По заказу Министерства просвещения РСФСР

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

(Диафильм по математике для 9—10 классов)

К СВЕДЕНИЮ УЧИТЕЛЯ.

Графики различных функций нужно уметь строить и сознательно читать. С этой целью графики, данные в диафильме, постройте самостоятельно, а затем исследуйте их функции.

Рекомендуем следующую схему исследования:

1. Выяснение ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ функции.
2. ОБЛАСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ функции.

3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ функции. ПРЕДЕЛ функции в точке.
4. ЧЁТНОСТЬ или НЕЧЁТНОСТЬ функции.
5. КОРНИ (нули) функции.
6. Промежутки ВОЗРАСТАНИЯ и УБЫВАНИЯ функции. Точки МАКСИМУМА и МИНИМУМА функции.
7. Промежутки ЗНАКОПОСТОЯНСТВА функции.
8. ПЕРИОДИЧНОСТЬ функции.

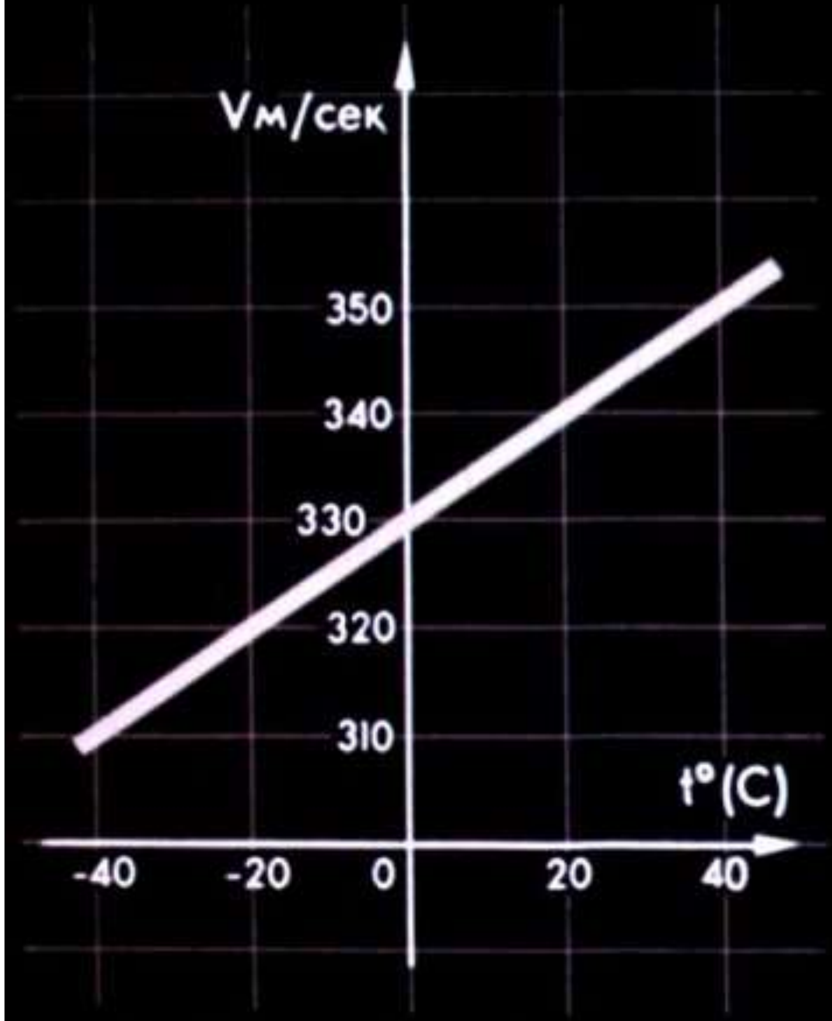


График зависимости скорости звука (V м/сек) в воздухе от температуры (t°C).

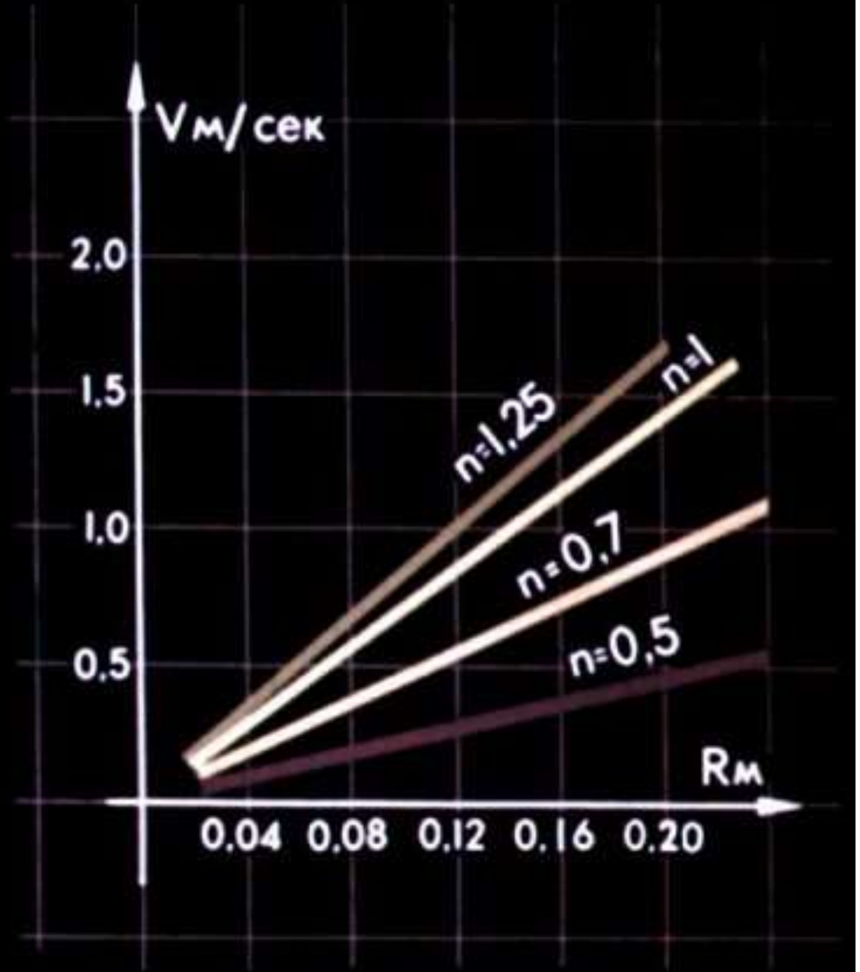


График зависимости линейной скорости (Vм/сек) точек диска от радиуса (Rм); (n—число оборотов).

