно обернених від'ємних чисел не більша за -2.

22.• Чи є правильною дана нерівність при всіх дійсних значеннях a і b:

1) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1} > 1$; 2) $\frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} > -1$?

23.• Доведіть, що при всіх дійсних значеннях змінної є правильною нерівність:

1) $\frac{a^2}{a^4 + 1} \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\frac{(5a+1)^2}{5} \geqslant 4a$.

24.• Доведіть, що коли $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$.

25.•• Доведіть, що коли $a < b < c$, то $a < \frac{a+b+c}{3} < c$.

26.•• Чи є правильною нерівність $\frac{a^2+4}{2} \geqslant \sqrt{a^2+3}$ при всіх дійсних значеннях a?

27.•• Доведіть, що при всіх дійсних значеннях змінної є правильною нерівність $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 2$.

28.•• Доведіть нерівність:

1) $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \geqslant 0$;
2) $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0$;
3) $2m^2 - 6mn + 9n^2 - 6m + 9 \geqslant 0$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geqslant 4(a + b + c)$;
5) $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geqslant 4ab$.

29.•• Доведіть нерівність:

1) $a^2 + b^2 - 16a + 14b + 114 > 0$;
2) $x^2 + y^2 + 10 \geqslant 6x - 2y$;
3) $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4 \geqslant 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

30. Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d < 0$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) bc; 3) $\frac{a}{b}$; 5) $\frac{ac}{d}$; 7) $abcd$;
2) cd; 4) $\frac{ab}{c}$; 6) $\frac{a}{bc}$; 8) $\frac{b}{acd}$.

31. Що можна сказати про знаки чисел a і b, якщо:

1) $ab > 0$; 3) $\frac{a}{b} > 0$; 5) $a^2b > 0$;
2) $ab < 0$; 4) $\frac{a}{b} < 0$; 6) $a^2b < 0$?

32. Поясніть, чому при будь-яких дійсних значеннях змінної (чи змінних) є правильною нерівність:

1) $a^2 \geqslant 0$;
2) $a^2 + 1 > 0$;
3) $(a + 1)^2 \geqslant 0$;
4) $a^2 - 4a + 4 \geqslant 0$;
5) $a^2 + b^2 \geqslant 0$;
6) $a^2 + b^2 + 2 > 0$;
7) $(a - 2)^2 + (b + 1)^2 \geqslant 0$;
8) $\sqrt{a^2 + 3} > 0$.

33. Порівняйте з нулем значення виразу, де a — довільне дійсне число:

1) $4 + a^2$;
2) $(4 - a)^2$;
3) $-4 - a^2$;
4) $-4 - (a - 4)^2$;
5) $(-4)^8 + (a - 8)^4$;
6) $(4 - a)^2 + (4a - 1000)^2$.

34. Спростіть вираз:

1) $2a(5a - 7) - 5a(3 - 2a)$;
2) $(2b - 3)(4b + 9)$;
3) $(2c - 6)(8c + 5) - (5c + 2)(5c - 2)$;
4) $16m^2 - (3 - 4m)(3 + 4m)$;
5) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2$;
6) $(x - 4)(x + 4) - (x - 8)^2$.

2. Основні властивості числових нерівностей

У цьому пункті розглянемо властивості числових нерівностей, які часто використовують під час розв'язування задач. Їх називають **основними властивостями числових нерівностей.**

Теорема 2.1. ***Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.***

Доведення. ⊙ Оскільки за умовою $a > b$ і $b > c$, то різниці $a - b$ і $b - c$ є додатними числами. Тоді додатною буде їх сума $(a - b) + (b - c)$. Маємо: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Отже, різниця $a - c$ є додатним числом, а тому $a > c$. ▲

Аналогічно доводять властивість: ***якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.***

Теорему 2.1 можна проілюструвати геометрично: якщо на координатній прямій точка A (a) лежить правіше за точку B (b), а точка B (b) — правіше за точку C (c), то точка A (a) лежить правіше за точку C (c) (рис. 3).

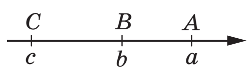


Рис. 3

Теорема 2.2. ***Якщо $a > b$ і c — будь-яке число, то $a + c > b + c$.***

Доведення. ⊙ Розглянемо різницю $(a + c) - (b + c)$. Маємо: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Оскільки за умовою $a > b$, то різниця $a - b$ є додатним числом. Отже, $a + c > b + c$. ▲

Аналогічно доводять властивість: ***якщо $a < b$ і c — будь-яке число, то $a + c < b + c$.***

Оскільки дію віднімання можна замінити дією додавання ($a - c = a + (-c)$), то, ураховуючи теорему 2.2, можна зробити такий висновок.

Якщо до обох частин правильної нерівності додати або від обох частин правильної нерівності відняти одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність.

Наслідок. ***Якщо будь-який доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в другу, замінивши знак доданка на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.***

Доведення. ⊙ Нехай нерівність $a > b + c$ є правильною. Віднімемо від обох її частин число c. Отримаємо:

$a - c > b + c - c$, тобто $a - c > b$. ▲

Теорема 2.3. ***Якщо $a > b$ і c — додатне число, то $ac > bc$. Якщо $a > b$ і c — від'ємне число, то $ac < bc$.***

Доведення. ⊙ Розглянемо різницю $ac - bc$. Маємо: $ac - bc = c(a - b)$.

За умовою $a > b$, отже, різниця $a - b$ є додатним числом.

Якщо $c > 0$, то добуток $c(a - b)$ є додатним числом, отже, різниця $ac - bc$ є додатною, тобто $ac > bc$.

Якщо $c < 0$, то добуток $c(a - b)$ є від'ємним числом, отже, різниця $ac - bc$ є від'ємною, тобто $ac < bc$. ▲

Аналогічно доводять властивість: ***якщо $a < b$ і c — додатне число, то $ac < bc$. Якщо $a < b$ і c — від'ємне число, то $ac > bc$.***

Оскільки дію ділення можна замінити дією множення $\left(\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}\right)$, то, ураховуючи теорему 2.3, можна зробити такий висновок.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число і замінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Наслідок. ***Якщо $ab > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$*** □

Доведення. ⊙ Поділимо обидві частини нерівності $a > b$ на додатне число ab. Отримаємо правильну нерівність $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, тобто $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Звідси $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ▲

Звернемо увагу: вимога, щоб числа a і b були однакового знака ($ab > 0$), є суттєвою. Дійсно, нерівність $5 > -3$ є правильною, проте нерівність $\frac{1}{5} < -\frac{1}{3}$ є неправильною.

У теоремах цього пункту йшлося про строгі нерівності. Аналогічні властивості притаманні й нестрогим нерівностям. Наприклад, якщо $a \geqslant b$ і c — будь-яке число, то $a + c \geqslant b + c$.

1. Яке з чисел a і c більше, якщо відомо, що $a > b$ і $b > c$?
2. Сформулюйте теорему про додавання до обох частин нерівності одного й того самого числа.
3. Сформулюйте наслідок із теореми про додавання до обох частин нерівності одного й того самого числа.
4. Сформулюйте теорему про множення обох частин нерівності на одне й те саме число.

35.° Відомо, що $a > 6$. Чи є правильною нерівність:
1) $a > 4$; 2) $a \geqslant 5,9$; 3) $a > 7$?

36.° Відомо, що $a < b$ і $b < c$. Яке з тверджень є правильним:
1) $a > c$; 2) $a = c$; 3) $c > a$?

37.° Запишіть нерівність, яку дістанемо, якщо:
1) до обох частин нерівності $-3 < 4$ додамо число 5; число -2;
2) від обох частин нерівності $-10 < -6$ віднімемо число 3; число -4;
3) обидві частини нерівності $7 > -2$ помножимо на число 5; на число -1;
4) обидві частини нерівності $12 < 18$ поділимо на число 6; на число -2.

38.° Відомо, що $a > b$. Запишіть нерівність, яку дістанемо, якщо:
1) до обох частин даної нерівності додамо число 8;
2) від обох частин даної нерівності віднімемо число -6;
3) обидві частини даної нерівності помножимо на число 12;
4) обидві частини даної нерівності помножимо на число $-\frac{1}{3}$;

5) обидві частини даної нерівності поділимо на число $\frac{2}{7}$;

6) обидві частини даної нерівності поділимо на число -4.

39.° Відомо, що $b > a$, $c < a$ і $d > b$. Порівняйте числа:
1) a і d;
2) b і c.

40.° Розташуйте у порядку зростання числа a, b, c і 0, якщо $a > b$, $c < b$, $0 < b$ і $0 > c$.

41.° Відомо, що $a > 4$. Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $a - 3$;
2) $2 - a$;
3) $(a - 3)(a - 2)$;
4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;
5) $(1 - a)^2(4 - a)$.

42.° Відомо, що $-2 < b < 1$. Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $b + 2$;
2) $1 - b$;
3) $b - 2$;
4) $(b - 1)(b - 3)$;
5) $(b + 2)(b - 4)^2$;
6) $(b - 3)(b + 3)(b - 2)^2$.

43.° Дано: $a > b$. Порівняйте:
1) $a + 9$ і $b + 9$;
2) $b - 6$ і $a - 6$;
3) $1,8a$ і $1,8b$;
4) $-a$ і $-b$;
5) $-40b$ і $-40a$;
6) $\frac{a}{20}$ і $\frac{b}{20}$;
7) $2a - 3$ і $2b - 3$;
8) $5 - 8a$ і $5 - 8b$.

44.° Відомо, що $1 \leqslant m < 2$. Які з наведених нерівностей є правильними:
1) $-1 \leqslant -m < -2$;
2) $-2 < -m \leqslant -1$;
3) $-1 \geqslant -m > -2$;
4) $-2 > -m \geqslant -1$?

45.° Дано: $-3a > -3b$. Порівняйте:
1) a і b;
2) $\frac{2}{7}a$ і $\frac{2}{7}b$;
3) $b - 4$ і $a - 4$;
4) $-\frac{5}{9}b$ і $-\frac{5}{9}a$;
5) $3a + 2$ і $3b + 2$;
6) $-5a + 10$ і $-5b + 10$.

46.° Відомо, що $a > b$. Розташуйте у порядку спадання числа $a + 7$, $b - 3$, $a + 4$, $b - 2$, b.

47.• Дано: $a < b$. Порівняйте:
1) $a - 5$ і b; 2) a і $b + 6$; 3) $a + 3$ і $b - 2$.

48.• Порівняйте числа a і b, коли відомо, що:
1) $a > c$ і $c > b + 3$; 2) $a > c$ і $c - 1 > b + d^2$,
де c і d — деякі дійсні числа.

49.• Порівняйте числа a і 0, якщо:
1) $7a < 8a$; 3) $-6a > -8a$;
2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$; 4) $-0{,}02a > -0{,}2a$.

50.• Дано: $a > -2$. Доведіть, що:
1) $7a + 10 > -4$; 2) $-6a - 3 < 10$.

51.• Дано: $b \leqslant 10$. Доведіть, що:
1) $5b - 9 \leqslant 41$; 2) $1 - 2b > -21$.

52.• Чи є правильним твердження:
1) якщо $a > b$, то $a > -b$;
2) якщо $a > b$, то $2a > b$;
3) якщо $a > b$, то $2a + 1 > 2b$;
4) якщо $b > a$, то $\frac{b}{a} > 1$;
5) якщо $a > b + 2$ і $b - 3 > 4$, то $a > 9$;
6) якщо $a > b$, то $ab > b^2$;
7) оскільки $5 > 3$, то $5a^2 > 3a^2$;
8) оскільки $5 > 3$, то $5(a^2 + 1) > 3(a^2 + 1)$?

53.•• Запишіть нерівність, яку отримаємо, якщо:
1) обидві частини нерівності $a > 2$ помножимо на a;
2) обидві частини нерівності $b < -1$ помножимо на b;
3) обидві частини нерівності $m < -3$ помножимо на $-m$;
4) обидві частини нерівності $c > -4$ помножимо на c.

54.•• Запишіть нерівність, яку отримаємо, якщо:
1) обидві частини нерівності $a < -a^2$ поділимо на a;
2) обидві частини нерівності $a > 2a^2$ поділимо на a;
3) обидві частини нерівності $a^3 > a^2$ поділимо на $-a$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

55. Відомо, що $a^2 + b^2 = 18$ і $(a + b)^2 = 20$. Чому дорівнює значення виразу ab?

56. У Дмитра у 2 рази більше марок, ніж у Петра, а в Петра у 2 рази більше марок, ніж у Михайла. Якому з наведених чисел може дорівнювати кількість марок, що є у Дмитра?

1) 18; 2) 22; 3) 24; 4) 30.

57. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2 + b^2}{2a^2 + 2ab} + \frac{b}{a + b}$;

2) $\frac{a^2 + 9}{a^2 - 9} - \frac{a}{a + 3}$;

3) $\frac{c + 1}{3c} : \frac{c^2 - 1}{6c^2}$;

4) $\frac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 - n^2} : (m + n)$.

58. Моторний човен за один і той самий час може пропливти 48 км за течією річки або 36 км проти течії. Яка власна швидкість човна, якщо швидкість течії становить 2 км/год?

3. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу

Розглянемо приклади.

1) Якщо з першого поля зібрали не менше ніж 40 т жита, а з другого поля — не менше ніж 45 т, то очевидно, що з двох полів разом зібрали не менше ніж 85 т жита.

2) Якщо довжина прямокутника не більша за 70 см, а ширина — не більша за 40 см, то зрозуміло, що його площа не більша за 2800 см^2.

Висновки з цих прикладів є інтуїтивно очевидними. Правильність їх підтверджують такі теореми.

Теорема 3.1 (про почленне додавання нерівностей). ***Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.***

Доведення. ⊙ Розглянемо різницю $(a + c) - (b + d)$. Маємо: $(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d)$.

Оскільки $a > b$ і $c > d$, то різниці $a - b$ і $c - d$ є додатними числами. Отже, різниця, що розглядається, є додатною, тобто $a + c > b + d$. ▲

Аналогічно доводиться властивість: ***якщо*** $\boldsymbol{a < b}$ ***і*** $\boldsymbol{c < d}$***, то*** $\boldsymbol{a + c < b + d}$.

Нерівності $a > b$ і $c > d$ (або $a < b$ і $c < d$) називають **нерівностями однакового знака**, а нерівності $a > b$ і $c < d$ (або $a < b$ і $c > d$) — **нерівностями протилежних знаків.**

Кажуть, що нерівність $a + c > b + d$ отримана з нерівностей $a > b$ і $c > d$ шляхом почленного додавання.

Теорема 3.1 означає, що ***при почленному додаванні правильних нерівностей однакового знака результатом є правильна нерівність того самого знака.***

Зазначимо, що теорема 3.1 справедлива й у випадку почленного додавання трьох і більше нерівностей. Наприклад, якщо $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ і $a_3 > b_3$, то $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

Теорема 3.2 (про почленне множення нерівностей). ***Якщо*** $\boldsymbol{a > b}$, $\boldsymbol{c > d}$ ***і*** $\boldsymbol{a, b, c, d}$ ***— додатні числа, то*** $\boldsymbol{ac > bd}$.

Доведення. ⊙ Розглянемо різницю $ac - bd$. Маємо:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d).$$

За умовою $a - b > 0$, $c - d > 0$, $c > 0$, $b > 0$. Отже, різниця, що розглядається, є додатною. З цього випливає, що $ac > bd$. ▲

Аналогічно доводять властивість: ***якщо*** $\boldsymbol{a < b}$, $\boldsymbol{c < d}$ ***і*** $\boldsymbol{a, b, c, d}$ ***— додатні числа, то*** $\boldsymbol{ac < bd}$.

Кажуть, що нерівність $ac > bd$ отримана з нерівностей $a > b$ і $c > d$ шляхом почленного множення.

Теорема 3.2 означає, що ***при почленному множенні правильних нерівностей однакового знака, у яких ліві та праві частини — додатні числа, результатом є правильна нерівність того самого знака.***

Звернемо увагу: вимога, щоб обидві частини нерівностей, які перемножують, були додатними, є суттєвою. Справді, розглянемо дві правильні нерівності $-2 > -3$ і $4 > 1$. Помноживши почленно ці нерівності, отримуємо нерівність $-8 > -3$, яка не є правильною.

Зауважимо, що теорема 3.2 справедлива й у разі почленного множення трьох і більше нерівностей. Наприклад, якщо a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 – додатні числа, причому $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, то $a_1a_2a_3 > b_1b_2b_3$.

Наслідок. ***Якщо a > b і a, b — додатні числа, то $a^n > b^n$, де n — натуральне число.***

Доведення. Запишемо n правильних нерівностей $a > b$:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \dots \\ a > b \end{array}\right\} n \text{ нерівностей}$$

Оскільки a і b — додатні числа, то можемо помножити почленно n записаних нерівностей. Отримаємо $a^n > b^n$. ▲

Зазначимо, що всі розглянуті властивості нерівностей є правильними і в тому випадку, коли нерівності є нестрогими:

якщо $a \geqslant b$ і $c \geqslant d$, то $a + c \geqslant b + d$;

якщо $a \geqslant b$, $c \geqslant d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac \geqslant bd$;

якщо $a \geqslant b$ і a, b — додатні числа, то $a^n \geqslant b^n$, де n — натуральне число.

Часто значення величин, які є результатом вимірювань, не є точними. Вимірювальні прилади, як правило, дозволяють лише встановити **межі**, між якими знаходиться точне значення.

Нехай, наприклад, у результаті вимірювань для ширини x і довжини y прямокутника було встановлено, що 2,5 см $< x <$ 2,7 см і 4,1 см $< y <$ 4,3 см. Тоді за допомогою теореми 3.2 можна оцінити площу прямокутника. Маємо:

$$\times \begin{array}{c} 2{,}5 \text{ см} < x < 2{,}7 \text{ см} \\ 4{,}1 \text{ см} < y < 4{,}3 \text{ см} \\ \hline 10{,}25 \text{ см}^2 < xy < 11{,}61 \text{ см}^2. \end{array}$$

Узагалі, якщо відомо значення меж величин, то, використовуючи властивості числових нерівностей, можна знайти межі значення виразу, який містить ці величини, тобто **оцінити** його значення.

ПРИКЛАД 1

Дано: $6 < a < 8$ і $10 < b < 12$. Оцініть значення виразу:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$.

Розв'язання

1) Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$$+\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 16 < a + b < 20. \end{array}$$

2) Помноживши кожну частину нерівності $10 < b < 12$ на -1, отримуємо: $-10 > -b > -12$ або $-12 < -b < -10$. Ураховуючи, що $a - b = a + (-b)$, далі маємо:

$$+\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ -12 < -b < -10 \\ \hline -6 < a - b < -2. \end{array}$$

3) Оскільки $a > 6$ і $b > 10$, то a і b набувають додатних значень. Застосувавши теорему про почленне множення нерівностей, отримуємо:

$$\times\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 60 < ab < 96. \end{array}$$

4) Оскільки $10 < b < 12$, то $\frac{1}{10} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12}$ або $\frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$. Ураховуючи, що $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, маємо:

$$\times\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ \frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10} \\ \hline \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}. \end{array}$$

5) Помножимо кожну частину нерівності $6 < a < 8$ на 3, а кожну частину нерівності $10 < b < 12$ на $-\frac{1}{2}$:

$6 < a < 8 \,\Big|\cdot 3;$

$18 < 3a < 24;$

$10 < b < 12 \,\Big|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right);$

$-5 > -\frac{1}{2}b > -6;$

$-6 < -\frac{1}{2}b < -5.$

Додамо отримані нерівності:

$$+\begin{array}{r} 18 < 3a < 24 \\ -6 < -\frac{1}{2}b < -5 \\ \hline 12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19. \end{array}$$

В і д п о в і д ь: 1) $16 < a + b < 20$; 2) $-6 < a - b < -2$; 3) $60 < ab < 96$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$; 5) $12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19$.

ПРИКЛАД 2

Доведіть, що $\sqrt{24} + \sqrt{47} < 12$.

Розв'язання

Оскільки $\sqrt{24} < 5$ і $\sqrt{47} < 7$, то $\sqrt{24} + \sqrt{47} < 5 + 7 = 12$.

1. Сформулюйте теорему про почленне додавання нерівностей.
2. Поясніть, які нерівності називають нерівностями однакового знака, а які — нерівностями протилежних знаків.
3. Що є результатом почленного додавання нерівностей однакового знака?
4. Сформулюйте теорему про почленне множення нерівностей.
5. Що є результатом почленного множення нерівностей однакового знака?
6. Сформулюйте наслідок з теореми про почленне множення нерівностей.

59.° Запишіть нерівність, яку дістанемо, якщо:
1) додамо почленно нерівності $10 > -6$ і $8 > 5$;
2) перемножимо почленно нерівності $2 < 7$ і $3 < 4$;
3) перемножимо почленно нерівності $1{,}2 > 0{,}9$ і $5 > \frac{1}{3}$.

60.° Запишіть нерівність, яку дістанемо, якщо:
1) додамо почленно нерівності $-9 < -4$ і $-6 < 4$;
2) перемножимо почленно нерівності $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$ і $24 < 27$.

61.° Дано: $-3 < a < 4$. Оцініть значення виразу:

1) $2a$; 3) $a + 2$; 5) $3a + 1$; 7) $-4a$;
2) $\frac{a}{3}$; 4) $a - 1$; 6) $-a$; 8) $-5a + 3$.

62.° Дано: $2 < b < 6$. Оцініть значення виразу:

1) $\frac{1}{2}b$; 2) $b - 6$; 3) $2b + 5$; 4) $4 - b$.

63.° Відомо, що $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$. Оцініть значення виразу:

1) $3\sqrt{7}$; 2) $-2\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{7} + 1,3$; 4) $0,1\sqrt{7} + 0,3$.

64.° Дано: $5 < a < 6$ і $4 < b < 7$. Оцініть значення виразу:

1) $a + b$; 2) ab; 3) $a - b$.

65.° Відомо, що $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ і $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$. Оцініть значення виразу:

1) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{15}$.

66.° Дано: $2 < x < 4$. Оцініть значення виразу $\frac{1}{x}$.

67.° Оцініть середнє арифметичне значень a і b, коли відомо, що $2,5 < a < 2,6$ і $3,1 < b < 3,2$.

68.° Оцініть периметр рівнобедреного трикутника з основою a см і бічною стороною b см, якщо $10 < a < 14$ і $12 < b < 18$.

69.° Оцініть периметр паралелограма зі сторонами a см і b см, якщо $15 \leqslant a \leqslant 19$ і $6 \leqslant b \leqslant 11$.

70.• Чи є правильним твердження:

1) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 9$;
2) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 8$;
3) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 9,2$;
4) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a - b > -5$;
5) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $b - a > 5$;
6) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $ab > 13$;
7) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $3a + 2b > 20$;
8) якщо $a > 2$ і $b < -7$, то $a - b > 9$;
9) якщо $a < 2$ і $b < 7$, то $ab < 14$;
10) якщо $a > 2$, то $a^2 > 4$;
11) якщо $a < 2$, то $a^2 < 4$;
12) якщо $a > 2$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$;
13) якщо $a < 2$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{2}$;
14) якщо $-3 < a < 3$, то $-\frac{1}{3} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$?

71.• Дано: $a > 2{,}4$ і $b > 1{,}6$. Порівняйте:

1) $a + \frac{3}{4}b$ і 3,6;
2) $(a + b)^2$ і 16;
3) $(a - 0{,}4)(b + 1{,}4)$ і 6.

72.• Відомо, що $a > 3$ і $b > -2$. Доведіть, що $5a + 4b > 7$.

73.• Відомо, що $a > 5$ і $b < 2$. Доведіть, що $6a - 7b > 16$.

74.• Дано: $5 < a < 8$ і $3 < b < 6$. Оцініть значення виразу:

1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{2b}{3a}$.

75.• Дано: $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ і $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$. Оцініть значення виразу:

1) $6x + 14y$; 2) $28y - 12x$; 3) $\frac{y}{x}$.

76.• Порівняйте значення виразів:

1) 2^{24} і 9^8; 2) $0{,}3^{20}$ і $0{,}1^{10}$; 3) $0{,}0015^{10}$ і $0{,}2^{40}$.

77.• Доведіть, що периметр чотирикутника більший за суму його діагоналей.

78.• Доведіть, що кожна діагональ опуклого чотирикутника менша від його півпериметра.

79.• Доведіть, що сума двох протилежних сторін опуклого чотирикутника менша від суми його діагоналей.

80.• Доведіть твердження:

1) якщо $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$;
2) якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a^2 > b^2$, то $a > b$.

81.• Доведіть, що коли $a < b < 0$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

82.• Відомо, що $b > 0$ і $a > b$. Чи є правильною при всіх указаних значеннях a і b нерівність:

1) $a^2 + a > b^2 + b$;
2) $a^2 - a > b^2 - b$;
3) $2 - a^2 < 2 - b^2$;
4) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$?

83.•• Доведіть, що:

1) $\sqrt{27} + \sqrt{65} > 13$;
2) $\sqrt{14} + \sqrt{15} < 8$;
3) $\sqrt{65} - \sqrt{35} > 2$;
4) $\sqrt{99} - \sqrt{82} < 1$.

84.•• Доведіть, що:

1) $\sqrt{55} + \sqrt{35} > \sqrt{120}$;
2) $\sqrt{119} - \sqrt{67} < 3$.

85.•• Порівняйте:

1) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ і $\sqrt{11}+\sqrt{5}$;
2) $2+\sqrt{11}$ і $\sqrt{5}+\sqrt{10}$;
3) $\sqrt{15}-\sqrt{5}$ і $\sqrt{2}$;
4) $\sqrt{21}+\sqrt{20}$ і 9.

86.•• Порівняйте:

1) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ і $\sqrt{7}+\sqrt{2}$;
2) $\sqrt{26}-\sqrt{2}$ і $\sqrt{14}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

87. Спростіть вираз:

1) $\frac{x-3}{x+3}\cdot\left(x+\frac{x^2}{3-x}\right)$;
2) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a^2-b^2}$.

88. Спростіть вираз:

1) $6\sqrt{3}+\sqrt{27}-3\sqrt{75}$;
2) $\left(\sqrt{50}-3\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$;
3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$.

89. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\frac{x^2}{x+4}$;
2) $\frac{x-4}{x^2-4}$;
3) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$;
4) $\frac{4}{x-4}+\frac{1}{x}$?

90. У саду ростуть яблуні й вишні, причому вишні становлять 20 % усіх дерев. Скільки відсотків становить кількість яблунь від кількості вишень?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

91. Чи рівносильні рівняння:

1) $4x+6=2x-3$ і $4x+3=2x-6$;
2) $8x-4=0$ і $2x-1=0$;
3) $x^2+2x-3=0$ і $x^2+x=3-x$;
4) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ і $x^2-1=0$;
5) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ і $x-1=0$;
6) $x^2+1=0$ і $0x=5$?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 22; 23 на с. 287, 288.

Про деякі способи доведення нерівностей

У п. 1 було доведено кілька нерівностей. Ми використовували такий прийом: розглядали різницю лівої і правої частин нерівності та порівнювали її з нулем.

Проте існує й ряд інших способів доведення нерівностей. Ознайомимося з деякими з них.

Міркування «від супротивного». Сама назва цього методу багато в чому відображає його суть.

ПРИКЛАД 1

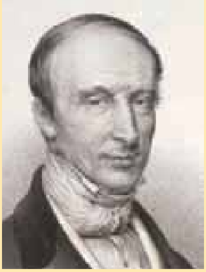
Для будь-яких значень a_1, a_2, b_1, b_2 доведіть нерівність

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right). \qquad (*)$$

Розв'язання

Нехай нерівність, що доводиться, є неправильною. Тоді знайдуться такі числа a_1, a_2, b_1, b_2, що буде правильною нерівність

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 > \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$



Огюстен Луї Коші (1789–1857)

Видатний французький математик, автор понад 800 наукових праць.

Віктор Якович Буняковський (1804–1889)

Видатний математик XIX ст. Народився на Вінниччині. Протягом багатьох років був віце-президентом Петербурзької академії наук.

Звідси:

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 > a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2;$$
$$2a_1b_1a_2b_2 > a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2;$$
$$a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 < 0;$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 < 0.$$

Остання нерівність є неправильною. Отримана суперечність означає, що нерівність (*) є правильною.

Нерівність (*) є окремим випадком більш загальної нерівності

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right). \quad (**)$$

Нерівність (**) називають нерівністю *Коші–Буняковського*. З її доведенням ви можете ознайомитися на заняттях математичного гуртка.

Метод використання очевидних нерівностей

ПРИКЛАД 2

Доведіть нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

Розв'язання

Очевидно, що при будь-яких значеннях a, b, c виконується така нерівність:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0.$$

Звідси:

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geqslant 0;$$
$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geqslant 2ab + 2bc + 2ac;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

Метод застосування раніше доведеної нерівності

У п. 1 ми довели, що для будь-яких $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$ правильна нерівність

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Її називають *нерівністю Коші для двох чисел*.

Розглянемо на прикладі, як можна використовувати нерівність Коші при доведенні інших нерівностей.

ПРИКЛАД 3

Доведіть, що для додатних чисел a і b справедлива нерівність

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4.$$

Розв'язання

Застосуємо нерівність Коші для додатних чисел a і $\frac{1}{b}$. Маємо:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2}\geqslant\sqrt{a\cdot\frac{1}{b}}.$$

Звідси $a+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Аналогічно доводимо, що $b+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Застосувавши теорему про почленне множення нерівностей, отримаємо:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Звідси $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4$.

Метод геометричної інтерпретації

ПРИКЛАД 4

Доведіть нерівність:

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\ldots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<\frac{100^2\pi}{4}.$$

Розв'язання

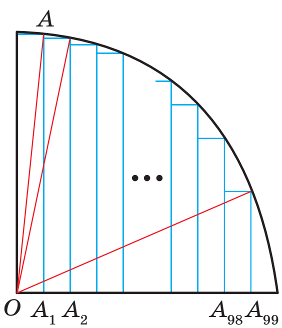


Рис. 4

Розглянемо чверть кола з центром O радіуса 1. Впишемо в неї ступінчасту фігуру, яка складається з 99 прямокутників, так, як показано на рисунку 4,

$$OA_1=A_1A_2=\ldots=A_{98}A_{99}=\frac{1}{100}.$$

Площа першого прямокутника

$$S_1=OA_1\cdot AA_1=OA_1\cdot\sqrt{1-OA_1^2}=$$ 1

$$=\frac{1}{100}\sqrt{1-\frac{1}{100^2}}=\frac{\sqrt{99\cdot 101}}{100^2}.$$

Для другого прямокутника маємо:

$$S_2 = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{2}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2} \text{ і т. д.}$$

$$S_{99} = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2}.$$

Площа ступінчастої фігури менша від площі чверті круга, тобто

$$\frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2} + \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2} + \ldots + \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2} < \frac{\pi}{4}.$$

Звідси випливає нерівність, що доводиться.

ВПРАВИ

1. Доведіть нерівність:

1) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$, якщо $a > 0$ і $b > 0$;

2) $(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc$, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ і $c \geqslant 0$;

3) $(a^3 + b)(a + b^3) \geqslant 4a^2b^2$, якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$;

4) $(ab + 1)(a + b) \geqslant 4ab$, якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$;

5) $(a+2)(b+5)(c+10) \geqslant 80\sqrt{abc}$, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ і $c \geqslant 0$;

6) $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 4$, якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$;

7) $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n$, якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — додатні числа, добуток яких дорівнює одиниці.

4. Нерівності з однією змінною

Розглянемо таку задачу. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 7 см. Якою має бути довжина другої сторони, щоб периметр паралелограма був більшим за 44 см?

Нехай шукана сторона дорівнює x см. Тоді периметр паралелограма дорівнює $(14 + 2x)$ см. Нерівність $14 + 2x > 44$ є математичною моделлю задачі про периметр паралелограма.

Якщо в цю нерівність замість змінної x підставити, наприклад, число 16, то отримаємо правильну числову нерівність $14 + 32 > 44$. У такому разі кажуть, що число 16 є **розв'язком нерівності** $14 + 2x > 44$.

Означення. **Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її в правильну числову нерівність.**

Так, кожне з чисел 15,1; 20; $10\sqrt{3}$ є розв'язком нерівності $14 + 2x > 44$. А число 10, наприклад, не є її розв'язком.

Зауваження. Означення розв'язку нерівності аналогічне означенню кореня рівняння. Проте не прийнято говорити «корінь нерівності».

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Усі розв'язки нерівності утворюють **множину розв'язків нерівності**. Якщо нерівність розв'язків не має, то кажуть, що множиною її розв'язків є **порожня множина**. Порожню множину позначають символом $\varnothing$.

Наприклад, до задачі «розв'яжіть нерівність $x^2 > 0$» відповідь буде така: «усі дійсні числа, крім числа 0».

Очевидно, що нерівність $|x| < 0$ розв'язків не має, тобто множиною її розв'язків є порожня множина.

Означення. **Нерівності називають рівносильними, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків.**

Наведемо кілька прикладів.

Нерівності $x^2 \leqslant 0$ і $|x| \leqslant 0$ є рівносильними. Справді, кожна з них має єдиний розв'язок $x = 0$.

Нерівності $x^2 > -1$ і $|x| > -2$ є рівносильними, оскільки множиною розв'язків кожної з них є множина дійсних чисел.

Оскільки кожна з нерівностей $\sqrt{x} < -1$ і $0x < -3$ розв'язків не має, то вони також є рівносильними.

1. Що називають розв'язком нерівності з однією змінною?
2. Що означає розв'язати нерівність?
3. Що утворюють усі розв'язки нерівності?
4. Коли множиною розв'язків нерівності є порожня множина?
5. Які нерівності називають рівносильними?

92.° Які з чисел -4; $-0,5$; 0; $\frac{1}{3}$; 2 є розв'язками нерівності:

1) $x > \frac{1}{6}$; 3) $3x > x - 1$; 5) $\sqrt{x-1} > 1$;

2) $x \leqslant 5$; 4) $x^2 - 9 \leqslant 0$; 6) $\frac{1}{x} > 1$?

93.° Яке з наведених чисел є розв'язком нерівності $(x-2)^2 \times$ $\times (x-5) > 0$:
1) 3; 2) 2; 3) 6; 4) -1?

94.° Чи є розв'язком нерівності $6x + 1 \leqslant 2 + 7x$ число:
1) $-0,1$; 2) -2; 3) 0; 4) -1; 5) 2?

95.° Назвіть будь-які два розв'язки нерівності $x + 5 > 2x + 3$.

96.° Чи є число 1,99 розв'язком нерівності $x < 2$? Чи існують розв'язки даної нерівності, більші за 1,99? У разі позитивної відповіді наведіть приклад такого розв'язку.

97.° Чи є число 4,001 розв'язком нерівності $x > 4$? Чи існують розв'язки даної нерівності, менші від 4,001? У разі позитивної відповіді наведіть приклад такого розв'язку.

98.° Множиною розв'язків якої з даних нерівностей є порожня множина:
1) $(x-3)^2 > 0$; 3) $(x-3)^2 < 0$;
2) $(x-3)^2 \geqslant 0$; 4) $(x-3)^2 \leqslant 0$?

99.° Які з наведених нерівностей не мають розв'язків:
1) $0x > -2$; 2) $0x < 2$; 3) $0x < -2$; 4) $0x > 2$?

100.° Множиною розв'язків якої з наведених нерівностей є множина дійсних чисел:
1) $0x > 1$; 2) $0x > 0$; 3) $0x > -1$; 4) $x + 1 > 0$?

101.° Розв'язком якої з даних нерівностей є будь-яке дійсне число:
1) $x^2 > 0$; 2) $x > -x$; 3) $-x^2 \leqslant 0$; 4) $\sqrt{x} \geqslant 0$?

102.• Серед зазначених нерівностей укажіть нерівність, розв'язком якої є будь-яке дійсне число, і нерівність, яка не має розв'язків:

1) $\frac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$; 2) $\frac{x^2+1}{x^2+1} < 1$; 3) $\frac{x^2-1}{x^2-1} \geqslant 1$; 4) $\frac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

103.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{2}{x^2}+2>0$;
2) $(x+2)^2>0$;
3) $(x+2)^2\leqslant 0$;
4) $\frac{x+2}{x+2}>0$;
5) $\frac{x+2}{x+2}>\frac{2}{3}$;
6) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2>0$;
7) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2\geqslant 0$;
8) $x+\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x^2}+2$;
9) $|x|\geqslant -x^2$;
10) $|x|>-x^2$;
11) $|x|>x$;
12) $|x|\geqslant -x$.

104.$^{\bullet}$ Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $|x|>0$;
2) $|x|\leqslant 0$;
3) $|x|<0$;
4) $|x|\leqslant -1$;
5) $|x|>-3$;
6) $\left|\frac{1}{x}\right|>-3$.

105.$^{\bullet}$ Чи рівносильні нерівності:

1) $\frac{1}{x}<1$ і $x>1$;
2) $x^2\geqslant x$ і $x\geqslant 1$;
3) $(x+5)^2<0$ і $|x-4|<0$;
4) $\sqrt{x}\leqslant 0$ і $x^4\leqslant 0$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

106. Розв'яжіть рівняння:

1) $9-7(x+3)=5-6x$;
2) $\frac{x+3}{2}-\frac{x-4}{7}=1$;
3) $(x+7)^2-(x-2)^2=15$;
4) $5x-2=3(3x-1)-4x-4$;
5) $6x+(x-2)(x+2)=(x+3)^2-13$;
6) $(x+6)(x-1)-(x+3)(x-4)=5x$.

107. Велосипедист доїхав із села до озера і повернувся назад, витративши на весь шлях 1 год. Із села до озера він їхав зі швидкістю 15 км/год, а повертався зі швидкістю 10 км/год. Знайдіть відстань від села до озера.

5. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Числові проміжки

Властивості числових рівностей допомагали нам розв'язувати рівняння. Аналогічно властивості числових нерівностей допоможуть розв'язувати нерівності.

Розв'язуючи рівняння, ми заміняли його іншим, більш простим рівнянням, але рівносильним даному. За аналогічною схемою розв'язують і нерівності.

При заміні рівняння на йому рівносильне використовують теореми про перенесення доданків з однієї частини рівняння в другу і про множення обох частин рівняння на одне й те саме відмінне від нуля число.

Аналогічні правила застосовують і під час розв'язування нерівностей.

- Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

За допомогою цих правил розв'яжемо нерівність, отриману в задачі про периметр паралелограма (див. п. 4).

Маємо: $14 + 2x > 44$.

Переносимо доданок 14 у праву частину нерівності:

$$2x > 44 - 14.$$

Звідси $2x > 30$.

Поділимо обидві частини нерівності на 2:

$$x > 15.$$

Зауважимо, що отримана нерівність рівносильна заданій нерівності. Множина її розв'язків складається з усіх чисел, які більші за 15. Цю множину називають **числовим проміжком** і позначають $(15; +\infty)$ (читають: «проміжок від 15 до плюс нескінченності»).

Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x > 15$, розміщені праворуч від точки, яка зображує число 15, і утворюють промінь, у якого «виколото» початок (рис. 5).

а) *б)*

Рис. 5

Відповідь може бути записана одним зі способів: $(15; +\infty)$ або $x > 15$.

Зауважимо, що для зображення на рисунку числового проміжку використовують два способи: за допомогою або штриховки (рис. 5, *а*), або дужки (рис. 5, *б*). Ми використовуватимемо другий спосіб.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть нерівність $3 + \frac{x}{2} \leqslant 7 + x$.

Розв'язання. Перенесемо доданок x з правої частини нерівності в ліву, а доданок 3 — з лівої частини в праву і зведемо подібні члени:

$$-x + \frac{x}{2} \leqslant 7 - 3;$$

$$-\frac{x}{2} \leqslant 4.$$

Помножимо обидві частини нерівності на -2:

$$x \geqslant -8.$$

Множиною розв'язків цієї нерівності є числовий проміжок, який позначають $[-8; +\infty)$ (читають: «проміжок від -8 до плюс нескінченності, включаючи -8»). Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x \geqslant -8$, утворюють промінь (рис. 6).

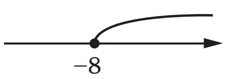


Рис. 6

Відповідь можна записати одним зі способів: $[-8; +\infty)$ або $x \geqslant -8$.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть нерівність $2(2 - 3x) > 3(x + 6) - 5$.

Розв'язання

Запишемо ланцюжок рівносильних нерівностей:

$$4 - 6x > 3x + 18 - 5;$$
$$4 - 6x > 3x + 13;$$
$$-3x - 6x > -4 + 13;$$
$$-9x > 9;$$
$$x < -1.$$

Множиною розв'язків останньої нерівності є числовий проміжок, який позначають $(-\infty; -1)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до -1»). Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x < -1$, розміщені ліворуч від точки -1 (рис. 7) і утворюють промінь, у якого «виколото» початок.

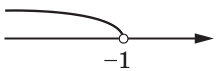


Рис. 7

Відповідь можна записати одним зі способів: $(-\infty; -1)$ або $x < -1$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть нерівність $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} \leqslant \frac{1}{6}$.

Розв'язання

Запишемо ланцюжок рівносильних нерівностей:

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} \leqslant 6 \cdot \frac{1}{6};$$
$$3x - 3 + 2x \leqslant 1;$$
$$5x \leqslant 4;$$
$$x \leqslant \frac{4}{5}.$$

Множиною розв'язків останньої нерівності є числовий проміжок, який позначають $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до $\frac{4}{5}$, включаючи $\frac{4}{5}$»). Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x \leqslant \frac{4}{5}$, утворюють промінь (рис. 8).

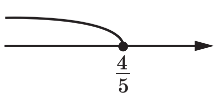


Рис. 8

Відповідь можна записати одним зі способів: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ або $x \leqslant \frac{4}{5}$.

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть нерівність $3(2x - 1) + 7 \geqslant 2(3x + 1)$.

Розв'язання

Маємо:

$$6x - 3 + 7 \geqslant 6x + 2;$$
$$6x - 6x \geqslant 2 - 4;$$
$$0x \geqslant -2.$$

Остання нерівність при будь-якому значенні x перетворюється в правильну числову нерівність $0 \geqslant -2$. Отже, шукана множина розв'язків збігається з множиною дійсних чисел.

В і д п о в і д ь: x — будь-яке число.

Цю відповідь можна записати інакше: $(-\infty; +\infty)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до плюс нескінченності»). Цей числовий проміжок називають **числовою прямою**.

ПРИКЛАД 5

Розв'яжіть нерівність $4(x - 2) - 1 < 2(2x - 9)$.

Розв'язання

Маємо:

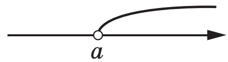
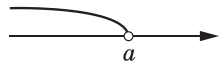
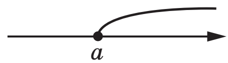
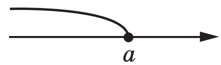
$$4x - 8 - 1 < 4x - 18;$$
$$4x - 4x < 9 - 18;$$
$$0x < -9.$$

Отримана нерівність при будь-якому значенні x перетворюється в неправильну числову нерівність $0 < -9$.

Відповідь можна записати одним зі способів: розв'язків немає або $\varnothing$.

Кожна з нерівностей, які було розглянуто в прикладах 1–5, зводилася до рівносильної нерівності одного з чотирьох видів: $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$, де x — змінна, a і b — деякі числа. Такі нерівності називають **лінійними нерівностями з однією змінною**.

Наведемо таблицю позначень і зображень вивчених числових проміжків:

Нерівність	Проміжок	Зображення
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	

1. Сформулюйте правила, за якими можна отримати нерівність, рівносильну даній.

2. Які нерівності називають лінійними нерівностями з однією змінною?

3. Як записують, читають і зображують проміжок, який є множиною розв’язків нерівності виду $x > a$? $x < a$? $x \geqslant a$? $x \leqslant a$?

4. Розв’язком нерівності є будь-яке число. Як у такому випадку записують, читають і називають проміжок, який є множиною розв’язків нерівності?

108.° Зобразіть на координатній прямій проміжок:
1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5)$; 4) $(-\infty; -5]$.

109.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задається нерівністю:
1) $x < 8$; 2) $x \leqslant -4$; 3) $x \geqslant -1$; 4) $x > 0$.

110.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задається нерівністю:
1) $x \leqslant 0$; 2) $x \geqslant \frac{1}{3}$; 3) $x > -1{,}4$; 4) $x < 16$.

111.° Укажіть найменше ціле число, яке належить проміжку:
1) $(6; +\infty)$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-3,4; +\infty)$; 4) $[-0,9; +\infty)$.

112.° Укажіть найбільше ціле число, яке належить проміжку:
1) $(-\infty; -4)$; 2) $(-\infty; -6,2]$; 3) $(-\infty; 1]$; 4) $(-\infty; -1,8)$.

113.° Яким з наведених проміжків належить число -7:
1) $(-\infty; -7)$; 2) $[-7; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-\infty; -6)$?

114.° Якому з наведених проміжків не належить число 9:
1) $(8,99; +\infty)$; 2) $(-\infty; 10)$; 3) $(-\infty; 8,99]$; 4) $[9; +\infty)$?

115.° Розв'яжіть нерівність:
1) $6x > 18$;
2) $-2x \geqslant 10$;
3) $\frac{1}{3}x < 9$;
4) $0,1x \geqslant 0$;
5) $\frac{3}{4}x > 24$;
6) $-10x < 0$;
7) $2\frac{1}{4}x \leqslant -1\frac{4}{5}$;
8) $-7x > \frac{14}{15}$;
9) $7x - 2 > 19$;
10) $5x + 16 \leqslant 6$;
11) $4 - x < 5$;
12) $5 - 8x \geqslant 6$;
13) $12 + 4x \geqslant 6x$;
14) $36 - 2x < 4x$;
15) $\frac{x+2}{5} < 2$.

116.° Розв'яжіть нерівність:
1) $5x < 30$;
2) $-4x \leqslant -16$;
3) $\frac{2}{3}x \leqslant 6$;
4) $-12x \geqslant 0$;
5) $-3x < \frac{6}{7}$;
6) $-2\frac{1}{3}x > 1\frac{5}{9}$;
7) $4x + 5 > -7$;
8) $9 - x \geqslant 2x$;
9) $13 - 6x \geqslant -23$;
10) $5 - 9x > 16$;
11) $3x + 2 \leqslant -7x$;
12) $\frac{x-3}{4} > -1$.

117.° Розв'яжіть нерівність:
1) $0x > 10$; 3) $0x > -8$; 5) $0x \geqslant 1$; 7) $0x \leqslant 0$;
2) $0x < 15$; 4) $0x < -3$; 6) $0x \leqslant 2$; 8) $0x > 0$.

118.° Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:
1) $5x \geqslant 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$.

119.° Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:
1) $8x \leqslant -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$.

120.° При яких значеннях a вираз $6a + 1$ набуває від'ємних значень?

121.° При яких значеннях b вираз $7 - 2b$ набуває додатних значень?

122.° При яких значеннях m значення виразу $2 - 4m$ не менші від -22?

123.° При яких значеннях n значення виразу $12n - 5$ не більші за -53?

124.° При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt{4x + 20}$; 2) $\sqrt{5 - 14x}$; 3) $\dfrac{10}{\sqrt{4x + 10}}$?

125.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{13 - 2x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{-x - 1}}$.

126.° Розв'яжіть нерівність:

1) $8x + 2 < 9x - 3$;
2) $6 - 6x > 10 - 4x$;
3) $6y + 8 \leqslant 10y - 8$;
4) $3 - 11y \geqslant -3y + 6$;
5) $-8p - 2 < 3 - 10p$;
6) $3m - 1 \leqslant 1{,}5m + 5$.

127.° Розв'яжіть нерівність:

1) $4 + 11x > 7 + 12x$;
2) $35x - 28 \leqslant 32x + 2$;
3) $3x - 10 < 6x + 2$;
4) $6x - 3 \geqslant 2x - 25$.

128.° При яких значеннях c значення двочлена $9c - 2$ не більші за відповідні значення двочлена $4c + 4$?

129.° При яких значеннях k значення двочлена $11k - 3$ не менші від відповідних значень двочлена $15k - 13$?

130.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{4x}{3} + \dfrac{x}{2} < 11$;
2) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3x}{4} \geqslant \dfrac{1}{6}$;
3) $\dfrac{5x}{7} - x > -4$;
4) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{4} \leqslant x$.

131.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{y}{6} - \dfrac{5y}{4} < 1$; 2) $\dfrac{x}{10} - \dfrac{x}{5} > -2$.

132.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3 - 5(2x + 4) \geqslant 7 - 2x$;
2) $6x - 3(x - 1) \leqslant 2 + 5x$;
3) $x - 2(x - 1) \geqslant 10 + 3(x + 4)$;
4) $2(2x - 3{,}5) - 3(2 - 3x) < 6(1 - x)$;
5) $(x + 1)(x - 2) \leqslant (x - 3)(x + 3)$;
6) $(4x - 3)^2 + (3x + 2)^2 \geqslant (5x + 1)^2$;

7) $\frac{2x-1}{4} \geqslant \frac{3x-5}{5}$;

8) $\frac{3x+7}{4} - \frac{5x-2}{2} < x$;

9) $(x - 5)(x + 1) \leqslant 3 + (x - 2)^2$;

10) $\frac{x+1}{2} - \frac{x-3}{3} > 2 + \frac{x}{6}$;

11) $(6x - 1)^2 - 4x(9x - 3) \leqslant 1$;

12) $\frac{x-3}{9} - \frac{x+4}{4} > \frac{x-8}{6}$.

133.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3(4x + 9) + 5 > 7(8 - x)$;

2) $(2 - y)(3 + y) \leqslant (4 + y)(6 - y)$;

3) $(y + 3)(y - 5) - (y - 1)^2 > -16$;

4) $\frac{3x-7}{5} - 1 \geqslant \frac{2x-6}{3}$;

5) $\frac{2x}{3} - \frac{x-1}{6} - \frac{x+2}{2} < 0$;

6) $\frac{y-1}{2} - \frac{2y+1}{8} - y < 2$.

134.• Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $7(x + 2) - 3(x - 8) < 10$;

2) $(x - 4)(x + 4) - 5x > (x - 1)^2 - 17$.

135.• Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $\frac{4x+13}{10} - \frac{5+2x}{4} > \frac{6-7x}{20} - 2$;

2) $(x - 1)(x + 1) - (x - 4)(x + 2) \geqslant 0$.

136.• Скільки цілих від'ємних розв'язків має нерівність $x - \frac{x+7}{4} - \frac{11x+30}{12} < \frac{x-5}{3}$?

137.• Скільки натуральних розв'язків має нерівність $\frac{2-3x}{4} \geqslant \frac{1}{5} - \frac{5x+6}{8}$?

138.• При яких значеннях x є правильною рівність:

1) $|x - 5| = x - 5$;
2) $|2x + 14| = -2x - 14$?

139.• При яких значеннях y є правильною рівність:

1) $\frac{|y+7|}{y+7} = 1$;
2) $\frac{|6-y|}{y-6} = 1$?

140.• При яких значеннях a рівняння:
1) $x^2 + 3x - a = 0$ не має коренів;
2) $2x^2 - 8x + 5a = 0$ має хоча б один дійсний корінь?

141.• При яких значеннях b рівняння:
1) $3x^2 - 6x + b = 0$ має два різні дійсні корені;
2) $x^2 - x - 2b = 0$ не має коренів?

142.• Турист проплив на човні деяку відстань за течією річки, а потім повернувся назад, витративши на всю подорож не більше п'яти годин. Швидкість човна в стоячій воді дорівнює 5 км/год, а швидкість течії — 1 км/год. Яку найбільшу відстань міг пропливти турист за течією річки?

143.• Узявши чотири послідовні цілі числа, розглянули різницю добутків крайніх і середніх чисел. Знайдіть чотири такі числа, для яких ця різниця більша за нуль.

144.• У коробці лежать сині та жовті кульки. Кількість синіх кульок відноситься до кількості жовтих як 3 : 4. Яка найбільша кількість синіх кульок може лежати в коробці, якщо всього кульок не більше 44?

145.• У саду ростуть яблуні, вишні і сливи, кількості яких відносяться як 5 : 4 : 2 відповідно. Якою може бути найменша кількість вишень, якщо всього дерев у саду не менше 120?

146.• Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 14 см і a см, де a — натуральне число. Якого найбільшого значення може набувати a?

147.• Сума трьох послідовних натуральних парних чисел не менша від 85. Знайдіть найменші три числа, які задовольняють цю умову.

148.• Сума трьох послідовних натуральних чисел, які кратні 5, не більша за 100. Які найбільші три числа задовольняють цю умову?

149.• При яких значеннях x визначена функція:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \dfrac{1}{x-2}$;
2) $f(x) = \sqrt{24-8x} + \dfrac{6}{x^2-16}$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+9}} - \dfrac{8}{|x|-2}$;
4) $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{4}{x^2-1}$?

150.• При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{9-x}+\frac{10}{x+3}$; 2) $\frac{6}{\sqrt{3x-21}}+\frac{9}{x^2-64}$?

151.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x-3|+x=15$; 3) $|3x-12|-2x=1$;
2) $|x+1|-4x=14$; 4) $|x+2|-x=1$.

152.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x+5|+2x=7$; 2) $|3-2x|-x=9$.

153.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=|x-2|$; 2) $y=|x+3|-1$; 3) $y=|x-1|+x$.

154.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=|x+4|$; 3) $y=|2x-6|-x$.
2) $y=|x-5|+2$;

155.•• При яких значеннях a рівняння:

1) $4x+a=2$ має додатний корінь;
2) $(a+6)\,x=3$ має від'ємний корінь;
3) $(a-1)\,x=a^2-1$ має єдиний додатний корінь?

156.•• При яких значеннях m рівняння:

1) $2+4x=m-6$ має невід'ємний корінь;
2) $mx=m^2-7m$ має єдиний від'ємний корінь?

157.* Знайдіть усі значення a, при яких має два різні дійсні корені рівняння:

1) $ax^2+2x-1=0$;
2) $(a+1)\,x^2-(2a-3)\,x+a=0$;
3) $(a-3)\,x^2-2\,(a-5)\,x+a-2=0$.

158.* Знайдіть усі значення a, при яких не має коренів рівняння $(a-2)\,x^2+(2a+1)\,x+a=0$.

159.* Чи існує таке значення a, при якому не має розв'язків нерівність (у разі позитивної відповіді вкажіть це значення):

1) $ax>3x+4$; 2) $(a^2-a-2)\,x\leqslant a-2$?

160.* Чи існує таке значення a, при якому будь-яке число є розв'язком нерівності (у разі позитивної відповіді вкажіть це значення):

1) $ax>-1-7x$; 2) $(a^2-16)\,x\geqslant a+4$?

161.* Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

1) $ax > 0$;
2) $ax < 1$;
3) $ax \geqslant a$;
4) $2(x - a) < ax - 4$;
5) $(a - 2)x > a^2 - 4$;
6) $(a + 3)x \leqslant a^2 - 9$.

162.* Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

1) $a^2x \leqslant 0$; 2) $a + x < 2 - ax$; 3) $(a + 4)x > 1$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

163. Розв'яжіть рівняння:

1) $6x - 5x^2 = 0$;
2) $25x^2 = 81$;
3) $4x^2 - 7x - 2 = 0$;
4) $3x^2 + 8x - 3 = 0$;
5) $x^2 + x - 12 = 0$;
6) $2x^2 + 6x + 7 = 0$.

164. Відомо, що m і n — послідовні цілі числа. Яке з наступних тверджень є завжди правильним:

1) добуток mn більший за m;
2) добуток mn більший за n;
3) добуток mn є парним числом;
4) добуток mn є непарним числом?

165. Порівняйте значення виразів:

1) $3\sqrt{98}$ і $4\sqrt{72}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{68}$ і $\frac{4}{3}\sqrt{45}$; 3) $\frac{1}{6}\sqrt{108}$ і $6\sqrt{\frac{1}{12}}$.

166. Щоб наповнити басейн водою через одну трубу, потрібно в 1,5 раза більше часу, ніж через другу. Якщо ж відкрити одночасно обидві труби, то басейн наповниться за 6 год. За скільки годин можна наповнити басейн через кожну трубу окремо?

6. Системи лінійних нерівностей з однією змінною

Розглянемо вираз $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$. Знайдемо множину допустимих значень змінної x, тобто всі значення змінної x, при яких даний вираз має зміст. Цю множину називають **областю визначення виразу**.

Оскільки підкореневий вираз може набувати тільки невід'ємних значень, то мають *одночасно* виконуватися дві нерівності $2x - 1 \geqslant 0$ і $5 - x \geqslant 0$. Тобто шукані значення змінної x — це всі спільні розв'язки зазначених нерівностей.

Якщо треба знайти всі спільні розв'язки двох або кількох нерівностей, то говорять, що треба **розв'язати систему нерівностей**.

Як і систему рівнянь, систему нерівностей записують за допомогою фігурної дужки. Так, для знаходження області визначення виразу $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$ треба розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0, \\ 5 - x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Означення. Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює кожну нерівність системи в правильну числову нерівність.

Наприклад, числа 2, 3, 4, 5 є розв'язками системи (*), а число 7 не є її розв'язком.

Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Усі розв'язки системи нерівностей утворюють **множину розв'язків системи нерівностей**. Якщо система розв'язків не має, то кажуть, що множиною її розв'язків є порожня множина.

Наприклад, до задачі «Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 0x \geqslant -1, \\ |x| \geqslant 0 \end{cases}$» відповідь буде такою: «множина дійсних чисел».

Очевидно, що множина розв'язків системи $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x \geqslant 5 \end{cases}$ складається з одного числа 5.

Система $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ розв'язків не має, тобто множиною її розв'язків є порожня множина.

Розв'яжемо систему (*). Перетворюючи кожну нерівність системи в рівносильну їй, отримуємо: $\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ -x \geqslant -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$

Множина розв'язків останньої системи складається з усіх чисел, які не менші від $\frac{1}{2}$ і не більші за 5, тобто з усіх чисел, які задовольняють нерівність $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (читають: «проміжок від $\frac{1}{2}$ до 5, включаючи $\frac{1}{2}$ і 5»).

Точки, які зображують розв'язки системи (*), розміщені між точками $A\left(\frac{1}{2}\right)$ і B (5), включаючи точки A і B (рис. 9). Вони утворюють відрізок.

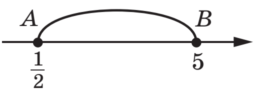


Рис. 9

Відповідь до задачі про знаходження області визначення виразу $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ може бути записана одним зі способів: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ або $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$.

Зауважимо, що всі спільні точки проміжків $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty;\ 5]$ утворюють проміжок $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (рис. 10). У такому разі кажуть, що проміжок $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ є **перетином** проміжків $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty;\ 5]$. Записують: $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; 5] = \left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

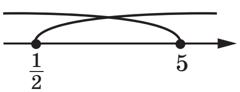


Рис. 10

Проміжки $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty; 5]$ є множинами розв'язків відповідно нерівностей $x \geqslant \frac{1}{2}$ і $x \leqslant 5$. Тоді можна сказати, що *множина розв'язків системи* $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5 \end{cases}$ *є перетином множин розв'язків кожної з нерівностей, які складають систему.*

Отже, ***щоб розв'язати систему нерівностей, треба знайти перетин множин розв'язків нерівностей, які складають систему.***

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9. \end{cases}$

Розв'язання

Маємо: $\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$

За допомогою координатної прямої знайдемо перетин множин розв'язків нерівностей даної системи, тобто перетин проміжків $(-\infty; 3)$ і $(2; +\infty)$ (рис. 11). Шуканий перетин складається з чисел, які задовольняють нерівність $-2 < x < 3$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $(-2; 3)$ і читають: «проміжок від -2 до 3».

Рис. 11

Відповідь можна записати одним зі способів: $(-2; 3)$ або $-2 < x < 3$.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leqslant 5. \end{cases}$

Розв'язання

Маємо: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

За допомогою координатної прямої знайдемо перетин проміжків $(-\infty; 1)$ і $[-2; +\infty)$, які є множинами розв'язків нерівностей даної системи (рис. 12). Він складається з усіх чисел, які задовольняють нерівність $-2 \leqslant x < 1$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $[-2; 1)$ і читають: «проміжок від -2 до 1, включаючи -2».

Рис. 12

Відповідь можна записати одним зі способів: $[-2; 1)$ або $-2 \leqslant x < 1$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Множиною розв'язків даної системи є перетин проміжків $(-\infty; 1]$ і $(-2; +\infty)$. Цей перетин є числовим проміжком, який позначають $(-2; 1]$ і читають: «проміжок від -2 до 1, включаючи 1».

ПРИКЛАД 4

Знайдіть область визначення функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5}.$$

Розв'язання

Шукана область визначення — це множина розв'язків системи $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + 5 \geqslant 0. \end{cases}$ Маємо: $\begin{cases} x > 1, \\ x \geqslant -5. \end{cases}$

Зобразимо на координатній прямій перетин проміжків $(1; +\infty)$ і $[-5; +\infty)$. Цим перетином є проміжок $(1; +\infty)$ (рис. 13).

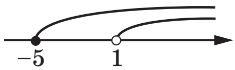
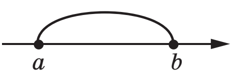
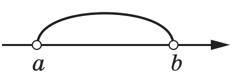
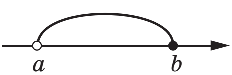
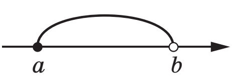


Рис. 13

В і д п о в і д ь: $(1; +\infty)$.

Наведемо таблицю позначень і зображень числових проміжків, вивчених у цьому пункті:

Нерівність	Проміжок	Зображення
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

1. Що називають областю визначення виразу?
2. У яких випадках кажуть, що треба розв'язати систему нерівностей?
3. За допомогою якого символу записують систему нерівностей?
4. Що називають розв'язком системи нерівностей з однією змінною?
5. Що означає розв'язати систему нерівностей?
6. Поясніть, що називають перетином двох проміжків.
7. Яким символом позначають перетин проміжків?
8. Опишіть алгоритм розв'язування системи нерівностей.
9. Як записують, читають і зображують проміжок, який є множиною розв'язків нерівності виду $a \leqslant x \leqslant b$? $a < x < b$? $a < x \leqslant b$? $a \leqslant x < b$?

167.° Які з чисел −6; −5; 0; 2; 4 є розв'язками системи нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ -2x \leqslant 10\,? \end{cases}$$

168.° Розв'язком якої із систем нерівностей є число −3:

1) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 1 > -1, \\ x - 2 < 0\,? \end{cases}$

169.° Зобразіть на координатній прямій проміжок:

1) $(-3;\ 4)$; 2) $[-3;\ 4]$; 3) $[-3;\ 4)$; 4) $(-3;\ 4]$.

170.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задається нерівністю:

1) $0 < x < 5$;
2) $\frac{1}{6} < x \leqslant 2\frac{1}{7}$;
3) $0{,}2 \leqslant x < 102$;
4) $-2{,}4 \leqslant x \leqslant -1$.

171.° Запишіть усі цілі числа, які належать проміжку:

1) $[3;\ 7]$; 2) $(2{,}9;\ 6]$; 3) $[-5{,}2;\ 1)$; 4) $(-2;\ 2)$.

172.° Укажіть найменше і найбільше цілі числа, які належать проміжку:

1) $[-12;\ -6]$;
2) $(5;\ 11]$;
3) $(-10{,}8;\ 1{,}6]$;
4) $[-7{,}8;\ -2{,}9]$.

173.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть перетин проміжків:

1) $[-1;\ 7]$ і $[4;\ 9]$;
2) $[3;\ 6]$ і $(3;\ 8)$;
3) $(-\infty;\ 3{,}4)$ і $(2{,}5;\ +\infty)$;
4) $(-\infty;\ 2{,}6)$ і $(2{,}8;\ +\infty)$;
5) $[9;\ +\infty)$ і $[11{,}5;\ +\infty)$;
6) $(-\infty;\ -4{,}2]$ і $(-\infty;\ -1{,}3)$.

174.° Укажіть на рисунку 14 зображення множини розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 6. \end{cases}$

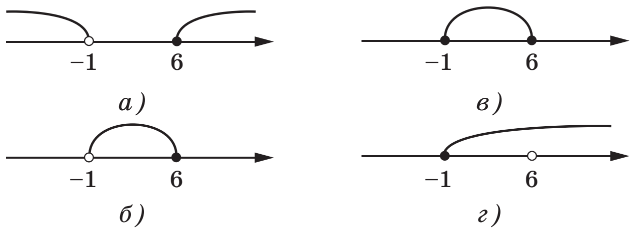


Рис. 14

175.° Укажіть на рисунку 15 зображення множини розв'язків подвійної нерівності $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

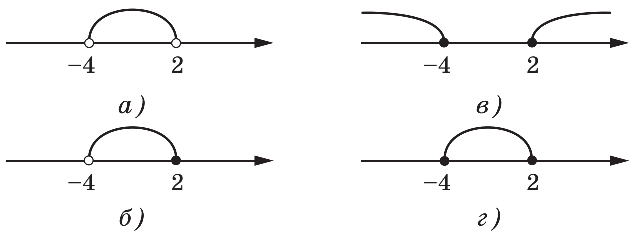


Рис. 15

176.° Який із наведених проміжків є множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2: \end{cases}$

1) $(-\infty;\ -1)$; 2) $(-1;\ 2)$; 3) $(2;\ +\infty)$; 4) $(-1;\ +\infty)$?

177.° Відомо, що $a < b < c < d$. Який із даних проміжків є перетином проміжків $(a;\ c)$ і $(b;\ d)$:

1) $(a;\ d)$; 2) $(b;\ c)$; 3) $(c;\ d)$; 4) $(a;\ b)$?

178.° Відомо, що $m < n < k < p$. Який із даних проміжків є перетином проміжків $(m;\ p)$ і $(n;\ k)$:

1) $(m;\ n)$; 2) $(k;\ p)$; 3) $(n;\ k)$; 4) $(m;\ p)$?

179.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 2. \end{cases}$

180.° Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geqslant -6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 6 > 2, \\ \dfrac{x}{4} < 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x + 3 \geqslant 0, \\ 7 - 4x < 7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 10x - 1 \geqslant 3, \\ 7 - 3x \geqslant 2x - 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \leqslant x + 9; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x - 6 \leqslant x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x + 14 \geqslant 18 - x, \\ 1,5x + 1 < 3x - 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4x + 19 \leqslant 5x - 1, \\ 10x < 3x + 21. \end{cases}$

181.° Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} -4x \leqslant -12, \\ x + 2 > 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 - x \geqslant 5, \\ x - 7 \leqslant 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 3 < 5x, \\ 7x - 10 < 5x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - 3x < 4x - 12, \\ 7 + 3x \geqslant 2x + 10; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 8, \\ \dfrac{x + 1}{3} < 6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 2 \geqslant 2x + 1, \\ 2x + 3 \leqslant 33 - 3x. \end{cases}$

182.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $-3 < x - 4 < 7;$

2) $-2,4 \leqslant 3x + 0,6 \leqslant 3;$

3) $0,8 \leqslant 6 - 2x < 1,4;$

4) $4 < \dfrac{x}{5} - 2 \leqslant 5.$

183.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2 < x + 10 \leqslant 14;$

2) $10 < 4x - 2 < 18;$

3) $-1,8 \leqslant 1 - 7x \leq 36;$

4) $1 \leqslant \dfrac{x + 1}{4} < 1,5.$

184.° Скільки цілих розв'язків має система нерівностей
$$\begin{cases} -2x \geqslant -15, \\ 3x > -10\,? \end{cases}$$

185.° Знайдіть суму цілих розв'язків системи нерівностей
$$\begin{cases} x + 8 \geqslant 4, \\ 5x + 1 \leqslant 9. \end{cases}$$

186.° Скільки цілих розв'язків має нерівність
$$-3 \leqslant 7x - 5 < 16?$$

187.° Знайдіть найменший цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} x + 8 \geqslant 17, \\ \dfrac{x}{2} > 4{,}5. \end{cases}$

188.° Знайдіть найбільший цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} 2x + 1 < -4, \\ 3x - 6 \leqslant -12. \end{cases}$

189.• Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 8(2 - x) - 2x > 3, \\ -3(6x - 1) - x < 2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{4} - \dfrac{2x + 3}{3} > 1, \\ 6(2x - 1) < 5(x - 4) - 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x - 3) \leqslant 3x + 4(x + 1), \\ (x - 3)(x + 3) \leqslant (x - 4)^2 - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x + 11) \geqslant 3(6 - x), \\ (x - 3)(x + 6) \geqslant (x + 5)(x - 4); \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x + 1}{2} \leqslant \dfrac{x + 1}{3}, \\ (x + 5)(x - 3) + 41 \geqslant (x - 6)^2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x + 4 \leqslant 2x - 8, \\ (x + 2)(x - 1) \geqslant (x + 3)(x - 2); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7} < \dfrac{x+1}{4}, \\ (x-6)(x+2)+4x < (x-7)(x+7); \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{6x+1}{6} - \dfrac{5x-1}{5} > -1, \\ 2(x+8)-3(x+2) < 5-x. \end{cases}$

190.• Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5} - \dfrac{4x-9}{6} > 1, \\ 5(x-1)+7(x+2) > 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+2}{3} < \dfrac{x+12}{6}, \\ 0{,}3x - 19 \leqslant 1{,}7x - 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-6)^2 < (x-2)^2 - 8, \\ 3(2x-1) - 8 < 34 - 3(5x-9); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{3} - \dfrac{4x+1}{4} \leqslant 1, \\ (x-1)(x-2) > (x+4)(x-7). \end{cases}$

191.• Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x - 1 < 1{,}7 - x, \\ 3x - 2 \geqslant x - 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} < 1, \\ 2x - \dfrac{x}{2} \geqslant 10. \end{cases}$

192.• Скільки цілих розв'язків має система нерівностей:

1) $\begin{cases} 4x + 3 \geqslant 6x - 7, \\ 3(x+8) \geqslant 4(8-x); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-2}{6} < 2, \\ \dfrac{2x-5}{3} \geqslant -3? \end{cases}$

193.• Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{6x-9} + \sqrt{2x-5}$;

2) $\sqrt{3x+5} - \dfrac{1}{\sqrt{15-5x}}$;

3) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{1-x}$;

4) $\sqrt{12-3x} - \dfrac{5}{x-4}$.

194.• При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{8-x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{7x-35} + \dfrac{1}{x^2-5x}$?

195.• Розв'яжіть нерівність:

1) $-3 < \frac{2x-5}{2} < 4$; 2) $-4 \leqslant 1 - \frac{x-2}{3} \leqslant -3$.

196.• Розв'яжіть нерівність:

1) $-2 \leqslant \frac{6x+1}{4} < 4$; 2) $1,2 < \frac{7-3x}{5} \leqslant 1,4$.

197.• Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 2, \\ x < 3,6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0,4 - 8x \geqslant 3,6, \\ 1,5x - 2 < 4, \\ 4,1x + 10 < 1,6x + 5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 6 < 8, \\ 4 - 4x < 10, \\ 8x - 9 > 3; \end{cases}$

198.• Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} -x < 2, \\ 2x > 7, \\ x < -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x + 2, \\ 2x + 1 > 8 - 5x, \\ 5x - 25 \leqslant 0. \end{cases}$

199.• Одна сторона трикутника дорівнює 4 см, а сума двох інших — 8 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо довжина кожної з них дорівнює цілому числу сантиметрів.

200.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)(x+4) \leqslant 0$; 4) $\frac{3x+6}{x-9} < 0$;

2) $(x+1)(2x-7) > 0$; 5) $\frac{2x-1}{x+2} \leqslant 0$;

3) $\frac{x-8}{x-1} > 0$; 6) $\frac{5x+4}{x-6} \geqslant 0$.

201.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(14-7x)(x+3) > 0$; 3) $\frac{5x-6}{x+9} \geqslant 0$;

2) $\frac{x-8}{3x-12} > 0$; 4) $\frac{4x+1}{x-10} \leqslant 0$.

202.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $|x - 2| \leqslant 3{,}6$;
2) $|2x + 3| < 5$;
3) $|x + 3| > 9$;
4) $|7 - 3x| \geqslant 1$;
5) $|x + 3| + 2x \geqslant 6$;
6) $|x - 4| - 6x < 15$.

203.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $|x - 6| \geqslant 2{,}4$;
2) $|5x + 8| \leqslant 2$;
3) $|x + 5| - 3x > 4$;
4) $|x - 1| + x \leqslant 3$.

204.* При яких значеннях a має хоча б один розв'язок система нерівностей:

1) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

205.* При яких значеннях a не має розв'язків система нерівностей:

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

206.* При яких значеннях a множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant a \end{cases}$ є проміжок:

1) $(-1;\ +\infty)$; 2) $[1;\ +\infty)$?

207.* Для кожного значення a розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x < 2, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

208.* Для кожного значення a розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$

209.* При яких значеннях a множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x < a \end{cases}$ містить рівно чотири цілі розв'язки?

210.* При яких значеннях b множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant b \end{cases}$ містить рівно три цілі розв'язки?

211.* При яких значеннях a найменшим цілим розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x > a \end{cases}$ є число 9?

212.* При яких значеннях b найбільшим цілим розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x < -2 \end{cases}$ є число -6?

213.* При яких значеннях a корені рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ менші від числа 5?

214.* При яких значеннях a корені рівняння $x^2 - (4a - 2)x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$ належать проміжку $[-2; 8]$?

215.* При яких значеннях a один із коренів рівняння $3x^2 - (2a + 5)x + 2 + a - a^2 = 0$ менший від -2, а другий — більший за 3?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

216. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2}{x^2 - 16} = \frac{3x + 4}{x^2 - 16}$; 2) $\frac{5}{x - 3} - \frac{8}{x} = 3$.

217. Спростіть вираз:

1) $0,5\sqrt{24} - 4\sqrt{40} - \sqrt{150} + \sqrt{54} + \sqrt{1000}$;

2) $\sqrt{8b} + 0,3\sqrt{50b} - 3\sqrt{2b}$;

3) $1,5\sqrt{72} - \sqrt{216} - 0,6\sqrt{450} + 0,5\sqrt{96}$.

218. Виразіть із даної рівності змінну x через інші змінні:

1) $2x - \frac{m}{n} = 2$; 2) $\frac{1}{m} - \frac{1}{x} = \frac{1}{n}$.

219. Відомо, що a — парне число, b — непарне, $a > b$. Значення якого з даних виразів може бути цілим числом:

1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; 2) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{b}{a}$?

220. Скільки кілограмів солі міститься в 40 кг 9-відсоткового розчину?

221. Руда містить 8 % олова. Скільки потрібно кілограмів руди, щоб отримати 72 кг олова?

222. Який відсоток вмісту солі в розчині, якщо в 350 г розчину міститься 21 г солі?

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 1

1. Порівняйте числа a і b, якщо $a - b = -3{,}6$.
А) $a > b$; В) $a = b$;
Б) $a < b$; Г) порівняти неможливо.

2. Відомо, що $m > n$. Яке з наведених тверджень хибне?
А) $m - 2 > n - 2$; В) $m + 2 > n + 2$;
Б) $2m > 2n$; Г) $-2m > -2n$.

3. Оцініть периметр P рівностороннього трикутника зі стороною a см, якщо $0{,}8 < a < 1{,}2$.
А) 1,6 см $< P <$ 2,4 см; В) 3,2 см $< P <$ 4,8 см;
Б) 2,4 см $< P <$ 3,6 см; Г) 1,2 см $< P <$ 1,8 см.

4. Відомо, що $2 < x < 3$ і $1 < y < 4$. Оцініть значення виразу xy.
А) $4 < xy < 8$; В) $2 < xy < 12$;
Б) $3 < xy < 7$; Г) $6 < xy < 14$.

5. Відомо, що $-18 < y < 12$. Оцініть значення виразу $\frac{1}{6}y + 2$.
А) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$; В) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$;
Б) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$; Г) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$.

6. Дано: $a > 0$, $b < 0$. Яка з наведених нерівностей може бути правильною?
А) $a^2 < b^2$; Б) $\frac{a}{b} > 1$; В) $a - b < 0$; Г) $a^2b^3 > 0$.

7. Множиною розв'язків якої з наведених нерівностей є множина дійсних чисел?
А) $2x > -2$; Б) $2x > 0$; В) $0x > -2$; Г) $0x > 0$.

8. Множиною розв'язків якої нерівності є проміжок $(3; +\infty)$?
А) $x \geqslant 3$; Б) $x \leqslant 3$; В) $x > 3$; Г) $x < 3$.

9. Знайдіть розв'язки нерівності $\frac{x}{4} \leqslant \frac{1}{5}$.
А) $x \geqslant \frac{4}{5}$; Б) $x \geqslant \frac{1}{20}$; В) $x \leqslant \frac{4}{5}$; Г) $x \leqslant \frac{1}{20}$.

10. Розв'яжіть нерівність $-3x + 8 \geqslant 5$.
А) $x \leqslant 1$; Б) $x \geqslant 1$; В) $x \leqslant -1$; Г) $x \geqslant -1$.

11. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{3x-5}{2} > \frac{8-x}{3}.$$

А) 2; В) 4;
Б) 3; Г) визначити неможливо.

12. Чому дорівнює добуток натуральних чисел, які належать області визначення виразу $\sqrt{14-3x}$?

А) 4; Б) 10; В) 18; Г) 24.

13. Яка з наведених систем нерівностей не має розв'язків?

А) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -2; \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -2; \end{cases}$ В) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -3; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \leqslant -3. \end{cases}$

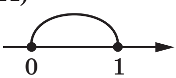
14. Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x-1 > 2x-3, \\ 4x+5 > x+17. \end{cases}$$

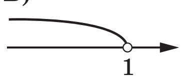
А) (2; 4); Б) (2; +∞); В) (−∞; 4); Г) ∅.

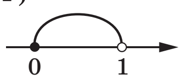
15. Який із зображених числових проміжків відповідає множині розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 8-7x > 3x-2, \\ -2(3x-2,6) \leqslant -2\cdot(-2,6)? \end{cases}$$

А)


Б)


В)


Г)


16. Скільки цілих розв'язків має система нерівностей

$$\begin{cases} x-\dfrac{x-2}{3} \geqslant \dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x-1}{2}, \\ 1-0,5x > x-4? \end{cases}$$

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.

17. Розв'яжіть нерівність $-3 < \frac{1-2x}{5} - 2 < 1$.

А) (−3; 7); Б) (−7; 3); В) (−7; −3); Г) (3; 7).

18. При яких значеннях a рівняння $2x^2 + 6x + a = 0$ не має коренів?

А) $a < 4,5$; Б) $a > 4,5$; В) $a > -4,5$; Г) $a < -4,5$.

ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - строгі й нестрогі нерівності;
  - нерівність з однією змінною;
  - розв'язок нерівності з однією змінною;
  - множина розв'язків нерівності з однією змінною;
  - рівносильні нерівності;
  - лінійна нерівність з однією змінною;
  - числові проміжки;
  - система нерівностей з однією змінною;
  - розв'язок системи нерівностей з однією змінною;
  - множина розв'язків системи нерівностей з однією змінною;
- ви вивчили:
  - основні властивості числових нерівностей;
  - правила додавання і множення числових нерівностей;
- ви навчилися:
  - доводити нерівності;
  - оцінювати значення виразів;
  - розв'язувати лінійні нерівності й системи лінійних нерівностей з однією змінною.

§ 2 КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

- У цьому параграфі ви повторите і розширите свої знання про функцію та її властивості.
- Навчитеся, використовуючи графік функції $y = f(x)$, будувати графіки функцій $y = kf(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$.
- Дізнаєтесь, яку функцію називають квадратичною, яка фігура є її графіком, вивчите властивості квадратичної функції.
- Навчитеся застосовувати властивості квадратичної функції при розв'язуванні нерівностей.
- Розширите свої знання про системи рівнянь із двома змінними, методи їх розв'язування, набудете нових навичок розв'язування систем рівнянь.

7. Функція

Перед вивченням цього пункту рекомендуємо повторити зміст пунктів 31–37 на с. 291—295.

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни іншої величини (залежної змінної). Вивчення цих процесів потребує створення їх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є **функція**.

З цим поняттям ви ознайомилися в 7 класі. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Нехай X — множина значень незалежної змінної. **Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значен-**

ням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної.

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Кажуть, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x. Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції.**

Множину всіх значень, яких набуває аргумент, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Так, областю визначення оберненої пропорційності $y = \frac{2}{x}$ є множина дійсних чисел, крім 0.

У функціональній залежності кожному значенню аргументу x відповідає певне значення залежної змінної y. Значення залежної змінної ще називають **значенням функції** і для функції f позначають $f(x)$. Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна, називають **областю значень функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Так, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є проміжок $[0; +\infty)$.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за яким можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Функцію можна задати одним з таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Такий спосіб задання функції називають **аналітичним**. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули. Наприклад, якщо функція задається формулою $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

У таблиці наведено функції, які ви вивчали у 7 і 8 класах.

Функція	Область визначення	Область значень	Графік
$y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	Якщо $k \neq 0$, то $(-\infty; +\infty)$, якщо $k = 0$, то область значень складається з одного числа b	Пряма
$y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$	Множина, яка складається з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	Множина, яка складається з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	Гіпербола
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Парабола
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Вітка параболи

1. Що таке функція?
2. Як позначають той факт, що змінна y функціонально залежить від змінної x?
3. Що називають аргументом функції?
4. Що називають областю визначення функції?
5. Що називають значенням функції?
6. Що називають областю значень функції?
7. Що треба вказати, щоб функція вважалася заданою?
8. Які способи задання функції ви знаєте?
9. Що вважають областю визначення функції, якщо вона задана формулою і при цьому не вказано область визначення?
10. Що називають графіком функції?
11. Яку функцію називають лінійною?
12. Що є областю визначення і областю значень лінійної функції?
13. Що є графіком лінійної функції?
14. Яку функцію називають прямою пропорційністю?
15. Що є графіком функції пряма пропорційність?

16. Яку функцію називають оберненою пропорційністю?
17. Що є областю визначення і областю значень функції обернена пропорційність?
18. Що є графіком функції обернена пропорційність?
19. Укажіть, що є областю визначення, областю значень, графіком функції $y = x^2$.
20. Укажіть, що є областю визначення, областю значень, графіком функції $y = \sqrt{x}$.

223.° Функцію задано формулою $f(x) = -2x^2 + 5x$.
1) Знайдіть: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-5)$.
2) Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 0; 2; −3.
3) Чи є правильною рівність: $f(-1) = 7$; $f(4) = -12$?

224.° Функцію задано формулою $f(x) = 3x - 2$.
1) Знайдіть $f(3)$; $f(0)$; $f(-0{,}2)$; $f(1{,}6)$.
2) Знайдіть значення x, при якому: $f(x) = 10$; $f(x) = -6$; $f(x) = 0$.

225.° Кожному натуральному числу, більшому за 10, але меншому від 20, поставили у відповідність остачу від ділення цього числа на 5.
1) Яким способом задано цю функцію?
2) Яка область значень цієї функції?
3) Задайте цю функцію таблично.

226.° Функцію задано формулою $y = 0{,}4x - 2$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	2		−2,5	
y		−2		0,8

227.° Дано функцію $y = -\frac{16}{x}$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	2		−0,4	
y		0,8		−32

228.° На рисунку 16 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) значення x, при яких $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значень функції.

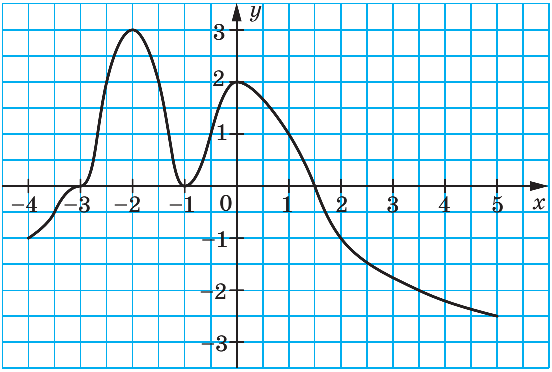


Рис. 16

229.° На рисунку 17 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2{,}5)$;
2) значення x, при яких $f(x) = -1$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значень функції.

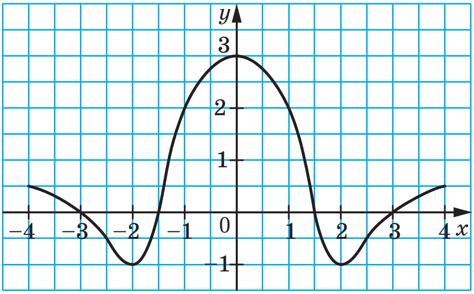


Рис. 17

230.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = 7x - 15$;
2) $f(x) = \frac{8}{x+5}$;
3) $f(x) = \frac{x-10}{6}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-9}$;
5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$;
6) $f(x) = \frac{10}{x^2-4}$;
7) $f(x) = \frac{6x+11}{x^2-2x}$;
8) $f(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{4-x}$.

231.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$;
2) $f(x) = \frac{9}{x^2+16}$;
3) $f(x) = \frac{5x+1}{x^2-6x+8}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$;
6) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

232.° Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = -2x + 3$;
2) $f(x) = -\frac{1}{4}x$;
3) $f(x) = 3$;
4) $f(x) = -\frac{6}{x}$.

233.° Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = 4 - \frac{1}{3}x$;
2) $f(x) = \frac{8}{x}$.

234.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x) = \frac{1}{6}x - 7$;
2) $f(x) = \frac{20+4x}{3x-5}$;
3) $g(x) = 9 - x^2$;
4) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$.

235.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $h(x) = 9 - 10x$;
2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$;
3) $s(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$.

236.• Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x^2 - 5, \text{ якщо } -1 < x < 4, \\ 11, \quad \text{ якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6{,}4)$.

237.• Побудуйте графік функції

$$f(x) = \begin{cases} 6, & \text{якщо } x \leqslant -3, \\ x^2, & \text{якщо } -3 < x < 1, \\ x, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$$

238.• Побудуйте графік функції

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ -x, & \text{якщо } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

239.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x-2} + \dfrac{x+2}{x-5}$;
3) $f(x) = \sqrt{x+3} + \dfrac{1}{x^2-9}$;
2) $f(x) = \dfrac{x}{|x|-7}$;
4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{4x-3}{x^2-7x+6}$.