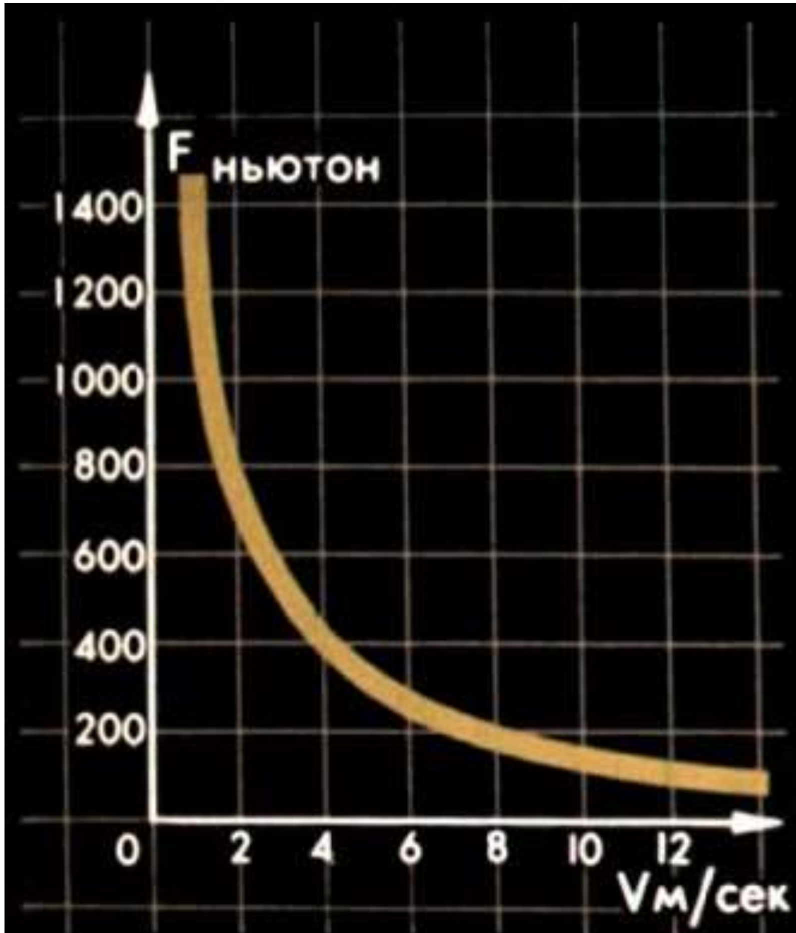


График зависимости между силой тяги (F в ньютонах) и скоростью (Vм/сек) при постоянной мощности (N)

$$F = \frac{N}{V}.$$

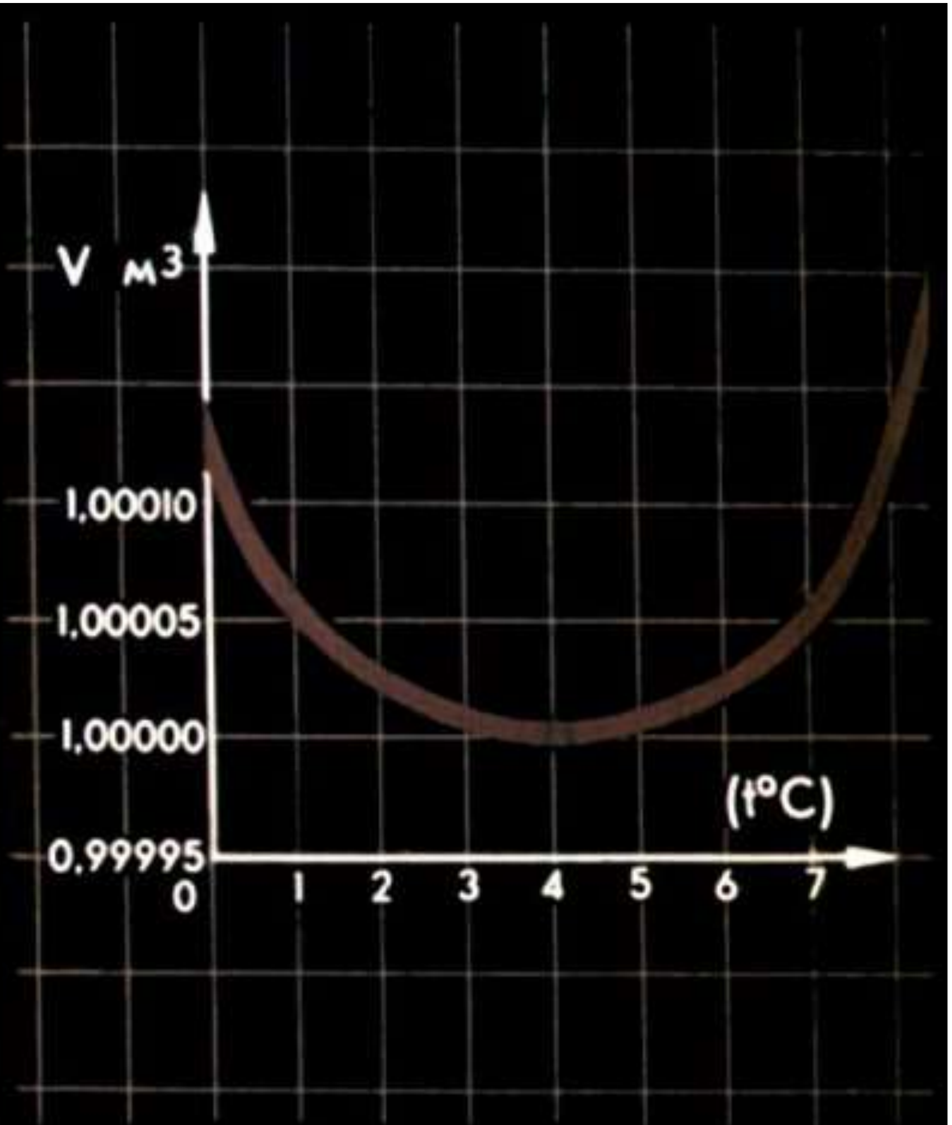


График зависимости объёма воды от температуры.