240.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \dfrac{2}{x+1}$;
2) $f(x) = \sqrt{8-x} + \dfrac{4}{x^2-8x}$.

241.• Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 1$;
4) $f(x) = |x| + 2$;
2) $f(x) = 5 - x^2$;
5) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;
3) $f(x) = -7$;
6) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$.

242.• Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = x^2 + 3$;
3) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.
2) $f(x) = 6 - \sqrt{x}$;

243.• Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел 1 і 2;
2) множина всіх чисел, не менших від 5;
3) множина всіх чисел, не більших за 10, крім числа −1;
4) множина, яка складається з одного числа −4.

244.•• Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$;
2) $f(x) = \dfrac{12x-72}{x^2-6x}$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-9}$.

245.•• Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$;   2) $f(x) = \frac{x^3}{x}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

246. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - x - 12$;   3) $6x^2 + 11x - 2$;

2) $-x^2 + 2x + 35$;   4) $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 6$.

247. Обчисліть значення виразу:

1) $(10^3)^2 \cdot 10^{-8}$;   3) $\frac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-2}}$;

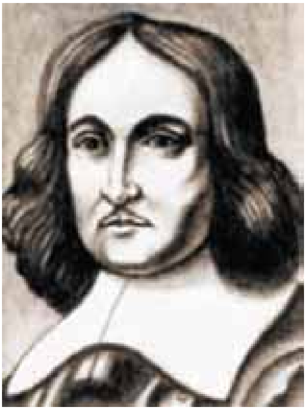
2) $\frac{25^{-3} \cdot 5^3}{5^{-5}}$;   4) $\frac{0,125^3 \cdot 32^2}{0,5^{-2}}$.

248. Ціна двох шаф була однаковою. Ціну першої шафи спочатку підвищили на $20\ \%$, а потім знизили на $10\ \%$. Ціну другої шафи, навпаки, спочатку знизили на $10\ \%$, а потім підвищили на $20\ \%$. Ціна якої шафи стала більшою?

249. Відстань між містами A і B становить 120 км. Через 2 год після виїзду з міста A мотоцикліст затримався біля залізничного переїзду на 6 хв. Щоб прибути в місто B у запланований час, він збільшив швидкість на 12 км/год. З якою швидкістю рухався мотоцикліст після затримки?

З історії розвитку поняття функції

Означення функції, яким ви користуєтеся на даному етапі вивчення математики, з'явилося порівняно нещодавно — у першій половині XIX ст. Воно формувалося більше 200 років під впливом бурхливих суперечок видатних математиків кількох поколінь.

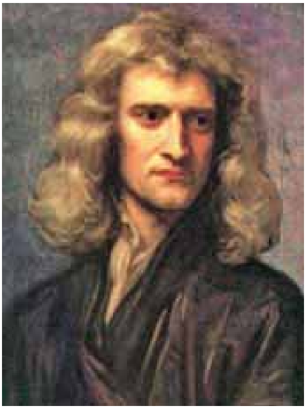


П'єр Ферма

Рене Декарт

Дослідженням функціональних залежностей між величинами почали займатися ще стародавні вчені. Цей пошук знайшов відображення у відкритті формул для знаходження площ і об'ємів деяких фігур. Прикладами табличного задання функцій можуть слугувати астрономічні таблиці вавилонян, стародавніх греків і арабів.

Проте лише в першій половині XVII ст. своїм відкриттям методу координат видатні французькі математики П'єр Ферма (1601–1665) і Рене Декарт (1596–1650) заклали основи для виникнення поняття функції. У своїх працях вони досліджували зміну ординати точки залежно від зміни її абсциси.



Ісак Ньютон

Значну роль у формуванні поняття функції відіграли роботи великого англійського вченого Ісака Ньютона (1643–1727). Під функцією він розумів величину, яка змінює своє значення з плином часу.

Термін «функція» (від латинського *functio* — здійснення, ви-

Георг Лейбніц

Йоганн Бернуллі

конання) запровадив німецький математик Георг Лейбніц (1646–1716). Він і його учень, швейцарський математик Йоганн Бернуллі (1667–1748) під функцією розуміли формулу, яка пов'язує одну змінну з іншою, тобто вони ототожнювали функцію з одним із способів її задання.

Подальшому розвиткові поняття функції багато в чому сприяло з'ясування істини в багаторічному спорі видатних математиків Леонарда Ейлера (1707–1783) і Жана Лерона

Леонард Ейлер

Жан Лерон Д'Аламбер

Микола Лобачевський

Петер Діріхле

Д'Аламбера (1717–1783), одним із предметів якого було з'ясування сутності цього поняття. У результаті було сформовано більш загальний погляд на функцію як залежність однієї змінної величини від іншої, у якому це поняття жорстко не пов'язувалося зі способом задання функції.

У 30-х роках XIX ст. ідеї Ейлера набули подальшого розвитку в роботах видатних учених: російського математика Миколи Лобачевського (1792–1856) і німецького математика Петера Густава Лежена Діріхле (1805–1859). Саме тоді з'явилося таке означення: змінну величину y називають функцією змінної величини x, якщо кожному значенню величини x відповідає єдине значення величини y.

Таке означення функції можна й сьогодні зустріти в шкільних підручниках. Проте більш сучасний погляд — це трактування функції як *правила, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної*.

Коли на межі XIX і XX століть виникла теорія множин і стало зрозумілим, що елементами області визначення і області значень зовсім не обов'язково мають бути числа, то під функцією стали розуміти *правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y*.

8. Властивості функції

Часто про властивості об’єкта можна робити висновки за його зображенням: фотографією, рентгенівським знімком, рисунком тощо.

«Зображенням» функції може слугувати її графік. Покажемо, як графік функції дозволяє визначити певні її властивості.

На рисунку 18 зображено графік деякої функції $y = f(x)$.

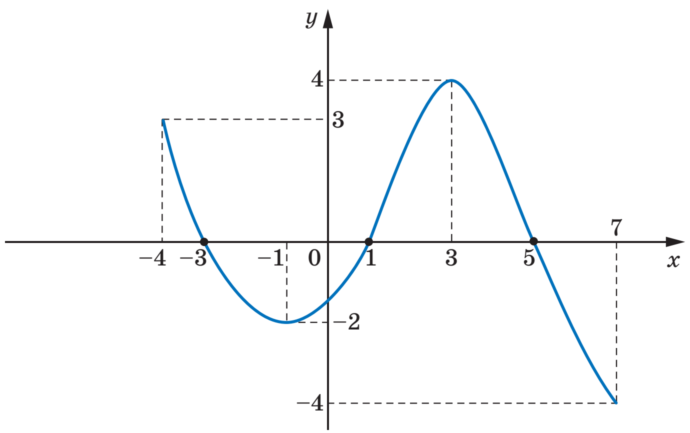


Рис. 18

Її областю визначення є проміжок $[-4; 7]$, а областю значень — проміжок $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значення функції дорівнює нулю.

Означення. **Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції.**

Так, числа −3, 1, 5 є нулями даної функції.

Зауважимо, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — під віссю абсцис. Це означає, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ функція набуває додатних значень, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — від’ємних.

Кожний із зазначених проміжків називають **проміжком знакосталості** функції f.

Означення. **Кожний з проміжків, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції f.**

Зазначимо, що, наприклад, проміжок (0; 5) не є проміжком знакосталості даної функції.

Зауваження. Знаходячи проміжки знакосталості функції, прийнято вказувати проміжки максимальної довжини. Наприклад, проміжок (−2; −1) є проміжком знакосталості функції f (рис. 18), але до відповіді увійде проміжок (−3; 1), який містить проміжок (−2; −1).

Якщо переміщатися по осі абсцис від −4 до −1, то можна помітити, що графік функції йде вниз, тобто значення функції зменшуються. Кажуть, що на проміжку [−4; −1] **функція спадає**. Із збільшенням x від −1 до 3 графік функції йде вгору, тобто значення функції збільшуються. Кажуть, що на проміжку [−1; 3] **функція зростає**.

Означення. **Функцію f називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 з цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.**

Означення. **Функцію f називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 з цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.**

Часто використовують коротше формулювання.

Означення. **Функцію називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.**

Означення. **Функцію називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.**

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають **зростаючою**. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають **спадною**.

Наприклад, на рисунку 19 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. Ця функція є зростаючою. На рисунку 20 зображено графік спадної функції $y = -x$. На рисунку 18 зображено графік функції, яка не є ні зростаючою, ні спадною.

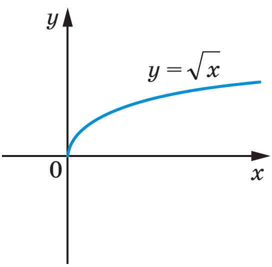


Рис. 19

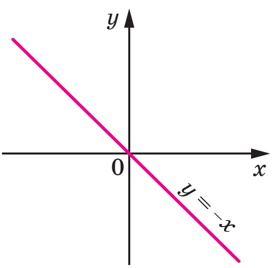


Рис. 20

ПРИКЛАД 1

Доведіть, що функція $y = x^2$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

Розв'язання

Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(-\infty; 0]$, до того ж $x_1 < x_2$. Покажемо, що $x_1^2 > x_2^2$, тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Маємо: $x_1 < x_2$; $-x_1 > -x_2$. Обидві частини останньої нерівності є невід'ємними числами. Тоді за властивістю числових нерівностей можна записати, що $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, тобто $x_1^2 > x_2^2$.

Зазначимо, що в таких випадках кажуть, що проміжок $(-\infty; 0]$ є **проміжком спадання** функції $y = x^2$. Аналогічно можна довести, що проміжок $[0; +\infty)$ є **проміжком зростання** функції $y = x^2$.

У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини.

ПРИКЛАД 2

Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Розв'язання

Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(0; +\infty)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді за властивістю числових нерівностей $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Отже, дана функція спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно доводять, що функція f спадає на проміжку $(-\infty; 0)$.

Зауважимо, що не можна стверджувати, що дана функція спадає на всій області визначення, тобто є спадною. Дійсно, якщо, наприклад, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то з нерівності $x_1 < x_2$ не випливає, що $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

ПРИКЛАД 3

Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ є зростаючою при $k > 0$ і спадною при $k < 0$.

Розв'язання

Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу, причому $x_1 < x_2$.

Маємо:

$f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$.

Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$.

Якщо $k > 0$, то $k(x_1 - x_2) < 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$. Отже, при $k > 0$ дана функція є зростаючою.

Якщо $k < 0$, то $k(x_1 - x_2) > 0$, тобто $f(x_1) > f(x_2)$. Отже, при $k < 0$ дана функція є спадною.

1. Яке значення аргументу називають нулем функції?
2. Поясніть, що називають проміжком знакосталості функції.
3. Яку функцію називають зростаючою на деякому проміжку?
4. Яку функцію називають спадною на деякому проміжку?
5. Яку функцію називають зростаючою?
6. Яку функцію називають спадною?

250.° На рисунку 21 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) при яких значеннях аргументу значення функції додатні;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

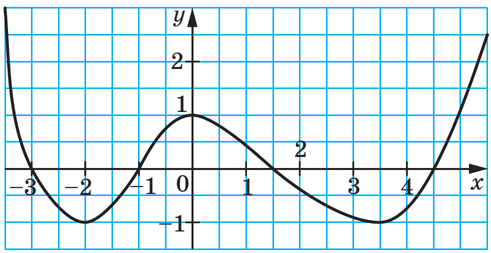


Рис. 21

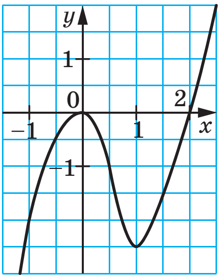


Рис. 22

251.° На рисунку 22 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) при яких значеннях аргументу значення функції від'ємні;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

252.° На рисунку 23 зображено графік функції, визначеної на проміжку $[-1; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) при яких значеннях x значення функції від'ємні;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

253.° На рисунку 24 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Які з даних тверджень є правильними:

1) функція спадає на проміжку $(-\infty; -9]$;
2) $f(x) < 0$ при $-5 \leqslant x \leqslant 1$;
3) функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$;
4) $f(x) = 0$ при $x = -5$ і при $x = 1$;
5) функція на області визначення набуває найменшого значення при $x = -2$?

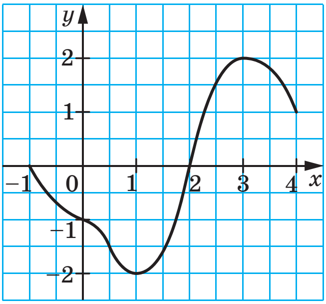


Рис. 23

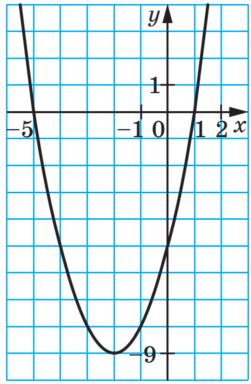


Рис. 24

254.° На рисунку 25 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) значення x, при яких $y < 0$;
3) проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

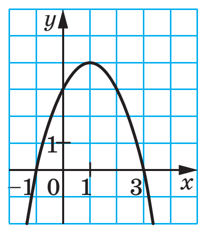


Рис. 25

255.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = 9x - 4$; 3) $y = 12 - 3x$; 5) $y = \frac{1}{6}x$;

2) $y = -4x + 10$; 4) $y = -x$; 6) $y = 1 - 0{,}3x$?

256.° Знайдіть нулі функції:

1) $f(x) = 0{,}2x + 3$; 4) $h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 3}$;

2) $g(x) = 35 - 2x - x^2$; 5) $f(x) = x^3 - 4x$;

3) $\varphi(x) = \sqrt{x + 3}$; 6) $f(x) = x^2 + 1$.

257.° Знайдіть нулі функції:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x + 12$; 4) $f(x) = -5$;

2) $f(x) = 6x^2 + 5x + 1$; 5) $f(x) = \frac{3 - 0{,}2x}{x + 1}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; 6) $f(x) = x^2 - x$.

258.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = 5x - 15$;
2) $y = -7x - 28$;
3) $y = x^2 - 2x + 1$;
4) $y = \frac{9}{3 - x}$.

259.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = -4x + 8$; 2) $y = -x^2 - 1$; 3) $y = \sqrt{x} + 2$.

260.• Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на множині дійсних чисел, нулями якої є числа:
1) -2 і 5; 2) -4, -1, 0 і 4.

261.• Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на проміжку $[-5; 5]$, нулями якої є числа -3, 0 і 3.

262.• Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на проміжку $[-4; 3]$, такої, що:
1) функція зростає на проміжку $[-4; -1]$ і спадає на проміжку $[-1; 3]$;
2) функція спадає на проміжках $[-4; -2]$ і $[0; 3]$ і зростає на проміжку $[-2; 0]$.

263.• Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на множині дійсних чисел, такої, що зростає на проміжках $(-\infty; 1]$ і $[4; +\infty)$ і спадає на проміжку $[1; 4]$.

264.• Побудуйте графік функції

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -2x + 8, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

265.• Побудуйте графік функції

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{якщо } x < -1, \\ \frac{x}{4}, & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

266.• При яких значеннях a функція $y = x^2 + (2a - 1)x + a^2 + a$ має два нулі?

267.• При яких значеннях a функція $y = x^2 + 6x + a$ не має нулів?

268.• При якому найбільшому цілому значенні n функція $y = (8 - 3n)x - 7$ є зростаючою?

269.• При яких значеннях m функція $y = mx - m - 3 + 2x$ є спадною?

270.• Функція $y = f(x)$ є спадною. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y = \frac{1}{3}f(x)$; 3) $y = -f(x)$?

271.• Функція $y = f(x)$ зростає на деякому проміжку. Зростаючою чи спадною на цьому проміжку є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -2f(x)$?

272.•• Доведіть, що функція:

1) $y = \frac{6}{3 - x}$ зростає на проміжку $(3; +\infty)$;

2) $y = x^2 - 4x + 3$ спадає на проміжку $(-\infty; 2]$.

273.•• Доведіть, що функція:

1) $y = \frac{7}{x + 5}$ спадає на проміжку $(-5; +\infty)$;

2) $y = 6x - x^2$ зростає на проміжку $(-\infty; 3]$.

274.•• Доведіть, що функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ при $k > 0$ і зростає на кожному з цих проміжків при $k < 0$.

275.* При яких значеннях a функція $f(x) = (a - 1)x^2 + 2ax + 6 - a$ має єдиний нуль?

276.* Побудуйте графік функції $f(x) = x^2$, визначеної на проміжку $[a; 2]$, де $a < 2$. Для кожного значення a знайдіть найбільше і найменше значення функції.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

277. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2 + x - 6}{7x + 21}$;
3) $\dfrac{m^2 - 16m + 63}{m^2 - 81}$;
2) $\dfrac{2y - 16}{8 + 7y - y^2}$;
4) $\dfrac{3a^2 + a - 2}{4 - 9a^2}$.

278. Виконайте множення:

1) $(\sqrt{11} + \sqrt{6})(\sqrt{11} - \sqrt{6})$;
3) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$;
2) $(\sqrt{32} - 5)(\sqrt{32} + 5)$;
4) $(\sqrt{10} + 8)^2$.

279. Два екскаватори різних моделей викопали котлован за 8 год. Перший екскаватор може вирити, працюючи самостійно, такий котлован у 4 рази швидше, ніж другий. За скільки годин може вирити такий котлован кожний екскаватор, працюючи самостійно?

280. До розчину масою 200 г, який містить 12 % солі, додали 20 г солі. Яким став відсотковий вміст солі в новому розчині?

9. Як побудувати графік функції $y = kf(x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

У 8 класі ви ознайомилися з функцією $y = x^2$ і дізналися, що її графіком є фігура, яку називають параболою (рис. 26).

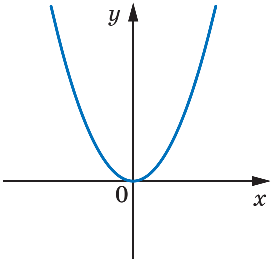


Рис. 26

Покажемо, як можна, використовуючи графік функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$.

Побудуємо, наприклад, графік функції $y = 2x^2$.

Складемо таблицю значень функцій $y = x^2$ і $y = 2x^2$ при одних і тих самих значеннях аргументу:

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = 2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

Ця таблиця підказує, що кожній точці $(x_0;\ y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає точка $(x_0;\ 2y_0)$ графіка функції $y = 2x^2$. Інакше кажучи, при будь-якому $x \neq 0$ значення функції $y = 2x^2$ у 2 рази більше за відповідне значення функції $y = x^2$. Отже, усі точки графіка функції $y = 2x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та ординатою, помноженою на 2 (рис. 27).

Використовуючи графік функції $y = x^2$, побудуємо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$.

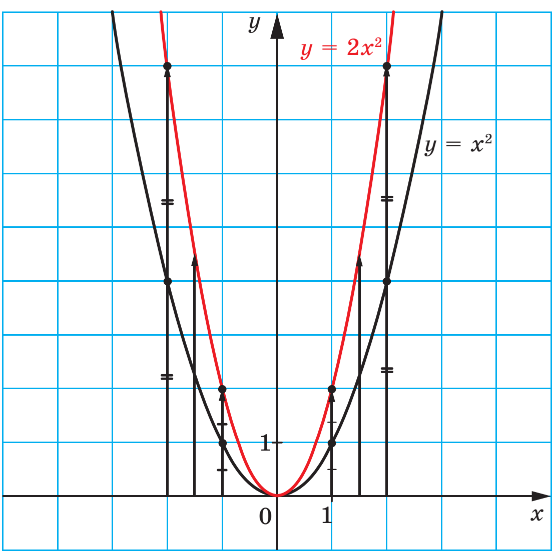


Рис. 27

Очевидно, що кожній точці $(x_0;\ y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $\left(x_0; \frac{1}{2}y_0\right)$ графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2$. Отже, усі точки графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та ординатою, помноженою на $\frac{1}{2}$ (рис. 28).

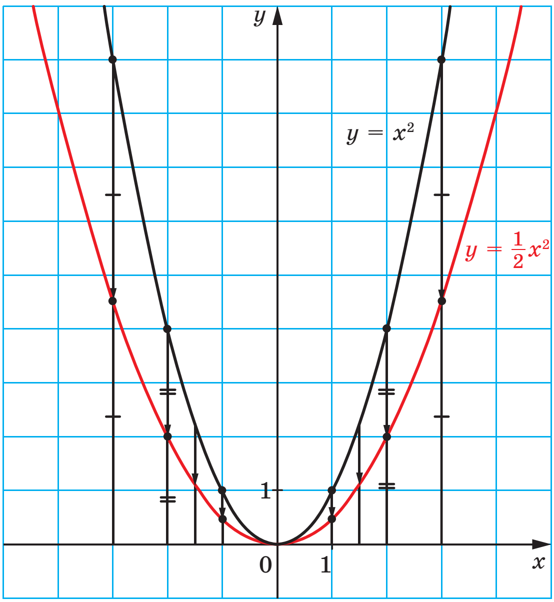


Рис. 28

Ці приклади підказують, як, використовуючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$.

Графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою абсцисою та ординатою, помноженою на k.

На рисунках 29, 30 показано, як «працює» це правило для побудови графіків функцій $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ і $y = \frac{3}{x}$.

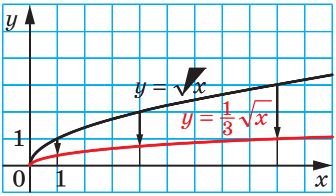


Рис. 29

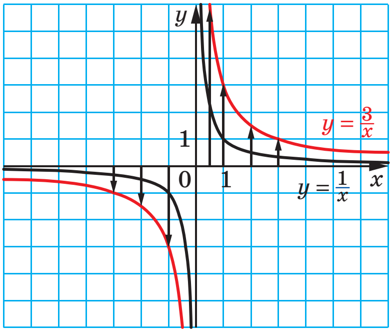


Рис. 30

Кажуть, що графік функції $y = kf(x)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **розтягу в k разів від осі абсцис**, якщо $k > 1$, або в результаті **стиску в $\frac{1}{k}$ разів до осі абсцис**, якщо $0 < k < 1$.

Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = -x^2$. Кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає точка $(x_0; -y_0)$ графіка функції $y = -x^2$. Інакше кажучи, при будь-якому $x \neq 0$ значення функцій $y = x^2$ і $y = -x^2$ є протилежними числами. Отже, усі точки графіка функції $y = -x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на -1 (рис. 31).

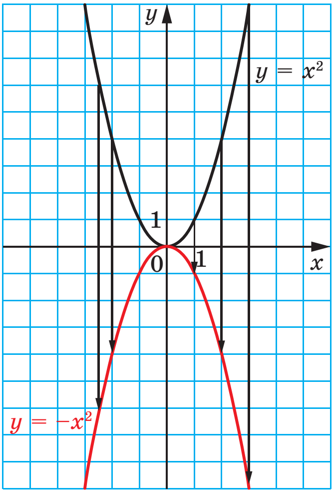


Рис. 31

З огляду на це стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = kf(x)$, де $k < 0$, таке саме, як і для випадку, коли $k > 0$.

Наприклад, на рисунку 32 показано, як можна за до-

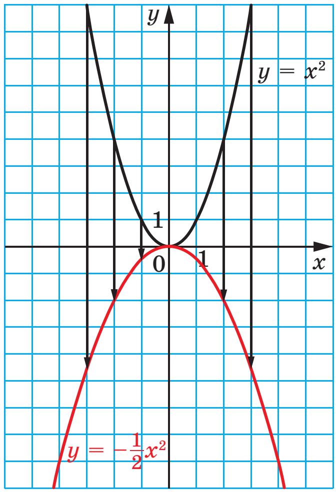


Рис. 32

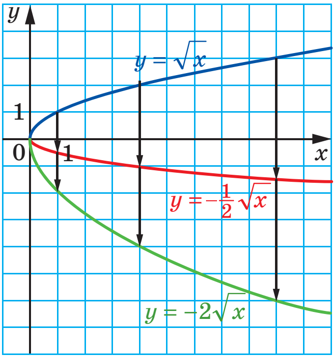


Рис. 33

помогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = -\frac{1}{2}x^2$.

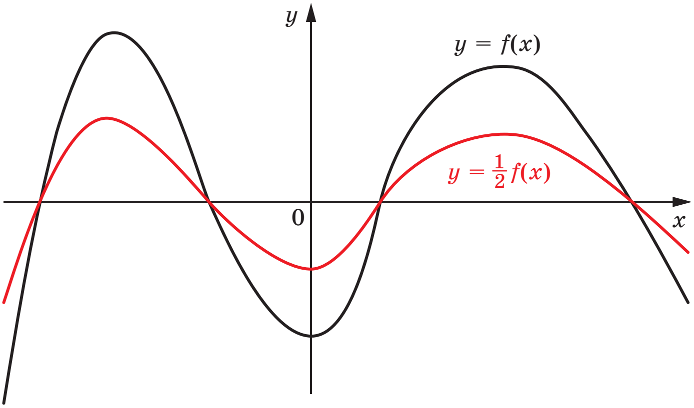
Рисунок 33 ілюструє, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ можна побудувати графіки функцій $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ і $y = -2\sqrt{x}$.

Зауважимо, що при $k \neq 0$ нулі функцій $y = f(x)$ і $y = kf(x)$ збігаються. Отже, графіки цих функцій перетинають вісь абсцис в одних і тих самих точках (рис. 34).

На рисунку 35 зображено графіки функцій $y = ax^2$ при деяких значеннях a. Кожний із цих графіків, як і графік функції $y = x^2$, називають **параболою**. Точка (0; 0) є вершиною кожної з цих парабол.

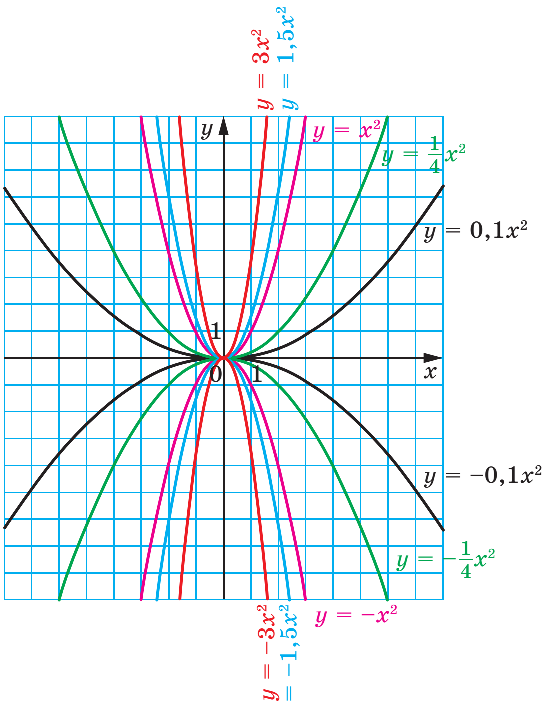
Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

Часто замість вислову «дано функцію $y = ax^2$» вживають «дано параболу $y = ax^2$».



y
y = f(x)
y = ½ f(x)
0
x

Рис. 34



y = 3x²
y = 1,5x²
y
y = x²
y = ¼x²
y = 0,1x²
1
0
1
x
y = −0,1x²
y = −¼x²
y = −3x²
y = −1,5x²
y = −x²

Рис. 35

У таблиці наведено властивості функції $y = ax^2$, $a \neq 0$.

Властивість	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$
Зростає на проміжку	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$

1. Як можна отримати графік функції $y = kf(x)$, де $k \neq 0$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
2. Яка фігура є графіком функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$?
3. Яка точка є вершиною параболи $y = ax^2$?
4. Як напрямлені вітки параболи $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
5. Яка область визначення функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$?
6. Яка область значень функції $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
7. На якому проміжку зростає і на якому проміжку спадає функція $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
8. У яких координатних чвертях знаходиться графік функції $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?

281.° Чи належить графіку функції $y = -25x^2$ точка:

1) $A(2; -100)$;
2) $B(-2; 100)$;
3) $C\left(-\frac{1}{5}; -1\right)$;
4) $D(-1; 25)$?

282.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину параболи $y = 3x^2$ і прямої:

1) $y = 300$; 2) $y = 42x$; 3) $y = -150x$; 4) $y = 6 - 3x$.

283.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ і $y = 3$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$ і $y = x + 4$.

284.° При яких значеннях a точка $A\ (a;\ 16)$ належить графіку функції $y = 4x^2$?

285.° При яких значеннях b точка $B\ (-2;\ b)$ належить графіку функції $y = -0{,}2x^2$?

286.° Відомо, що точка $M\ (3;\ -6)$ належить графіку функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.

287.° Відомо, що точка $K\ (-5;\ 10)$ належить графіку функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.

288.• На рисунку 36 зображено графік функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.

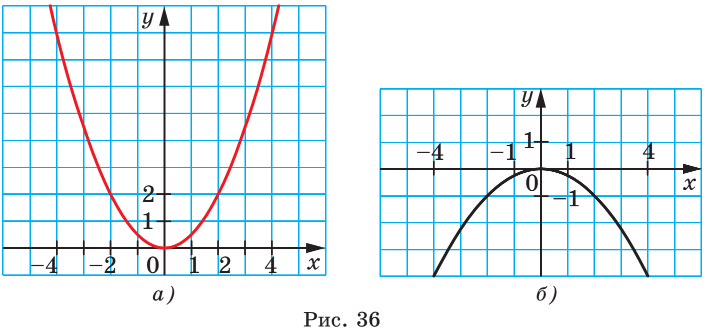


Рис. 36

289.• На рисунку 37 зображено графік функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.

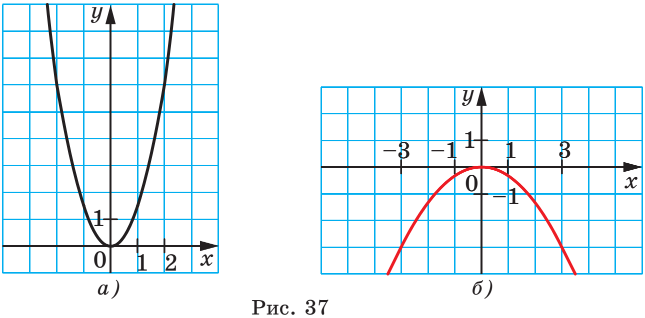


Рис. 37

290.• На рисунку 38 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = -2f(x)$.

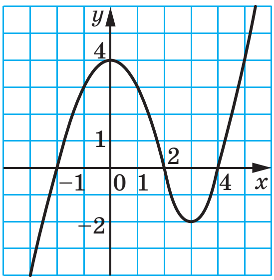


Рис. 38

291.• На рисунку 39 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{3}g(x)$; 2) $y = -\frac{1}{2}g(x)$.

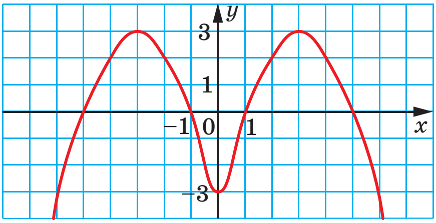


Рис. 39

292.• Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи побудований графік, побудуйте графік функції:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

293.• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$. Використовуючи побудований графік, побудуйте графік функції:

1) $y = 4\sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$.

294.$^{\bullet}$ Доведіть, що функція $y = ax^2$ при $a > 0$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

295.$^{\bullet}$ Доведіть, що функція $y = ax^2$ при $a < 0$ зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

296.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ -2x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -x^2, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.

297.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} -2, & \text{якщо } x < -1, \\ -2x^2, & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2x^2, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

298. Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{m-n}{m^2+mn} - \frac{m}{mn+n^2}\right) : \left(\frac{n^2}{m^3-mn^2} + \frac{1}{m+n}\right) = \frac{n-m}{n}.$$

299. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(a-b)^2}$, якщо $b \geqslant a$;

2) $\sqrt{c^2+6c+9}$, якщо $c \geqslant -3$;

3) $\dfrac{\sqrt{(m-5)^4}}{m^2-10m+25}$, якщо $m < 5$.

300. Для перевезення 45 т вантажу планували взяти машину певної вантажопідйомності. Проте через її несправність довелося взяти іншу машину, вантажопідйомність якої на 2 т менша, ніж у першої. Через це знадобилося зробити на 6 рейсів більше за заплановані. Знайдіть вантажопідйомність машини, яка перевезла вантаж.

301. Якого найменшого значення може набути даний вираз і при якому значенні змінної:

1) $(x - 6)^2 + 3$; 3) $x^2 + 2x - 6$;
2) $(x + 4)^2 - 5$; 4) $x^2 - 10x + 18$?

10. Як побудувати графіки функцій $y = f(x) + b$ і $y = f(x + a)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Покажемо, як, використовуючи графік функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = x^2 + 2$.

Складемо таблицю значень цих функцій при одних і тих самих значеннях аргументу.

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = x^2 + 2$	11	8,25	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11

Ця таблиця підказує, що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає точка $(x_0; y_0 + 2)$ графіка функції $y = x^2 + 2$. Інакше кажучи, при будь-якому x значення функції $y = x^2 + 2$ на 2 більше за відповідне значення функції $y = x^2$. Отже, усі точки графіка функції $y = x^2 + 2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою і з ординатою, збільшеною на 2 (рис. 40).

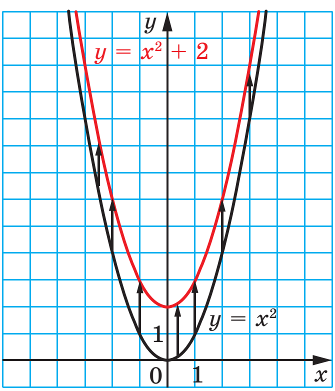


Рис. 40

Говорять, що графік функції $y = x^2 + 2$ отримано в результаті **паралельного перенесення**[1]

[1] Пізніше на уроках геометрії ви більш докладно ознайомитеся з паралельним перенесенням.

графіка функції $y = x^2$ на дві одиниці вгору.

Аналогічно графік функції $y = x^2 - 4$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ на 4 одиниці вниз (рис. 41).

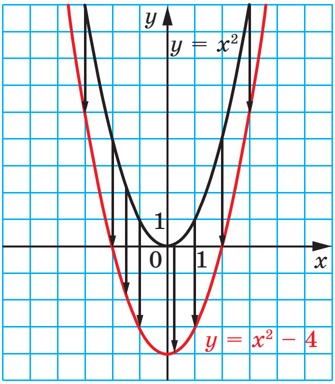


Рис. 41

Очевидно, що в результаті паралельного перенесення отримуємо фігуру, яка дорівнює фігурі, що є графіком вихідної функції. Наприклад, графіками функцій $y = x^2 + 2$ і $y = x^2 - 4$ є параболи, які дорівнюють параболі $y = x^2$.

Ці приклади підказують, як можна, використовуючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = f(x) + b$.

Графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$.

На рисунках 42, 43 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{x} + 3$ і $y = \frac{1}{x} - 1$.

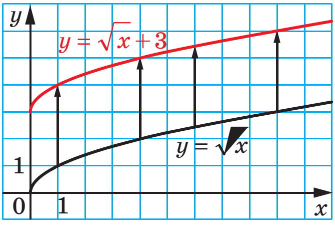


Рис. 42

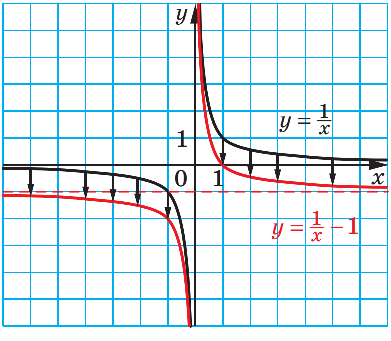


Рис. 43

Покажемо, як можна за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = (x + 2)^2$.

Нехай точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = x^2$, тобто $x_0^2 = y_0$. Доведемо, що точка $(x_0 - 2; y_0)$ належить графіку функції $y = (x + 2)^2$. Знайдемо значення цієї функції у точці з абсцисою $x_0 - 2$. Маємо: $((x_0 - 2) + 2)^2 = x_0^2 = y_0$.

Отже, усі точки графіка функції $y = (x + 2)^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою ординатою і абсцисою, зменшеною на 2 (рис. 44).

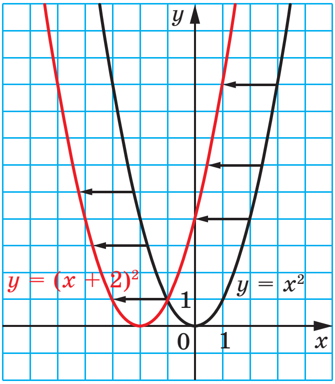


Рис. 44

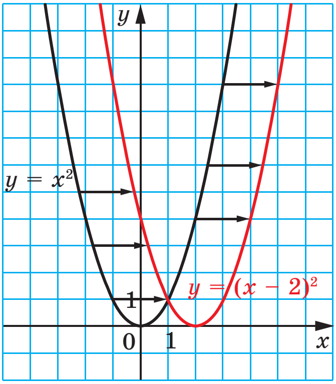


Рис. 45

Також кажуть, що графік функції $y = (x + 2)^2$ отримують у результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ на дві одиниці вліво.

Розглянемо ще один приклад. Побудуємо графік функції $y = (x - 2)^2$. Легко показати (зробіть це самостійно), що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає точка $(x_0 + 2; y_0)$ графіка функції $y = (x - 2)^2$. Отже, графік функції $y = (x - 2)^2$ отримують у результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ на 2 одиниці вправо (рис. 45).

Зрозуміло, що в результаті описаного паралельного перенесення отримуємо фігуру, яка дорівнює фігурі, що є графіком вихідної функції. Наприклад, графіками функцій $y = (x + 2)^2$ і $y = (x - 2)^2$ є параболи, які дорівнюють параболі $y = x^2$.

Ці приклади підказують, як можна, використовуючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = f(x + a)$.

Графік функції $y = f(x + a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.

На рисунках 46, 47 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{x+3}$ і $y = \frac{1}{x-1}$.

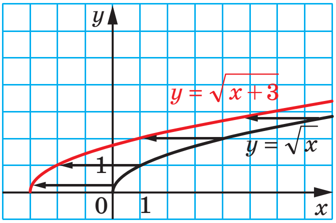


Рис. 46

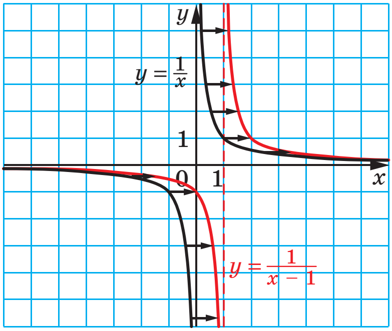


Рис. 47

ПРИКЛАД 1

Побудуйте графік функції $y = (x - 1)^2 + 3$.

Розв'язання

1) Побудуємо графік функції $y = x^2$.

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 1 одиницю вправо. Отримаємо графік функції $y = (x - 1)^2$ (рис. 48).

3) Паралельно перенесемо графік функції $y = (x - 1)^2$ на 3 одиниці вгору. Отримаємо графік функції $y = (x - 1)^2 + 3$ (рис. 48).

Описаний алгоритм побудови подамо у вигляді схеми:

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{управо на 1 од.}} y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{угору на 3 од.}} y = (x-1)^2 + 3$$

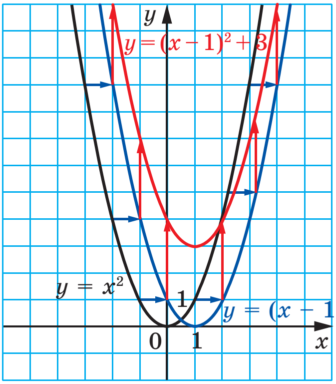


Рис. 48

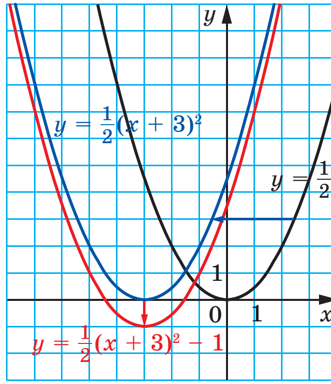


Рис. 49

ПРИКЛАД 2

Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$.

Розв'язання

1) Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 49).

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 одиниці вліво. Отримаємо графік функції $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ (рис. 49).

3) Паралельно перенесемо графік функції $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ на 1 одиницю вниз. Отримаємо шуканий графік.

Схема побудови має такий вигляд:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{уліво на 3 од.}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 \xrightarrow{\text{униз на 1 од.}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$$

З описаних перетворень випливає, що графіком функції $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$ є парабола з вершиною в точці $(-3; -1)$, яка дорівнює параболі $y = \frac{1}{2}x^2$.

Із цього прикладу стає зрозумілим алгоритм побудови графіка функції $y = kf(x + a) + b$, зокрема $y = k(x + a)^2 + b$. ***Графіком функції $y = k(x + a)^2 + b$, $k \neq 0$, є парабола, яка дорівнює параболі $y = kx^2$ і вершина якої знаходиться в точці $(-a; b)$.***

ПРИКЛАД 3

Побудуйте графік функції $y = -2x^2 - 20x - 47$.

Розв'язання

Маємо:

$-2x^2 - 20x - 47 = -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x + 5)^2 + 3$.

Ми подали формулу, що задає дану функцію, у вигляді $y = kf(x + a) + b$, де $f(x) = x^2$, $k = -2$, $a = 5$, $b = 3$.

Схема побудови має такий вигляд:

$$y = -2x^2 \xrightarrow{\text{уліво на 5 од.}} y = -2(x + 5)^2 \xrightarrow{\text{угору на 3 од.}} y = -2(x + 5)^2 + 3$$

Побудований графік є параболою з вершиною в точці $(-5; 3)$, яка дорівнює параболі $y = -2x^2$ (рис. 50).

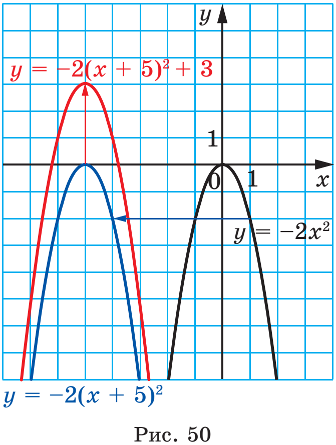


Рис. 50

1. Як можна отримати графік функції $y = f(x) + b$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
2. Яка фігура є графіком функції $y = x^2 + b$?
3. Які координати вершини параболи $y = x^2 + b$?
4. Як можна отримати графік функції $y = f(x + a)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
5. Яка фігура є графіком функції $y = (x + a)^2$?
6. Які координати вершини параболи $y = (x + a)^2$?
7. Яка фігура є графіком функції $y = k(x + a)^2 + b$, де $k \neq 0$?

302.° Графік якої функції отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо:
1) на 6 одиниць угору;
2) на 9 одиниць управо;
3) на 12 одиниць униз;
4) на 7 одиниць уліво;
5) на 2 одиниці вправо і на 3 одиниці вниз;
6) на 1 одиницю вліво і на 1 одиницю вгору?

303.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 4 одиниці вправо:
1) $y = x^2 + 4$;
2) $y = x^2 - 4$;
3) $y = (x + 4)^2$;
4) $y = (x - 4)^2$?

304.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 5 одиниць угору:
1) $y = x^2 + 5$;
2) $y = x^2 - 5$;
3) $y = (x + 5)^2$;
4) $y = (x - 5)^2$?

305.° Які координати має вершина параболи:
1) $y = x^2 + 8$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = (x + 8)^2$;
4) $y = (x - 8)^2$;
5) $y = (x - 4)^2 + 3$;
6) $y = (x + 4)^2 + 3$;
7) $y = (x - 4)^2 - 3$;
8) $y = (x + 4)^2 - 3$?

306.° У якій координатній чверті знаходиться вершина параболи:

1) $y = (x + 10)^2 - 16$; 3) $y = (x + 15)^2 + 4$;
2) $y = (x - 11)^2 + 15$; 4) $y = (x - 11)^2 - 9$?

307.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \frac{5}{x}$, щоб отримати графік функції $y = \frac{5}{x - 8}$:

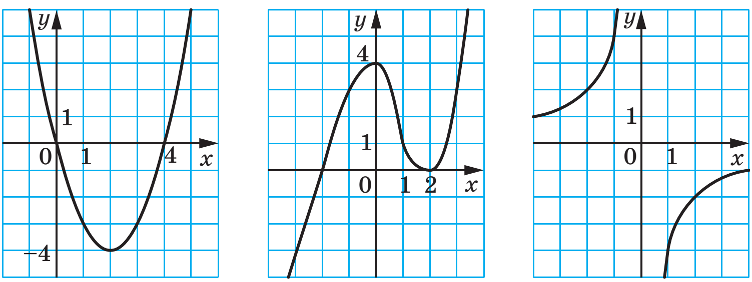
1) на 8 одиниць угору; 3) на 8 одиниць управо;
2) на 8 одиниць униз; 4) на 8 одиниць уліво?

308.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \sqrt{x}$, щоб отримати графік функції $y = \sqrt{x + 3}$:

1) на 3 одиниці вгору; 3) на 3 одиниці вправо;
2) на 3 одиниці вниз; 4) на 3 одиниці вліво?

309.• На рисунку 51 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(x) - 2$; 3) $y = f(x - 3)$; 5) $y = -f(x)$;
2) $y = f(x) + 4$; 4) $y = f(x + 1)$; 6) $y = 3 - f(x)$.



а) *б)* *в)*

Рис. 51

310.• На рисунку 52 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$.

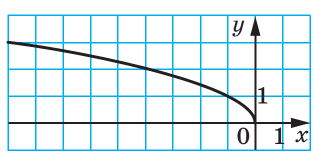


Рис. 52

311.• Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи графік функції $y = x^2$, побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 3$; 3) $y = (x - 5)^2$; 5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
2) $y = x^2 + 4$; 4) $y = (x + 2)^2$; 6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

312.• Побудуйте графік функції $y = -x^2$. Використовуючи графік функції $y = -x^2$, побудуйте графік функції:

1) $y = -x^2 + 1$; 4) $y = -(x + 4)^2$;
2) $y = -x^2 - 2$; 5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
3) $y = -(x - 2)^2$; 6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

313.• Побудуйте графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$; 2) $y = -\frac{6}{x - 2}$; 3) $y = -\frac{6}{x + 4} - 2$.

314.• Побудуйте графік функції $y = \frac{2}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$; 2) $y = \frac{2}{x + 1}$; 3) $y = \frac{2}{x - 3} + 6$.

315.• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x} - 4$; 2) $y = \sqrt{x - 4}$; 3) $y = \sqrt{x - 1} + 3$.

316.• Побудуйте графік функції $y = (x + 5)^2 - 9$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) при яких значеннях аргументу функція набуває додатних значень;
3) проміжок зростання і проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

317.• Побудуйте графік функції $y = (x - 4)^2 + 4$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) при яких значеннях аргументу функція набуває від'ємних значень;
3) проміжок зростання і проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

318.• Задайте формулою виду $y = ax^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 53.

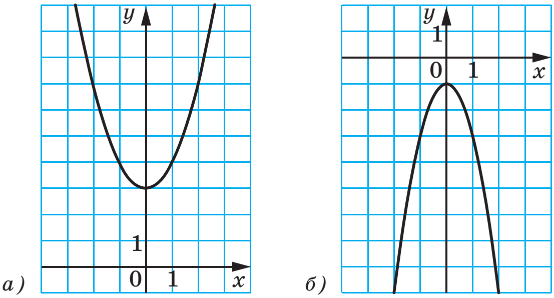


Рис. 53

319.• Задайте формулою виду $y = ax^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 54.

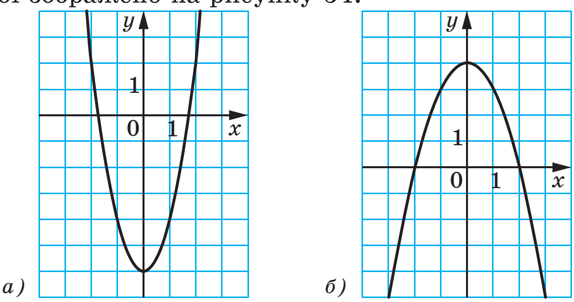


Рис. 54

320.• Задайте формулою виду $y = a(x + m)^2$ функцію, графік якої зображено на рисунку 55.

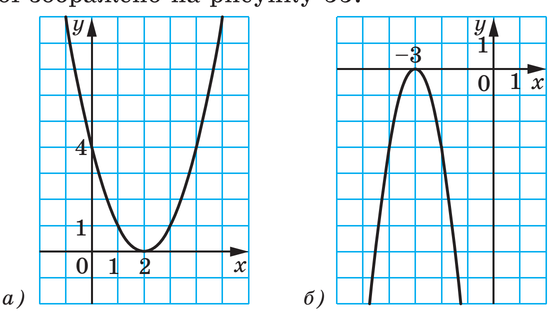


Рис. 55

321.° Задайте формулою виду $y = a\,(x + m)^2$ функцію, графік якої зображено на рисунку 56.

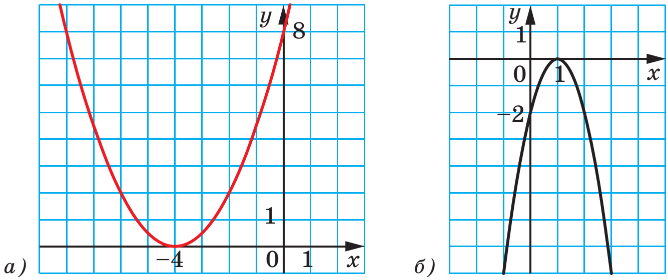


Рис. 56

322.° Задайте формулою виду $y = a\,(x + m)^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 57.

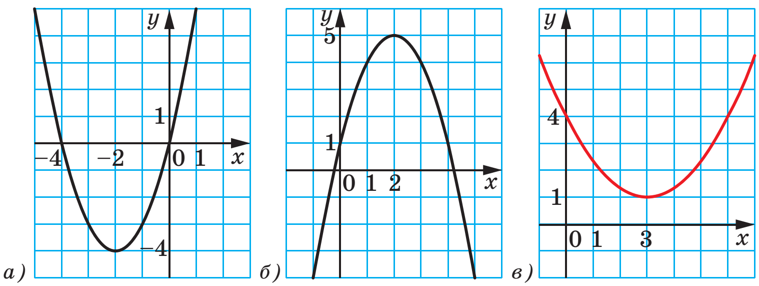


Рис. 57

323.° Задайте формулою виду $y = a\,(x + m)^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 58.

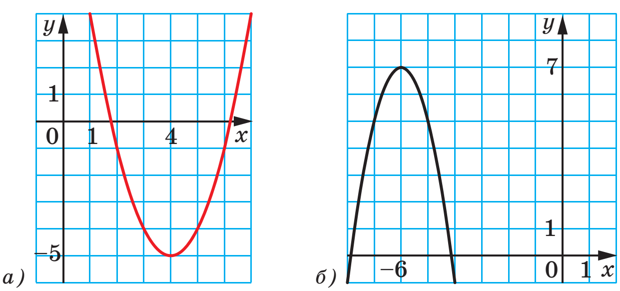


Рис. 58

324. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $(x-1)^2 = \frac{2}{x}$; 2) $1 - x^2 = \sqrt{x} - 1$.

325. Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{3}{x} = \sqrt{x} + 2$.

326. Прямі m і n, зображені на рисунку 59, паралельні, причому пряма n є графіком функції $y = f(x)$. Яке з тверджень є правильним:

1) пряма m є графіком функції $y = f(x) + b$;
2) пряма m є графіком функції $y = f(x - a)$?

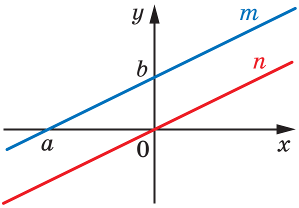


Рис. 59

327. Задайте дану функцію формулою виду $y = a(x-m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$; 3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$; 4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

328. Задайте дану функцію формулою виду $y = a(x-m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 2x - 8$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

329. Задайте дану функцію формулою виду $y = \frac{k}{x+a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{3x+8}{x}$; 2) $y = \frac{2x+14}{x+3}$; 3) $y = \frac{-2x}{x-1}$.

330. Задайте дану функцію формулою виду $y = \frac{k}{x+a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{4x+14}{x+1}$; 2) $y = \frac{7-x}{x-2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

331. Спростіть вираз:

1) $\frac{5a-3}{8a}+\frac{a+9}{4a}$;
3) $\frac{8a+5b}{5ab^2}-\frac{2a-7b}{2a^2b}$;
2) $\frac{5a-6b}{ab}+\frac{5b-5c}{bc}$;
4) $\frac{m^2+4n^2}{8m^4n^4}-\frac{3m+4n}{6m^5n^2}$.

332. Скоротіть дріб:

1) $\frac{9+\sqrt{m}}{m-81}$;
3) $\frac{\sqrt{5m}+\sqrt{7n}}{5m+2\sqrt{35mn}+7n}$;
2) $\frac{\sqrt{27}+\sqrt{45}}{\sqrt{18}+\sqrt{30}}$;
4) $\frac{25m+10n\sqrt{3m}+3n^2}{5\sqrt{m}+n\sqrt{3}}$.

333. Чисельник звичайного дробу на 1 менший від його знаменника. Якщо чисельник і знаменник дробу зменшити на 1, то його значення зменшиться на $\frac{1}{12}$. Знайдіть цей дріб.

334. Доведіть, що при додатних значеннях a і b є правильною нерівність $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$.

11. Квадратична функція, її графік і властивості

Означення. **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратичною.**

Квадратична функція не є для вас новою. Так, у 8 класі ви вивчали її частково, а саме функцію $y = x^2$. Функціональна залежність площі S круга від його радіуса r визначає квадратичну функцію $S(r) = \pi r^2$, яка у свою чергу є окремим видом функції $y = ax^2$.

На уроках фізики ви ознайомилися з формулою $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$. Вона визначає залежність висоти h, на якій знаходиться тіло, що кинули вертикально вгору з початковою швидкістю v_0, від часу руху t. Ця формула задає квадратичну функцію $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Покажемо, як графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ можна отримати з графіка функції $y = ax^2$.

Ви вже будували графіки функцій виду $y = ax^2 + bx + c$, виділяючи квадрат двочлена (див. приклад 3 пункту 10). Використаємо цей прийом у загальному вигляді. Маємо:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Введемо позначення $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Тоді формулу $y = ax^2 + bx + c$ можна подати у вигляді:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Отже, схема побудови шуканого графіка є такою:

$$y = ax^2 \xrightarrow[\text{на } |x_0| \text{ од.}]{\text{управо або вліво}} y = a(x - x_0)^2 \xrightarrow[\text{на } |y_0| \text{ од.}]{\text{угору або вниз}} y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола з вершиною в точці $(x_0; y_0)$, де $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$, яка дорівнює параболі $y = ax^2$.

Зрозуміло, що вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ напрямлені так само, як і вітки параболи $y = ax^2$: якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

Загальне уявлення про графік квадратичної функції дають координати вершини параболи і напрям її віток. Це уявлення буде тим повнішим, чим більше точок, які належать графіку, ми знатимемо. Тому, не використовуючи паралельних перенесень, можна побудувати графік квадратичної функції за такою схемою:

1) знайти абсцису вершини параболи за формулою $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) знайти ординату вершини параболи за формулою[1] $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$, де D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, і позначити на координатній площині вершину параболи;

3) визначити напрям віток параболи;

4) знайти координати ще кількох точок, які належать шуканому графіку (зокрема, координати точки перетину параболи з віссю y та нулі функції, якщо вони існують);

5) позначити на координатній площині знайдені точки і сполучити їх плавною лінією.

ПРИКЛАД

Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Користуючись графіком функції, знайдіть область значень функції, проміжки зростання і спадання, проміжки знакосталості, найменше і найбільше значення функції.

Розв'язання

Дана функція є квадратичною функцією $y = ax^2 + bx + c$, $a = 1$, $b = 4$, $c = -5$. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору ($a > 0$).

Абсциса вершини параболи $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$, ордината вершини $y_0 = f(x_0) = f(-2) = 4 - 8 - 5 = -9$.

Отже, точка $(-2; -9)$ — вершина параболи.

Знайдемо точки перетину параболи з віссю абсцис:

$$x^2 + 4x - 5 = 0;$$

$$x_1 = -5,\ x_2 = 1.$$

Таким чином, парабола перетинає вісь абсцис у точках $(-5; 0)$ і $(1; 0)$.

[1] Формулу $y_0 = -\frac{D}{4a}$ запам'ятовувати необов'язково. Достатньо обчислити значення функції $y = ax^2 + bx + c$ у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Знайдемо точку перетину параболи з віссю ординат: $f(0) = -5$. Парабола перетинає вісь ординат у точці $(0; -5)$.

Позначимо знайдені чотири точки параболи на координатній площині (рис. 60).

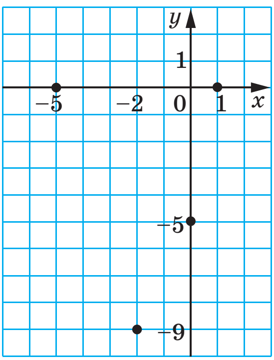


Рис. 60

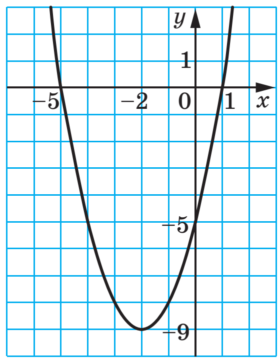


Рис. 61

Тепер зрозуміло, що зручно знайти значення даної функції в точках з абсцисами -1, -3, -4 і, позначивши відповідні точки на координатній площині, провести через них графік даної функції.

Маємо: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Шуканий графік зображено на рисунку 61.

Область значень функції $E(f) = [-9; +\infty)$.

Функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; -2]$.

$f(x) > 0$ при $x < -5$ або $x > 1$; $f(x) < 0$ при $-5 < x < 1$.

Найменше значення функції дорівнює -9, найбільшого значення не існує.

1. Яку функцію називають квадратичною?
2. Яка фігура є графіком квадратичної функції?
3. За якою формулою можна знайти абсцису вершини параболи $y = ax^2 + bx + c$?
4. Який напрям мають вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ залежно від значення a?
5. Опишіть схему побудови графіка квадратичної функції.

335.° Яка з даних функцій є квадратичною:

1) $y = 4x^2 + 3x + 6$;
2) $y = 4x + 3$;
3) $y = \frac{1}{2x^2 - 3x + 2}$;
4) $y = 6x^2 - 5x$?

336.° Обчисліть значення функції $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$, якщо аргумент x дорівнює 1; −2; 4.

337.° Дано функцію $f(x) = x^2 - 2x - 15$. Знайдіть значення аргументу x, при якому: 1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) = -7$; 3) $f(x) = 33$.

338.° Графік функції $y = -6x^2 + x + c$ перетинає вісь ординат у точці $M(0; -8)$. Знайдіть значення c.

339.° Визначте напрям віток і координати вершини параболи:

1) $y = x^2 - 12x + 3$;
2) $y = -x^2 + 4x - 6$;
3) $y = 0{,}3x^2 + 2{,}4x - 5$;
4) $y = -5x^2 + 10x + 2$.

340.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 4x - 5$;
2) $y = -x^2 + 2x + 3$;
3) $y = 6x - x^2$;
4) $y = 2x^2 - 8x + 8$;
5) $y = x^2 - 2x + 4$;
6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$;
7) $y = x^2 - 6x + 5$;
8) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

341.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 + 2x - 8$;
2) $y = x^2 - 2x$;
3) $y = -x^2 + 4x - 5$;
4) $y = 2x^2 - 2x - 4$.

342.• Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(6)$; $f(1)$;
2) значення x, при яких $f(x) = 8$; $f(x) = -1$; $f(x) = -2$;
3) найбільше і найменше значення функції;
4) область значень функції;
5) проміжок зростання і проміжок спадання функції;
6) при яких значеннях аргументу функція набуває додатних значень, а при яких — від'ємних.

343.° Побудуйте графік функції $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) область значень функції;
2) проміжок зростання функції;
3) множину розв’язків нерівності $f(x) > 0$.

344.° Побудуйте графік функції $f(x) = x - 0{,}5x^2$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) область значень функції;
2) проміжок зростання функції;
3) при яких значеннях x виконується нерівність $f(x) \leqslant 0$.

345.° Побудуйте графік функції $f(x) = 3x^2 - 6x$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) область значень функції;
2) проміжок спадання функції;
3) при яких значеннях x виконується нерівність $f(x) \geqslant 0$.

346.° Розв’яжіть графічно рівняння $x^2 - 3x - 1 = -\frac{3}{x}$.

347.° Розв’яжіть графічно рівняння $-\frac{1}{4}x^2 + x + 2 = \sqrt{x}$.

348.° Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ та встановіть кількість коренів рівняння $f(x) = g(x)$:
1) $f(x) = -x^2 + 6x - 7$; $g(x) = -\sqrt{x}$;
2) $f(x) = 4x - 2x^2$; $g(x) = -\frac{4}{x}$.

349.° Побудувавши в одній системі координат графіки функцій $y = x^2 + 4x + 1$ і $y = \frac{6}{x}$, установіть кількість коренів рівняння $x^2 + 4x + 1 = \frac{6}{x}$.

350.° Знайдіть координати точки параболи $y = -x^2 + 9x + 9$, у якої:
1) абсциса і ордината рівні;
2) сума абсциси і ординати дорівнює 25.

351.° Знайдіть координати точки параболи $y = 2x^2 - 3x + 6$, у якої ордината на 12 більша за абсцису.

352.• Знайдіть область значень та проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$;
2) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 6$;
3) $f(x) = 4 - 12x - 0{,}3x^2$;
4) $f(x) = 7x^2 + 21x$.

353.• Знайдіть область значень та проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$;
2) $f(x) = 9 + 8x - 0{,}2x^2$.

354.• Побудуйте графік даної функції, укажіть її область значень та проміжки зростання і спадання:

$$y = \begin{cases} 3 - x, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2 - 2x - 3, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -3, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$$

355.• Побудуйте графік даної функції, укажіть її область значень та проміжки зростання і спадання:

$$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 4x - x^2, & \text{якщо } 0 < x < 5, \\ x - 10, & \text{якщо } x \geqslant 5. \end{cases}$$

356.• Задайте формулою яку-небудь квадратичну функцію, яка:

1) спадає на проміжку $(-\infty; 1]$ і зростає на проміжку $[1; +\infty)$;
2) зростає на проміжку $(-\infty; -2]$ і спадає на проміжку $[-2; +\infty)$.

357.• Знайдіть найменше значення функції $y = 3x^2 - 18x + 2$ на проміжку:

1) $[-1; 4]$;
2) $[-4; 1]$;
3) $[4; 5]$.

358.• Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 - 8x + 10$ на проміжку:

1) $[-5; -3]$;
2) $[-1; 0]$;
3) $[-11; -10]$.

359.• При яких значеннях p і q графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки $M(-1; 4)$ і $K(2; 10)$?

360.• При яких значеннях a і b нулями функції $y = ax^2 + bx + 7$ є числа -2 і 3?

361.• При яких значеннях a і b парабола $y = ax^2 + bx - 4$ проходить через точки C (−3; 8) і D (1; 4)?

362.• Нехай D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

1) $a > 0$, $D > 0$, $c > 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$;

2) $a > 0$, $D = 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$;

3) $a < 0$, $D < 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$;

4) $a < 0$, $c = 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$.

363.• Нехай D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

1) $a > 0$, $D < 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$;

2) $a < 0$, $D > 0$, $c < 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$;

3) $a < 0$, $D = 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$.

364.• При якому значенні b проміжок $(-\infty; 2]$ є проміжком зростання функції $y = -4x^2 - bx + 5$?

365.• При якому значенні b проміжок $(-\infty; -3]$ є проміжком спадання функції $y = 3x^2 + bx - 8$?

366.• При якому значенні a графік квадратичної функції $y = ax^2 + (a-2)x + \frac{1}{4}$ має з віссю абсцис одну спільну точку?

367.•• При яких значеннях a функція $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ набуває невід'ємних значень при всіх дійсних значеннях x?

368.•• При яких значеннях a функція $y = -4x^2 - 16x + a$ набуває від'ємних значень при всіх дійсних значеннях x?

369.•• При якому значенні c найбільше значення функції $y = -5x^2 + 10x + c$ дорівнює −3?

370.•• При якому значенні c найменше значення функції $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ дорівнює -1?

371.•• На рисунку 62 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a, b і c.

Рис. 62

372.•• На рисунку 63 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a, b і c.

Рис. 63

373.•• При яких значеннях p і q вершина параболи $y = x^2 + px + q$ знаходиться в точці $A\ (2;\ 5)$?

374.•• Парабола $y = ax^2 + bx + c$ має вершину в точці $C\ (4;\ -10)$ і проходить через точку $D\ (1;\ -1)$. Знайдіть значення коефіцієнтів a, b і c.

375.•• Знайдіть ординату вершини параболи, фрагмент якої зображено на рисунку 64.

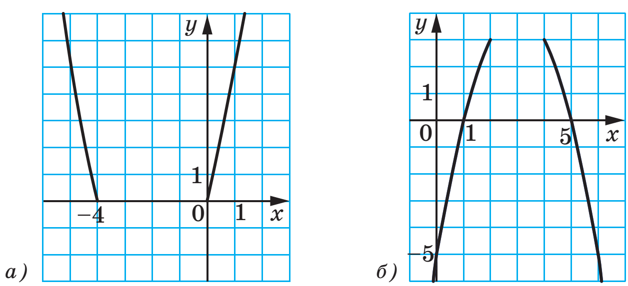


Рис. 64

376.•• Знайдіть ординату вершини параболи, фрагмент якої зображено на рисунку 65.

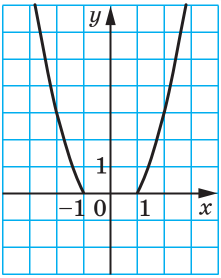


Рис. 65

377.•• Сума двох чисел дорівнює 10. Знайдіть:

1) якого найбільшого значення може набувати добуток цих чисел;

2) якого найменшого значення може набувати сума квадратів цих чисел.

378.•• Ділянку землі прямокутної форми треба обгородити парканом завдовжки 160 м. Яку найбільшу площу може мати ця ділянка?

379.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{8x + 2x^2 - x^3}{x}$;

2) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$;

3) $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$;

4) $y = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

380.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{(x + 3)^3}{x + 3}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}$; 3) $y = \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^2}$.

381.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = x\,|x|$;

2) $y = \dfrac{x}{|x|}(x^2 - x - 6)$;

3) $y = x^2 - 4\,|x| + 3$;

4) $y = x^2 + 3x \cdot \dfrac{|x - 3|}{x - 3} - 4$.

382.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x^3}{|x|} + 4x$; 2) $y = 6\,|x| - x^2$.

383.•• Побудуйте графік функції $y = x^2 + 2x - 3$. Користуючись побудованим графіком, установіть, при яких значеннях a рівняння $x^2 + 2x - 3 = a$:

1) має два корені;

2) має один корінь;

3) не має коренів.

384.•• Побудуйте графік функції $y = -x^2 - 4x + 5$. Користуючись побудованим графіком, установіть, скільки коренів має рівняння $-x^2 - 4x + 5 = a$ залежно від значення a.

385.* Нехай x_1 і x_2 — нулі функції $y = -3x^2 - (3a - 2)x + 2a + 3$. При яких значеннях a виконується нерівність $x_1 < -2 < x_2$?

386.* Відомо, що x_1 і x_2 — нулі функції $y = 2x^2 - (3a - 1)x + a - 4$, $x_1 < x_2$. При яких значеннях a число 1 належить проміжку $[x_1; x_2]$?

387.* При якому значенні a відрізок прямої $x = a$, кінці якого належать параболам $y = x^2$ і $y = -(x + 1)^2$, має найменшу довжину?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

388. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$;
3) $x^4 + 9x^2 + 8 = 0$;
4) $x^4 - 16x^2 = 0$.

389. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

1) $x^2 - 5x - 10 = 0$;
2) $2x^2 + 6x - 7 = 0$;
3) $-\frac{1}{3}x^2 + 8x - 1 = 0$.

390. Виконайте дії:

1) $\frac{b+3}{b-3} + \frac{b-2}{b+2}$;
2) $\frac{p+4}{p-1} - \frac{p+20}{p+5}$;
3) $\frac{x}{2x+3} - \frac{x+1}{2x-3}$.

391. Спростіть вираз:

1) $\left(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}\right)\left(4a - 6\sqrt{ab} + 9b\right) - 9\sqrt{9b^3}$;
2) $\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{28} + 4\sqrt{63}\right) \cdot \sqrt{7} - \sqrt{126}$;
3) $\left(2 - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\left(2 + \sqrt{3} - \sqrt{6}\right)$.

392. Моторний човен вирушив по річці від однієї пристані до іншої і повернувся назад через 2,5 год, витративши на стоянку 25 хв. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна дорівнює 20 км/год, а відстань між пристанями — 20 км.

393. Через одну з двох труб бак можна наповнити водою на 10 хв швидше, ніж через другу. За який час можна заповнити цей бак через кожну з труб, якщо при одночасній дії цих труб протягом 8 хв буде заповнено $\frac{2}{3}$ бака?

Про деякі перетворення графіків функцій

Як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Зазначимо, що коли точка $(x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f(-x)$. Дійсно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Отже, усі точки графіка функції $y = f(-x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з такою самою ординатою і протилежною абсцисою[1].

На рисунку 66 показано, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудовано графік функції $y = \sqrt{-x}$.

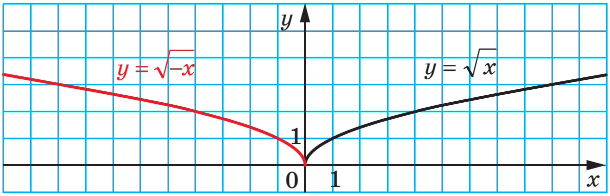


Рис. 66

ВПРАВИ

1. Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 67, побудуйте графік функції $y = f(-x)$.

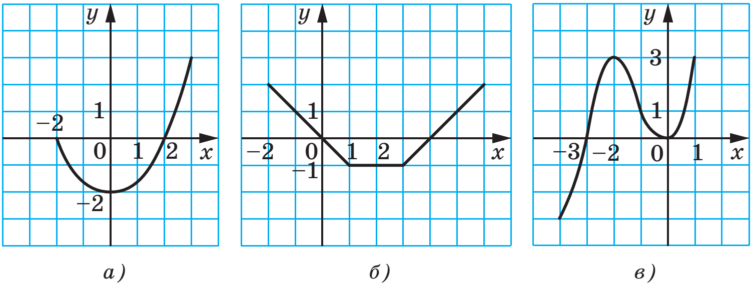


Рис. 67

[1] Пізніше на уроках геометрії ви дізнаєтесь, що описане перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають осьовою симетрією.

2. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x-2}$. Використовуючи побудований графік, побудуйте графік функції $y = \sqrt{-x-2}$.

Як побудувати графік функції $y = f(|x|)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Скориставшись означенням модуля, запишемо:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Звідси робимо висновок, що графік функції $y = f(|x|)$ при $x \geqslant 0$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при $x < 0$ — з графіком функції $y = f(-x)$.

Тоді побудову графіка функції $y = f(|x|)$ можна проводити за такою схемою:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;

2) побудувати ту частину графіка функції $y = f(-x)$, усі точки якої мають від'ємні абсциси.

Об'єднання цих двох частин і складатиме графік функції $y = f(|x|)$.

На рисунку 68 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x-2)^2$ побудовано графік функції $y = (|x|-2)^2$.

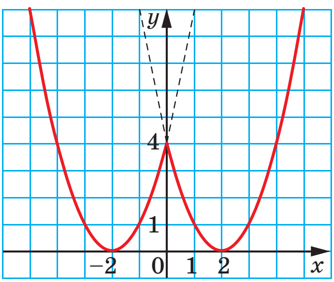


Рис. 68

ВПРАВИ

1. Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 67, побудуйте графік функції $y = f(|x|)$.

2. Використовуючи графік функції $y = x + 2$, побудуйте графік функції $y = |x| + 2$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| - 3$;
2) $y = x^2 - 4|x|$;
3) $y = x^2 + 2|x| - 3$;
4) $y = 2|x| - x^2$;
5) $y = \frac{4}{|x|}$;
6) $y = \frac{4}{|x|} - 2$;
7) $y = \frac{4}{|x| - 2}$;
8) $y = \sqrt{|x|}$.

Як побудувати графік функції $y = |f(x)|$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Для функції $y = |f(x)|$ можна записати:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x, для яких $f(x) \geqslant 0$, збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при всіх x, для яких $f(x) < 0$, — з графіком функції $y = -f(x)$.

Тоді будувати графік функції $y = |f(x)|$ можна за такою схемою:

1) усі точки графіка функції $y = f(x)$ з невід'ємними ординатами залишити незмінними;

2) точки з від'ємними ординатами замінити на точки з тими самими абсцисами, але протилежними ординатами.

На рисунку 69 показано, як за допомогою графіка функції $y = x^2 - x - 2$ побудовано графік функції $y = |x^2 - x - 2|$.

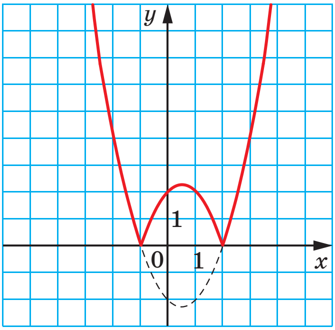


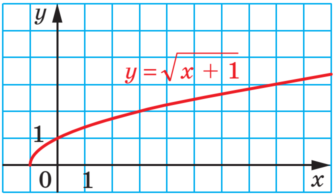
Рис. 69

ПРИКЛАД 1

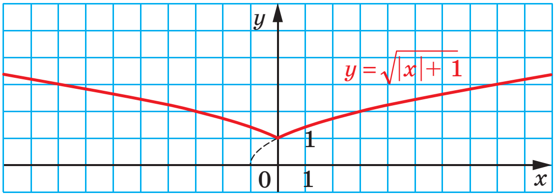
Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x| + 1} - 2\right|$.

Розв'язання

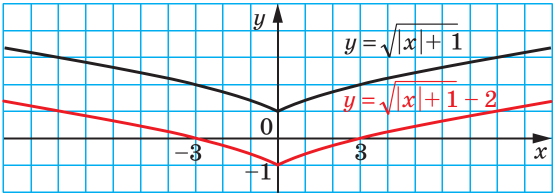
Побудову шуканого графіка можна подати у вигляді такої схеми:
$y=\sqrt{x+1} \to y=\sqrt{|x|+1} \to y=\sqrt{|x|+1}-2 \to y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$ (рис. 70).



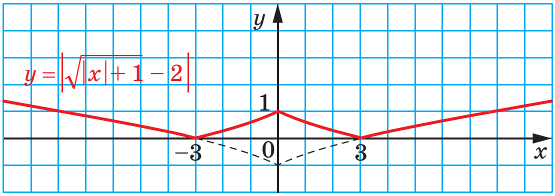
а)



б)



в)



г)

Рис. 70

ПРИКЛАД 2

Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

Розв'язання

Побудову шуканого графіка можна подати за такою схемою:

$y = \sqrt{|x|} \to y = \sqrt{|x+1|} \to y = \sqrt{|x+1|} - 1 \to y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$

(рис. 71).

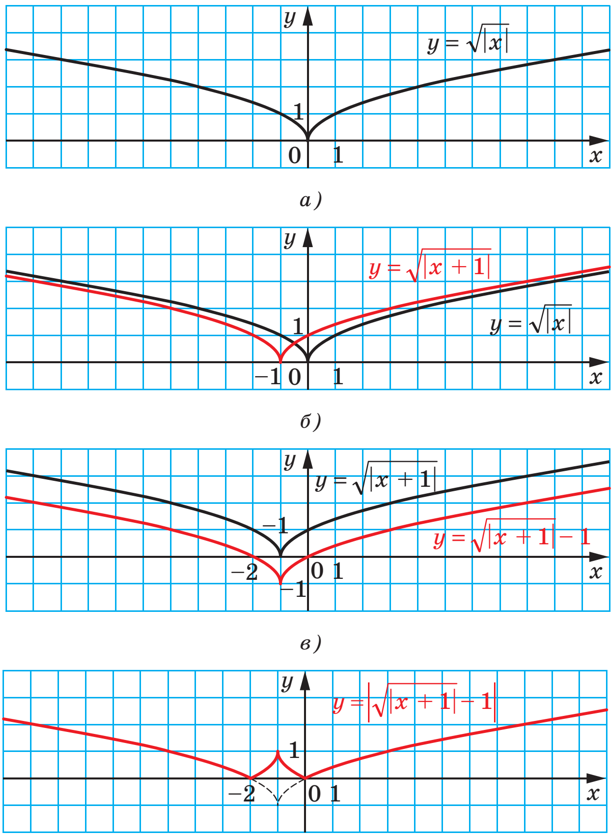


Рис. 71

ВПРАВИ

1. Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 67, побудуйте графік функції: 1) $y = |f(x)|$; 2) $y = |f(|x|)|$.

2. Використовуючи графік функції $y = x + 2$, побудуйте графік функції $y = |x + 2|$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x - 3|$;
2) $y = |x^2 - 4x|$;
3) $y = |x^2 + 2x - 3|$;
4) $y = |2x - x^2|$;
5) $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$;
6) $y = \left|\frac{4}{x - 2}\right|$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = ||x| - 3|$;
2) $y = |x^2 - 4|x||$;
3) $y = |x^2 + 2|x| - 3|$;
4) $y = |2|x| - x^2|$;
5) $y = \left|\frac{4}{|x|} - 2\right|$;
6) $y = \left|\frac{4}{|x| - 2}\right|$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{4 - |x|}$;
2) $y = 3 - \sqrt{4 - |x|}$;
3) $y = \left|3 - \sqrt{4 - |x|}\right|$;
4) $y = \sqrt{|4 - x|}$;
5) $y = 3 - \sqrt{|4 - x|}$;
6) $y = \left|3 - \sqrt{|4 - x|}\right|$.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 2

1. Чому дорівнює значення функції $f(x) = 2x^2 - 1$ у точці $x_0 = -3$?

А) -19; Б) -13; В) 11; Г) 17.

2. Серед наведених функцій укажіть квадратичну.

А) $y = 2x - 5$;
Б) $y = 2\sqrt{x} - 5$;
В) $y = 2x^2 - 5$;
Г) $y = \frac{2}{x^2} - 5$.

3. Областю визначення якої з функцій є проміжок $(-\infty;\ 6)$?

А) $y = \sqrt{6 + x}$; Б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 - x}}$; В) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 + x}}$; Г) $y = \sqrt{6 - x}$.

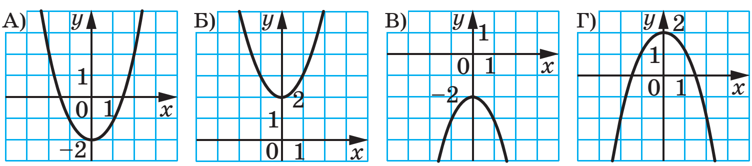
4. Як потрібно паралельно перенести графік функції $y = \dfrac{7}{x}$, щоб отримати графік функції $y = \dfrac{7}{x - 5}$?

А) На 5 одиниць угору; В) на 5 одиниць управо;
Б) на 5 одиниць уліво; Г) на 5 одиниць униз.

5. Графік функції $y = \sqrt{x}$ паралельно перенесли на 2 одиниці вліво і на 7 одиниць униз. Графік якої функції було отримано?

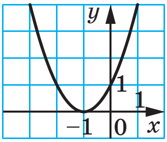
А) $y = \sqrt{x + 2} - 7$; В) $y = \sqrt{x - 2} + 7$;
Б) $y = \sqrt{x - 2} - 7$; Г) $y = \sqrt{x + 2} + 7$.

6. На якому з рисунків зображено графік функції
$$y = -x^2 + 2?$$



7. Графік якої функції зображено на рисунку?

А) $y = x^2 - 1$; В) $y = (x - 1)^2$;
Б) $y = x^2 + 1$; Г) $y = (x + 1)^2$.

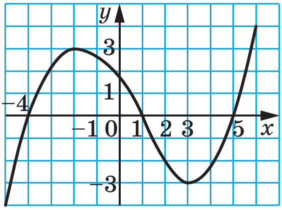


8. Укажіть координати вершини параболи $y = 3\,(x - 4)^2 - 5$.

А) $(4;\ 5)$; Б) $(-4;\ 5)$; В) $(4;\ -5)$; Г) $(-4;\ -5)$.

9. На рисунку зображено графік функції $y = f\,(x)$. Користуючись рисунком, укажіть проміжок спадання функції.

А) $[-4;\ 1]$; В) $[-2;\ 3]$;
Б) $[-3;\ 3]$; Г) $[-3;\ 1]$.



10. Знайдіть абсцису вершини параболи $y = 2x^2 - 12x + 3$.

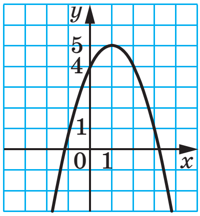
А) 6; Б) −6; В) 3; Г) −3.

11. Вершина якої з парабол належить осі абсцис?

А) $y = x^2 - 6$; В) $y = (x - 6)^2$;

Б) $y = x^2 - 6x$; Г) $y = (x - 6)^2 + 2$.

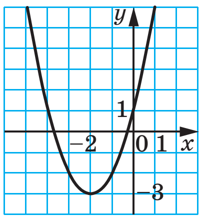
12. На рисунку зображено графік функції $y = -x^2 + 2x + 4$. Користуючись рисунком, установіть область значень функції.



А) $(-\infty; +\infty)$; В) $[1; +\infty)$;

Б) $(-\infty; 1]$; Г) $(-\infty; 5]$.

13. На рисунку зображено графік функції $y = x^2 + 4x + 1$. Користуючись рисунком, укажіть проміжок зростання функції.



А) $(-\infty; -2]$;

Б) $[-2; +\infty)$;

В) $[-3; +\infty)$;

Г) установити неможливо.

14. Знайдіть нулі функції $y = 2x^2 + x - 6$.

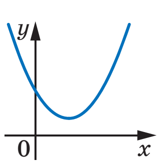
А) −1,5; −2; Б) 1,5; 2; В) −1,5; 2; Г) 1,5; −2.

15. При яких значеннях b і c вершина параболи $y = x^2 + bx + c$ знаходиться в точці M (3; 8)?

А) $b = 6$, $c = -19$; В) $b = -3$, $c = 8$;

Б) $b = -6$, $c = 17$; Г) визначити неможливо.

16. На рисунку зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажіть правильне твердження, якщо D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.



А) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D > 0$;

Б) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D < 0$;

В) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D < 0$;

Г) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D = 0$.

17. При якому значенні a найменше значення функції $y = 3x^2 - 6x + a$ дорівнює 4?

А) −5; Б) 4; В) 7; Г) 8.

18. Відомо, що $m - n = 8$. Знайдіть множину значень виразу mn.

А) $[-16; +\infty)$; В) $(-\infty; +\infty)$;
Б) $[8; +\infty)$; Г) визначити неможливо.

12. Розв'язування квадратних нерівностей

На рисунку 72 зображено графік деякої функції $y = f(x)$, областю визначення якої є множина дійсних чисел.

За допомогою цього графіка легко визначити проміжки знакосталості функції f, а саме: $y > 0$ на кожному з проміжків $(-5; -2)$ і $(1; +\infty)$; $y < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; -5)$ і $(-2; 1)$.

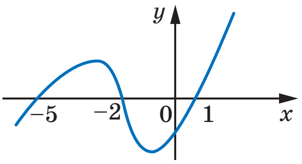


Рис. 72

Установивши проміжки знакосталості функції f, ми тим самим розв'язали нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Проміжки $(-5; -2)$ і $(1; +\infty)$ разом складають множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$. У таких випадках кажуть, що множина розв'язків нерівності $f(x) > 0$ є **об'єднанням** зазначених проміжків. Об'єднання проміжків записують за допомогою спеціального символу $\cup$.

Тоді множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$ можна записати так:

$$(-5; -2) \cup (1; +\infty).$$

Множину розв'язків нерівності $f(x) < 0$ можна записати так:

$$(-\infty; -5) \cup (-2; 1).$$

Такий метод розв'язування нерівностей $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$ за допомогою графіка функції $y = f(x)$ називають **графічним**.

Покажемо, як за допомогою цього методу розв'язують квадратні нерівності.

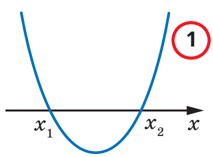
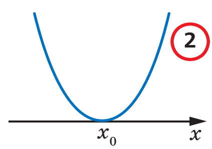
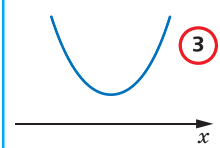
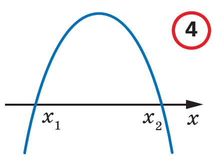
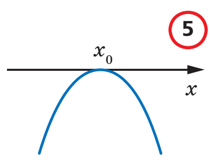
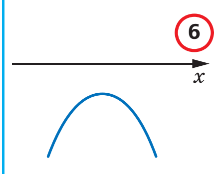
Означення. **Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, $a \neq 0$, називають квадратними.**

З'ясуємо, як визначити положення графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис.

Наявність і кількість нулів квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ визначають за допомогою дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$: якщо $D > 0$, то нулів у функції два; якщо $D = 0$, то нуль один; якщо $D < 0$, то нулів немає.

Знак старшого коефіцієнта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ визначає напрям віток параболи $y = ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ вітки напрямлені вгору, при $a < 0$ — вниз.

Схематичне розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис залежно від знаків чисел a і D відображено в таблиці (x_1 і x_2 — нулі функції, x_0 — абсциса вершини параболи):

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Пояснимо, як цю таблицю використовувати для розв'язування квадратних нерівностей.

Наприклад, нехай потрібно розв'язати нерівність $ax^2 + bx + c > 0$, де $a < 0$ і $D > 0$. Цим умовам відповідає клітинка 4 таблиці. Тоді зрозуміло, що відповіддю буде проміжок $(x_1; x_2)$, на якому графік відповідної квадратичної функції розміщено над віссю абсцис.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть нерівність $2x^2 - x - 1 > 0$.