Большое распространение имеют функции со знаком модуля (знак абсолютной величины). По определению модуля следует:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Во многих кадрах мы встретим функции со знаком модуля.

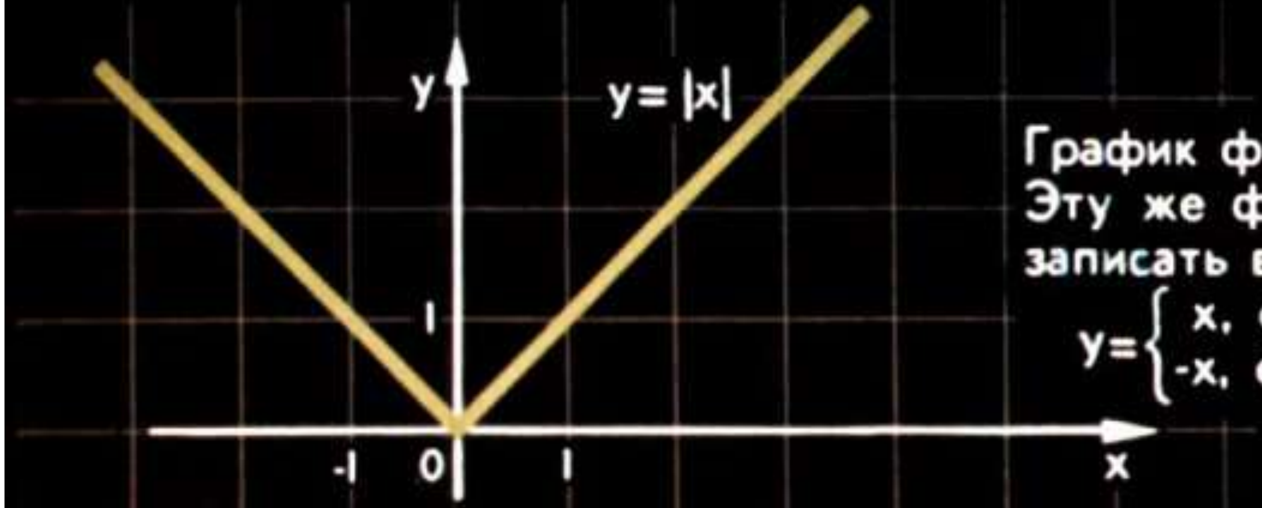


График функции $y = |x|$.
Эту же функцию можно записать в таком виде:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

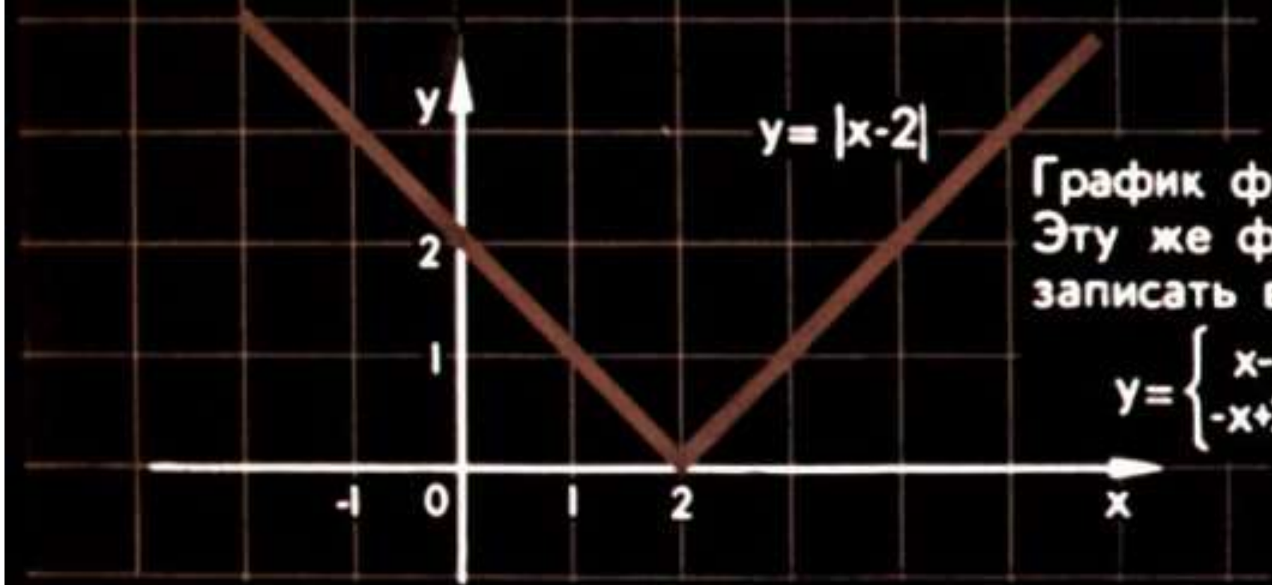


График функции $y = |x-2|$.
Эту же функцию можно записать в таком виде:

$$y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{если } x < 2. \end{cases}$$

График функции $y = |x-2|$ можно получить также параллельным переносом графика функции $y = |x|$ на 2 единицы вправо вдоль оси OX.