Розв'язання

Для квадратного тричлена $2x^2 - x - 1$ маємо: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Цим умовам відповідає клітинка 1 таблиці. Розв'яжемо рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$. Отримуємо $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Тоді схематично графік функції $y = 2x^2 - x - 1$ можна зобразити так, як показано на рисунку 73.

З рисунка 73 видно, що відповідна квадратична функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ і $(1; +\infty)$.

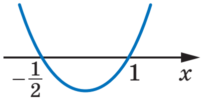


Рис. 73

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть нерівність $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

Розв'язання

Маємо: $a = -9$, $D = 0$. Цим умовам відповідає клітинка 5 таблиці. Установлюємо, що $x_0 = \frac{1}{3}$. Тоді схематично графік функції $y = -9x^2 + 6x - 1$ можна зобразити так, як показано на рисунку 74.

З рисунка 74 видно, що розв'язками нерівності є всі числа, крім $\frac{1}{3}$.

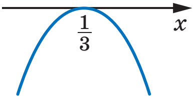


Рис. 74

Зауважимо, що цю нерівність можна розв'язати іншим способом. Перепишемо дану нерівність так: $9x^2 - 6x + 1 > 0$. Тоді $(3x - 1)^2 > 0$. Виходячи з цього, маємо той самий висновок.

Відповідь: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть нерівність $3x^2 - x + 1 < 0$.

Розв’язання

Маємо: $a = 3 > 0$, $D = -11 < 0$. Цим умовам відповідає клітинка 3 таблиці. У цьому випадку графік функції $y = 3x^2 - x + 1$ не має точок з від’ємними ординатами.

В і д п о в і д ь: розв’язків немає.

ПРИКЛАД 4

Розв’яжіть нерівність $0{,}2x^2 + 2x + 5 \leqslant 0$.

Розв’язання

Оскільки $a = 0{,}2$, $D = 0$, то даному випадку відповідає клітинка 2 таблиці, причому $x_0 = -5$. Але у цьому випадку квадратична функція набуває тільки невід’ємних значень. Отже, дана нерівність має єдиний розв’язок $x = -5$.

В і д п о в і д ь: -5.

1. За допомогою якого символу записують об’єднання проміжків?
2. Які нерівності називають квадратними?
3. Чим і як саме визначаються наявність і кількість нулів квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$?
4. Які можливі випадки розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис залежно від знаків a і D, де D – дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$? Зобразіть схематично ці випадки.

394.° Які з чисел -2; 0; 1 є розв’язками нерівності:
1) $x^2 - x - 2 < 0$;   2) $x^2 + x \geqslant 0$;   3) $-3x^2 - x + 2 > 0$?

395.° На рисунку 75 зображено графік функції $y = x^2 + 4x - 5$. Знайдіть множину розв’язків нерівності:
1) $x^2 + 4x - 5 < 0$;
2) $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$;
3) $x^2 + 4x - 5 > 0$;
4) $x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$.

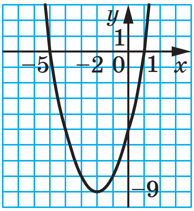


Рис. 75

396.° На рисунку 76 зображено графік функції $y = -3x^2 - 6x$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $-3x^2 - 6x < 0$;
2) $-3x^2 - 6x \leqslant 0$;
3) $-3x^2 - 6x > 0$;
4) $-3x^2 - 6x \geqslant 0$.

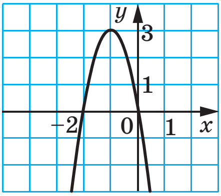


Рис. 76

397.° На рисунку 77 зображено графік функції $y = x^2 - 4x + 4$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 - 4x + 4 < 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$;
3) $x^2 - 4x + 4 > 0$;
4) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$.

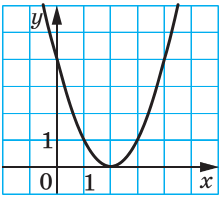


Рис. 77

398.° На рисунку 78 зображено графік функції $y = -x^2 + 2x - 2$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $-x^2 + 2x - 2 < 0$;
2) $-x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 2x - 2 > 0$;
4) $-x^2 + 2x - 2 \geqslant 0$.

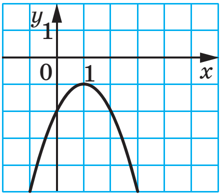


Рис. 78

399.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 6x - 7 < 0$;
2) $x^2 - 2x - 48 \geqslant 0$;
3) $-x^2 - 6x - 5 > 0$;
4) $-x^2 + 4x - 3 < 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$;
6) $2x^2 + 3x + 1 > 0$;
7) $4x^2 - 12x \leqslant 0$;
8) $4x^2 - 9 > 0$;
9) $x^2 - 12x + 36 > 0$;
10) $4x^2 - 12x + 9 \geqslant 0$;
11) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
12) $49x^2 - 14x + 1 \leqslant 0$;
13) $2x^2 - x + 3 > 0$;
14) $3x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$;
15) $-4x^2 + 5x - 7 > 0$;
16) $-2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$.

400.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 12x + 45 < 0$;
4) $-3x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$;
5) $x^2 - 5x > 0$;
6) $-25x^2 + 16 \leqslant 0$;

7) $5x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$;
8) $-3x^2 + 6x - 4 > 0$;
9) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \leqslant 0$;
10) $-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36} > 0$;
11) $2x^2 - 2x + 0{,}5 < 0$.

401.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:
1) $x^2 \leqslant 49$;
2) $x^2 > 5$;
3) $7x^2 \leqslant 4x$;
4) $0{,}9x^2 < -27x$.

402.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:
1) $x^2 > 1$;
2) $x^2 < 3$;
3) $-3x^2 \geqslant -12x$;
4) $-2x^2 < -128$.

403.• Розв'яжіть нерівність:
1) $x(x + 5) - 2 < 4x$;
2) $11 - (x + 1)^2 \leqslant x$;
3) $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \leqslant 5$;
4) $5x(x + 4) - (2x - 3)(2x + 3) > 30$;
5) $(3x - 7)(x + 2) - (x - 4)(x + 5) > 30$;
6) $\frac{2x^2 - 1}{4} - \frac{3 - 4x}{6} + \frac{8x - 5}{8} \leqslant \frac{19}{24}$.

404.• Розв'яжіть нерівність:
1) $2(x^2 + 2) \geqslant x(x + 5)$;
2) $x - (x + 4)(x + 5) > -5$;
3) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(x + 2) < 7 - 3x$;
4) $\frac{x - 1}{4} - \frac{2x - 3}{2} < \frac{x^2 + 3x}{8}$.

405.• При яких значеннях x:
1) тричлен $-3x^2 + 6x + 1$ набуває значень, більших за $-\frac{4}{3}$;
2) тричлен $-5x^2 + 11x + 2$ набуває значень, не більших за $-\frac{2}{5}$?

406.• При яких значеннях x:
1) тричлен $x^2 - 2x - 11$ набуває значень, менших від $\frac{1}{4}$;
2) тричлен $-3x^2 + 8x + 6$ набуває значень, не менших від $-\frac{2}{3}$?

407.° При яких значеннях аргументу значення функції $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+9$ більші за відповідні значення функції $y = 2x - 1$?

408.° При яких значеннях аргументу значення функції $y=\frac{3}{2}x^2-7x+1$ менші від відповідних значень функції $y=-\frac{1}{2}x^2-4$?

409.° Знайдіть цілі розв’язки нерівності:

1) $x^2 + 5x \leqslant 0$;
2) $x^2 - 10 < 0$;
3) $6x^2 + x - 2 \leqslant 0$;
4) $-\frac{1}{4}x^2+x+3>0$.

410.° Скільки цілих розв’язків має нерівність:

1) $20 - 8x - x^2 > 0$;
2) $4x^2 - 15x - 4 < 0$?

411.° Знайдіть найменший цілий розв’язок нерівності:

1) $42 - x^2 - x > 0$;
2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$.

412.° Знайдіть найбільший цілий розв’язок нерівності:

1) $1{,}5x^2 - 2x - 2 < 0$;
2) $-2x^2 - 15x - 25 \geqslant 0$.

413.° Складіть яку-небудь нерівність, множина розв’язків якої:

1) об’єднання проміжків $(-\infty; -4)$ і $(8; +\infty)$;
2) проміжок $[-2; 9]$;
3) складається з одного числа 7.

414.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{-x^2+3x+4}$;
2) $y=\sqrt{2x^2+5x-3}$;
3) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$;
4) $y=\frac{x+2}{\sqrt{6x-2x^2}}$.

415.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{2x^2-9x-18}$;
2) $\frac{1}{\sqrt{15+2x-x^2}}$.

416.° Чи рівносильні нерівності:

1) $x^2 - 2x - 15 > 0$ і $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$;
2) $\frac{1}{x^2-x-20}<0$ і $\frac{1}{x^2-x-20}\leqslant 0$;

3) $x^2 - 6x + 10 > 0$ і $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$;
4) $x^2 + 2x + 3 < 0$ і $-2x^2 - 4 > 0$?

417.• При яких значеннях a не має коренів рівняння:
1) $x^2 - ax + 4 = 0$;
2) $x^2 + (a - 2)\,x + 25 = 0$;
3) $4{,}5x^2 - (4a + 3)\,x + 3a = 0$?

418.• При яких значеннях b має два різні дійсні корені рівняння:
1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$;
2) $2x^2 + 2\,(b - 6)\,x + b - 2 = 0$?

419.•• Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \leqslant 0, \\ 6x - x^2 < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \geqslant 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$

420.•• Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \leqslant 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

421.•• Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 18 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - \left(\sqrt{5} - 3\right)x - 3\sqrt{5} \leqslant 0, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$

422.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} + \sqrt{x + 1}$; 3) $y = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \dfrac{9}{x^2 - 81}$;

2) $y = \dfrac{x - 3}{\sqrt{18 + 3x - x^2}} + \dfrac{8}{x - 5}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 - 7x - 3x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{x + 1}}$.

423.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{20 + 4x - 3x^2} + \dfrac{3}{\sqrt{8 - 4x}}$;

2) $y = \dfrac{x + 5}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \dfrac{x - 1}{|x| - 6}$.

424.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 - 8|x| - 33 < 0$; 2) $8x^2 + 7|x| - 1 \geqslant 0$.

425.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $5x^2 - 7|x| + 2 \geqslant 0$; 2) $x^2 + 10|x| - 24 \leqslant 0$.

426.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $|x| \cdot (x^2 + 3x - 10) < 0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2 + 2x - 8) \leqslant 0$;
3) $(x - 2)^2 (x^2 - 8x - 9) < 0$;
4) $(x + 5)^2 (x^2 - 2x - 15) > 0$;
5) $\dfrac{x^2 + 7x - 8}{(x - 4)^2} \geqslant 0$;
6) $\dfrac{x^2 + 10x - 11}{(x + 3)^2} \leqslant 0$.

427.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $|x| \cdot (x^2 - 5x + 6) > 0$; 3) $(x + 3)^2 (x^2 - x - 6) > 0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2 + 6x - 40) > 0$; 4) $\dfrac{3x^2 - 8x - 3}{(x - 1)^2} \leqslant 0$.

428.* Розв'яжіть нерівність:

1) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} > 0$; 3) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} < 0$;
2) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \geqslant 0$; 4) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \leqslant 0$.

429.* Розв'яжіть нерівність:

1) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} > 0$; 3) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} < 0$;
2) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \geqslant 0$; 4) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \leqslant 0$.

430.* При яких значеннях a дана нерівність виконується при всіх дійсних значеннях x:

1) $x^2 - 4x + a > 0$;
2) $x^2 + (a - 1)x + 1 - a - a^2 \geqslant 0$;
3) $-\dfrac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a < 0$;
4) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$?

431.* При яких значеннях a не має розв'язків нерівність:

1) $-x^2 + 6x - a > 0$;
2) $x^2 - (a + 1)x + 3a - 5 < 0$;
3) $ax^2 + (a - 1)x + (a - 1) < 0$?

432.* Для кожного значення a розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leqslant 0, \\ x < a. \end{cases}$

433.* Для кожного значення a розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 72 < 0, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0, \\ x < a. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

434. Виконайте множення і ділення дробів:

1) $\dfrac{x^2 + 3xy}{x + 6} : \dfrac{x^2 - 9y^2}{2x + 12}$;

2) $\dfrac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{2a^2 - 8b^2} \cdot \dfrac{2a^2 - 8ab + 8b^2}{6a - 9b}$.

435. Знайдіть значення виразу, не користуючись таблицею квадратів і мікрокалькулятором:

1) $\sqrt{20 \cdot 66 \cdot 330}$;
2) $\sqrt{3^5 \cdot 12^3}$;
3) $2\sqrt{18} \cdot 3\sqrt{30} \cdot 5\sqrt{15}$;
4) $6\sqrt{10} \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{50}$.

436. Одна бригада може зібрати урожай за 12 днів. Другій бригаді для виконання цієї ж роботи потрібно 75 % цього часу. Після того як перша бригада пропрацювала 5 днів, до неї приєдналася друга бригада, і вони разом закінчили роботу. Скільки днів бригади працювали разом?

437. Під час першої поїздки автомобіля витратили 10 % бензину, який був у баці, а під час другої — 25 % від решти. Після цього в баці залишилося на 13 л менше бензину, ніж було спочатку. Скільки літрів бензину було в баці до першої поїздки?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

438. Чи є пара чисел $(2; -3)$ розв'язком рівняння:

1) $4x - 3y = 17$; 2) $x^2 + 5 = y^2$; 3) $xy = 6$?

439. Графік рівняння $5x - y = 2$ проходить через точку $A\ (4;\ b)$. Чому дорівнює значення b?

440. Побудуйте графік рівняння:

1) $4x + y = 3$;
2) $2x - 3y = 6$;
3) $xy = -8$;
4) $(x - 2)^2 + y^2 = 0$;
5) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$;
6) $x^2 + y^2 = 4$;
7) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10 = 0$;
8) $(x - 3)(y - x) = 0$;
9) $\frac{y - x}{y^2 - 1} = 0$.

441. Яка з пар чисел $(-2;\ 1)$, $(2;\ -1)$, $(6;\ 4)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28 \end{cases}$?

442. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5. \end{cases}$

443. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26. \end{cases}$

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 39–44 на с. 295–298.

13. Системи рівнянь із двома змінними

У 7 класі ви ознайомилися з графічним методом розв'язування систем рівнянь. Нагадаємо, що його суть полягає в пошуку координат спільних точок графіків рівнянь, які входять до системи. На уроках геометрії ви дізналися, що графіком рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $R > 0$, є коло радіуса R з центром $(a;\ b)$. Ви також навчилися будувати графік квадратичної функції. Усе це розширює можливості застосування графічного методу для розв'язування систем рівнянь.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

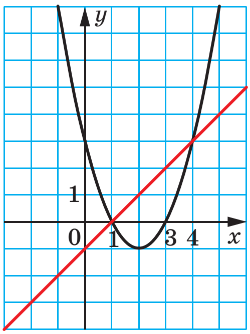


Рис. 79

Перше рівняння системи рівносильне такому: $y = x^2 - 4x + 3$. Його графіком є парабола, зображена на рисунку 79.

Графіком другого рівняння є пряма, яка перетинає побудовану параболу у двох точках: (1; 0) і (4; 3) (рис. 79).

Як відомо, графічний метод не гарантує того, що отриманий результат є точним. Тому знайдені розв'язки потрібно перевірити. Перевірка підтверджує, що пари чисел (1; 0) і (4; 3) справді є розв'язками даної системи.

Зауважимо, що ця система є «зручною» для графічного методу: координати точок перетину графіків виявилися цілими числами. Зрозуміло, що така ситуація траплятиметься далеко не завжди. Тому графічний метод є ефективним тоді, коли потрібно визначити кількість розв'язків або достатньо знайти їх наближено.

Систему, що розглядається, можна розв'язати і не звертаючись до графіків рівнянь. Готуючись до вивчення цієї теми, ви повторили **метод підстановки** розв'язування систем лінійних рівнянь. Цей метод є ефективним і при розв'язуванні більш складних систем, у яких тільки одне рівняння є лінійним, і для деяких систем, у яких узагалі лінійних рівнянь немає.

Розв'яжемо систему $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$ методом підстановки.

Виразимо змінну y через x у другому рівнянні системи:

$$y = x - 1.$$

Підставимо в перше рівняння замість y вираз $x - 1$:

$$x^2 - 4x - (x - 1) + 3 = 0.$$

Отримали рівняння з однією змінною. Спростивши його, дістанемо квадратне рівняння $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Значення y, які відповідають знайденим значенням x, знайдемо з рівняння $y = x - 1$:

$$y_1 = 1 - 1 = 0,\ y_2 = 4 - 1 = 3.$$

В і д п о в і д ь: (1; 0), (4; 3).

ПРИКЛАД 2

Визначте кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання

Графіком першого рівняння системи є коло з центром (0; 0) радіуса 3.

Друге рівняння рівносильне такому: $y = \dfrac{3,5}{x}$. Графіком цього рівняння є гіпербола.

Зобразимо коло і гіперболу на одній координатній площині (рис. 80). Бачимо, що графіки перетинаються в чотирьох точках. Отже, дана система має чотири розв'язки.

Рисунок 80 також дозволяє наближено визначити розв'язки даної системи.

Не звертаючись до графічного методу, можна знайти точні значення розв'язків цієї системи.

Готуючись до вивчення цієї теми, ви повторили **метод додавання** розв'язування систем лінійних рівнянь. Покажемо, як цей метод «працює» при розв'язуванні більш складних систем.

Помножимо друге рівняння системи, що розглядається, на 2. Отримаємо:

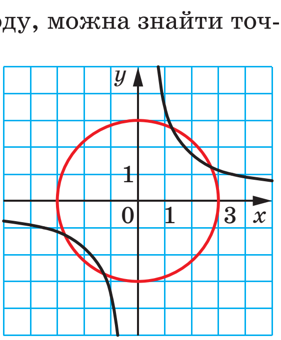


Рис. 80

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 2xy = 7. \end{cases}$$

Додамо почленно ліві і праві частини рівнянь: $x^2 + y^2 + 2xy = 16$. Звідси $(x + y)^2 = 16$; $x + y = 4$ або $x + y = -4$.

Зрозуміло, що для розв'язування заданої системи досить розв'язати дві простіші системи.

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2xy = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x(4 - x) = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Розв'язуючи друге рівняння цієї системи, отримуємо:

$x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$.

Тоді $y_1 = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$,

$y_2 = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$.

2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 2xy = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x(-4 - x) = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x^2 + 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Розв'язуючи друге рівняння цієї системи, отримуємо:

$x_3 = \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}$.

Тоді $y_3 = \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}$,

$y_4 = \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}$.

В і д п о в і д ь: $\left(\dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}; \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}; \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}; \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}; \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}\right)$.

Очевидно, що знайти ці розв'язки графічним способом неможливо.

У 8 класі ви ознайомилися з **методом заміни змінних** при розв'язуванні рівнянь. Цей метод застосовується і при розв'язуванні цілого ряду систем рівнянь.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Розв'язання

Нехай $\dfrac{x+y}{x-y} = t$. Тоді $\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1}{t}$.

Тепер перше рівняння системи можна записати так: $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2}$. Звідси $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = \dfrac{1}{2}$.

Для розв'язування заданої системи досить розв'язати дві простіші системи.

1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 2x - 2y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

З другого рівняння отримуємо:

$y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

Тоді $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 2y = x - y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

З другого рівняння отримуємо:

$y_3 = 1$, $y_4 = -1$.

Тоді $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Відповідь: $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $(-3; 1)$, $(3; -1)$.

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 2y + xy = 8, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 14. \end{cases}$

Розв'язання

Зауважимо, що дана система не зміниться, якщо замінити x на y, а y на x. У таких випадках може виявитися ефективною заміна $x + y = u$, $xy = v$.

Запишемо дану систему так:

$$\begin{cases} 2(x+y)+xy=8, \\ (x+y)^2-2xy+3(x+y)=14. \end{cases}$$

Виконаємо зазначену заміну. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} 2u+v=8, \\ u^2-2v+3u=14. \end{cases}$$

Її можна розв'язати методом підстановки (зробіть це самостійно). Отримуємо:

$$\begin{cases} u_1=3, \\ v_1=2, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=-10, \\ v_2=28. \end{cases}$$

Залишається розв'язати дві системи:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x+y=-10, \\ xy=28. \end{cases}$$

Кожну з них можна розв'язати методом підстановки. Проте тут зручно скористатися теоремою, оберненою до теореми Вієта. Так, для системи $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases}$ можна вважати, що x і y — корені квадратного рівняння $t^2-3t+2=0$. Звідси $t_1=1$, $t_2=2$. Отже, пари (1; 2) і (2; 1) є розв'язками цієї системи.

Використовуючи цей метод, легко переконатися (зробіть це самостійно), що система $\begin{cases} x+y=-10, \\ xy=28 \end{cases}$ розв'язків не має.

В і д п о в і д ь: (1; 2), (2; 1).

1. Які методи розв'язування систем рівнянь ви знаєте?
2. Поясніть суть графічного методу розв'язування систем рівнянь.
3. У яких випадках графічний метод є найбільш ефективним?
4. Поясніть суть методу підстановки розв'язування систем рівнянь.

444.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y+x^2=3, \\ y=x-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

445.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x + 2, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

446.° Розв'яжіть методом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 - 2y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 2, \\ x^2 - 2xy = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 4y = 2, \\ xy + 2y = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

447.° Розв'яжіть методом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 28; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6. \end{cases}$

448.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4. \end{cases}$

449.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1. \end{cases}$

450.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ (x-3)(y+5) = 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - x - 2y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

451.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5. \end{cases}$

452.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину:

1) прямої $3x - y = 1$ і параболи $y = 3x^2 + 8x - 3$;

2) прямої $2x - y = 2$ і гіперболи $y = \frac{4}{x}$;

3) прямої $x + y = 1$ і кола $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 16$;

4) парабол $y = x^2 - 4x + 7$ і $y = 3 + 4x - 2x^2$.

453.• Доведіть, що пряма $y - x = 3$ є дотичною до кола $(x+5)^2 + y^2 = 2$, знайдіть координати точки дотику.

454.• Доведіть, що:

1) пряма $y = -2x - 4$ і парабола $y = 6x^2 - 7x - 2$ не перетинаються;

2) парабола $y = 4x^2 - 3x + 6$ і пряма $y = x + 5$ мають одну спільну точку, знайдіть координати цієї точки;

3) параболи $y = 4x^2 - 3x - 24$ і $y = 2x^2 - 5x$ мають дві спільні точки, знайдіть їх координати.

455.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3. \end{cases}$

456.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{4}{5}, \\ 3x + y = 8. \end{cases}$

457.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ xy(x + y) = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{21}{10}, \\ x + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{6y}{x} = 5, \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 18; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{y}{x} + xy = -10, \\ \frac{5y}{x} - 2xy = 13; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3(x + y)^2 + 2(x - 2y)^2 = 5, \\ 2(x - 2y) - x - y = 1. \end{cases}$

458.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2{,}5, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x - 2y}{x + y} - \frac{x + y}{x - 2y} = \frac{15}{4}, \\ 4x + 5y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 4, \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 72; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4(x - y)^2 + 7(x - y) = 15, \\ 2x + 5y = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} (x - y)^2 + 2x = 35 + 2y, \\ (x + y)^2 + 2y = 3 - 2x. \end{cases}$

459.°° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 28, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ xy = 12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 19, \\ xy = -6. \end{cases}$

460.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 56, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x^2 - y^2 = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$

461.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3y - 2xy = 2, \\ x + 2xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + y = 30, \\ xy + x = 28; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10. \end{cases}$

462.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x + y + xy = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy - x = 24, \\ xy - y = 25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy + 2x = -4, \\ 3xy + y = -8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 66, \\ 2x^2 - y^2 = 34. \end{cases}$

463.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = 36, \\ x + 6y = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - 2xy = 32, \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 100; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -1. \end{cases}$

464.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + 10xy + 25y^2 = 49, \\ x - 5y = -3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x + 2y, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 25y^2 = 104, \\ xy = -4. \end{cases}$

465.•• При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = a \end{cases}$

1) має один розв'язок;
2) має два розв'язки;
3) не має розв'язків?

466.•• При яких значеннях k система рівнянь $\begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y = kx + 3 \end{cases}$

1) має один розв'язок;
2) має два розв'язки;
3) не має розв'язків?

467.* Скільки розв'язків залежно від значення a має система рівнянь:

1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a? \end{cases}$

468.* Скільки розв'язків залежно від значення a має система рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

469. Доведіть, що значення виразу $25^{10} - 5^{17}$ кратне числу 31.

470. Спростіть вираз $\frac{5a + 5}{a^2 - a} : \left(\frac{a + 3}{a^2 - 1} - \frac{1}{a^2 + a}\right)$.

471. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 2(x - 3) \geqslant -3(x + 2), \\ \frac{7x}{3} \leqslant 1 - \frac{x}{2}. \end{cases}$

472. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 6x - 2 = 0$. Знайдіть значення виразу $x_1^2 + x_2^2$.

473. Скоротіть дріб:

1) $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

2) $\frac{7\sqrt{3} - 21}{14\sqrt{3}}$;

3) $\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

474. (*Зі старовинного китайського трактату «Дев'ять відділів мистецтва рахунку»*.) 5 волів і 2 барани коштують 11 таелей, а 2 воли і 8 баранів — 8 таелей. Скільки коштують окремо віл і баран?

475. (*Задача Леонардо Пізанського* (*Фібоначчі*).) Один говорить другому: «Дай мені 7 динаріїв, і я буду в 5 разів багатшим за тебе». А другий говорить: «Дай мені 5 динаріїв, і я буду в 7 разів багатшим за тебе». Скільки грошей у кожного?

476. Із села A в село B, відстань між якими дорівнює 140 км, виїхав мотоцикліст. За 20 хв до цього назустріч йому з B в A виїхав велосипедист, який зустрівся з мотоциклістом через 2 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо мотоцикліст за 2 год проїжджає на 104 км більше, ніж велосипедист за 4 год.

14. Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь другого степеня

Розглянемо задачі, у яких системи рівнянь другого степеня використовуються як математичні моделі реальних ситуацій.

ПРИКЛАД 1

З двох пунктів, відстань між якими дорівнює 18 км, вирушили одночасно назустріч один одному двоє туристів і зустрілися через 2 год. З якою швидкістю йшов кожний турист, якщо для проходження всієї відстані між пунктами одному з них потрібно на 54 хв більше, ніж другому?

Розв'язання

Нехай швидкість першого туриста дорівнює x км/год, а другого — y км/год, $x < y$. До зустрічі перший турист пройшов $2x$ км, а другий — $2y$ км. Разом вони пройшли 18 км. Тоді $2x + 2y = 18$.

Усю відстань між пунктами перший турист проходить за $\frac{18}{x}$ год, а другий — за $\frac{18}{y}$ год. Оскільки першому туристу для проходження цієї відстані потрібно на 54 хв $= \frac{54}{60}$ год $= \frac{9}{10}$ год більше, ніж другому, то $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9 - y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Розв’язавши друге рівняння останньої системи, отримуємо: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Корінь -36 не підходить за змістом задачі. Отже, $y = 5$, $x = 4$.

Відповідь: 4 км/год, 5 км/год.

ПРИКЛАД 2

Двоє робітників можуть разом виконати деяку роботу за 10 днів. Після 6 днів спільної роботи один із них був переведений на іншу роботу, а другий продовжував працювати. Через 2 дні самостійної роботи другого з’ясувалося, що зроблено $\frac{2}{3}$ всієї роботи. За скільки днів кожний робітник може виконати всю роботу?

Розв’язання

Нехай перший робітник може виконати всю роботу за x днів, а другий — за y днів. За 1 день перший робітник виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{x}$ частину роботи. Другий робітник за 1 день виконує $\frac{1}{y}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{y}$ частину роботи. Оскільки за 10 днів спільної праці вони виконують всю роботу, то $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Перший робітник працював 6 днів і виконав $\frac{6}{x}$ частину роботи, а другий працював 8 днів і виконав $\frac{8}{y}$ частину роботи. Оскільки внаслідок цього було виконано $\frac{2}{3}$ роботи, то $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}$.

Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases}\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1,\\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3},\end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел $x = 15$, $y = 30$. Отже, перший робітник може виконати всю роботу за 15 днів, а другий — за 30 днів.

В і д п о в і д ь: 15 днів, 30 днів.

ПРИКЛАД 3

При діленні двоцифрового числа на добуток його цифр одержимо неповну частку 5 і остачу 2. Різниця цього числа і числа, отриманого перестановкою його цифр, дорівнює 36. Знайдіть це число.

Розв'язання

Нехай шукане число містить x десятків і y одиниць. Тоді воно дорівнює $10x + y$. Оскільки при діленні цього числа на число xy отримуємо неповну частку 5 і остачу 2, то $10x + y = 5xy + 2$.

Число, отримане перестановкою цифр даного, дорівнює $10y + x$. За умовою $(10x - y) - (10y - x) = 36$.

Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}10x+y=5xy+2,\\ (10x+y)-(10y+x)=36,\end{cases}$$

розв'язками якої є дві пари чисел: $x = 6$; $y = 2$ або $x = 0{,}2$; $y = 3{,}8$. Проте друга пара не підходить за змістом задачі.

Отже, шукане число дорівнює 62.

В і д п о в і д ь: 62.

477.° Сума двох чисел дорівнює 12, а сума їх квадратів дорівнює 74. Знайдіть ці числа.

478.° Різниця двох чисел дорівнює 16, а їх добуток дорівнює 192. Знайдіть ці числа.

479.° Різниця двох натуральних чисел дорівнює 3, а їх добуток на 87 більший за їх суму. Знайдіть ці числа.

480.° Різниця квадратів двох натуральних чисел дорівнює 20, а сума більшого з них і подвоєного другого числа дорівнює 14. Знайдіть ці числа.

481.° Навколо прямокутної ділянки землі площею 2400 м^2 поставили огорожу завдовжки 220 м. Знайдіть довжину і ширину ділянки.

482.° Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а сума площ квадратів, побудованих на двох його сусідніх сторонах, — 130 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

483.• Яке двоцифрове число у 4 рази більше за суму своїх цифр і у 2 рази більше за їх добуток?

484.• Якщо деяке двоцифрове число поділити на суму його цифр, то отримаємо неповну частку 7 і остачу 6, а якщо поділити це число на добуток цифр, то отримаємо неповну частку 5 і остачу 2. Знайдіть дане число.

485.• Двоцифрове число у 7 разів більше за суму своїх цифр і на 52 більше за добуток цифр. Знайдіть це число.

486.• Різниця двох натуральних чисел дорівнює 12, а сума чисел, обернених до них, дорівнює $\frac{1}{8}$. Знайдіть ці числа.

487.• Сума двох натуральних чисел дорівнює 15, а різниця чисел, обернених до них, дорівнює $\frac{1}{18}$. Знайдіть ці числа.

488.• Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а його площа — 30 см^2. Знайдіть катети цього трикутника.

489.• Периметр прямокутного трикутника дорівнює 40 см, а один із катетів — 8 см. Знайдіть другий катет трикутника і його гіпотенузу.

490.• Площа прямокутника дорівнює 180 см². Якщо одну його сторону зменшити на 3 см, а другу — на 2 см, то його площа дорівнюватиме 120 см². Знайдіть початкові розміри прямокутника.

491.• Якщо довжину прямокутника зменшити на 3 см, а ширину збільшити на 2 см, то його площа збільшиться на 6 см². Якщо довжину прямокутника зменшити на 5 см, а ширину збільшити на 3 см, то площа прямокутника не зміниться. Знайдіть сторони даного прямокутника.

492.• Із металевого листа прямокутної форми виготовили відкриту коробку. Для цього в кутах листа вирізали квадрати зі стороною 4 см. Знайдіть довжину і ширину листа, якщо його периметр дорівнює 60 см, а об'єм коробки — 160 см³.

493.• Два мотоциклісти виїхали одночасно з міст A і B назустріч один одному. Через годину вони зустрілись і, не зупиняючись, продовжили рухатись із тією самою швидкістю. Один із них прибув у місто A на 35 хв раніше, ніж другий — у місто B. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста, якщо відстань між містами становить 140 км.

494.• Зі станції M до станції N, відстань між якими дорівнює 450 км, вирушив швидкий поїзд. Через 3 год після цього зі станції N до станції M вийшов товарний поїзд, який зустрівся зі швидким через 3 год після свого виходу. Швидкий поїзд долає відстань між станціями M і N на 7 год 30 хв швидше, ніж товарний. Знайдіть швидкість кожного поїзда.

495.• З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 240 км, виїхали одночасно автобус і автомобіль. Автобус прибув до пункту призначення на 1 год пізніше за автомобіль. Знайдіть швидкість автомобіля і автобуса, якщо за 2 год автобус проїжджає на 40 км більше, ніж автомобіль за одну годину.

496.• По круговій доріжці завдовжки 2 км в одному напрямі рухаються двоє ковзанярів. Один ковзаняр пробігає коло на 1 хв швидше за другого і наздоганяє його через кожні 20 хв. Знайдіть швидкість кожного ковзаняра (у метрах за хвилину).

497.• Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 8 днів. Якщо перша бригада, працюючи самостійно, виконає $\frac{1}{3}$ завдання, а потім її змінить друга бригада, то завдання буде виконане за 20 днів. За скільки днів кожна бригада може виконати це виробниче завдання, працюючи самостійно?

498.• Якщо відкрити одночасно дві труби, то басейн буде наповнено водою за 12 год. Якщо спочатку наповнювати басейн тільки через першу трубу протягом 5 год, а потім тільки через другу протягом 9 год, то водою буде наповнено половину басейну. За скільки годин може наповнити басейн кожна труба, працюючи самостійно?

499.• Два трактористи, працюючи разом, можуть зорати поле за 6 год. Якщо перший тракторист працюватиме самостійно 4 год, а потім його змінить другий, то цей тракторист закінчить оранку за 9 год. За який час, працюючи самостійно, може зорати поле кожен тракторист?

500.• При послідовному з'єднанні двох провідників опір в електричному колі становитиме 150 Ом, а при паралельному — 36 Ом. Знайдіть опір кожного провідника.

501.• При послідовному з'єднанні трьох провідників одного виду і одного провідника другого виду опір в електричному колі становитиме 18 Ом. Якщо паралельно сполучити по одному провіднику першого і другого видів, то при напрузі 24 В сила струму в електричному колі становитиме 10 А. Знайдіть опір провідника кожного виду.

502.•• Турист проплив на човні по річці від пристані A до пристані B і повернувся назад за 6 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо 2 км за течією річки турист пропливає за той самий час, що й 1 км проти течії, а відстань між пристанями A і B становить 16 км.

503.•• Катер проходить 48 км проти течії річки і 30 км за течією річки за 3 год, а 15 км за течією — на 1 год швидше, ніж 36 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера і швидкість течії.

504.•• З міста *A* до міста *B*, відстань між якими 40 км, одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти, один з яких прибув у місто *B* через 40 хв, а другий — у місто *A* через 1,5 год після зустрічі. Знайдіть швидкість руху кожного велосипедиста.

505.•• З одного села одночасно в одному напрямі вирушили два пішоходи. Швидкість руху першого становила 3 км/год, а другого — 4 км/год. Через півтори години з цього села виїхав велосипедист, який наздогнав другого пішохода через 15 хв після того, як наздогнав першого. Знайдіть швидкість руху велосипедиста.

506.•• Відстань між пристанями *A* і *B* дорівнює 28 км. Вирушивши від пристані *A* до пристані *B*, через 2 год після початку руху катер зустрів пліт, відправлений від пристані *B* за течією річки за 2 год до початку руху катера. Знайдіть швидкість течії річки і власну швидкість катера, якщо катер проходить відстань від *A* до *B* і повертається назад за 4 год 48 хв.

507.•• Маса куска одного металу дорівнює 336 г, а куска другого — 320 г. Об’єм куска першого металу на 10 см^3 менший від об’єму другого, а густина першого — на 2 г/см^3 більша за густину другого. Знайдіть густину кожного металу.

508.•• Модуль рівнодіючої двох сил, що прикладені до однієї точки під прямим кутом, дорівнює 25 Н. Якщо модуль однієї сили зменшити на 8 Н, а другої збільшити на 4 Н, то модуль їх рівнодіючої не зміниться. Знайдіть модулі даних сил.

509.•• По двох сторонах прямого кута в напрямку до його вершини рухаються два тіла. Перше тіло рухається зі швидкістю 12 м/хв, а друге — 16 м/хв. У певний момент часу відстань між тілами становила 100 м. Через 2 хв після цього відстань між тілами стала дорівнювати 60 м. На якій відстані від вершини прямого кута знаходилося кожне тіло у перший зафіксований момент часу?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

510. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{a^2 - 3a} - \frac{1}{a^2 + 3a} - \frac{a+1}{a^2 - 9}$;

2) $\frac{3}{b-2} - \frac{3b-2}{b^2 + 2b + 4} - \frac{b^2 + 16b + 12}{b^3 - 8}$.

511. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{4a}{5\sqrt{a}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{b} - 1}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{6} - 1}$; 4) $\frac{2}{2\sqrt{7} - 3\sqrt{2}}$.

512. Розв'яжіть нерівність:

1) $1{,}1(5x - 4) \leqslant 0{,}2(10x + 13)$; 2) $\frac{0{,}6 - 5y}{4} < \frac{0{,}5 - 5y}{6}$.

513. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності $(2x + 1)(x + 4) - 3x(x + 2) > 0$.

514. При яких значеннях змінної має зміст вираз $\sqrt{12 - 5x} + \sqrt{2x + 1}$?

515. Знайдіть проміжок спадання функції:

1) $y = 2x^2 + 10x - 9$; 2) $y = 5x - 3x^2$.

516. 14 грудня 1840 року в Парижі комісія у складі академіків-математиків зібралася для вивчення математичних здібностей хлопчика Анрі Монде, який феноменально виконував обчислення. Розв'яжіть одну із запропонованих Монде задач, яку хлопчик розв'язав усно: «Які два натуральні числа треба взяти, щоб різниця їх квадратів дорівнювала 133?»

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 3

1. При яких значеннях x виконується нерівність $x^2 > 4$?

А) $x > 2$; В) $x < -2$ або $x > 2$;

Б) $x > 2$ або $x > -2$; Г) $-2 < x < 2$.

2. Яка множина розв'язків нерівності $x^2 + 8x - 9 \geqslant 0$?

А) $(-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$; В) $(-\infty; -1) \cup (9; +\infty)$;
Б) $(-\infty; -9] \cup [1; +\infty)$; Г) $(-\infty; -1] \cup [9; +\infty)$.

3. Скільки цілих розв'язків має нерівність $3x^2 + 5x - 8 < 0$?

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.

4. Яка з даних нерівностей виконується при всіх дійсних значеннях змінної?

А) $x^2 - 14x + 49 > 0$; В) $x^2 - 3x + 4 > 0$;
Б) $-3x^2 + x + 2 \leqslant 0$; Г) $-x^2 + 7x - 10 < 0$.

5. Яка область визначення функції $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{8x - 4x^2}}$?

А) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; В) $[0; 2]$;
Б) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; Г) $(0; 2)$.

6. Укажіть нерівність, яка не має розв'язків.

А) $x^2 - 6x + 10 < 0$; В) $-3x^2 + 8x + 3 < 0$;
Б) $-5x^2 + 3x + 2 > 0$; Г) $-x^2 - 10x > 0$.

7. Пари чисел $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} y - x = 2, \\ xy - y = 10. \end{cases}$ Чому дорівнює значення виразу $x_1y_1 + x_2y_2$?

А) 23; Б) 7; В) 35; Г) −26.

8. Які фігури є графіками рівнянь системи $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -3? \end{cases}$

А) Пряма і парабола; В) коло і гіпербола;
Б) коло і парабола; Г) парабола і гіпербола.

9. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ x + y = 1? \end{cases}$

А) Жодного розв'язку; В) два розв'язки;
Б) один розв'язок; Г) чотири розв'язки.

10. Якого найбільшого значення набуває вираз $x + y$, якщо пара чисел $(x; y)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -7? \end{cases}$

А) 1; Б) 6; В) 0; Г) −5.

11. Пара чисел $(a; b)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4, \\ \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 9. \end{cases}$

Знайдіть значення виразу $a - b$.

А) 5; Б) 1; В) $\frac{1}{6}$; Г) $\frac{5}{6}$.

12. Пари чисел $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} 2x - xy = 5, \\ y + xy = 6. \end{cases}$ Знайдіть значення виразу $|x_1y_1 - x_2y_2|$.

А) 1; Б) 11; В) 70; Г) 10.

13. Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а його діагональ — 13 см.
Нехай сторони прямокутника дорівнюють x см і y см. Яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

В) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 169; \end{cases}$

Г) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$

14. Відстань між двома містами, яка дорівнює 120 км, легковий автомобіль проїжджає на 30 хв швидше, ніж вантажівка. Відомо, що за 2 год вантажівка проїжджає на 40 км більше, ніж легковий автомобіль за 1 год.
Нехай швидкість вантажівки дорівнює x км/год, а легкового автомобіля — y км/год. Яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \frac{120}{y} - \frac{120}{x} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$

В) $\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = \frac{1}{2}, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$

Г) $\begin{cases} \frac{120}{y} - \frac{120}{x} = \frac{1}{2}, \\ 2x - y = 40. \end{cases}$

15. Двоє працівників можуть виконати комп'ютерний набір підручника з алгебри за 8 днів. Якщо перший працівник набере $\frac{2}{3}$ підручника, а потім другий працівник завершить набір, то весь підручник буде набрано за 16 днів. Нехай перший працівник може набрати підручник за x днів, а другий — за y днів. Яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{16}; \end{cases}$

В) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 16; \end{cases}$

Г) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16. \end{cases}$

16. При яких значеннях b рівняння $3x^2 - bx + 3 = 0$ не має коренів?

А) $-6 < b < 6$;
Б) $b < 6$;
В) $b > 6$;
Г) $b < -6$ або $b > 6$.

17. При якому значенні a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = a \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

А) $a = 5$;
Б) $a = 5\sqrt{2}$;
В) $a = -5$ або $a = 5$;
Г) $a = -5\sqrt{2}$ або $a = 5\sqrt{2}$.

18. При яких значеннях a нерівність $ax^2 - 2x + a < 0$ не має розв'язків?

А) $a < -1$ або $a > 1$;
Б) $a \geqslant 1$;
В) $-1 < a < 1$;
Г) таких значень не існує.

ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - нуль функції;
  - зростаюча функція;
  - спадна функція;
  - проміжки знакосталості функції;
  - квадратична функція;
  - квадратна нерівність;
- ви повторили:
  - основні поняття, пов'язані з функцією;
  - методи розв'язування систем рівнянь;
- ви вивчили властивості квадратичної функції;
- ви навчилися:
  - використовуючи графік функції, знаходити її проміжки зростання і спадання, проміжки знакосталості, нулі функції;
  - використовуючи графік функції $y = f(x)$, будувати графіки функцій $y = kf(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$;
  - будувати графік квадратичної функції;
  - розв'язувати квадратні нерівності;
  - застосовувати методи підстановки і додавання при розв'язуванні систем рівнянь другого степеня;
  - розв'язувати задачі за допомогою систем рівнянь другого степеня;
- ви ознайомилися з методом заміни змінних розв'язування систем рівнянь;
- ви розвинули навички застосування графічного методу розв'язування систем рівнянь.

§ 3 ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

- Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви зможете розширити свої уявлення про математичні моделі реальних ситуацій.
- Ви розвинете свої вміння проводити відсоткові розрахунки, ознайомитеся з формулою складних відсотків та можливостями її застосування.
- Розширите і поглибите свої знання про випадкові події, імовірність випадкової події, дізнаєтеся, яку величину називають частотою випадкової події і за якою формулою її можна обчислити, що називають імовірністю випадкової події, яку науку називають теорією ймовірностей.
- Ознайомитеся з початковими відомостями про статистику, дізнаєтеся про способи збирання, подання і аналізу даних, про міри центральної тенденції сукупності даних.
- Навчитесь обчислювати ймовірності випадкових подій, знаходити моду, середнє значення і медіану статистичної вибірки.

15. Математичне моделювання

Мабуть, немає сьогодні такої галузі знань, де б не застосовувалися досягнення математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують математичний апарат.

Дмитро Олександрович Граве

У чому ж полягає секрет універсальності «математичного інструменту»?

«Ключ до розв'язання багатьох наукових задач — їх вдалий переклад мовою математики». Таку відповідь на поставлене запитання дав один із засновників і перший директор Інституту математики Академії наук України академік Д. О. Граве (1863–1939).

Справді, формулювання задач з різних галузей знань містять нематематичні поняття. Якщо математик бере участь у розв'язуванні такої задачі, то він насамперед прагне перекласти її своєю «рідною» математичною мовою, тобто мовою виразів, формул, рівнянь, нерівностей, функцій, графіків тощо. Результат такого перекладу називають **математичною моделлю**, а саму задачу — **прикладною задачею**.

Термін «модель» (від латинського *modulus* — зразок) нам трапляється дуже часто: модель літака, модель атомного ядра, модель Сонячної системи, модель якогось процесу або явища тощо. Вивчаючи властивості моделі об'єкта, ми тим самим вивчаємо властивості самого об'єкта.

Галузь математики, яка займається побудовою і вивченням математичних моделей, називають **математичним моделюванням**.

У таблиці наведено зразки прикладних задач і відповідних їм математичних моделей.

№	Прикладна задача	Математична модель
1	Один кілограм картоплі коштує 2 грн. Скільки картоплі можна купити за 14 грн.?	Чому дорівнює частка 14 : 2?

№	Прикладна задача	Математична модель
2	У магазині є 3 види чашок і 2 види тарілок. Скільки існує варіантів скласти набір з однієї чашки й однієї тарілки?	Чому дорівнює добуток $3 \cdot 2$?
3	На стоянці було кілька машин. Коли 5 машин поїхало, залишилося 2 машини. Скільки машин було на стоянці спочатку?	Знайдіть корінь рівняння $x - 5 = 2$
4	Із 156 жовтих, 234 білих і 390 червоних троянд склали букети. Яку найбільшу кількість букетів можна скласти, щоб у всіх букетах троянд кожного кольору було порівну і всі троянди було використано?	Знайдіть НСД (156; 234; 390)
5	Автомобіль витрачає 7,8 л бензину на 100 км шляху. Чи вистачить 40 л бензину, щоб доїхати від Києва до Одеси, якщо відстань між цими містами 490 км?	Порівняйте значення виразу $\frac{7,8 \cdot 490}{100}$ з числом 40

Мета розв'язування будь-якої задачі — отримати правильну відповідь. Тому складання математичної моделі — це тільки перший етап розв'язування прикладної задачі.

Насправді розв'язування прикладної задачі складається з трьох етапів:

1) побудова математичної моделі;

2) розв'язання математичної задачі;

3) результат, отриманий на другому етапі, аналізується виходячи зі змісту прикладної задачі.

Перший етап ілюструють наведені вище приклади. Зазначимо, що успішна реалізація цього кроку потребує наявності певних знань із галузі, до якої належить дана прикладна задача.

Реалізація другого етапу пов'язана лише з математичною діяльністю: знаходження значень виразів, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, побудова графічних об'єктів тощо.

На третьому етапі отриманий результат потрібно записати мовою прикладної задачі. Пояснимо це, звернувшись до наведеної таблиці. Наприклад, відповіді до першої, другої, третьої задач треба записати так: можна купити 7 кг картоплі; покупку можна здійснити 6 способами; на стоянці було 7 машин. Далі відповідь слід проаналізувати на відповідність умові прикладної задачі. Наприклад, відповідь «1,5 учня» не може бути прийнятною для жодної прикладної задачі.

ПРИКЛАД

Маса дерев'яної балки становить 120 кг, а маса залізної балки — 140 кг, причому залізна балка на 1 м коротша від дерев'яної. Яка довжина кожної балки, якщо маса 1 м залізної балки на 5 кг більша за масу 1 м дерев'яної?

Розв'язання

При розв'язуванні задачі виділимо три етапи.

I етап. Побудова математичної моделі

Нехай довжина дерев'яної балки дорівнює x м, тоді довжина залізної становить $(x - 1)$ м. Маса 1 м дерев'яної балки дорівнює $\frac{120}{x}$ кг, а маса 1 м залізної — $\frac{140}{x-1}$ кг, що на 5 кг більше за масу 1 м дерев'яної. Тоді $\frac{140}{x-1} - \frac{120}{x} = 5$. Отримане рівняння і є математичною моделлю даної прикладної задачі.

II етап. Розв'язування рівняння

Маємо:

$$\frac{140}{x-1} - \frac{120}{x} = 5;$$

$$\frac{28}{x-1} - \frac{24}{x} = 1;$$

$$\begin{cases} 28x - 24(x-1) = x^2 - x, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 24 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$x = 8 \text{ або } x = -3.$$

III етап. Аналіз результату, отриманого на II етапі, виходячи зі змісту прикладної задачі

Корінь −3 не задовольняє умову задачі, оскільки така величина, як довжина, не може виражатися від'ємним числом.

Отже, довжина дерев'яної балки дорівнює 8 м, а довжина залізної — 7 м.

Відповідь: 8 м, 7 м.

1. Що називають математичною моделлю задачі?
2. Яку задачу називають прикладною?
3. Що називають математичним моделюванням?
4. З яких етапів складається розв'язування прикладної задачі?

517.° Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) Бабуся спекла 60 пиріжків. Частину пиріжків вона віддала сусідам, а 12 пиріжками пригостила онуків. Після цього в неї залишилося 16 пиріжків. Скільки пиріжків бабуся віддала сусідам?

2) Від двох пристаней одночасно назустріч один одному вирушили два катери, які зустрілися через 4 год після початку руху. Один катер рухався зі швидкістю 28 км/год, а другий — 36 км/год. Чому дорівнює відстань між пристанями?

3) Витрати бензину на проїзд 100 км в автомобілі «Таврія» становлять 7 л. Чи вистачить 28 л бензину, щоб доїхати з Києва до Полтави, відстань між якими 337 км?

4) Чи вистачить 5 т гороху, щоб засіяти ним поле, яке має форму прямокутника зі сторонами 500 м і 400 м, якщо на 1 га землі треба висіяти 260 кг гороху?

5) Три зошити і ручка коштують 5,4 грн., а зошит і три таких ручки — 6,6 грн. Скільки коштує одна ручка?

6) З одного місця в одному напрямку одночасно стартували по велотреку два велосипедисти. Один із них проїжджає коло велотреку за 1 хв, а другий — за 45 с. Через яку найменшу кількість хвилин після початку руху велосипедисти знову зустрінуться в місці старту?

7) Один робітник може виконати завдання за 30 год, а другий — за 45 год. За який час вони виконають це завдання, працюючи разом?

8) Із 45 т залізної руди виплавляють 25 т заліза. Скільки тонн руди потрібно, щоб виплавити 10 т заліза?

9) Маємо два водно-сольові розчини. Перший розчин містить 25 %, а другий — 40 % солі. Скільки кілограмів кожного розчину треба взяти, щоб одержати розчин масою 60 кг, який містить 35 % солі?

10) Скільки потрібно метрів дроту, щоб обгородити ділянку землі, яка має форму прямокутного трикутника, у якого гіпотенуза на 8 м довша за один катет і на 1 м довша за другий катет?

518.° Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) Із двох станцій, відстань між якими дорівнює 24 км, одночасно в одному напрямку вирушили два поїзди. Попереду рухався поїзд зі швидкістю 60 км/год. Через 4 год після початку руху його наздогнав другий поїзд. З якою швидкістю рухався другий поїзд?

2) В одному ящику вміщається 20 кг яблук. Скільки потрібно ящиків, щоб покласти в них 154 кг яблук?

3) Витрати емалевої фарби ПФ-115 на одношарове покриття становлять 180 г на 1 м^2. Чи вистачить 4 кг емалі, щоб пофарбувати стіну завдовжки 6 м і заввишки 4 м?

4) Між учнями одного класу поділили порівну 145 зошитів і 58 ручок. Скільки в цьому класі учнів?

5) Одна швачка може виконати замовлення за 4 год, а друга — за 6 год. Чи вистачить їм 2 год 30 хв, щоб, працюючи разом, виконати замовлення?

6) Із 150 кг картоплі отримують 27 кг крохмалю. Скільки отримають крохмалю з 390 кг картоплі?

7) Вкладник поклав до банку 2000 грн. на два різні рахунки. По першому з них банк виплачує 8 % річних, а по другому — 10 % річних. Через рік вкладник отримав 176 грн. відсоткових грошей. Скільки гривень він поклав на кожний рахунок?

519.$^{\bullet}$ Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) У прямокутній кришці зі сторонами 30 см і 15 см потрібно зробити прямокутний отвір площею 100 см^2 так, щоб його краї були на однаковій відстані від країв кришки. На якій відстані від краю кришки має бути край отвору?

2) Під час збирання врожаю з кожної з двох ділянок зібрали по 300 ц пшениці. Площа першої ділянки на 5 га менша від площі другої. Скільки центнерів пшениці зібрали з 1 га кожної ділянки, якщо врожайність пшениці на 1 га на першій ділянці на 5 ц більша, ніж на другій?

3) З пунктів A і B одночасно назустріч один одному вирушили відповідно велосипедист і пішохід, які зустрілися через 1 год після початку руху. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо велосипедист прибув у пункт B на 2 год 40 хв раніше, ніж пішохід у пункт A, а відстань між цими пунктами становить 16 км.

4) Дві бригади вантажників, працюючи разом, можуть розвантажити товарний поїзд за 6 год. Перша бригада виконала $\frac{3}{5}$ всієї роботи, потім її змінила друга бригада, яка й закінчила розвантаження. Уся робота була виконана за 12 год. Скільки годин потрібно кожній бригаді для самостійного розвантаження поїзда?

5) Вартість доставки на будівництво однієї машини піску становить 250 грн., а машини гравію — 350 грн. За день планується 50 рейсів, причому транспортні витрати мають не перевищувати 14 000 грн. Скільки машин гравію може бути доставлено за день?

520.$^{\bullet}$ Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) З одного порту одночасно вийшли два теплоходи, один з яких рухався на південь, а другий — на захід. Через 2 год 30 хв відстань між ними була 125 км. З якою швидкістю рухався кожний теплохід, якщо швидкість першого теплохода була на 10 км/год більша за швидкість другого?

2) З міста A до міста B одночасно вирушили автобус і автомобіль. Через 1 год 30 хв після початку руху автомобіль випереджував автобус на 30 км. Коли автомобіль прибув у місто B, автобус знаходився на відстані 80 км від цього міста. З якою швидкістю рухалися автобус і автомобіль, якщо відстань між містами A і B становить 300 км?

3) Під час змагань зі стрільби кожний учасник робить 25 пострілів. За кожний влучний постріл він отримує 4 очки, а за кожний промах знімається 2 очки. Скільки промахів може зробити стрілець, щоб набрати не менше 60 очок?

521.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) Дротяною сіткою завдовжки 600 м потрібно огородити ділянку землі прямокутної форми. При яких розмірах ділянки її площа буде найбільшою?

2) З пунктів A і B (рис. 81), відстань між якими дорівнює 13 км, одночасно вирушили у вказаних напрямках два туристи. Швидкість туриста, який вийшов з пункту A, дорівнює 4 км/год, а туриста, який вийшов з пункту B, — 6 км/год. Через який час після початку руху відстань між туристами буде найменшою?

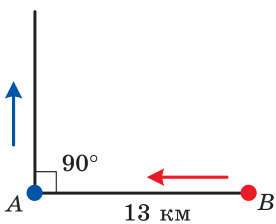


Рис. 81

522.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

Переріз тунелю має форму прямокутника, завершеного згори півколом (рис. 82). Периметр перерізу дорівнює

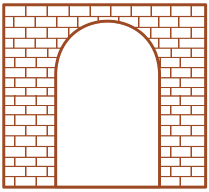


Рис. 82

20 м. При якому радіусі півкола площа перерізу тунелю буде найбільшою? (Число π округліть до одиниць.)

523.* Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) З пунктів A і B назустріч один одному одночасно вирушили два туристи. При зустрічі з'ясувалося, що турист, який вийшов з пункту A, пройшов на 6 км більше, ніж другий. Продовживши рух з такими самими швидкостями, перший турист прийшов у пункт B через 2 год після зустрічі, а другий турист — у пункт A через 4,5 год. Яка відстань між пунктами A і B?

2) (*Задача Л. Ейлера.*) Один купець придбав коней і биків на суму 1770 талерів. За кожного коня він заплатив по 31 талеру, а за кожного бика — по 21 талеру. Скільки коней і скільки биків було куплено?

524.* Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

Купили 40 птахів за 40 монет. За кожних трьох горобців заплатили 1 монету, за кожних двох горлиць — 1 монету, а за кожного голуба — 2 монети. Скільки купили птахів кожного виду?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

525. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінних значення виразу не залежить від значення змінної (змінних):

1) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a-8}\right)\left(a - 4 - \frac{16}{a-4}\right)$;

2) $\frac{a}{b-a} - \frac{ac}{b-c} \cdot \left(\frac{b+c}{bc-ac} - \frac{a+b}{ab-a^2} + \frac{b}{ac}\right)$.

526. Розв'яжіть нерівність:

1) $(3x-2)^2 - (3x-1)(2x+3) < 3x(x-7)$;

2) $-3x^2 - 10x + 48 \leqslant 0$.

527. Розташуйте в порядку зростання числа $\sqrt{32}$, $\sqrt{30}$, $4\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{54}$, $5\sqrt{2}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

528. Агрофірма має 120 га землі, 18 % якої займає фруктовий сад. Знайдіть площу саду.

529. Маса солі становить 24 % маси розчину. Скільки кілограмів розчину треба взяти, щоб він містив 96 кг солі?

530. Знайдіть відсоток вмісту олова в руді, якщо 40 т цієї руди містять 3,2 т олова.

531. Ціна товару зросла зі 120 грн. до 150 грн. На скільки відсотків підвищилася ціна?

532. Ціна товару знизилася зі 150 грн. до 120 грн. На скільки відсотків знизилася ціна?

533. Ціну товару знизили на 10 %, а потім підвищили на 25 %. На скільки відсотків змінилася початкова ціна?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 45–47 на с. 299.

16. Відсоткові розрахунки

У попередніх класах вам доводилося розв'язувати багато задач, у тому числі прикладних задач на відсотки (проценти).

Ви знайомі з такими типами задач на відсотки:

- знаходження відсотка від числа;
- знаходження числа за його відсотком;
- знаходження відсоткового відношення двох чисел.

Ви вмієте конструювати математичні моделі цих задач за допомогою таких виразів:

1) $\frac{a \cdot p}{100}$ — знаходження p % від числа a;

2) $\frac{a \cdot 100}{p}$ — знаходження числа, p % якого дорівнюють a;

3) $\frac{a}{b} \cdot 100$ % — знаходження відсоткового відношення числа a до числа b.

Розглянемо прикладну задачу, яку часто доводиться розв'язувати банківським працівникам, а також тим, хто зберігає гроші в банку під відсотки.

Задача. Нехай вкладник поклав у банк 100 000 грн. під 10 % річних. Яка сума буде на його рахунку через 7 років за умови, що вкладник протягом цього терміну не знімає гроші з рахунку?

Розв'язання. Нехай a_0 — початковий капітал вкладника, тобто

$$a_0 = 100\ 000 \text{ грн.}$$

Позначимо через $a_1, a_2, \ldots, a_7$ кількість грошей на рахунку відповідно в кінці першого, другого, ..., сьомого років.

У кінці першого року початковий капітал a_0 зріс на 10 %. Отже, число a_1 становить 110 % від початкового капіталу a_0. Тоді

$$a_1 = a_0 \cdot 1{,}1 = 100\ 000 \cdot 1{,}1 = 110\ 000 \text{ (грн.)}.$$

У кінці другого року число a_1, у свою чергу, збільшилося на 10 %. Отже, число a_2 становить 110 % від числа a_1. Тоді

$$a_2 = a_1 \cdot 1{,}1 = a_0 \cdot 1{,}1^2 = 100\ 000 \cdot 1{,}1^2 = 121\ 000 \text{ (грн.)}.$$

У кінці третього року число a_2 збільшилося на 10 %. Отже, число a_3 становить 110 % від числа a_2. Тоді

$$a_3 = a_2 \cdot 1{,}1 = a_0 \cdot 1{,}1^3 = 100\ 000 \cdot 1{,}1^3 = 133\ 100 \text{ (грн.)}.$$

Тепер стає зрозумілим, що

$$a_7 = a_0 \cdot 1{,}1^7 = 100\ 000 \cdot 1{,}1^7 = 194\ 871{,}71 \text{ (грн.)}.$$

Відповідь: 194 871,71 грн.

Аналогічно розв'язують цю задачу в загальному вигляді, коли початковий капітал, який дорівнює a_0, поклали в банк під p % річних.

Справді, у кінці першого року початковий капітал збільшиться на $\frac{a_0 \cdot p}{100}$ і дорівнюватиме

$$a_1 = a_0 + \frac{a_0 \cdot p}{100} = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

тобто збільшиться в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ разів.

До речі, у розглянутому вище прикладі це число становило $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$.

Зрозуміло, що в кінці другого року сума знову зросте в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ разів і дорівнюватиме

$$a_2 = a_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Отже, у кінці n-го року матимемо:

$$\boxed{a_n = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

Отриману формулу називають **формулою складних відсотків.**

1. Які ви знаєте три основні задачі на відсотки?

2. Який вигляд має формула складних відсотків? Поясніть її.

534.° Вкладник поклав до банку 2000 грн. під 6 % річних. Скільки грошей буде на його рахунку через рік?

535.° Вкладник поклав до банку 5000 грн. під 8 % річних. Скільки грошей буде на його рахунку через три роки?

536.° Чотири роки тому завод виготовляв 10 000 одиниць певного виробу за рік. Завдяки модернізації виробництва і підвищенню продуктивності праці досягли щорічного приросту обсягів виробництва на 20 %. Скільки одиниць указаного виробу буде виготовлено цього року?

537.° Після двох послідовних знижень ціни на 10 % канцелярський стіл став коштувати 1944 грн. Знайдіть початкову ціну стола.

538.° Після двох послідовних підвищень ціни на 25 % люстра стала коштувати 937 грн. 50 к. Знайдіть початкову ціну люстри.

539.° Населення міста за два роки збільшилося із 40 000 мешканців до 44 100. Знайдіть середній щорічний відсоток приросту населення в цьому місті.

540.° Унаслідок двох послідовних знижень ціни на одне й те саме число відсотків ціна крісла знизилася з 800 грн. до 578 грн. На скільки відсотків відбувалося кожного разу зниження ціни?

541.° Було 300 г 6-відсоткового розчину солі. Через деякий час 50 г води випарували. Яким став відсотковий вміст солі в розчині?

542.° До сплаву масою 600 г, що містить 12 % срібла, додали 60 г срібла. Яким став відсотковий вміст срібла в новому сплаві?

543.° У саду росли яблуні й вишні, причому яблуні становили 42 % всіх дерев. Вишень було на 48 дерев більше, ніж яблунь. Скільки дерев росло в саду?

544.° За два дні було прокладено кабель. За перший день проклали 56 % кабелю, а за другий — на 132 м менше, ніж за перший. Скільки всього метрів кабелю було прокладено за два дні?

545.• За перший день хлопчик прочитав 25 % усієї книжки, за другий — 72 % від кількості сторінок, що залишилася, а за третій — решту 84 сторінки. Скільки сторінок у книжці?

546.• У магазин завезли три види морозива: шоколадне, суничне і ванільне. Шоколадне становило 45 % усього морозива, суничне — 40 % від кількості шоколадного, а ванільне — решту 111 кг. Скільки всього кілограмів морозива завезли у магазин?

547.• Морська вода містить 5 % солі. Скільки прісної води треба додати до 40 кг морської води, щоб концентрація солі становила 2 %?

548.• (*Задача Безу*[1].) Дехто купив коня і через деякий час продав його за 24 пістолі. При продажу він втратив стільки відсотків, скільки коштував йому кінь. Питання: за яку суму він купив коня?

549.• Фірма купує у виробника товар за оптовою ціною, а продає вроздріб за 11 грн., при цьому прибуток від продажу у відсотках дорівнює оптовій ціні товару у гривнях. Яка оптова ціна товару?

---

[1] Безу́ Етьєн (1730–1783) — французький математик, основні праці якого стосуються вищої алгебри. Викладав математику в училищі гардемаринів, Королівському артилерійському корпусі. Автор шеститомної праці «Курс математики».

550.• На старому верстаті робітник виготовляв одну деталь за 20 хв, а на новому — за 8 хв. На скільки відсотків зросла продуктивність праці робітника?

551.• Упровадження нових технологій дозволило зменшити норму часу на виготовлення однієї деталі з 12 хв до 10 хв. На скільки відсотків буде виконуватися при цьому план, якщо норму часу не буде змінено?

552.• Один робітник може викопати траншею за 6 год, а другий — за 4 год. Якщо ж вони працюватимуть разом, то продуктивність праці кожного з них підвищиться на 20 %. За який час вони вириють траншею, працюючи разом?

553.• Один муляр може скласти цегляну стіну за 15 год, а другий — за 10 год. Якщо ж вони працюватимуть разом, то продуктивність праці кожного з них зросте на одну й ту ж кількість відсотків і вони складуть стіну за 4 год. На скільки відсотків зростає продуктивність праці кожного муляра при їх спільній роботі?

554.• Змішали 30-відсотковий розчин соляної кислоти з 10-відсотковим розчином і отримали 800 г 15-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину взяли для цього?

555.• У першому бідоні є молоко, у якому масова частка жиру становить 2 %, а в другому — молоко з масовою часткою жиру 5 %. Скільки треба взяти молока з кожного бідона, щоб отримати 18 л молока, масова частка жиру в якому дорівнює 3 %?

556.• Костюм коштував 600 грн. Після того як ціну було знижено двічі, він став коштувати 432 грн., причому відсоток зниження вдруге був у 2 рази більшим, ніж першого разу. На скільки відсотків кожного разу знижувалася ціна?

557.• Певний товар коштував 200 грн. Спочатку його ціну підвищили на кілька відсотків, а потім знизили на стільки ж відсотків, після чого вартість його стала 192 грн. На скільки відсотків кожного разу відбувалася зміна ціни товару?

558.• Вкладник поклав у банк 4000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 4 %. На кінець другого року на рахунку стало 4664 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

559.• Вкладник поклав у банк 10 000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було зменшено на 2 %. На кінець другого року на рахунку стало 11 880 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

560.• До сплаву міді і цинку, який містив міді на 12 кг більше, ніж цинку, додали 6 кг міді. Унаслідок цього відсотковий вміст цинку в сплаві знизився на 5 %. Скільки цинку і скільки міді містив сплав спочатку?

561.• До сплаву магнію й алюмінію, який містив 12 кг алюмінію, додали 5 кг магнію, після чого відсотковий вміст магнію у сплаві збільшився на 20 %. Скільки кілограмів магнію було в сплаві спочатку?

562.•• У цистерні знаходилася концентрована сірчана кислота, яка містила 2 т води. Після того як цю кислоту змішали з 4 т води, концентрація її знизилася на 15 %. Скільки кислоти було в цистерні спочатку?

563.•• Щоб отримати соляну кислоту, 2 кг хлористого водню розчинили у певному об'ємі води. Потім, щоб підвищити концентрацію отриманої кислоти на 25 %, додали ще 9 кг хлористого водню. Скільки соляної кислоти було отримано?

564.* У посудині було 12 кг кислоти. Частину кислоти відлили і долили до попереднього рівня водою. Потім знову відлили стільки ж, як і першого разу, і долили водою до попереднього рівня. Скільки літрів рідини відливали щоразу, якщо в результаті отримали 25-відсотковий розчин кислоти?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

565. Відомо, що $-3 \leqslant a \leqslant 2$, $-1 \leqslant b \leqslant 3$. Оцініть значення виразу: 1) $3a + 4b$; 2) $4a - 3b$. Скільких цілих значень набуває кожний із цих виразів?

566. При яких значеннях c тричлен $2x^2 - 2x + 5c$ набуває додатного значення при будь-якому значенні x?

567. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + xy - y = 13, \\ x - y = 3. \end{cases}$

17. Частота та ймовірність випадкової події

Нам нерідко доводиться проводити спостереження, досліди, брати участь в експериментах або випробуваннях. Часто такі дослідження завершуються деяким результатом, який заздалегідь передбачити неможливо.

Розглянемо кілька характерних прикладів.

- Якщо відкрити книгу навмання, то неможливо знати заздалегідь, який номер сторінки ви побачите.
- Неможливо до початку футбольного матчу визначити, з яким рахунком закінчиться гра.
- Ви не можете бути впевненим, що коли натиснете на кнопку вимикача, то загориться настільна лампа.
- Немає гарантії, що з курячого яйця, покладеного до інкубатора, виведеться курча.

Як правило, спостереження або експеримент визначається якимось комплексом вимог. Наприклад, футбольний матч повинен проходити за правилами; курячі яйця мають міститися в інкубаторі не менше ніж 21 день з дотриманням відповідної методики зміни температури й вологості повітря.

Результат спостереження, досліду, експерименту називатимемо **подією**.

Випадковою подією називають такий результат спостереження або експерименту, який за умови дотримання даного комплексу вимог може відбутися, а може й не відбутися.

Наприклад, якщо кидати однорідну монету, то випадковою подією є випадіння цифри. Виявлення листа при перевірці поштової скриньки також є випадковою подією.

Уявімо, що випущено 1 000 000 лотерейних білетів і розігрується один автомобіль. Чи можна, придбавши один лотерейний білет, виграти цей приз? Звісно, можна, хоча ця подія *малоймовірна*. А якщо розігруватимуться 10 автомобілів? Зрозуміло, що **ймовірність** виграшу збільшиться. Якщо ж уявити, що розігруються 999 999 автомобілів, то ймовірність виграшу стає набагато більшою.

Отже, **імовірності випадкових подій** можна порівнювати. Однак для цього слід домовитися, яким чином кількісно оцінювати можливість появи тієї чи іншої події.

Підставою для такої кількісної оцінки можуть бути результати численних спостережень або експериментів. Так, люди давно помітили, що багато подій відбувається з тією чи іншою, але, на подив, постійною **частотою**.

Демографам[1] добре відоме число 0,514. Статистичні дані, отримані в різні часи і в різних країнах, свідчать про те, що на 1000 новонароджених припадає в середньому 514 хлопчиків. Число 0,514 називають **частотою випадкової події** «народження хлопчика». Воно визначається формулою

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість новонароджених хлопчиків}}{\text{кількість усіх новонароджених}}.$$

Наголосимо, що це число отримано в результаті аналізу багатьох спостережень. У таких випадках кажуть, що ймовірність події «народження хлопчика» приблизно дорівнює 0,514.

[1] Демографія — наука про народонаселення.

Ви знаєте, що куріння шкідливе для здоров'я. За даними Всесвітньої організації охорони здоров'я (ВООЗ) курці становлять приблизно 97 % від усіх хворих на рак легенів. Число 0,97 — це частота випадкової події «той, хто захворів на рак легенів, — курив», яка визначається таким відношенням:

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість курців серед захворілих на рак легенів}}{\text{кількість усіх людей, які захворіли на рак легенів}}.$$

Це вражаюче число 97 % може у когось викликати сумніви. Проте ми хочемо підкреслити, що частота випадкової події тим краще характеризує явище, чим більше спостережень проведено. Висновок ВООЗ базується на аналізі багатьох спостережень, проведених у різних країнах, а отже, стосується всіх людей.

У таких випадках кажуть, що ймовірність натрапити на курця серед тих, хто захворів на рак легенів, приблизно дорівнює 0,97 (або 97 %).

Щоб детальніше ознайомитися з поняттям імовірності випадкової події, звернемося до класичного прикладу з киданням монети.

Розглянемо випробування, яке полягає в тому, що кидають монету.

Припустимо, що в результаті двох кидань монети двічі випав герб. Тоді у даній серії, яка складається з двох випробувань, частота випадіння герба дорівнює:

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість випадінь герба}}{\text{кількість кидків}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Чи означає це, що ймовірність випадіння герба дорівнює 1? Звісно, ні.

Для того щоб за частотою випадкової події можна було оцінювати її ймовірність, кількість випробувань має бути достатньо великою.

Починаючи з XVIII ст. багато дослідників проводили серії випробувань з киданням монети.

У таблиці наведено результати деяких таких випробувань.

Дослідник	Кількість кидків монети	Кількість випадінь герба	Частота випадіння герба
Жорж Бюффон (1707–1788)	4040	2048	0,5069
Огастес Де Морган (1806–1871)	4092	2048	0,5005
Вільям Джевонс (1835–1882)	20 480	10 379	0,5068
Всеволод Романовський (1879–1954)	80 640	39 699	0,4923
Карл Пірсон (1857–1936)	24 000	12 012	0,5005
Вільям Феллер (1906–1970)	10 000	4979	0,4979

За наведеними даними простежується чітка закономірність: при багаторазовому киданні монети частота появи герба незначно відхиляється від числа 0,5.

Отже, можна вважати, що ймовірність події «випадіння герба» приблизно дорівнює 0,5.

У кожному з розглянутих прикладів використовувалось поняття **частота випадкової події**. Цю величину ми обчислювали за формулою:

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість появ події, яка цікавить}}{\text{кількість випробувань (спостережень)}}.$$

Далі за частотою ми оцінювали ймовірність події, а саме:

імовірність випадкової події наближено дорівнює частоті цієї події, знайденій при проведенні великої кількості випробувань (спостережень).

Таку оцінку ймовірності випадкової події називають **статистичною**. Її використовують у різних галузях діяльності людини: фізиці, хімії, біології, страховому бізнесі, соціології, економіці, охороні здоров'я, спорті тощо.

Імовірність події позначають буквою P (першою буквою французького слова *probabilité* — імовірність).

Якщо у першому прикладі подію «народження хлопчика» позначити буквою A, то отриманий результат записують так:

$$P\ (A) \approx 0{,}514.$$

Якщо подію «випадіння герба» позначити буквою B, то

$$P\ (B) \approx 0{,}5.$$

1. Наведіть приклади випадкових подій.
2. Опишіть, що таке частота випадкової події.
3. За яких умов частота випадкової події може оцінювати ймовірність випадкової події?
4. Як позначають імовірність події A?

ВПРАВИ

568.° Наведіть приклади випробувань, результатом яких, на вашу думку, є:

1) малоймовірна подія; 2) дуже ймовірна подія.

569.° Експеримент полягає у киданні кнопки. Кнопка може впасти як вістрям донизу, так і на шляпку (рис. 83). Підкиньте кнопку: 1) 10 разів; 2) 20 разів; 3) 50 разів; 4) 100 разів; 5) 200 разів. Результати, отримані в п'яти серіях експериментів, занесіть у таблицю.

Рис. 83

Номер серії	1	2	3	4	5
Кількість експериментів (кидків) у серії	10	20	50	100	200
Кількість випадінь кнопки вістрям униз					
Кількість випадінь кнопки вістрям догори					

У кожній з п'яти серій експериментів підрахуйте частоту випадіння кнопки вістрям догори й оцініть імовірність настання цієї події. Яка подія більш імовірна — «кнопка впаде вістрям униз» або «кнопка впаде вістрям догори».

570.° Проведіть серію, що складається зі 100 експериментів, у яких підкидають ґудзик з петлею (рис. 84). Знайдіть частоту події «ґудзик упаде петлею вниз». Оцініть імовірність події «ґудзик упаде петлею догори» у проведеній серії експериментів.

Рис. 84

571.° У таблиці наведено дані про народження дітей у місті Києві за 2007 рік.

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень	Липень	Серпень	Вересень	Жовтень	Листопад	Грудень
Кількість народжень хлопчиків	1198	1053	1220	1151	1151	1279	1338	1347	1329	1287	1196	1243
Кількість народжень дівчаток	1193	1065	1137	1063	1163	1228	1258	1335	1218	1239	1066	1120

Підрахуйте частоту народжень хлопчиків у кожному місяці та за весь 2007 рік. Оцініть імовірність народження дівчинки у 2007 році.

572.° Оператор довідкової служби протягом робочого дня (9:00—17:00) у середньому розмовляє по телефону 6 год. Оцініть імовірність того, що, коли зателефонувати до довідкової у цей період, телефон буде вільним.

573.° За статистикою у місті Одеса протягом літа кількість сонячних днів у середньому дорівнює 70. Оцініть імовірність того, що, приїхавши влітку в Одесу на один день, гість натрапить на похмуру погоду.

574.° З великої партії лампочок вибрали 1000, серед яких виявилося 5 бракованих. Оцініть імовірність купити браковану лампочку.

575.° Під час епідемії грипу серед обстежених 40 000 жителів виявили 7900 хворих. Оцініть імовірність події «навмання обрана людина хвора на грип».

576.° Імовірність купити браковану батарейку дорівнює 0,02. Чи правильно те, що в будь-якій партії зі 100 батарейок є дві браковані?

577.• Наведену таблицю називають «Навчальний план 9 класу загальноосвітньої школи»:

Предмет	Кількість годин на тиждень
Українська мова	2
Українська література	2
Іноземна мова	2
Зарубіжна література	2
Історія України	2
Всесвітня історія	1
Правознавство	1
Художня культура	1
Алгебра	2
Геометрія	2
Біологія	3
Географія	2
Фізика	2
Хімія	2
Трудове навчання	1
Інформатика	1
Основи здоров'я	1
Фізкультура	3

Оцініть імовірність того, що обраний навмання урок у тижневому розкладі 9 класу виявиться: 1) алгеброю; 2) геометрією; 3) математикою; 4) фізкультурою; 5) іноземною мовою.

578.• Оберіть навмання одну сторінку з повісті Марка Вовчка «Інститутка». Підрахуйте, скільки на цій сторінці є букв «н», «о», «я», «ю», а також скільки всього на ній букв. Оцініть імовірність появи цих букв у вибраному тексті. Ця оцінка дозволить зрозуміти, чому на клавіатурах друкарської машинки та комп'ютера (рис. 85) букви «н» і «о» розміщено ближче до центру, а букви «я» і «ю» — ближче до краю.

Рис. 85

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

579. Розв'яжіть нерівність $(|x| + 1)(x^2 + 5x - 6) > 0$.

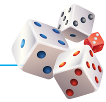
580. Спростіть вираз:

1) $10\sqrt{\frac{2}{5}} - 0{,}5\sqrt{160} + 3\sqrt{1\frac{1}{9}}$; 2) $9\sqrt{2\frac{1}{3}} - 8\sqrt{1\frac{5}{16}} + \sqrt{189}$.

581. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 2 - 6x < 14, \\ (x-2)^2 > (x+4)(x-4) + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2 - (3 - x) \leqslant 5 - 3(x - 5), \\ 7 - 2(x - 3) > 1 - (2x + 5). \end{cases}$



582. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 + 2 = -\frac{3}{x}$; 2) $x^2 - 2x - 6 = \sqrt{x}$.

583. Відомо, що $a + 3b = 10$. Якого найменшого значення може набувати вираз $a^2 + b^2$ і при яких значеннях a і b?

18. Класичне означення ймовірності

Для знаходження ймовірності деяких подій не обов'язково проводити випробування або спостереження. Достатньо керуватися життєвим досвідом і здоровим глуздом.

ПРИКЛАД 1

Нехай у коробці лежать 10 червоних кульок. Яка ймовірність того, що взята навмання кулька буде червоного кольору? жовтого кольору?

Очевидно, що при випробуванні за даних умов будь-яка взята навмання кулька буде червоного кольору.

Подію, яка за певним комплексом умов обов'язково відбудеться в будь-якому випробуванні, називають **достовірною (вірогідною)**. Імовірність такої події вважають рівною 1, тобто:

якщо A — достовірна подія, то

$$P\ (A) = 1.$$

Також очевидно, що при будь-якому випробуванні кулька не може бути жовтого кольору, адже в коробці їх немає.

Подію, яка за певним комплексом умов не може відбутися в жодному випробуванні, називають **неможливою**. Імовірність такої події вважають рівною 0, тобто:

якщо A — неможлива подія, то

$$P\ (A) = 0.$$

Зауважимо, що для будь-якої події A виконується нерівність

$$0 \leqslant P\ (A) \leqslant 1.$$

ПРИКЛАД 2

Розглянемо експеримент, який полягає в тому, що однорідну монету підкидають один раз.

Зрозуміло, що можна отримати тільки один з двох результатів: випадіння цифри або випадіння герба. Причому жоден з них не має переваг. Такі результати називають **рівноможливими**, а відповідні випадкові події — **рівноймовірними**. Тоді природно вважати, що ймовірність кожної з подій «випадіння герба» і «випадіння цифри» дорівнює $\frac{1}{2}$.

Підкреслимо: це зовсім не означає, що в будь-якій серії експериментів з киданням монети половиною результатів буде випадіння герба. Ми можемо лише прогнозувати, що при великій кількості випробувань частота випадіння герба приблизно дорівнюватиме $\frac{1}{2}$.

Розглянемо ще кілька прикладів, у яких ключову роль відіграватимуть рівноможливі результати.

ПРИКЛАД 3

При киданні грального кубика (рис. 86) можна отримати один із шести результатів: випаде 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок. Усі ці результати рівноможливі. Тому природно вважати, що, наприклад, імовірність події «випадіння 5 очок» дорівнює $\frac{1}{6}$.

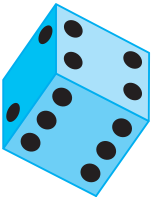


Рис. 86

ПРИКЛАД 4

Нехай випущено 1 000 000 лотерейних білетів, 10 з яких є виграшними. Випробування полягає в тому, що купляють один білет. Цей експеримент призводить до 1 000 000 рівноможливих результатів: купили перший білет, купили другий білет і т. д. Тоді ймовірність виграшу при купівлі одного білета дорівнює $\frac{10}{1\,000\,000} = \frac{1}{100\,000}$.

ПРИКЛАД 5

Нехай у коробці лежать 15 більярдних куль, пронумерованих числами від 1 до 15. Яка ймовірність того, що вийнята навмання куля матиме номер, кратний 3?

Зрозуміло, що в цьому випробуванні є 15 рівноможливих результатів. З них є 5, які нас задовольняють: коли витягують кулі з номерами 3, 6, 9, 12, 15. Тому природно вважати, що ймовірність події «витягнути кулю з номером, кратним 3» дорівнює $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Попри те що в прикладах 1–5 розглядалися різні ситуації, разом з тим їх описує одна математична модель. Пояснимо це.

- У кожному прикладі при випробуванні можна отримати один з n рівноможливих результатів.

Приклад 1: $n = 10$.
Приклад 2: $n = 2$.
Приклад 3: $n = 6$.
Приклад 4: $n = 1\,000\,000$.
Приклад 5: $n = 15$.

- У кожному прикладі розглядається деяка подія A, яку спричиняють m результатів. Називатимемо їх **сприятливими.**

Приклад 1: A — витягли червону кульку, $m = 10$, або A — витягли жовту кульку, $m = 0$.

Приклад 2: A — випав герб, $m = 1$.

Приклад 3: A — випала наперед задана кількість очок на грані кубика, $m = 1$.

Приклад 4: A — виграш призу, $m = 10$.

Приклад 5: A — витягли кулю, номер якої кратний 3, $m = 5$.

У кожному прикладі ймовірність події A можна обчислити за формулою:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Означення. **Якщо випробування закінчується одним з n рівноможливих результатів, з яких m призводять до настання події A, то ймовірністю події A називають відношення $\frac{m}{n}$.**

Таке означення ймовірності називають **класичним.**

Рис. 87

Підкреслимо, що коли результати випробування не є рівноможливими, то класичне означення ймовірності до такої ситуації застосувати не можна.

Наприклад, якщо монету замінити на ґудзик (рис. 87), то події «ґудзик упаде петлею донизу» і «ґудзик упаде петлею догори» нерівноймовірні. Оцінити ймовірність кожної з них можна в результаті експерименту за допомогою частот цих подій, знайдених при проведенні великої кількості випробувань.

ПРИКЛАД 6

Кидають одночасно два гральні кубики: синій і жовтий. Яка ймовірність того, що випадуть дві шістки?

За допомогою таблиці, зображеної на рисунку 88, ми можемо встановити, що в даному експерименті можна отримати 36 рівноможливих результатів, з яких сприятливим є тільки один. Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{1}{36}$.

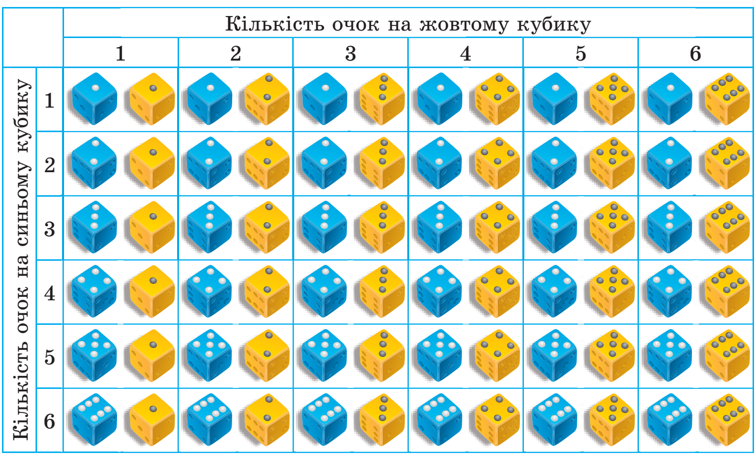


Рис. 88

ПРИКЛАД 7 (задача Д'Аламбера)

Кидають одночасно дві однакові монети. Яка ймовірність того, що хоча б один раз випаде герб?

Ця задача схожа на задачу з прикладу **6**. Різниця лише в тому, що кубики відрізнялися за кольором, а монети є нерозрізнимими. Щоб у цьому експерименті визначити всі рівноможливі результати, будемо розрізняти монети, попередньо їх пронумерувавши. Тоді можна отримати чотири рівноможливі результати (рис. 89):

Рис. 89

У перших трьох з цих результатів хоча б один раз з'явився герб. Ці результати є сприятливими. Тому ймовірність того, що при одночасному киданні двох монет хоча б один раз випаде герб, дорівнює $\frac{3}{4}$.