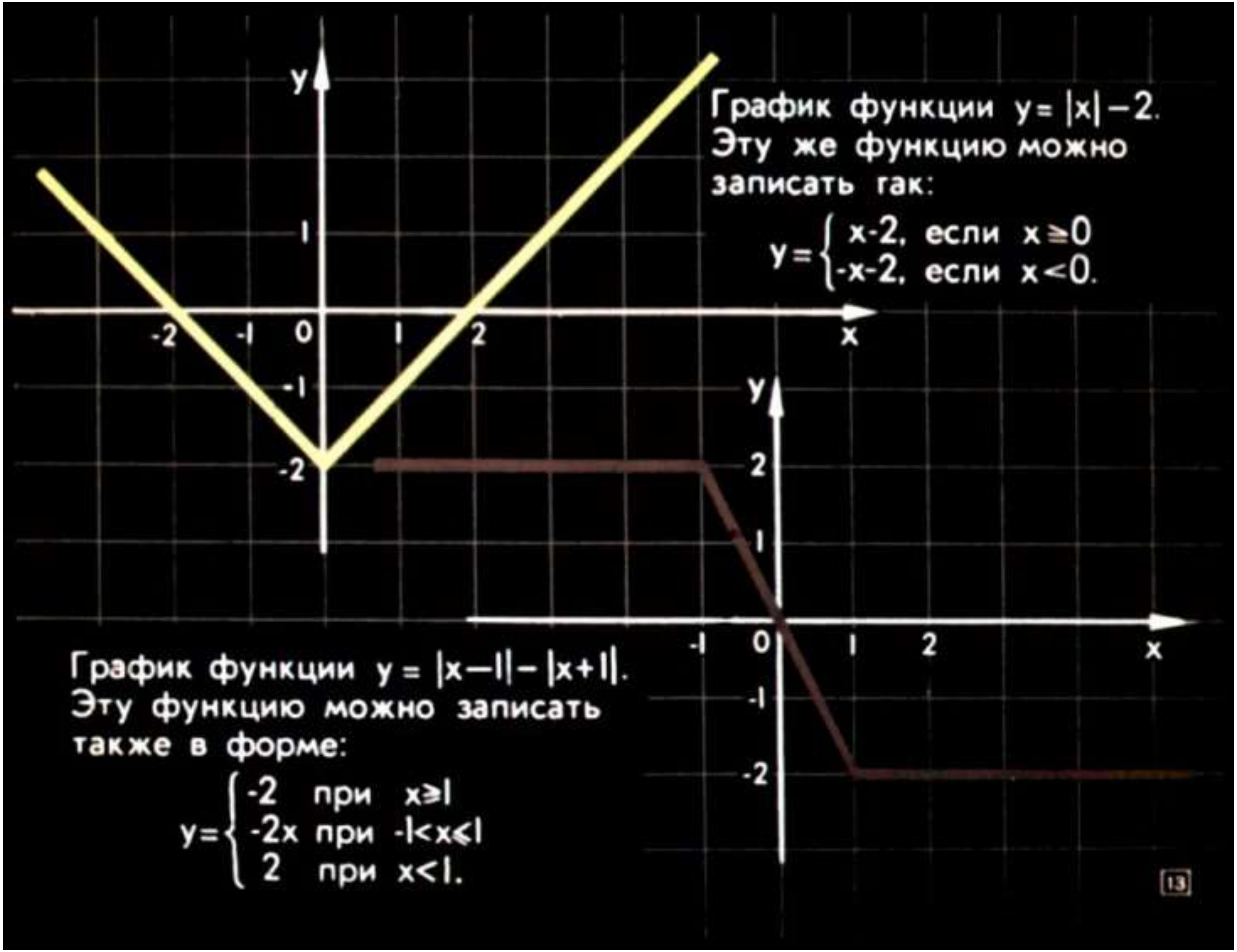
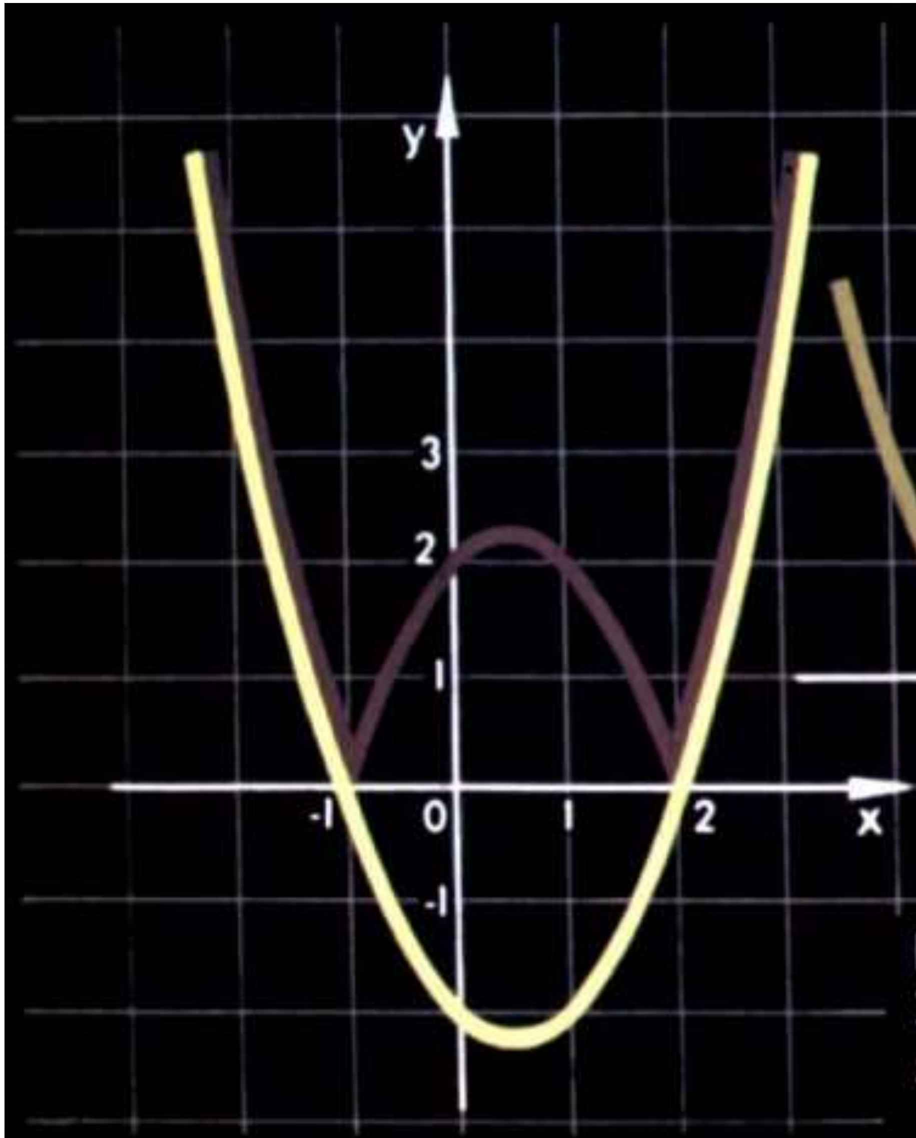


График функции y= |x|−2.
Эту же функцию можно
записать гак:
y = { x-2, если x ≥ 0; -x-2, если x < 0.
График функции y = |x−1|−|x+1|.
Эту функцию можно записать
также в форме:
y = { -2 при x≥1; -2x при -1<x≤1; 2 при x<1.
y
x
0
13



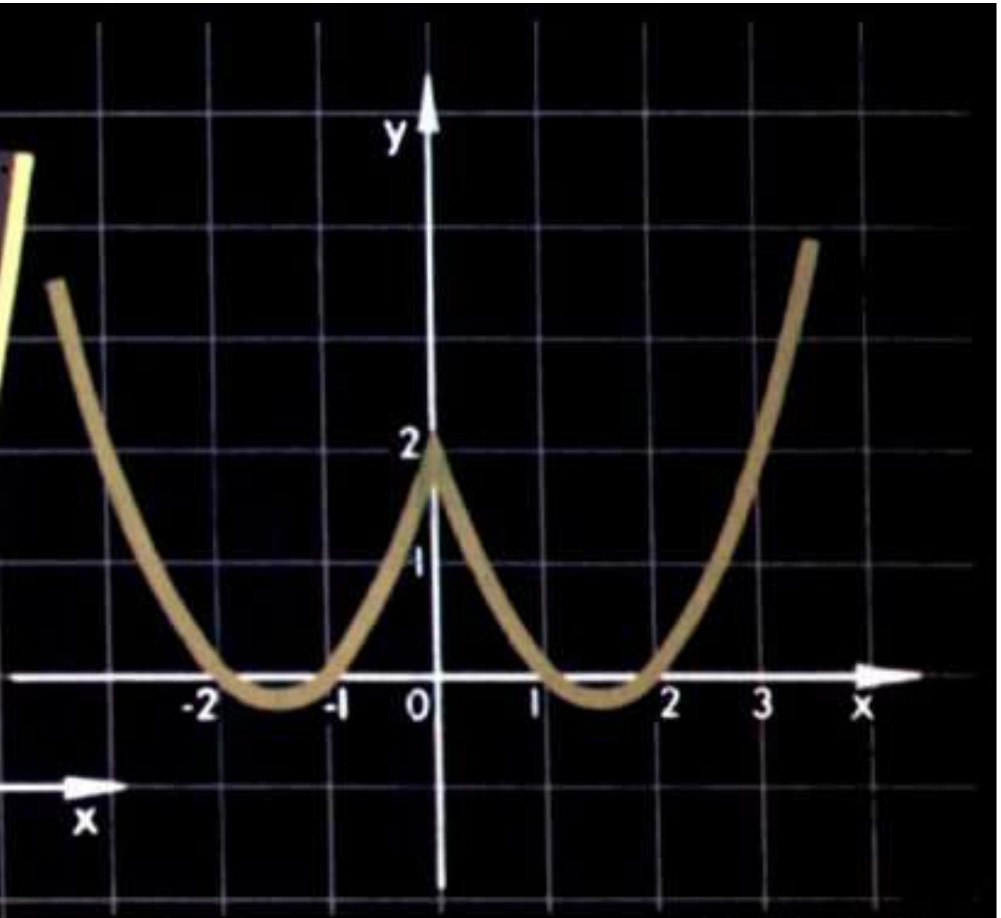


График функции $y=|x^2-x-2|$

График функции $y=x^2-x-2$

График функции $y=x^2-3|x|+2$.
Эту же функцию можно записать так:

$$y=\begin{cases} x^2+3x+2 \text{ при } x\leq 0 \\ x^2-3x+2 \text{ при } x>0. \end{cases}$$