На завершення цього пункту зазначимо таке.

На перший погляд здається, що багатьма явищами, які відбуваються навколо нас, керує «його величність випадок». Проте при більш ґрунтовному аналізі з'ясовується, що через хаос випадковостей прокладає собі дорогу закономірність, яку можна кількісно оцінити. Науку, яка займається такими оцінками, називають **теорією ймовірностей**.

1. Яку подію називають достовірною?
2. Яку подію називають неможливою?
3. Якою є ймовірність: 1) достовірної події; 2) неможливої події?
4. Нехай $P(A)$ — імовірність настання події A. У яких межах знаходиться $P(A)$?
5. Наведіть приклади рівноймовірних подій.
6. Сформулюйте класичне означення ймовірності.
7. До яких ситуацій не можна застосовувати класичне означення ймовірності?

ВПРАВИ

584.° Наведіть приклади достовірних подій.

585.° Наведіть приклади неможливих подій.

586.° У кошику лежать 10 червоних і 15 зелених яблук. Яка ймовірність взяти навмання з кошика грушу? яблуко?

587.° Навмання вибирають три парні цифри. Яка ймовірність того, що число, записане цими цифрами, буде непарним?

588.° Навмання вибирають три непарні цифри. Яка ймовірність того, що число, записане цими цифрами, буде непарним?

589.° Яка ймовірність того, що, переставивши букви в слові «алгебра», ми отримаємо слово «геометрія»?

590.° Наведіть приклади подій з рівноможливими результатами.

591.° Наведіть приклади подій з нерівноможливими результатами.

592.° Чи рівноймовірні події A і B:

1) подія A: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з номером 1;
   подія B: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з номером 7;
2) подія A: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з парним номером;
   подія B: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з непарним номером?

593.° Яка ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде кількість очок, що дорівнює:

1) одному;
2) трьом;
3) парному числу;
4) числу, яке кратне 5;
5) числу, яке не ділиться націло на 3;
6) числу, яке кратне 7?

594.° Уяви собі, що в класі, у якому ти навчаєшся, розігрується одна безкоштовна туристична поїздка до Лондона. Яка ймовірність того, що до Лондона поїдеш ти?

595.° Щоб скласти іспит з математики, потрібно вивчити 35 білетів. Учень вивчив бездоганно 30 білетів. Яка ймовірність того, що, відповідаючи на один навмання витягнутий білет, він отримає оцінку 12 балів?

596.° Щоб скласти іспит з математики, треба вивчити 30 білетів. Учень не вивчив тільки один білет. Яка ймовірність того, що він не складе іспит, відповідаючи на один білет?

597.° Яка ймовірність того, що ученицю вашого класу, яку викличуть до дошки на уроці математики, зватимуть Катериною?

598.° У класі вчиться 12 дівчаток і 17 хлопчиків. Один учень спізнився до школи. Яка ймовірність того, що це: 1) був хлопчик; 2) була дівчинка?

599.° У лотереї 20 виграшних білетів і 280 білетів без виграшу. Яка ймовірність виграти, купивши один білет?

600.° У коробці лежать 7 синіх і 5 жовтих кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться: 1) жовтою; 2) синьою?

601.° У коробці було 23 картки, пронумерованих від 1 до 23. Із коробки навмання взяли одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записано число:
1) 12;
2) 24;
3) парне;
4) непарне;
5) кратне 3;
6) кратне 7;
7) двоцифрове;
8) просте;
9) у записі якого є цифра 9;
10) у записі якого є цифра 1;
11) у записі якого відсутня цифра 5;
12) сума цифр якого ділиться націло на 5;
13) при діленні якого на 7 отримують остачу 5;
14) у записі якого відсутня цифра 1 ?

602.° Із натуральних чисел від 1 до 30 навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число буде:
1) простим;
2) дільником числа 18;
3) квадратом натурального числа?

603.° Набираючи номер телефону свого товариша, Микола забув: 1) останню цифру; 2) першу цифру. Яка ймовірність того, що він з першої спроби набере правильний номер?

604.• Яка ймовірність того, що твій найщасливіший день у наступному році припаде на: 1) 7 число; 2) 31 число; 3) 29 число?

605.• Грані кубика пофарбовано в червоний або білий колір (кожну грань в один колір). Імовірність випадіння червоної грані дорівнює $\frac{5}{6}$, а ймовірність випадіння білої грані — $\frac{1}{6}$. Скільки червоних і скільки білих граней у кубика?

606.• Грані кубика пофарбовано в два кольори — синій і жовтий (кожну грань в один колір). Імовірність того, що випаде синя грань, дорівнює $\frac{2}{3}$, а що жовта — $\frac{1}{3}$. Скільки синіх і скільки жовтих граней у кубика?

607.• У коробці лежать 2 сині кульки і кілька червоних. Скільки червоних кульок у коробці, якщо ймовірність того, що вибрана навмання кулька:

1) виявиться синьою, дорівнює $\frac{2}{5}$;

2) виявиться червоною, дорівнює $\frac{4}{5}$?

608.•• Картки з номерами 1, 2, 3 довільним чином поклали в ряд. Яка ймовірність того, що картки з непарними номерами опиняться поруч?

609.•• На лавочку довільним чином сідають два хлопчики й одна дівчинка. Яка ймовірність того, що хлопчики опиняться поруч?

610.•• У коробці лежать 5 зелених і 7 синіх олівців. Яку найменшу кількість олівців треба вийняти навмання, щоб імовірність того, що серед вийнятих олівців хоча б один буде зеленого кольору, дорівнювала 1?

611.•• У коробці лежать 3 червоних, 7 жовтих і 11 синіх олівців. Яку найменшу кількість олівців треба вийняти навмання, щоб імовірність того, що серед вийнятих олівців хоча б один буде червоного кольору, дорівнювала 1?

612.•• Кидають одночасно два гральні кубики. За допомогою рисунка 88 установіть, яка ймовірність того, що випадуть:

1) дві одиниці;
2) два однакові числа;
3) числа, сума яких дорівнює 7;
4) числа, сума яких більша за 10;
5) числа, добуток яких дорівнює 6.

613.•• Кидають одночасно дві монети. Яка ймовірність того, що випадуть: 1) два герби; 2) герб і число?

614.* Яка ймовірність того, що при трьох кидках монети: 1) тричі випаде герб; 2) двічі випаде герб; 3) один раз випаде герб; 4) хоча б один раз випаде герб?

615.* Яка ймовірність того, що при двох кидках грального кубика:

1) у перший раз випаде число, менше від 5, а в другий — більше за 4;
2) шістка випаде тільки в другий раз;
3) у перший раз випаде більше очок, ніж у другий?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

616. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{9a^2}{a^3+64}-\frac{a+4}{a^2-4a+16}\right):\frac{8a+8}{a^2-4a+16}+\frac{a+10}{a+4}.$$

617. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{3-5x-2x^2}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-5x-2x^2}}$;

3) $f(x)=\sqrt{3-5x-2x^2}+\dfrac{1}{x^2-9}$;

4) $f(x)=\sqrt{3-5x-2x^2}+\dfrac{2}{x^2+2x}$.

618. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{6}{x} + 2$;
2) $y = -\frac{8}{x} - 3$;
3) $y = \frac{4}{x - 3}$;
4) $y = -\frac{6}{x + 2}$.

Спочатку була гра

Ви знаєте багато ігор, у яких результат залежить від майстерності учасників. Проте є й такі ігри, у яких від уміння гравців нічого не залежить. Усе вирішує випадок. До останніх належить гра в кості. Вважають, що саме з неї розпочалася наука про випадкове.

Придворний французького короля Людовіка XIV, азартний гравець, філософ і літератор кавалер де Мере звернувся до видатного вченого Блеза Паскаля (1623–1662) з проханням роз'яснити такий парадокс. З одного боку, багатий ігровий досвід де Мере свідчив, що при киданні трьох гральних костей сума в 11 очок випадає частіше, ніж у 12 очок.

З іншого боку, цей факт вступав у суперечність з такими міркуваннями. Суму в 11 очок можна отримати з шести різних комбінацій кубиків:

6–4–1	6–3–2	5–5–1
5–4–2	5–3–3	4–4–3

Але й 12 очок теж можна отримати із шести комбінацій:

6–5–1	6–4–2	6–3–3
5–5–2	5–4–3	4–4–4

Блез Паскаль
(1623–1662)

Французький релігійний філософ, письменник, математик і фізик. У ранньому віці виявив математичні здібності, увійшов в історію науки як класичний приклад підліткової геніальності. Коло його математичних інтересів було надзвичайно широким. Зокрема, він винайшов загальний алгоритм для знаходження ознак подільності будь-яких цілих чисел, сформулював ряд основних положень теорії ймовірностей, методи обчислення площ фігур, площ поверхонь і об'ємів тіл. Сконструював першу машину — суматор.

Отже, до появи в сумі 11 і 12 очок призводить однакова кількість сприятливих результатів. Таким чином, ці події мають однакові шанси, що суперечить практиці.

Паскаль зрозумів: помилка полягала в тому, що події, які розглядав де Мере, не є рівноймовірними. Наприклад, суму в 11 очок за допомогою комбінації 6–4–1 можна отримати при 6 різних результатах кидання кубиків: (6; 4; 1); (6; 1; 4); (4; 6; 1); (4; 1; 6); (1; 6; 4); (1; 4; 6).

Якщо підрахувати для кожної комбінації кількість способів її виникнення, то будемо мати: для суми 11 кількість сприятливих результатів дорівнює 27, а для суми 12 — 25. Причому всі такі результати є рівноможливими.

Цю та інші задачі, пов'язані з азартними іграми, Б. Паскаль обговорював у листуванні з П'єром Ферма (1601–1665). Вважають, що в цьому листуванні було закладено основи теорії ймовірностей.

Цікаво, що помилку, подібну до тієї, якої припустився де Мере, зробив видатний французький математик Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783), розв'язуючи таку задачу: «Монету кидають двічі. Яка ймовірність того, що хоча б раз випаде герб?». Він міркував приблизно так.

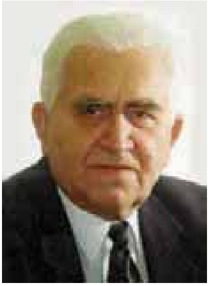
Можливі три результати: герб випав першого разу, герб випав другого разу, герб узагалі не випав. Тоді з трьох імовірних результатів сприятливими є тільки два, тобто ймовірність дорівнює $\frac{2}{3}$.

Становлення і розвиток теорії ймовірностей пов'язані з працями таких видатних учених, як Якоб Бернуллі (1654–1705), П'єр Лаплас (1749–1827), Ріхард Мізес (1883–1953). У XX ст. особливого значення набули праці видатного радянського математика Андрія Миколайовича Колмогорова (1903–1987).

Українська математична наука подарувала світові плеяду видатних фахівців у галузі теорії ймовірностей. Імена Й. І. Гіхмана, Б. В. Гнеденка, А. В. Скорохода, М. Й. Ядренка відомі математикам у всьому світі.

Михайло Йосипович Ядренко значну частину своїх творчих сил віддавав також педагогічній діяльності. Він багато працював з обдарованою молоддю, був фундатором Всеукраїнських олімпіад юних математиків. Михайло Йосипович проводив значну просвітницьку діяльність. Зокрема, за його ініціативою в 1968 році було створено першу в Україні науково-популярну збірку «У світі математики».

А. М. Колмогоров



М. Й. Ядренко

19. Початкові відомості про статистику

Яким тиражем слід випустити підручник з алгебри для 9 класу?

Чи варто певному політику висувати свою кандидатуру на чергових виборах мера?

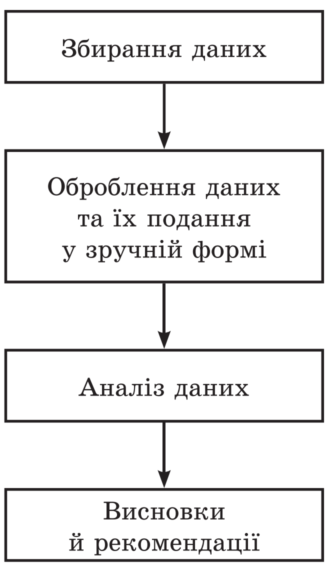
Скільки кілограмів риби і морепродуктів уживає в середньому за рік один житель України?

Чи вигідно для концерту певного артиста орендувати стадіон?

На ці та багато інших запитань допомагає відповідати статистика.

Означення. **Статистика** (від латинського *status* — стан) — **це наука про отримання, оброблення й аналіз кількісних даних, які характеризують масові явища.**

Статистичне дослідження складається з кількох етапів:



Зупинимося окремо на кожному етапі.

Збирання даних

Ви знаєте, що шкідливі звички, неправильне харчування, малорухомий спосіб життя призводять до серцево-судинних захворювань. Такого висновку лікарі дійшли, дослідивши, звісно, не всіх людей планети.

Зрозуміло, що дослідження носило *вибірковий*, але *масовий* характер.

У статистиці сукупність об'єктів, на основі яких проводять дослідження, називають **вибіркою**.

У даному прикладі вибірка складалася з кількох мільйонів людей.

Слід зазначити, що статистичний висновок, заснований лише на чисельності вибірки, не завжди є достовірним. Наприклад, якщо ми, досліджуючи популярність артиста, обмежимося опитуванням людей, які прийшли на його концерт, то отримані висновки не будуть об'єктивними, адже вони прийшли на концерт саме тому, що цей артист їм подобається. Статистики кажуть, що вибірка має бути **репрезентативною** (від французького *représentatif* — показовий).

Так, лікарі, вивчаючи фактори ризику виникнення серцево-судинних захворювань, досліджували людей різного віку, професій, національностей тощо.

Отже, *збирання даних має ґрунтуватися на масовості та репрезентативності вибірки*. Інколи вибірка може збігатися з множиною всіх об'єктів, щодо яких проводиться дослідження. Прикладом такого дослідження є проведення державної підсумкової атестації з математики в 9 класі.

Способи подання даних

Зібрану інформацію (сукупність даних) зручно подавати у вигляді таблиць, графіків, діаграм.

Розглянемо кілька прикладів.

ПРИКЛАД 1

У таблиці подано результати виступів українських школярів на Міжнародних математичних олімпіадах протягом 1993–2008 років.

Рік	Місце проведення	Кількість медалей				Без медалей
		Золоті	Срібні	Бронзові	Разом медалей	
1993	Туреччина	0	2	3	5	1
1994	Гонконг	1	1	2	4	2
1995	Канада	1	1	1	3	3
1996	Індія	1	0	5	6	0
1997	Аргентина	3	3	0	6	0
1998	Тайвань	1	3	2	6	0
1999	Румунія	2	2	1	5	1
2000	Південна Корея	2	2	0	4	2
2001	США	1	5	0	6	0
2002	Велика Британія	1	3	0	4	2
2003	Японія	1	2	3	6	0
2004	Греція	1	5	0	6	0
2005	Мексика	2	2	2	6	0
2006	Словенія	1	2	2	5	1
2007	В’єтнам	3	1	2	6	0
2008	Іспанія	2	2	2	6	0

Примітка. Команда учасників на Міжнародних математичних олімпіадах складається не більше ніж із 6 осіб.

У багатьох випадках дані зручно подавати у вигляді **стовпчастої діаграми**, яку ще називають **гістограмою** (від грецьких *histos* — стовп і *gramma* — написання). Така інформація легко сприймається і добре запам’ятовується.

ПРИКЛАД 2

На рисунку 90 подано вибірку природно-заповідного фонду України.

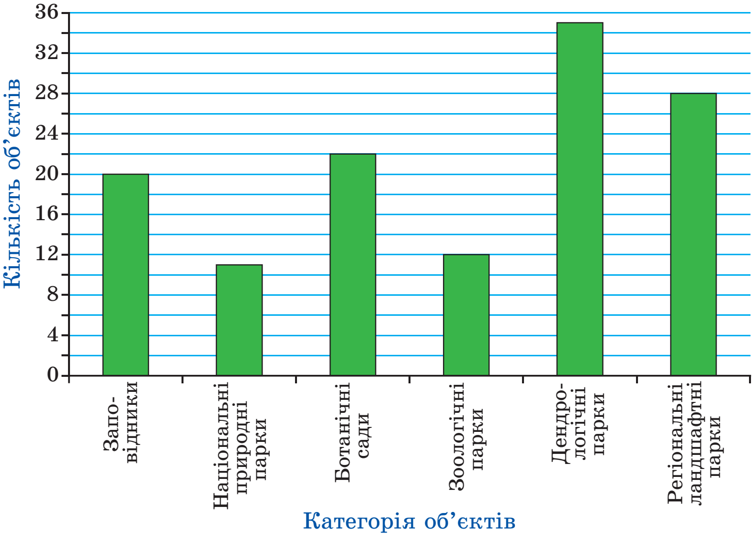


Рис. 90

ПРИКЛАД 3

Інформацію також можна подавати у вигляді графіків. Так, на рисунку 91 зображено графік щорічного відсоткового зростання кількості користувачів Інтернету у світі протягом 1995–2008 років.

Стовпчасті діаграми і графіки зазвичай використовують тоді, коли хочуть продемонструвати, як з плином часу змінюється деяка величина.

ПРИКЛАД 4

На рисунку 92 наведено розподіл медалей, отриманих українськими школярами на міжнародних олімпіадах у 2008 році. Для цього використано **кругову діаграму:** круг зображує загальну кількість медалей, а кожному предмету відповідає певний сектор круга.

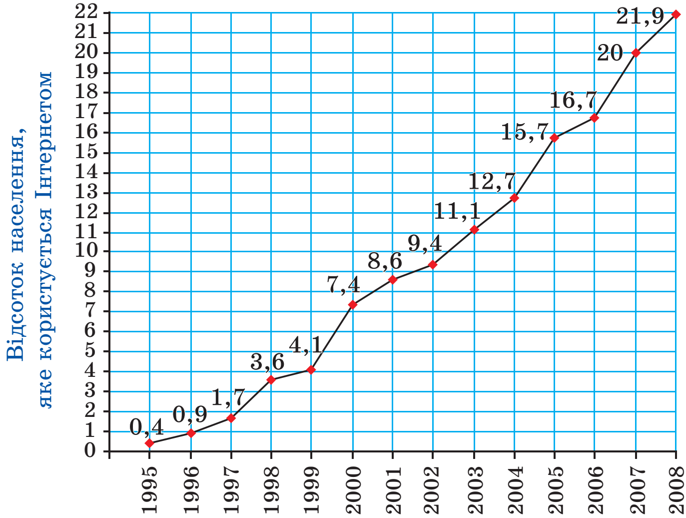


Рис. 91

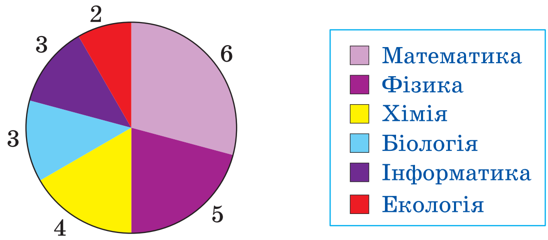


Рис. 92

Аналіз даних, висновки і рекомендації

Статистичні відомості надходять з різних галузей знань і діяльності людини: економіки, медицини, соціології, демографії, сільського господарства, метеорології, спорту і т. д. Проте статистичні методи оброблення (аналізу) даних багато в чому схожі. Ознайомимося з деякими з них.

Звернемося до прикладу 1. Наведена таблиця дозволяє дізнатися, скільки в середньому медалей за рік виборювали школярі України на Міжнародних математичних олімпіадах. Для цього потрібно кількість усіх медалей, отриманих

протягом періоду, що розглядається, поділити на кількість років. Наприклад, за період 1993–2008 роки маємо:

$$\frac{5+4+3+6+6+6+5+4+6+4+6+6+6+5+6+6}{16}=\frac{84}{16}=5,25.$$

Оскільки за рік можна вибороти не більше 6 медалей, то **середнє значення** 5,25 свідчить про те, що команда України гідно виступає на цьому престижному форумі.

У статистичній інформації середні значення отриманих сукупностей даних трапляються досить часто. Наприклад, наведемо таблицю реалізації основних продуктів харчування через мережі великих магазинів у деяких країнах (у кілограмах на людину за рік).

Країна	М'ясо	Риба і морепродукти	Зернові	Овочі	Фрукти
Австралія	118,1	22,1	86,6	93,8	103,5
Данія	111,9	24,3	139,5	102,2	146,5
Іспанія	122,0	27,4	98,9	143,3	105,4
Італія	91,0	26,2	162,6	178,3	131,0
Канада	99,0	25,6	119,3	120,3	119,2
США	123,4	21,1	110,8	123,5	113,5
Україна	33,9	15,6	158,4	116,0	36,4
Франція	98,3	31,2	117,2	142,9	95,5

Таку таблицю можуть використовувати, наприклад, економісти у дослідженнях, висновках і рекомендаціях; власники магазинів і виробники продукції при плануванні своєї діяльності.

Проте середнє значення не завжди точно (адекватно) відображає ситуацію. Наприклад, якщо в країні доходи різних верств населення дуже різняться, то середній дохід на одну людину для більшості жителів може не відображати їх матеріального стану.

Наприклад, у якійсь країні 100 жителів — дуже багаті, а решта 5 мільйонів — дуже бідні. Тоді показник середнього доходу може виявитися не низьким, а отже, неадекватно відображатиме загальну бідність населення.

У подібних випадках для аналізу даних використовують інші характеристики.

За допомогою прикладу 1 складемо таблицю, яка відображає кількість медалей кожного виду.

Золоті медалі	Срібні медалі	Бронзові медалі	Без медалей
23	36	25	12

Таку таблицю називають **частотною**, а числа, записані в другому рядку, — **частотами**.

Частота 36 показує, що українські школярі найчастіше завойовували срібні медалі. Показник «срібні медалі» називають **модою** отриманих даних.

Це слово всім добре знайоме. Ми часто кажемо «увійти в моду», «вийти з моди», «данина моді». У повсякденному житті мода означає сукупність поглядів і уподобань, яким більшість віддає перевагу в певний момент часу.

Саме мода є найважливішою характеристикою тоді, коли отримана сукупність даних не є числовою множиною. Продемонструємо це на такому прикладі.

Одна відома фірма, яка планує постачати джинси в Україну, провела опитування репрезентативної вибірки, яка складалася з 500 осіб. У результаті була отримана така частотна таблиця:

Розмір джинсів	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Частота	52	71	145	126	59	40	7
Відносна частота (у %)	10,4	14,2	29	25,2	11,8	8	1,4

У третьому рядку цієї таблиці записано відношення відповідної частоти до величини вибірки. Це відношення, записане у відсотках, називають **відносною частотою**. Наприклад, для розміру XS маємо: $\frac{52}{500} \cdot 100 = 10,4\ (\%)$.

Мода даної вибірки — це розмір M, і їй відповідає відносна частота $29\ \%$.

Тим самим фірма отримала інформацію, що найбільшу частину обсягів постачання (приблизно $29\ \%$) мають становити джинси розміру M.

Зауважимо, що якби в таблиці дві частоти були б рівні і набували найбільших значень, то модою були б два відповідні розміри.

Вище ми навели приклад, коли середнє значення неточно відображає матеріальний стан людей в країні. Більш повну характеристику можна отримати, якщо середнє значення доповнити результатом такого дослідження.

Утворюють репрезентативну вибірку, яка складається з людей певної країни, і отримують сукупність даних, яка складається з доходів. Далі відповідно до шкали, яка визначає рівень доходів (низький, середній, високий), розбивають отриманий ряд даних на три групи. Складають таблицю, до якої вносять значення частот і відносних частот:

Рівень доходів	Низький	Середній	Високий
Частота	m	n	k
Відносна частота	$p\ \%$	$q\ \%$	$r\ \%$

Мода такої сукупності даних може характеризувати рівень доходів у країні.

Дослідження сукупності даних можна порівняти з роботою лікаря, який ставить діагноз. Залежно від скарг пацієнта або симптомів, що спостерігаються, лікар обирає певну методику пошуку причини хвороби. Зрозуміло, що ця методика визначає точність діагнозу. Так само й у статистиці: залежно від зібраної інформації і способу її отримання застосовують різні методи її обробляння. Ці методи можуть доповнювати один одного, якийсь із них може точніше (адекватніше), ніж інші, відображати конкретну ситуацію. Так, аналізуючи виступи українських школярів на Міжнародних математичних олімпіадах, можна встановити, що статистичні характеристики — середнє значення і мода — вдало узгоджуються. А в прикладі, який визначає ходовий розмір джинсів, найбільш прийнятним є пошук моди.

Чим більшим є арсенал методик оброблення даних, тим об'єктивніший висновок можна отримати.

Ознайомимося ще з однією важливою статистичною характеристикою.

Сім'я прийняла рішення зробити ремонт кухні й цікавиться, скільки коштує покласти один квадратний метр кахляної плитки. Вивчивши прейскурант 11 будівельних фірм, вони отримали таку інформацію (ціни записано в гривнях у порядку зростання):

$$40,\ 40,\ 45,\ 45,\ 50,\ 65,\ 90,\ 100,\ 150,\ 225,\ 250.$$

Сім'я хоче вибрати фірму із середніми цінами.

Середнє значення отриманої сукупності даних дорівнює 100.

Проте отримані дані показують, що ціну 100 грн. скоріше можна віднести до високих, ніж до середніх.

Зазначимо, що число 65 стоїть посередині упорядкованої сукупності даних. Його називають **медіаною** цієї вибірки. У розглядуваній ситуації саме медіана допомагає вибрати фірму із середніми цінами. Справді, у послідовності з 11 чисел є п'ять менших від 65 і п'ять більших за 65.

Тепер розглянемо упорядковану сукупність даних, яка складається з парної кількості чисел, наприклад з восьми:

$$1,\ 4,\ 4,\ 7,\ 8,\ 15,\ 24,\ 24.$$

Тут «серединою» вибірки є одразу два числа: 7 і 8. Вважають, що медіана такої вибірки дорівнює їх середньому арифметичному $\frac{7+8}{2} = 7,5.$

Середнє значення, моду і медіану називають **мірами центральної тенденції** отриманої сукупності даних.

1. Яку науку називають статистикою?
2. З яких етапів складається статистичне дослідження?
3. Що в статистиці називають вибіркою?
4. На чому має ґрунтуватися збирання даних?
5. Які існують способи подання даних?
6. Наведіть приклади застосування статистичної інформації у формі середніх значень.
7. Наведіть приклади, коли статистична інформація у формі середніх значень неточно відображає ситуацію.
8. Опишіть частотну таблицю.
9. Опишіть, що таке мода.
10. Опишіть, як знайти відносну частоту.
11. Яке число називають медіаною упорядкованої вибірки?

ВПРАВИ

619.° Користуючись діаграмою, у якій відображено площі найбільших водосховищ України (рис. 93), установіть:

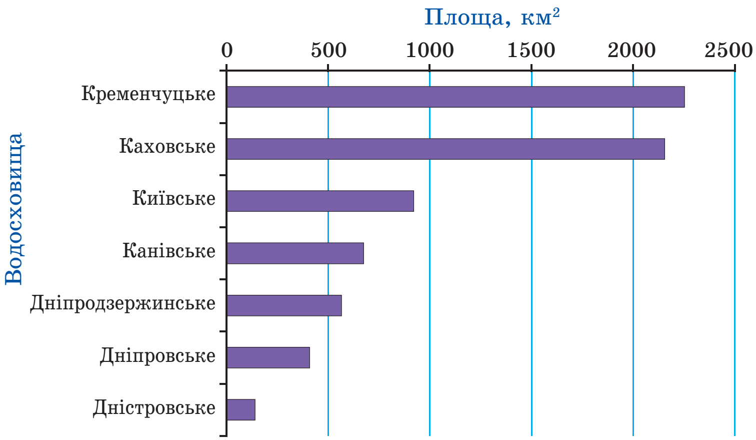


Рис. 93

1) яке з водосховищ має найбільшу площу;
2) яке з водосховищ має найменшу площу;
3) площа якого з водосховищ, Київського чи Канівського, більша.

620.° Користуючись діаграмою, на якій зображено відсотковий вміст солі у воді деяких водойм (рис. 94), установіть:

1) у якій з наведених водойм найсолоніша вода;
2) у якій з наведених водойм найменш солона вода;
3) у якому з морів, Середземному чи Червоному, вода солоніша.

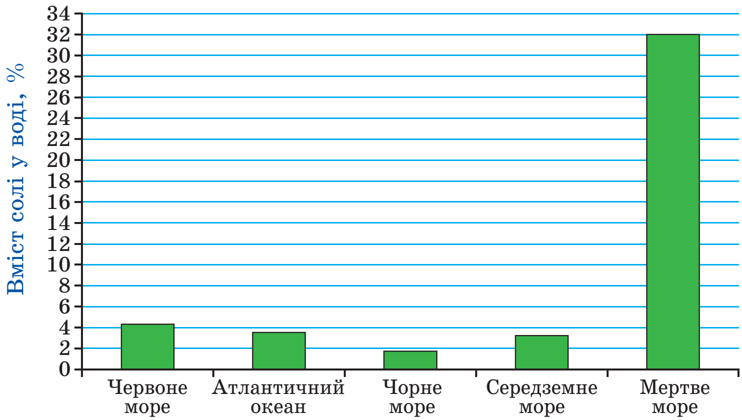


Рис. 94

621.° Учні дев'ятих класів відвідують різні спортивні секції. Використовуючи діаграму (рис. 95), дайте відповіді на запитання.

1) Яку секцію відвідує найбільше дев'ятикласників?
2) Які секції відвідує однакова кількість дев'ятикласників?
3) Яку частину від кількості футболістів становить кількість легкоатлетів?
4) Скільки відсотків становить кількість гандболістів від кількості баскетболістів?

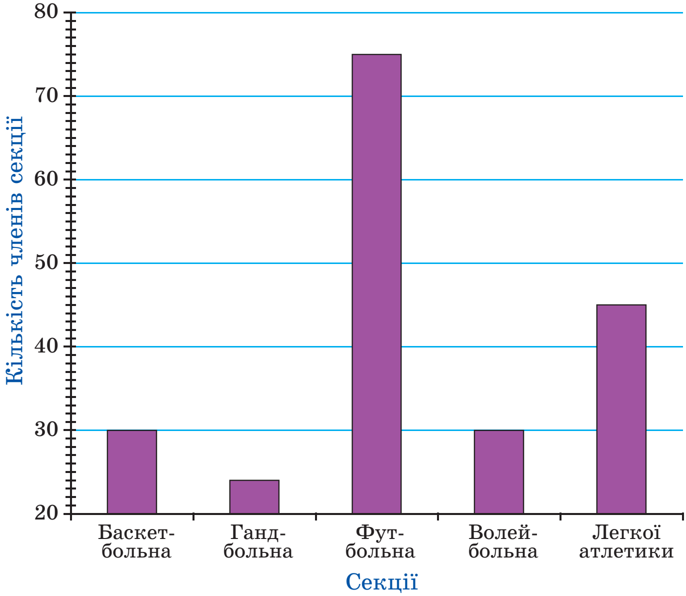


Рис. 95

622.° Користуючись таблицею середніх річних температур повітря в окремих містах України, побудуйте відповідну стовпчасту діаграму.

Місто	Температура, °C	Місто	Температура, °C
Львів	7,5	Черкаси	7,3
Ужгород	9,3	Полтава	6,8
Київ	6,9	Донецьк	7,5
Суми	6,0	Луганськ	9,2
Одеса	9,4	Ялта	13,1

623.° Користуючись таблицею розвитку Київського метрополітену, побудуйте графік зростання довжини його ліній.

Рік	Кількість станцій	Довжина ліній, км	Рік	Кількість станцій	Довжина ліній, км
1960	5	5,2	1987	28	32,8
1965	10	12,7	1992	35	43,3
1971	14	18,2	2000	39	51,7
1976	17	20,5	2004	42	56,6
1981	23	28,2	2008	46	59,7

624.° Користуючись таблицею розвитку Київського метрополітену, побудуйте графік збільшення кількості його станцій.

625.° Визначте, чи є репрезентативною вибірка:

1) щоб дізнатись, як часто жителі міста у вихідні дні бувають на природі, були опитані члени трьох садових кооперативів;
2) з метою виявлення знання дев'ятикласниками напам'ять віршів Лесі Українки випадковим чином було опитано 4 тисячі дев'ятикласників у різних регіонах країни;
3) для визначення відсотка користувачів Інтернету в Україні випадковим чином опитали 500 киян;
4) для з'ясування рейтингу молодіжної телепрограми випадковим чином були опитані 10 тисяч юнаків і дівчат у віці від 15 до 20 років.

626.° Знайдіть міри центральної тенденції сукупності даних:

1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;
2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

627.° Дівчата 9 класу на уроці фізкультури здавали залік зі стрибків у висоту. Учитель записав таку послідовність результатів:

105 см, 65 см, 115 см, 100 см, 105 см, 110 см, 110 см, 115 см, 110 см, 100 см, 115 см.

Знайдіть середнє значення і медіану отриманих даних.

628.• Класний керівник 9 класу веде облік відвідування учнями занять. Наприкінці тижня його записи мали такий вигляд:

День тижня	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця
Кількість відсутніх	3	2	5	4	8

1) Знайдіть, скільки учнів були відсутніми у середньому в день протягом цього тижня.
2) Знайдіть моду отриманих даних.

629.• У 9 класі, у якому навчається 23 учні, провели опитування: скільки приблизно годин на день витрачає дев'ятикласник на виконання домашніх завдань. Відповіді учнів подано у вигляді гістограми (рис. 96).

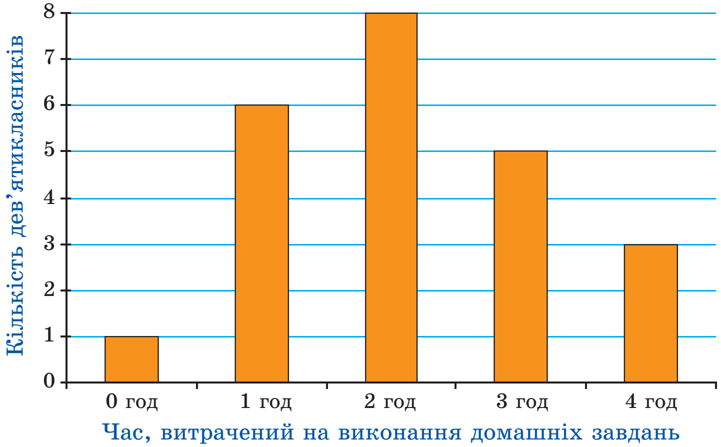


Рис. 96

1) Заповніть частотну таблицю:

Час, витрачений на виконання домашніх завдань, год	0	1	2	3	4
Частота					
Відносна частота					

2) Скільки часу на день у середньому витрачає учень цього класу на виконання домашнього завдання? (Знайдіть середнє значення ряду даних.)

3) Скільки часу витрачає більшість дев'ятикласників цього класу? (Знайдіть моду ряду даних.)

630.• На рисунку 97 зображено стовпчасту діаграму результатів письмової роботи з алгебри у трьох дев'ятих класах.

1) Заповніть частотну таблицю:

Кількість балів	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Частота												
Відносна частота												

2) Знайдіть середній бал, отриманий учнями за цю письмову роботу.

3) Знайдіть моду отриманих даних.

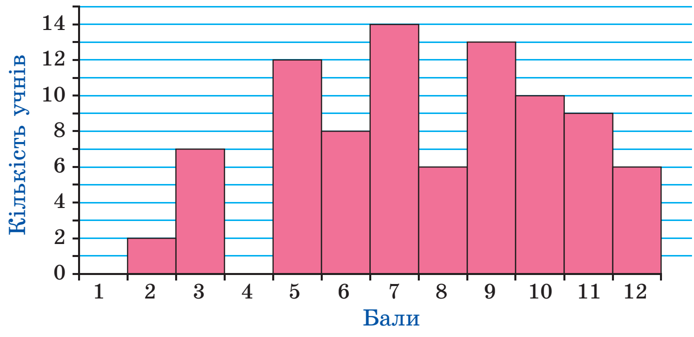


Рис. 97

631.• За результатами останньої контрольної роботи з алгебри, яка була проведена у вашому класі, заповніть частотну таблицю, наведену в задачі 630.

1) Знайдіть середній бал, отриманий учнями за цю контрольну роботу.
2) Знайдіть моду отриманих даних.

632.• Учнів однієї херсонської школи опитали: скільки разів у житті вони літали на літаку. Отримані дані наведено в таблиці:

Кількість здійснених польотів	0	1	2	3	4	5
Кількість учнів	530	92	46	30	8	4
Відносна частота (%)						

1) Заповніть третій рядок таблиці.
2) Подайте отримані дані у вигляді стовпчастої діаграми.
3) Знайдіть моду і середнє значення отриманих даних.
4) Поясніть, чи можна вважати вибірку, що розглядається, репрезентативною для висновків щодо всіх школярів міста Херсона.

633.• Випишіть усі ваші оцінки з алгебри, отримані протягом року. Знайдіть середнє значення, моду і медіану отриманого ряду даних.

634.• Директор фірми отримує 20 000 грн. на місяць, два його заступники по 10 000 грн., а решта 17 робітників фірми — по 1500 грн. на місяць. Знайдіть середнє значення, моду, медіану заробітних плат у цій фірмі.

635.• Прочитайте один з найвідоміших віршів Т. Г. Шевченка:

Садок вишневий коло хати,
Хрущі над вишнями гудуть,
Плугатарі з плугами йдуть,
Співають ідучи дівчата,
А матері вечерять ждуть.

Сем'я вечеря коло хати,
Вечірня зіронька встає.
Дочка вечерять подає,
А мати хоче научати,
Так соловейко не дає.

Поклала мати коло хати
Маленьких діточок своїх;
Сама заснула коло їх.
Затихло все, тільки дівчата
Та соловейко не затих.[1]

Для букв «а», «е», «і», «ї», «н», «о», «р», «у», «ф», «я» складіть частотну таблицю їх наявності у поданому вірші. Визначте моду отриманих даних.

636.° Протягом травня 2007 року ранкова температура повітря в місті Києві становила:

Дата	Температура, °C	Дата	Температура, °C	Дата	Температура, °C
01.05.2007	5	11.05.2007	20	21.05.2007	30
02.05.2007	4	12.05.2007	21	22.05.2007	29
03.05.2007	6	13.05.2007	19	23.05.2007	31
04.05.2007	11	14.05.2007	20	24.05.2007	29
05.05.2007	19	15.05.2007	26	25.05.2007	28
06.05.2007	15	16.05.2007	25	26.05.2007	29
07.05.2007	16	17.05.2007	25	27.05.2007	30
08.05.2007	19	18.05.2007	26	28.05.2007	27
09.05.2007	14	19.05.2007	28	29.05.2007	26
10.05.2007	10	20.05.2007	28	30.05.2007	26
				31.05.2007	25

Знайдіть міри центральної тенденції отриманих даних.

[1] Т. Г. Шевченко. Твори у 12 т. / Ін-т літератури ім. Т. Г. Шевченка Академії наук України.— К.: Наук. думка, 2003.— Т. 2.— С. 17.

637.$^{\bullet}$ Побудуйте ряд: 1) з п'яти чисел; 2) із шести чисел, у якого:

а) середнє значення дорівнює медіані;

б) середнє значення більше за медіану.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

638. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a}{a+1}\right):\frac{3a+1}{a^2+a}.$$

639. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{9x^2-1}{3x^2-4x+1}$; 2) $\dfrac{2x^2-5x+3}{4x^2-12x+9}$.

640. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x-y=13, \\ x^2-y^2=23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-y^2=23, \\ 2x^2+y^2=41. \end{cases}$

641. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{3x-2x^2}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+7}}$.

642. Розв'яжіть нерівність $(x^2+1)(x^2-x-2)<0$.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 4

1. Катер проплив по озеру на 5 км більше, ніж по річці проти течії, витративши на шлях по річці на 15 хв більше, ніж по озеру. Власна швидкість катера дорівнює 10 км/год, а швидкість течії річки — 2 км/год.

Нехай відстань, яку проплив катер по річці, дорівнює x км. Яке з наведених рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові?

А) $\dfrac{x+5}{10}-\dfrac{x}{8}=15$; В) $\dfrac{x+5}{10}-\dfrac{x}{12}=15$;

Б) $\dfrac{x+5}{10}-\dfrac{x}{8}=\dfrac{1}{4}$; Г) $\dfrac{x+5}{10}-\dfrac{x}{12}=\dfrac{1}{4}$.

2. Перший робітник працював 3 год, а другий — 4 год. Разом вони виготовили 44 деталі, причому перший робітник виготовляв за 1 год на 2 деталі менше, ніж другий робітник за 2 год.

Нехай перший робітник за 1 год виготовляв x деталей, а другий — y деталей. Яка з наведених систем рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові?

А) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ В) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ x - 2y = 2; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ y - 2x = 2; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ 2y - x = 2. \end{cases}$

3. Два трактористи, працюючи разом, можуть зорати поле за 2 год 40 хв. Якщо перший тракторист пропрацює 1 год, а потім його змінить другий тракторист, який пропрацює 2 год, то зораною буде половина поля.

Нехай перший тракторист може самостійно зорати поле за x год, а другий — за y год. Яка з наступних систем рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові?

А) $\begin{cases} x + y = 2{,}4, \\ x + 2y = 0{,}5; \end{cases}$ В) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2}; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2}; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2\frac{2}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2}. \end{cases}$

4. Морська вода містить 6 % солі. Скільки кілограмів води треба взяти, щоб отримати 48 кг солі?

А) 80 кг; Б) 60 кг; В) 800 кг; Г) 600 кг.

5. Французьку мову вивчають 12 учнів класу. Скільки відсотків учнів класу вивчають французьку мову, якщо всього в класі 30 учнів?

А) 24 %; Б) 30 %; В) 40 %; Г) 48 %.

6. Вкладник поклав у банк 4000 грн. під 10 % річних. Скільки грошей буде на його рахунку через два роки?

А) 4840 грн.; Б) 4800 грн.; В) 4080 грн.; Г) 4400 грн.

7. Ціна деякого товару після двох послідовних підвищень зросла на 50 %, причому першого разу ціну було підвищено на 20 %. На скільки відсотків відбулося друге підвищення?

А) на 30 %; Б) на 25 %; В) на 20 %; Г) на 15 %.

8. Шафа коштувала 1500 грн. Спочатку її ціну знизили, а потім підвищили на одне й те саме число відсотків. Після цього шафа стала коштувати 1440 грн. На скільки відсотків змінювали щоразу ціну шафи?

А) на 20 %; Б) на 15 %; В) на 10 %; Г) на 18 %.

9. Сплав масою 800 г містить 15 % міді. Скільки міді треба додати до цього сплаву, щоб мідь у ньому складала 20 %?

А) 50 г; Б) 40 г; В) 30 г; Г) 5 г.

10. Після того як змішали 50-відсотковий і 20-відсотковий розчини кислоти, отримали 600 г 25-відсоткового розчину. Скільки було грамів 50-відсоткового розчину?

А) 500 г; Б) 300 г; В) 250 г; Г) 100 г.

11. З натуральних чисел від 1 до 18 включно учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 18?