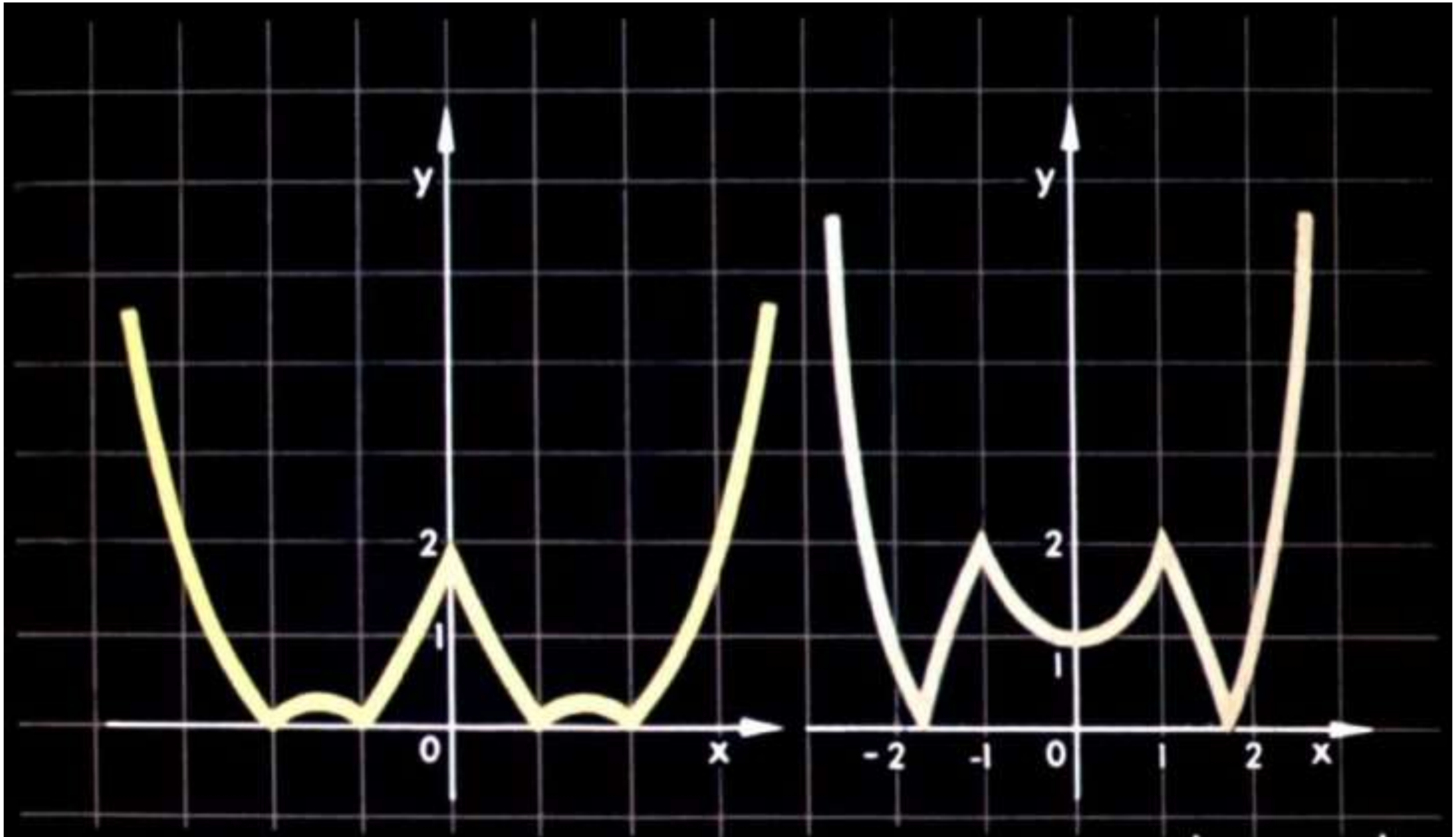


График функции $y = |x^2 - 3|x| + 2|$ График функции $y = ||x^2 - 1| - 2|$

Обе эти функции чётные, и, следовательно, их графики симметричны относительно оси ординат.

15

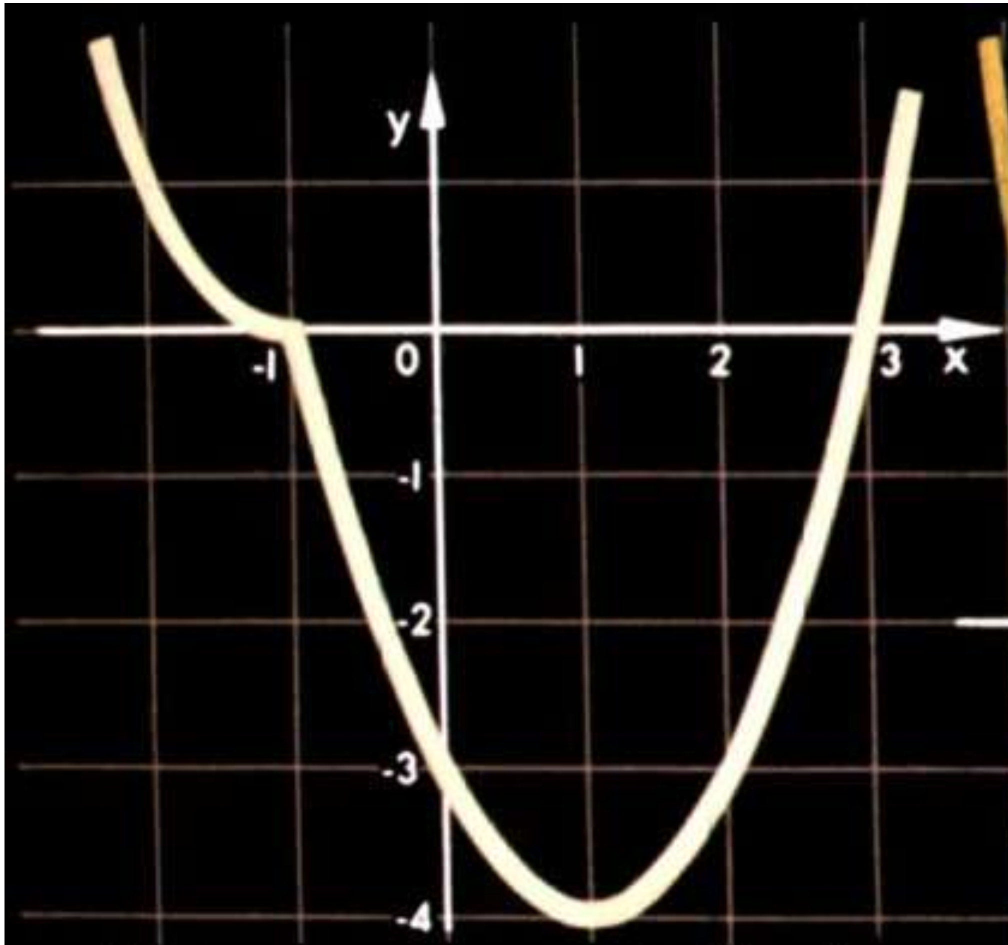


График функции $y = x^2 - 2\,|x+1| - 1$.

Эту же функцию можно записать в таком виде:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{при } x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{при } x > -1. \end{cases}$$

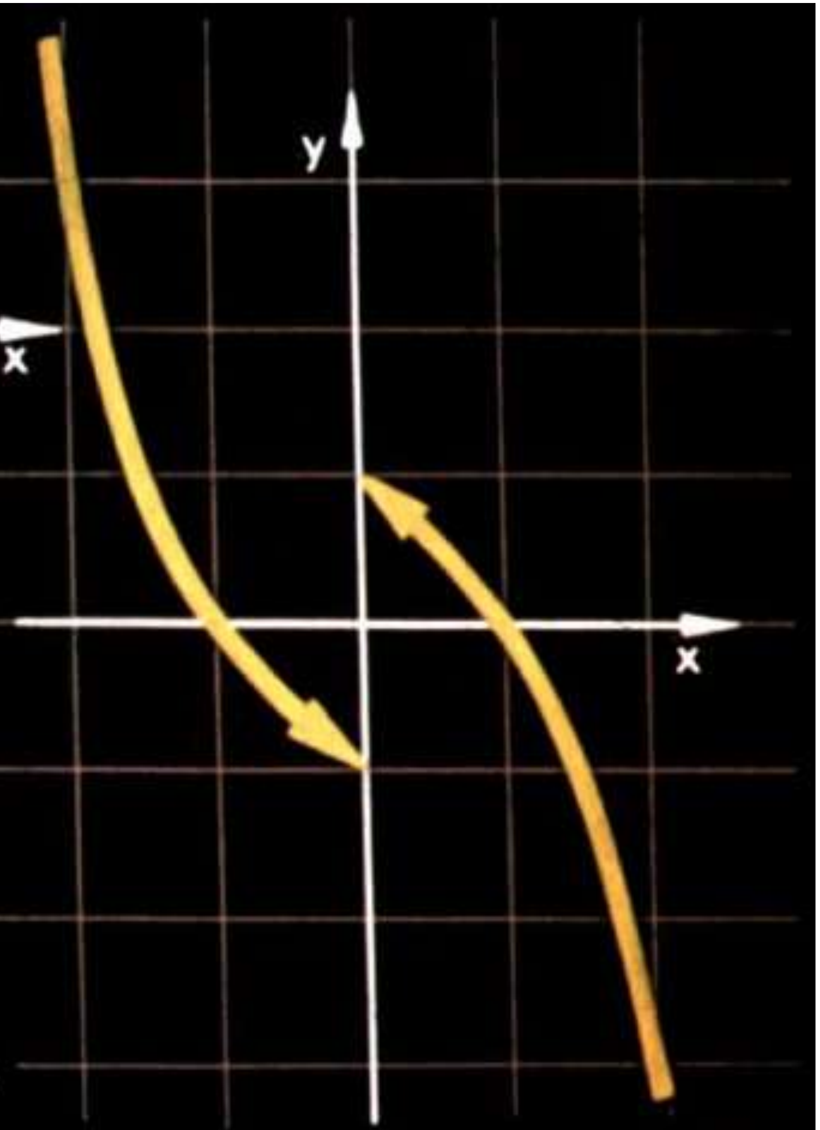


График функции $y = \dfrac{|x|\,(1 - x^2)}{x}$.

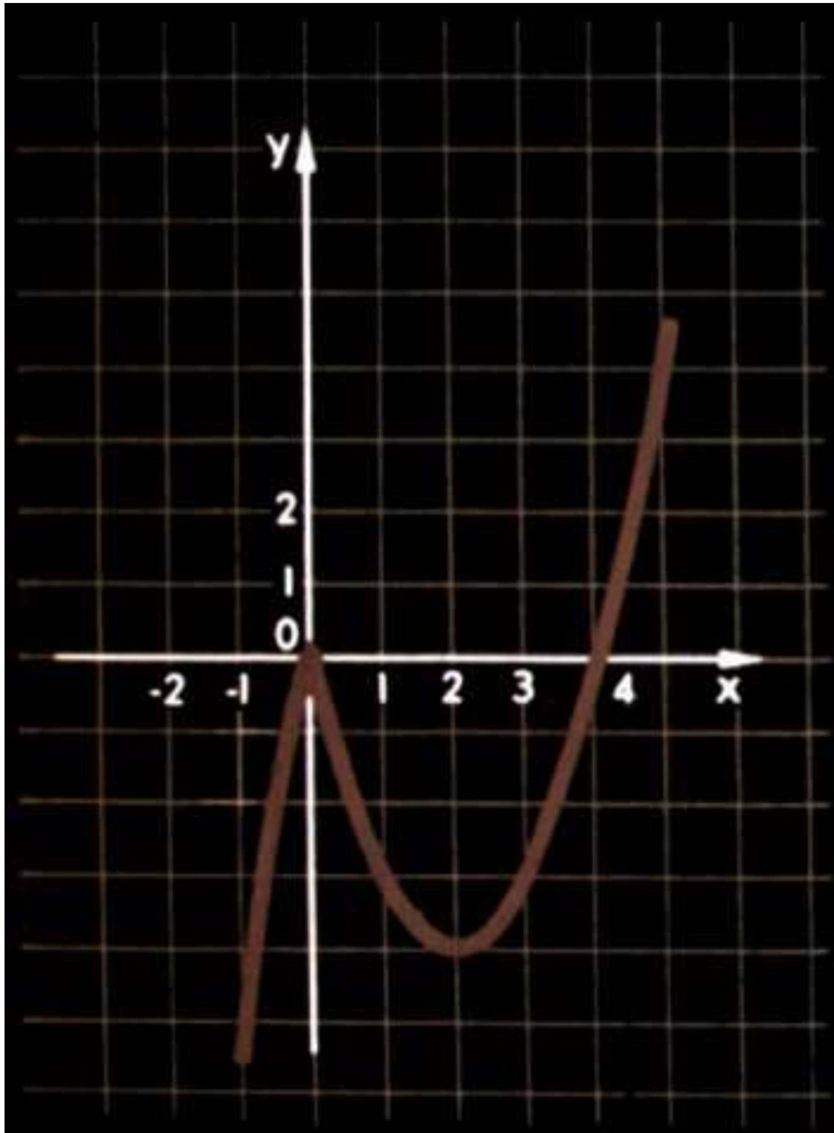


График функции $y = |x|\,(x-4)$.