А) $\frac{1}{4}$; Б) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{1}{6}$; Г) $\frac{1}{18}$.

12. У лотереї розігрувалось 12 комп'ютерів, 18 фотоапаратів і 120 калькуляторів. Усього було випущено 15 000 лотерейних білетів. Яка ймовірність, придбавши один білет, не виграти жодного призу?

А) $\frac{1}{10}$; Б) $\frac{1}{100}$; В) $\frac{9}{10}$; Г) $\frac{99}{100}$.

13. З двоцифрових парних чисел навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число буде кратним числу 7?

А) $\frac{1}{9}$; Б) $\frac{7}{45}$; В) $\frac{1}{14}$; Г) $\frac{2}{15}$.

14. У коробці лежать 12 білих і 16 червоних кульок. Яка ймовірність того, що обрана навмання кулька виявиться білою?

А) $\frac{3}{4}$; Б) $\frac{3}{7}$; В) $\frac{1}{12}$; Г) $\frac{4}{7}$.

15. У коробці лежать олівці, з них 24 олівці — сині, 8 олівців — зелені, а решта — жовті. Скільки олівців лежить у коробці, якщо ймовірність того, що вибраний навмання олівець буде жовтим, становить $\frac{1}{3}$?

А) 48 олівців; В) 45 олівців;
Б) 54 олівці; Г) 42 олівці.

16. Знайдіть середнє значення вибірки, яка складається з чисел 1,6; 1,8; 2,5; 2,2; 0,9.

А) 2,5; Б) 2,2; В) 1,8; Г) 2,6.

17. Укажіть медіану вибірки 2, 5, 6, 8, 9, 11.

А) 6; Б) 7; В) 8; Г) 9.

18. Учнів дев'ятого класу опитали: скільки часу вони витрачають на виконання домашнього завдання з алгебри. Було отримано такі дані:

Час виконання завдання	15 хв	20 хв	30 хв	45 хв	60 хв
Кількість учнів	3	7	6	10	4

Чому дорівнює мода отриманих даних?

А) 30 хв; Б) 45 хв; В) 10 учнів; Г) 6 учнів.

ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - прикладна задача;
  - частота випадкової події;
  - достовірна і неможлива події;
  - рівноймовірні події;
  - середнє значення;
  - частотна таблиця;
  - гістограма;
  - мода;
  - медіана;
- ви вивчили:
  - формулу складних відсотків;
  - формулу для обчислення частоти випадкової події;
- ви навчилися:
  - застосовувати формулу складних відсотків;
  - знаходити міри центральної тенденції сукупності даних;
  - обчислювати частоту випадкової події;
- ви вдосконалили свої навички:
  - розв’язування прикладних задач;
  - виконання відсоткових розрахунків;
  - знаходження ймовірностей випадкових подій.

Відповіді та вказівки

10. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) ні. **18.** Значення дробу збільшиться. **19.** Значення дробу зменшиться або не зміниться. **22.** 1) Ні; 2) так. **26.** Так. **28.** 1) *Вказівка*. $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$. **47.** 3) Порівняти неможливо. **53.** 4) Якщо $c > 0$, то $c^2 > -4c$; якщо $-4 < c < 0$, то $c^2 < -4c$; якщо $c = 0$, то правильну нерівність отримати не можна. **55.** 1. **56.** 24. **70.** 3) Ні; 4) ні; 5) ні; 6) так; 8) так; 10) так; 11) ні; 12) так; 13) ні; 14) ні. **85.** 1) $\sqrt{10} + \sqrt{6} > \sqrt{11} + \sqrt{5}$; 2) $2 + \sqrt{11} < \sqrt{5} + \sqrt{10}$; 3) $\sqrt{15} - \sqrt{5} > \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{21} + \sqrt{20} > 9$. **86.** 1) $\sqrt{6} + \sqrt{3} > \sqrt{7} + \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26} - \sqrt{2} < \sqrt{14}$. **90.** 400 %. **106.** 4) Коренів немає; 5) x — будь-яке число; 6) −6. **107.** 6 км. **132.** 3) $(-\infty; -5]$; 4) $(-\infty; 1)$; 5) $[7; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; \frac{6}{11}\right]$; 7) $(-\infty; 7{,}5]$; 8) $(1; +\infty)$; 9) $(-\infty; +\infty)$; 10) розв'язків немає; 11) $(-\infty; +\infty)$; 12) $(-\infty; 0)$. **133.** 1) $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$; 2) $[-6; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; -6]$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(-3{,}5; +\infty)$. **134.** 1) −8; 2) −1. **135.** 1) −6; 2) −3. **136.** 5 розв'язків. **137.** 8 розв'язків. **140.** 1) $a < -\frac{9}{4}$; 2) $a \leqslant 1{,}6$. **141.** 1) $b < 3$; 2) $b < -\frac{1}{8}$. **142.** 12 км. **143.** Таких чисел не існує. **144.** 18 кульок. **145.** 44 вишні. **146.** 21. **147.** 28, 30, 32. **148.** 25, 30, 35. **149.** 1) При $-4 \leqslant x < 2$ і $x > 2$; 2) при $x < -4$ і $-4 < x \leqslant 3$; 3) при $-3 < x < -2$, $-2 < x < 2$ і $x > 2$; 4) при $-1 < x < 1$ і $x > 1$. **150.** 1) При $x < -3$ і $-3 < x \leqslant 9$; 2) при $7 < x < 8$ і $x > 8$. **151.** 1) 9; 2) −3; 3) 13; 2,2; 4) коренів немає. **152.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) −2; 12. **155.** 3) При $a > -1$ і $a \neq 1$. **156.** 2) При $m < 7$ і $m \neq 0$. **157.** 1) При $a > -1$ і $a \neq 0$; 2) при

$a < \frac{9}{16}$ і $a \neq -1$; 3) при $a < \frac{19}{5}$ і $a \neq 3$. **158.** При $a < -\frac{1}{12}$. **159.** 1) 3; 2) −1. **160.** 1) −7; 2) −4. **161.** 1) Якщо $a > 0$, то $x > 0$; якщо $a < 0$, то $x < 0$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; 2) якщо $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$; якщо $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; 3) якщо $a > 0$, то $x \geqslant 1$; якщо $a < 0$, то $x \leqslant 1$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; 4) якщо $a < 2$, то $x < -2$; якщо $a > 2$, то $x > -2$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає; 5) якщо $a > 2$, то $x > a + 2$; якщо $a < 2$, то $x < a + 2$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає; 6) якщо $a > -3$, то $x \leqslant a - 3$; якщо $a < -3$, то $x \geqslant a - 3$; якщо $a = -3$, то x — будь-яке число. **162.** 1) Якщо $a \neq 0$, то $x \leqslant 0$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; 2) якщо $a > -1$, то $x < \frac{2-a}{a+1}$; якщо $a < -1$, то $x > \frac{2-a}{a+1}$; якщо $a = -1$, то x — будь-яке число; 3) якщо $a > -4$, то $x > \frac{1}{a+4}$; якщо $a < -4$, то $x < \frac{1}{a+4}$; якщо $a = -4$, то розв'язків немає. **166.** 15 год, 10 год. **189.** 1) $\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty; -4{,}2)$; 3) $[-2; 3]$; 4) $[-0{,}8; +\infty)$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $(-\infty; -4]$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **190.** 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$; 2) $[-10; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **191.** 1) −3; −2; −1; 0; 2) 7; 8; 9; 10; 11. **192.** 1) 4 розв'язки; 2) 6 розв'язків. **193.** 1) $[2{,}5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{5}{3}; 3\right)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; 4)$. **194.** 1) $0 < x \leqslant 8$; 2) $x > 5$. **195.** 1) $-0{,}5 < x < 6{,}5$; 2) $14 \leqslant x \leqslant 17$. **196.** 1) $-1{,}5 \leqslant x < 2{,}5$; 2) $0 \leqslant x < \frac{1}{3}$. **197.** 2) $(1{,}5; 7)$; 3) $(-\infty; -2)$. **198.** 1) $\varnothing$; 2) $(1; 3)$. **199.** 3 см, 5 см або 4 см, 4 см. **200.** 1) $-4 \leqslant x \leqslant 3$; 2) $x < -1$ або $x > 3{,}5$; 3) $x < 1$ або $x > 8$; 4) $-2 < x < 9$; 5) $-2 < x \leqslant 0{,}5$; 6) $x \leqslant -0{,}8$ або $x > 6$. **201.** 1) $-3 < x < 2$; 2) $x < 4$ або $x > 8$; 3) $x < -9$ або $x \geqslant 1{,}2$; 4) $-\frac{1}{4} \leqslant x < 10$. **202.** 1) $-1{,}6 \leqslant x \leqslant 5{,}6$;

2) $-4 < x < 1$; 3) $x < -12$ або $x > 6$; 4) $x \leqslant 2$ або $x \geqslant \frac{8}{3}$; 5) $x \geqslant 1$; 6) $x > -\frac{11}{7}$. **203.** 1) $x \leqslant 3{,}6$ або $x \geqslant 8{,}4$; 2) $-2 \leqslant x \leqslant -1{,}2$; 3) $x < \frac{1}{2}$; 4) $x \leqslant 2$. **204.** 1) При $a > 3$; 2) при $a \leqslant 3$. **205.** 1) При $a \leqslant 4$; 2) при $a > 1$. **206.** 1) При $a \leqslant -1$; 2) при $a = 1$. **207.** Якщо $a < 2$, то $x \leqslant a$; якщо $a \geqslant 2$, то $x < 2$. **208.** Якщо $a < -3$, то $a < x < -3$; якщо $a \geqslant -3$, то розв'язків немає. **209.** При $10 < a \leqslant 11$. **210.** При $1 < b \leqslant 2$. **211.** При $8 \leqslant a < 9$. **212.** При $-6 \leqslant b < -5$. **213.** При $a < 3$. **214.** При $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 3$. **215.** При $a < -7$ або $a > 8$. **216.** 1) -1; 2) -2; 4. **217.** 1) $2\sqrt{10} - \sqrt{6}$; 2) $0{,}5\sqrt{2b}$; 3) $-4\sqrt{6}$. **239.** 2) Усі числа, крім 7 і -7; 4) усі числа, не менші від 4, крім числа 6. **249.** 60 км/год. **266.** $a < \frac{1}{8}$. **267.** $a > 9$. **268.** 2. **269.** $m < -2$. **275.** $a = 1$, $a = 2$ і $a = 1{,}5$. **276.** Якщо $a < -2$, то найбільше значення $f_{\text{найб.}} = f(a) = a^2$, найменше значення $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$; якщо $a = -2$, то $f_{\text{найб.}} = f(-2) = f(2) = 4$, $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$; якщо $-2 < a \leqslant 0$, то $f_{\text{найб.}} = f(2) = 4$, $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$; якщо $0 < a < 2$, то $f_{\text{найб.}} = f(2) = 4$, $f_{\text{найм.}} = f(a) = a^2$. **279.** 10 год, 40 год. **280.** 20 %. **300.** 3 т. **318.** *а*) $y = x^2 + 3$; *б*) $y = -2x^2 - 1$. **319.** *а*) $y = 2x^2 - 6$; *б*) $y = 4 - x^2$. **320.** *а*) $y = (x - 2)^2$; *б*) $y = -3(x + 3)^2$. **321.** *а*) $y = \frac{1}{2}(x + 4)^2$; *б*) $y = -2(x - 1)^2$. **322.** *а*) $y = (x + 2)^2 - 4$; *б*) $y = -(x - 2)^2 + 5$; *в*) $y = \frac{1}{3}(x - 3)^2 + 1$. **323.** *а*) $y = (x - 4)^2 - 5$; *б*) $y = -2(x + 6)^2 + 7$. **326.** Обидва твердження є правильними. **329.** 3) *Вказівка*. $y = \frac{-2x + 2 - 2}{x - 1} = -2 - \frac{2}{x - 1}$. **333.** $\frac{3}{4}$. **346.** -1; 1; 3. **347.** 4. **348.** 1) 2 корені; 2) 1 корінь. **349.** 3 корені. **350.** 1) $(-1; -1)$, $(9; 9)$; 2) $(2; 23)$, $(8; 17)$. **351.** $(3; 15)$, $(-1; 11)$. **357.** 1) -25; 2) -13; 3) -22. **358.** 1) 26; 2) 17; 3) -10. **359.** $p = 1$, $q = 4$. **360.** $a = -\frac{7}{6}$, $b = \frac{7}{6}$. **361.** $a = 3$, $b = 5$.

364. $b = -16$. **365.** $b = 18$. **366.** $a = 1$ або $a = 4$. **367.** $a \geqslant \frac{9}{2}$. **368.** $a < -16$. **369.** $c = -8$. **370.** $c = 14$. **371.** *а*) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; *б*) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. **373.** $p = -4$, $q = 9$. **374.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 6$. **375.** *а*) -4; *б*) 4. **376.** -1. **377.** 1) 25. *Вказівка*. Нехай одне з чисел дорівнює x, тоді друге число дорівнює $10 - x$. Розгляньте функцію $f(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$; 2) 50. **378.** 1600 м^2. **383.** 1) $a > -4$; 2) $a = -4$; 3) $a < -4$. **385.** $a > \frac{13}{8}$. **386.** $a \geqslant -0{,}5$. **387.** $a = -\frac{1}{2}$. **391.** 1) $8a\sqrt{a}$; 2) 56; 3) $6\sqrt{2} - 5$. **392.** 4 км/год. **393.** 20 хв, 30 хв. **403.** 1) $(-2; 1)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$; 3) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-\infty; -21) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; 6) $\left[-\frac{13}{3}; 1\right]$. **404.** 1) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-5; -3)$; 3) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty; -10) \cup (1; +\infty)$. **405.** 1) При $-\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$; 2) при $x \leqslant -0{,}2$ або $x \geqslant 2{,}4$. **406.** 1) При $-\frac{5}{2} < x < \frac{9}{2}$; 2) при $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$. **407.** При $-5 < x < 4$. **408.** При $1 < x < 2{,}5$. **409.** 1) $-5, -4, -3, -2, -1, 0$; 2) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$; 3) 0; 4) $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **410.** 1) 11; 2) 4. **411.** 1) -6; 2) -2. **412.** 1) 1; 2) -3. **417.** 1) $-4 < a < 4$; 2) $-8 < a < 12$; 3) $\frac{3}{8} < a < \frac{3}{2}$. **418.** 1) $b < -\frac{1}{16}$ або $b > 1$; 2) $b < 4$ або $b > 10$. **419.** 1) $(0; 3]$; 2) $[-4; -0{,}5] \cup [6; +\infty)$; 3) $[-1; 0) \cup (6; 10]$; 4) $(-5; -3]$. **420.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 3\right)$; 2) $(-2; 0] \cup [5; 9)$. **421.** 1) $-4, -3, -2, -1, 0, 1$; 2) $-3, -2, 1, 2$. **422.** 1) $(6; +\infty)$; 2) $(-3; 5) \cup (5; 6)$; 3) $(-\infty; -9) \cup (-9; -2] \cup [7; 9) \cup (9; +\infty)$; 4) $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$. **423.** 1) $[-2; 2)$; 2) $(-5; 6) \cup (6; 7)$. **424.** 1) $(-11; 11)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$. **425.** 1) $(-\infty; -1] \cup [-0{,}4; 0{,}4] \cup [1; +\infty)$; 2) $[-2; 2]$. **426.** 1) $(-5; 0) \cup (0; 2)$;

2) $[0;\ 2]$; **3)** $(-1;\ 2) \cup (2;\ 9)$; **4)** $(-\infty;\ -5) \cup (-5;\ -3) \cup (5;\ +\infty)$; **5)** $(-\infty;\ -8] \cup [1;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$; **6)** $[-11;\ -3) \cup (-3;\ 1]$. **427.** **1)** $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$; **2)** $(4;\ +\infty)$; **3)** $(-\infty;\ -3) \cup \cup (-3;\ -2) \cup (3;\ +\infty)$; **4)** $\left[-\frac{1}{3};\ 1\right) \cup (1;\ 3]$. **428.** **1)** $-4 < x < -3$ або $x > 5$; **2)** $-4 \leqslant x \leqslant -3$ або $x \geq 5$; **3)** $x < -4$; **4)** $x \leqslant -4$, або $x = -3$, або $x = 5$. **429.** **1)** $3 < x < 7$; **2)** $3 \leqslant x \leqslant 7$ або $x = -2$; **3)** $-2 < x < 3$; **4)** $-2 \leqslant x \leqslant 3$ або $x = 7$. **430.** **1)** При $a > 4$; **2)** при $-1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{5}$; **3)** при $0 < a < \frac{1}{2}$; **4)** при $a > \frac{5}{3}$. **431.** **1)** При $a \geqslant 9$; **2)** при $3 \leqslant a \leqslant 7$; **3)** при $a \geqslant 1$. **432.** **1)** Якщо $a < 1$, то $a < x < 1$ або $x > 4$; якщо $1 \leqslant a \leqslant 4$, то $x > 4$; якщо $a > 4$, то $x > a$; **2)** якщо $a \leqslant -\frac{1}{4}$, то розв'язків немає; якщо $-\frac{1}{4} < a \leqslant 1$, то $-\frac{1}{4} \leqslant x < a$; якщо $a > 1$, то $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$. **433.** **1)** Якщо $a \leqslant -8$, то $-8 < x < 9$; якщо $-8 < a < 9$, то $a < x < 9$; якщо $a \geq 9$, то розв'язків немає; **2)** якщо $a < 1$, то $x < a$; якщо $1 \leqslant a \leqslant 8$, то $x < 1$; якщо $a > 8$, то $x < 1$ або $8 < x < a$. **436.** 3 дні. **437.** 40 л. **446.** **1)** $(5;\ 8)$, $(-3;\ 0)$; **2)** $(4;\ 1)$, $(1;4)$; **3)** $(-1;1)$, $(-3;-1)$; **4)** $(6;1)$, $(-6;-2)$; **5)** $(5;3)$, $(-1{,}5;-10)$; **6)** $(2;\ -2)$. **447.** **1)** $(-4;\ -7)$, $(7;\ 4)$; **2)** $(2;\ 4)$, $(-5;\ -3)$; **3)** $(-1;\ 4)$, $(-0{,}5;\ 2{,}5)$; **4)** $(4;\ 2)$, $(20;\ -14)$. **448.** **1)** 2 розв'язки; **2)** 3 розв'язки; **3)** 1 розв'язок; **4)** 2 розв'язки; **5)** розв'язків немає; **6)** 3 розв'язки. **449.** **1)** 2 розв'язки; **2)** розв'язків немає; **3)** 2 розв'язки; **4)** 4 розв'язки. **450.** **1)** $(4;\ 3)$; **2)** $(0;\ 0)$, $(-2{,}4;\ 4{,}8)$; **3)** $(4;\ -3)$, $(17;\ 10)$; **4)** $(9;\ -4)$, $(4;\ 1)$; **5)** $(2;\ 2{,}5)$, $(-4{,}4;\ -2{,}3)$; **6)** $(4;\ -1)$, $(0;\ 3)$. **451.** **1)** $(6;\ 9)$, $(-9;\ -6)$; **2)** $(1;\ 0)$, $(-0{,}5;\ 0{,}75)$; **3)** $(2;\ 4)$, $(3;\ 3)$; **4)** $(1;\ 1)$, $\left(\frac{17}{3};\ \frac{38}{3}\right)$. **452.** **1)** $\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$, $(-2;\ -7)$; **2)** $(2;\ 2)$, $(-1;\ -4)$; **3)** $(1;\ 0)$, $(5;\ -4)$; **4)** $(2;\ 3)$, $\left(\frac{2}{3};\ \frac{43}{9}\right)$. **453.** $(-4;\ -1)$. **454.** **2)** $(0{,}5;\ 5{,}5)$; **3)** $(-4;\ 52)$, $(3;\ 3)$. **455.** **1)** $(3;\ 4)$,

(4; 6); 2) (−2; 1), $\left(-6; \frac{9}{5}\right)$. **456.** 1) (2; 1), $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 2) (1; 5), $\left(\frac{10}{3}; -2\right)$. **457.** 1) (−5; 1), (1; −5), (4; 1), (1; 4); 2) (5; −2), $\left(\frac{6}{7}; \frac{15}{7}\right)$; 3) (3; 1), (−3; −1), $\left(2\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$; 4) (2; 3); 5) (−3; 3), (3; −3); 6) (2; 1), $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$; 7) (1; 0), $\left(-\frac{19}{21}; -\frac{8}{21}\right)$.

458. 1) (6; 3), $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (2; −1), $\left(\frac{21}{53}; \frac{15}{53}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; 4) (9; 3), (−9; −3); 5) (−2; 1), $\left(\frac{29}{28}; -\frac{3}{14}\right)$; 6) (−3; 4), (−5; 2), (1; −4), (3; −2).

59. 1) (1; 0), (0; 1); 2) (3; −1), (1; −3); 3) (4; 3), (−4; −3); 4) (−3; 2), (3; −2). **460.** 1) (4; 2), (−2; −4); 2) (1; 3), (−1; −3).

461. 1) (1; 2), $\left(7\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$; 2) (−7; −5), (4; 6); 3) (−4; −3), (−4; 2), (3; −3), (3; 2); 4) (3; 1), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **462.** 1) (4; 1), (1; 4); 2) (1; −2), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$; 3) (6; 5), (−4; −5); 4) (5; 4), (−5; −4), (5; −4), (−5; 4).

463. 1) $\left(7; \frac{1}{6}\right)$, $\left(1; \frac{7}{6}\right)$; 2) (−2; 4), (2; −4), $\left(\frac{94}{7}; -\frac{8}{7}\right)$, $\left(-\frac{94}{7}; \frac{8}{7}\right)$; 3) (4; 3), (3; 4), (−4; −3), (−3; −4); 4) (1; −1), $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$, (−1; 1), $\left(\frac{1}{3}; -3\right)$. **464.** 1) (2; 1), (−5; −0,4); 2) (4; 0); 3) (1; 3), (3; 1), (−3; −1), (−1; −3); 4) (−2; 2), $\left(-10; \frac{2}{5}\right)$, (2; −2), $\left(10; -\frac{2}{5}\right)$.

465. 1) $a = 3\sqrt{2}$ або $a = -3\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2}$; 3) $a < -3\sqrt{2}$ або $a > 3\sqrt{2}$. **466.** 1) $k = 2$ або $k = -2$; 2) $k < -2$ або $k > 2$; 3) $-2 < k < 2$. **467.** 1) Якщо $a > 0$, то 2 розв'язки; якщо $a = 0$, то один розв'язок; якщо $a < 0$, то розв'язків немає; 2) якщо $-4 < a < 4$, то розв'язків немає; якщо $a = -4$ або $a = 4$, то 2 розв'язки; якщо $a < -4$ або $a > 4$, то

4 розв'язки; 3) якщо $a > -\frac{1}{4}$, то 2 розв'язки; якщо $a = -\frac{1}{4}$, то один розв'язок; якщо $a < -\frac{1}{4}$, то розв'язків немає; 4) якщо $a < -\frac{17}{4}$ або $a > 2$, то розв'язків немає; якщо $a = -\frac{17}{4}$ або $-2 < a < 2$, то 2 розв'язки; якщо $-\frac{17}{4} < a < -2$, то 4 розв'язки; якщо $a = -2$, то 3 розв'язки; якщо $a = 2$, то один розв'язок. **468.** 1) Якщо $a < 1$, то розв'язків немає; якщо $a = 1$, то 2 розв'язки; якщо $a > 1$, то 4 розв'язки; 2) якщо $a > 3\sqrt{2}$ або $a < -3$, то розв'язків немає; якщо $a = 3\sqrt{2}$ або $-3 < a < 3$, то 2 розв'язки; якщо $3 < a < 3\sqrt{2}$, то 4 розв'язки; якщо $a = 3$, то 3 розв'язки; якщо $a = -3$, то один розв'язок; 3) якщо $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$, то розв'язків немає; якщо $a = -2\sqrt{2}$ або $a = 2\sqrt{2}$, то 2 розв'язки; якщо $a < -2\sqrt{2}$ або $a > 2\sqrt{2}$, то 4 розв'язки. **470.** 5. **471.** $\left[0; \frac{6}{17}\right]$. **472.** 40. **475.** $7\frac{2}{17}$ динарія, $9\frac{14}{17}$ динарія. **476.** 72 км/год, 10 км/год. **477.** 5 і 7. **478.** 24 і 8 або −8 і −24. **479.** 9 і 12. **480.** 6 і 4. **481.** 80 м, 30 м. **482.** 7 см, 9 см. **483.** 36. **484.** 62. **485.** 84. **486.** 12 і 24. **487.** 6 і 9. **488.** 5 см, 12 см. **489.** 15 см, 17 см. **490.** 15 см і 12 см або 18 см і 10 см. **491.** 15 см, 6 см. **492.** 18 см, 12 см. **493.** 80 км/год, 60 км/год. **494.** 60 км/год, 30 км/год. **495.** 80 км/год, 60 км/год або 120 км/год, 80 км/год. **496.** 500 м/хв, 400 м/хв. **497.** 12 днів, 24 дні або 40 днів, 10 днів. **498.** 16 год, 48 год. **499.** 10 год, 15 год. **500.** 60 Ом, 90 Ом. **501.** 4 Ом, 6 Ом або 3,6 Ом, 7,2 Ом. **502.** 2 км/год. **503.** 27 км/год, 3 км/год. **504.** 24 км/год, 16 км/год. **505.** 12 км/год. **506.** 2 км/год, 12 км/год. **507.** 8,4 г/см^3, 6,4 г/см^3. **508.** 15 Н, 20 Н. **509.** 60 м, 80 м. **510.** 1) $-\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{2-b}$. **512.** 1) $(-\infty; 2]$; 2) $(0,16; +\infty)$. **513.** 3.

514. $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}4$. **515.** 1) $(-\infty; -2{,}5]$; 2) $\left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$. **516.** 13 і 6 або 67 і 66. **517.** 9) 20 кг, 40 кг; 10) 30 м. **518.** 7) 1200 грн., 800 грн. **519.** 1) 5 см; 2) 15 ц, 20 ц; 3) 12 км/год, 4 км/год; 4) 10 год, 15 год або 12 год, 12 год; 5) не більше ніж 15 машин. **520.** 1) 40 км/год, 30 км/год; 2) 55 км/год, 75 км/год; 3) не більше ніж 6 промахів. **521.** 1) 150 м $\times$ 150 м; 2) через 1 год 30 хв. **523.** 1) 30 км; 2) 51 кінь і 9 биків, або 30 коней і 40 биків, або 9 коней і 71 бик. **524.** 6 горобців, 20 горлиць, 14 голубів або 15 горобців, 10 горлиць, 15 голубів. **526.** 1) $(-\infty; -3{,}5)$; 2) $(-\infty; -6) \cup \left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **533.** На 12,5 %. **535.** 6298,56 грн. **536.** 20 736 одиниць. **537.** 2400 грн. **538.** 600 грн. **539.** 5 %. **540.** На 15 %. **541.** 7,2 %. **542.** 20 %. **543.** 300 дерев. **544.** 1100 м. **545.** 400 сторінок. **546.** 300 кг. **547.** 60 кг. **548.** 40 пістолів або 60 пістолів. **549.** 10 грн. **550.** 150 %. **551.** 120 %. **552.** 2 год. **553.** 50 %. **554.** 200 г, 600 г. **555.** 12 л, 6 л. **556.** На 10 % першого разу і на 20 % другого. **557.** 20 %. **558.** 6 %. **559.** 10 %. **560.** 6 кг, 18 кг або 9 кг, 21 кг. **561.** 3 кг. **562.** 20 т або $2\frac{2}{3}$ т. **563.** 33 кг. *Вказівка*. Нехай було отримано x кг соляної кислоти. Тоді математичною моделлю задачі є рівняння $\frac{11}{x} - \frac{2}{x-9} = \frac{1}{4}$, коренями якого є числа 33 і 12. Але корінь 12 не задовольняє умову задачі, виходячи з хімічних властивостей соляної кислоти. **564.** 6 л. **566.** При $c > 0{,}1$. **567.** 1) (3; 1), (1; 3); 2) (5; 2), (−2; −5). **581.** $\left(-2; \frac{19}{4}\right)$; 2) $\left(-\infty; 5\frac{1}{4}\right]$. **583.** 10 при $a = 1$ і $b = 3$. **607.** 1) 3 кульки; 2) 8 кульок. **608.** $\frac{2}{3}$. **609.** $\frac{2}{3}$. **610.** 8 олівців. **611.** 19 олівців. **613.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **614.** 1) $\frac{1}{8}$;

2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$. *Вказівка*. Кинути монету три рази — те саме, що незалежно одна від одної кинути три монети. Якщо пронумерувати монети, то маємо 8 рівноможливих результатів, які показано на рисунку 111.

Г	Г	Г
Г	Г	Ц
Г	Ц	Г
Г	Ц	Ц
Ц	Г	Г
Ц	Г	Ц
Ц	Ц	Г
Ц	Ц	Ц

Рис. 111

615. 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$. *Вказівка*. Кинути кубик двічі — це те саме, що незалежно одне від одного кинути два кубики. Далі скористайтеся рисунком 88 до п. 18. **616.** 2. **638.** $\frac{a}{a-1}$. **640.** 1) (12; 11), $\left(\frac{16}{3}; -\frac{7}{3}\right)$; 2) (4; 3), (−4; 3), (4; −3), (−4; −3). **653.** 8 членів. **654.** 13. **655.** 1, 2, 3, 4, 5. **656.** 8. **657.** 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$. **658.** 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. **660.** 2) [−6; 1). **662.** 32 деталі. **675.** 1) Так, $n = 16$; 2) ні. **676.** 15. **679.** 23. **680.** −6. **682.** 18. **683.** 16. **684.** −0,6. **685.** −6; −4,5; −3; −1,5; 0; 1,5; 3. **686.** 2,2; 0,4; −1,4; −3,2. **687.** 1) $a_1 = 5$, $d = 2{,}5$; 2) $a_1 = -6$, $d = 4$ або $a_1 = 15$, $d = \frac{1}{2}$. **688.** 1) $a_1 = -2$, $d = 3$; 2) $a_1 = 20$, $d = -8$ або $a_1 = 51{,}5$, $d = -11{,}5$. **689.** Якщо перший член прогресії дорівнює її різниці або різниця прогресії дорівнює нулю. **692.** 60°. **693.** 1) Так, $a_1 = -3$, $d = -6$; 2) ні; 3) так, $a_1 = -2{,}8$, $d = -2{,}8$; 4) ні. **694.** 1) Так, $a_1 = 13$, $d = 7$; 2) так, $a_1 = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$; 3) ні. **700.** При $x = -1$ маємо: $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$, при $x = 8$ маємо: $a_1 = 60$, $a_2 = 43$, $a_3 = 26$. **701.** $y = 3$; $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$. **702.** $y = 1$; $a_1 = -1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 17$, $a_4 = 26$. **703.** $x = -1$; $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. **707.** 1) (7; −1), (11; −5); 2) (2; 2), (2; −2), (−2; 2), (−2; −2). **709.** −4. **710.** 1) $120\sqrt{2}$; 2) $150 - 30\sqrt{2}$. **712.** 24 деталі. **722.** 1) 204; 2) 570. **723.** −310. **724.** 156 ударів. **725.** 1400. **726.** 710. **727.** 1188. **728.** 8, 14, 20. **729.** −17. **730.** $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. **731.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) n^2. **732.** $n(n + 1)$. **733.** 3. **734.** −67,2. **735.** 63. **736.** 5880. **737.** 2112. **738.** 1632. **739.** 61 376. **740.** 70 336. **741.** 0,3. **742.** 10. **743.** 20. **744.** 16. **745.** Так, 19, 23, 27, 31, 35. **746.** Ні. **747.** 10 с. **748.** 42 сторінки. **749.** −1976. **750.** 348. **751.** $a_1 = 14$, $d = -3$. **752.** −10. **753.** 10. **754.** 690. **755.** 250. **756.** 1) 12; 2) 26. **757.** 1) 10; 2) 69. **758.** $a_1 = 1$, $d = 2$. **760.** $a_1 = -2$, $d = 2$. *Вказівка.* $a_n = S_n - S_{n-1}$. **761.** 2610. **765.** 1) $\frac{a - \sqrt{bc}}{\sqrt{abc}}$; 2) $\frac{4\sqrt{d} - 28}{3\sqrt{d} + 18}$. **766.** 24 км/год. **785.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ або $-\frac{3}{5}$. **786.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001. **787.** 6. **788.** 9. **789.** 30 і 150. **790.** 1; 2; 4; 8. **791.** Так, $b_1 = \frac{5}{4}$, $q = 4$. **792.** $x_1 = 49$, $q = 7$. **793.** 1) 15 або −15; 2) 6 або −6; 3) $2\sqrt{5}$ або $-2\sqrt{5}$. **794.** 2. **795.** $\sqrt{2}$ або $-\sqrt{2}$. **796.** 216. **797.** 243. **799.** $P_n = \frac{3a}{2^{n-1}}$. **801.** 3) Послідовність є геометричною прогресією, якщо $q \neq -1$.

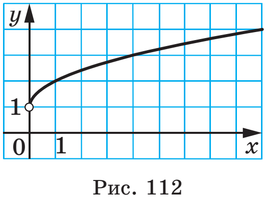


Рис. 112

803. 80, 40, 20, 10, 5 або 80, −40, 20, −10, 5. **804.** 6, 18, 54, 162, 486 або 6, −18, 54, −162, 486. **805.** 1) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$ або $b_1 = -2\sqrt{3}$, $q = -\sqrt{3}$; 2) $b_1 = 162$, $q = \frac{1}{3}$; 3) $b_1 = 7$, $q = -2$ або $b_1 = \frac{14}{9}$, $q = -3$. **806.** 1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$; 2) $b_1 = -1$, $q = 3$. **807.** При $x = 1$ маємо 3, 6, 12; при $x = -14$ маємо −27, −9, −3. **808.** При $x = 2$ маємо 8, 4, 2; при $x = -7$ маємо −1, −5, −25. **810.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **811.** 3, 7, 11. **812.** 8, 10, 12 або 17, 10, 3. **813.** 5, 15, 45 або 45, 15, 5. **814.** 2, 6, 18 або 18, 6, 2. **819.** За 2 дні. **824.** 1) 1456; 2) $155\left(5+\sqrt{5}\right)$. **825.** 762. **826.** 1210. **827.** −68,2. **828.** 27. **829.** −7 або 6. **830.** 16 ран. **831.** 5. **832.** $(2^{72} - 1)$ бактерій. **833.** 72. **834.** $\frac{9}{8}$. **835.** 4368. **836.** −12 285. **839.** 5. **840.** 1) $\left[-\frac{18}{7}; 13\right]$; 2) $[-1; 4)$. **843.** 50 деталей, 40 деталей. **844.** 1) $b - 5a$; 2) $x + 2y$. **851.** 1) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$; 2) $\frac{9\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$. **852.** 1) $\frac{3\left(\sqrt{6}+2\right)}{2}$; 2) $3\sqrt{2}+4$. **853.** 35. **854.** $-\frac{1}{12}$. **855.** 1) $16+8\sqrt{2}$ або $16-8\sqrt{2}$; 2) 27. **856.** 1) 243; 2) 312,5. **858.** $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ або $b_1 = 3$, $q = -\frac{1}{2}$. **859.** $b_1 = 192$, $q = \frac{1}{4}$. **860.** $27+9\sqrt{3}$ або $27-9\sqrt{3}$. **861.** $\frac{25\left(5+\sqrt{5}\right)}{2}$ або $\frac{25\left(\sqrt{5}-5\right)}{2}$. **862.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) −3. **863.** $-\frac{1}{4}$ або $\frac{1}{4}$. **864.** $\frac{2}{5}$. **865.** $-\frac{1}{3}$ або $\frac{1}{3}$. **866.** $2a^2$. **867.** 1) $6R\sqrt{3}$; 2) $R^2\sqrt{3}$; 3) $4\pi R$; 4) $\frac{4}{3}\pi R^2$. **868.** 1) $4a\left(2+\sqrt{2}\right)$; 2) $2a^2$; 3) $\pi a\left(2+\sqrt{2}\right)$; 4) $\frac{\pi a^2}{2}$. **870.** Рисунок 112. **892.** 6. **895.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$; 3) $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$; 4) $\varnothing$; 5) R. **896.** 2. **897.** 0. **899.** 1) $(1; +\infty)$;

2) [2; 3); 3) [−2; 16]; 4) (−4; 7]. **900.** 1) −9; 2) −2. **902.** 4. **904.** 1) $a < 4$; 2) $a < 2$; 3) $a \leqslant -3$; 4) $a \geqslant 1$. **905.** 1) $a \geqslant 6$; 2) $a \geqslant 5$; 3) $a > -8$; 4) $a \leqslant 0$. **907.** $a < -1,5$. **908.** $a = 0$. **916.** 1) $b = 6$, $c = 9$; 2) $b = 0$, $c = 4$; 3) $b = -3$, $c = -10$. **919.** 3) $-2\sqrt{2}$ або $2\sqrt{2}$. **921.** $a = \frac{1}{3}$, $b = -4$, $c = 10$. **922.** $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$. **923.** 1) 1; 2) −8. **925.** 1. **931.** 1) $a \neq 4$; 2) $a < \frac{1}{2}$, або $\frac{1}{2} < a < 1$, або $a > 13$; 3) $a < -1$, або $-\frac{1}{5} < a < 0$, або $a > 0$. **932.** 1) $a > \frac{1}{20}$; 2) $a < -5$; 3) $a \leqslant -1$; 4) $a > \frac{5}{3}$. **933.** 1) (1; 4), (−2; 7); 2) (3; −4), (4; −3); 3) (4; 0), (0; −4); 4) (0; −5), (3; 4), (−3; 4). **934.** 1) (−2; 1), (−0,4; 1,4); 2) (−2; 4), $\left(\frac{14}{9}; -\frac{20}{3}\right)$; 3) (3; 5), (10; 1,5); 4) (4; −3), (2; −6); 5) (−5; 2); 6) (3; 2), (−2; −3); 7) (3; −2), (0; 1); 8) (1; −2), (3; 0); 9) (8; 4), (4; 8); 10) (1; 5), (−5; −1). **935.** 1) (2; 1), (−2; −1), (1; 2), (−1; −2); 2) (5; 1), (1; 5), (2; 3), (3; 2); 3) (2; 1), (1; 2); 4) (6; 4), $\left(\frac{4}{5}; -\frac{6}{5}\right)$; 5) (4; 1), $\left(-\frac{1}{4}; 5\frac{1}{4}\right)$, (−4; −1), $\left(\frac{1}{4}; -5\frac{1}{4}\right)$; 6) (3; −2), (−3; 2); 7) (10; 5), (−5; −10); 8) (5; 3), (5; −3), (−5; 3), (−5; −3); 9) (3; 4), (4; 3), (−3; −4), (−4; −3); 10) (1; 2), $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, (−1; −2), $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **936.** 1) (3; 4), (4,5; 8,5); 2) (3; 1), (−1,5; −2); 3) (3; 2), (2; 3), (−3; −2), (−2; −3). **937.** 1) $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 2\sqrt{3}$ або $a = -2\sqrt{3}$. **938.** 8 см, 15 см. **939.** 9 см, 40 см. **940.** 54. **941.** 80 км/год, 60 км/год. **942.** 6 км/год, 4 км/год. **943.** 2 год, 6 год. **944.** 36 год, 12 год. **945.** 0,5 км/год. **946.** 15 км/год. **947.** 72 км/год, 48 км/год. **948.** 500 %. **949.** 220 %. **950.** 75 %. **951.** $33\frac{1}{3}$ %. **952.** 50 %. **9.53.** 3149 грн. 28 коп. **954.** 6000 грн. **955.** 20% або 80 %. **956.** 20 %. **957.** 80 %. **958.** 10 %. **959.** 1: 3.

960. 20 кг. **961.** 2 кг. **973.** $\frac{11}{12}$. **975.** З тридцять другого по шістдесят четвертий. **978.** 2,4 см; 3,2 см. **979.** 6) Так, $2d$; 7) так, $4d$. **980.** 0; 4; 8. **983.** 1) $\frac{n(a-n)}{a}$; 2) $\frac{n(na-b)}{a+b}$. **984.** 11. **985.** 1) $a_1 = -7$, $d = 3$; 2) $a_1 = 5$, $d = -2$ або $a_1 = 3$, $d = -2$; 3) $a_1 = d = 3$ або $a_1 = -33$, $d = 15$; 4) $a_1 = -0{,}7$, $d = 0{,}3$; 5) $a_1 = 0$, $d = 1{,}5$. **986.** 10. **987.** 255. **988.** $\frac{2a^2}{3}$. **989.** 1160. **990.** 2610. *Вказівка*. Шукана сума $S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4$, де S_1 — сума всіх двоцифрових чисел, S_2 — сума двоцифрових чисел, які кратні 3, S_3 — сума двоцифрових чисел, які кратні 5, S_4 — сума двоцифрових чисел, які кратні 15. **991.** Так, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. **993.** 2. **994.** $2\frac{2}{3}$; 4; 6; 9. **995.** 3) Так, q^2; 4) так, q; 5) ні; 6) так, $\frac{1}{q}$. **998.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповіді до завдань у тестовій формі «Перевір себе»

Номер завдання	Номер задачі																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	Б	Г	Б	В	Б	А	В	В	В	А	Б	Г	Г	Г	Г	В	Б	Б
2	Г	В	Б	В	А	Г	Г	В	В	В	В	Г	Б	Г	Б	В	В	А
3	В	Б	А	В	Г	А	А	В	В	А	Г	Б	Г	В	Г	А	Г	Б
4	Б	Г	В	В	В	А	Б	А	А	Г	Б	Г	Б	Б	А	В	Б	Б
5	Б	В	Б	Г	Г	В	А	Б	Б	В	Б	А	Г	А	В	Б	А	В

Предметний покажчик

Зміст

§ 3. Елементи прикладної математики

§ 4. Числові послідовності

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Мерзляк Аркадій Григорович, автор більш ніж 40 підручників і посібників з математики, відмінник освіти України, вчитель-методист, працює вчителем математики в Києво-Печерському ліцеї № 171 «Лідер»

Полонський Віталій Борисович, автор більш ніж 50 підручників, книг і статей з математики, Заслужений вчитель України, кавалер ордену «За заслуги» III ступеня, працює вчителем математики в Києво-Печерському ліцеї № 171 «Лідер»

Якір Михайло Семенович, автор більш ніж 50 підручників, книг і статей з математики, Заслужений вчитель України, кавалер орденів «За заслуги» III и II ступенів, працює вчителем математики в Києво-Печерському ліцеї № 171 «Лідер»

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *О. О. Удалов*
Коректор *Т. Є. Цента*

Підписано до друку 10.06.2009. Формат 60×90/16.
Гарнітура шкільна. Папір офсетний. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 20,00. Обл.-вид. арк. 15,38.
Тираж 118 533 прим. Замовлення № ???.

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-83-93, 719-17-26
Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем»,
Тел. (057) 758-15-80

Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.
М52 Алгебра: Підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Х.: Гімназія, 2009. — 320 с.: ил.

ISBN 978-966-474-045-3.

УДК 373:512
ББК 22.141.я721