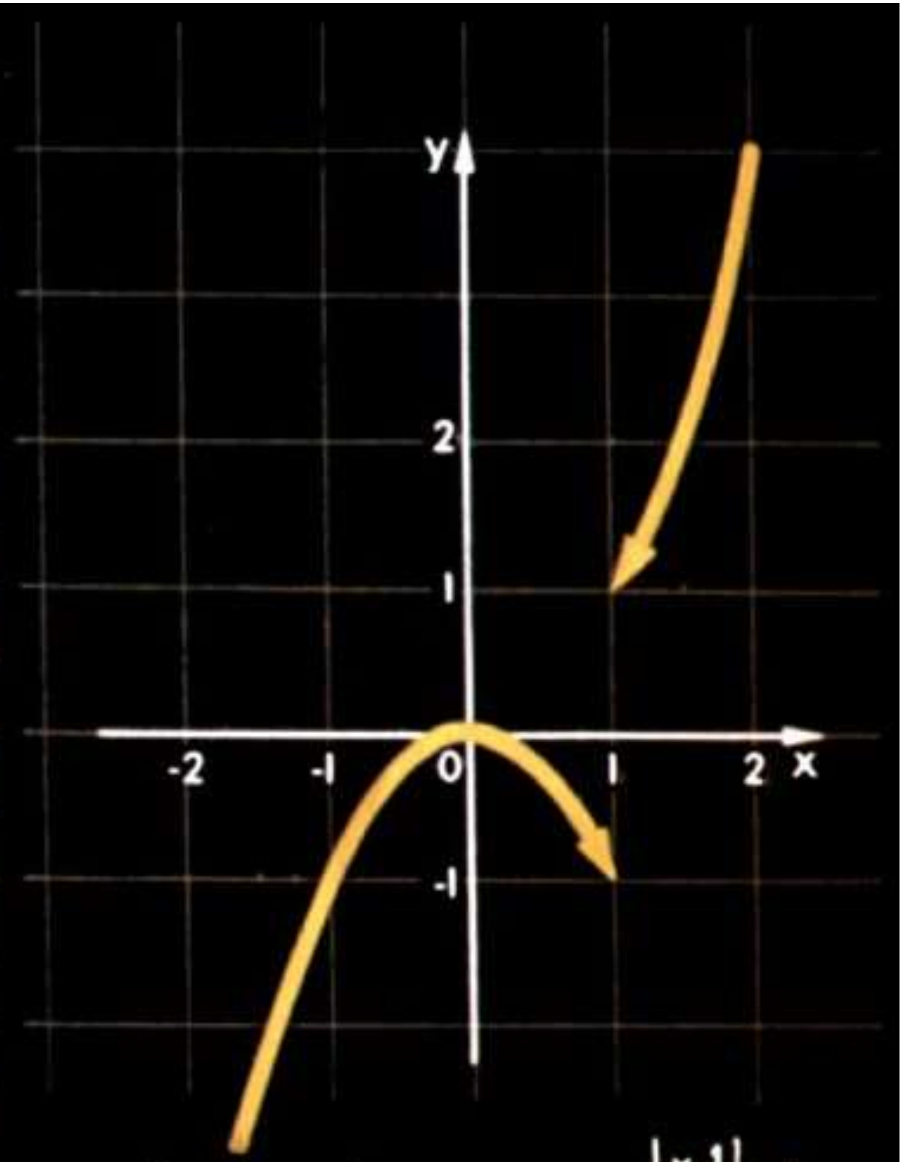


График функции $y = \frac{|x-1|}{x-1}\,x^2$.

График функции $y=x|x-2|$.
Эту же функцию можно записать так:

$$y=\begin{cases} -x^2+2x & \text{при } x\leqslant 2 \\ x^2-2x & \text{при } x>2. \end{cases}$$

График функции $y=\left|\frac{1}{4}x^2-4\right|+\left|\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x-1\right|$.

Эту же функцию можно записать в таком виде:

$$y=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-5 & \text{при } x\leqslant -4 \\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+5 & \text{при } -4<x\leqslant 1 \\ \frac{3}{4}x+3 & \text{при } 1<x\leqslant 4 \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-5 & \text{при } x>4. \end{cases}$$

График иррациональной функции

$$y=\frac{1}{4}x\sqrt{16-x^2}.$$

Область определения функции – сегмент $[-4;\ 4]$.

Область изменения функции – сегмент $[-2;\ 2]$.

Функция нечётная.

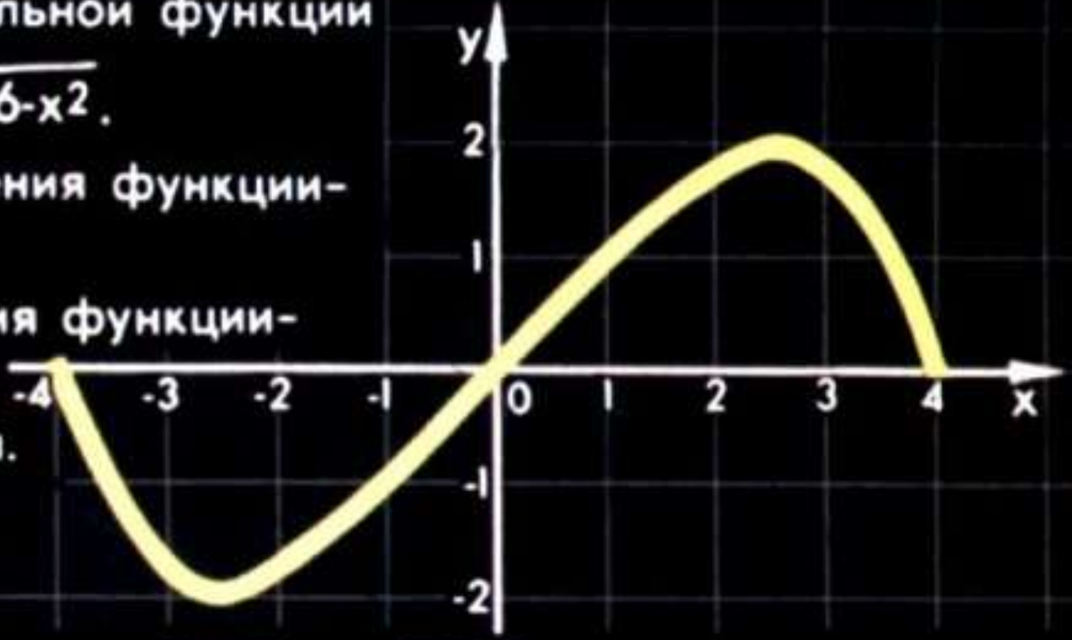


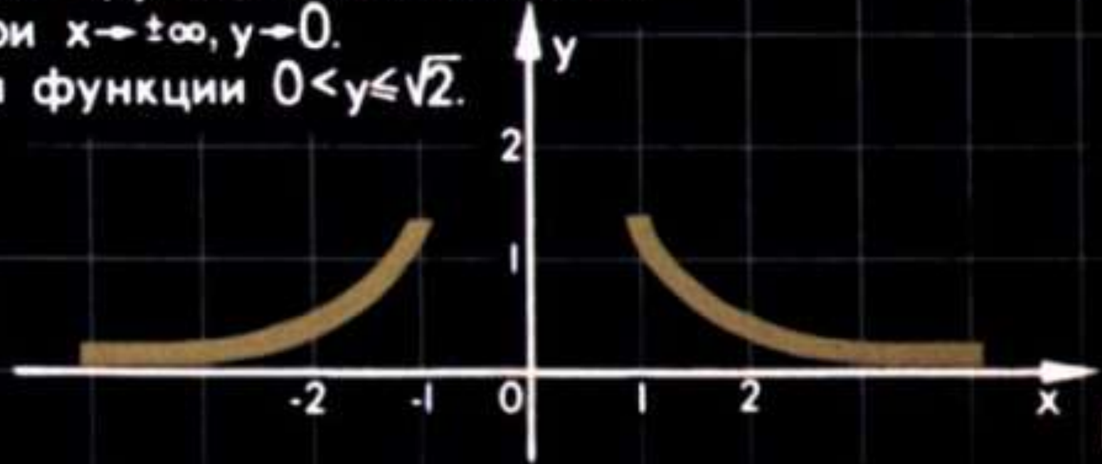
График функции $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

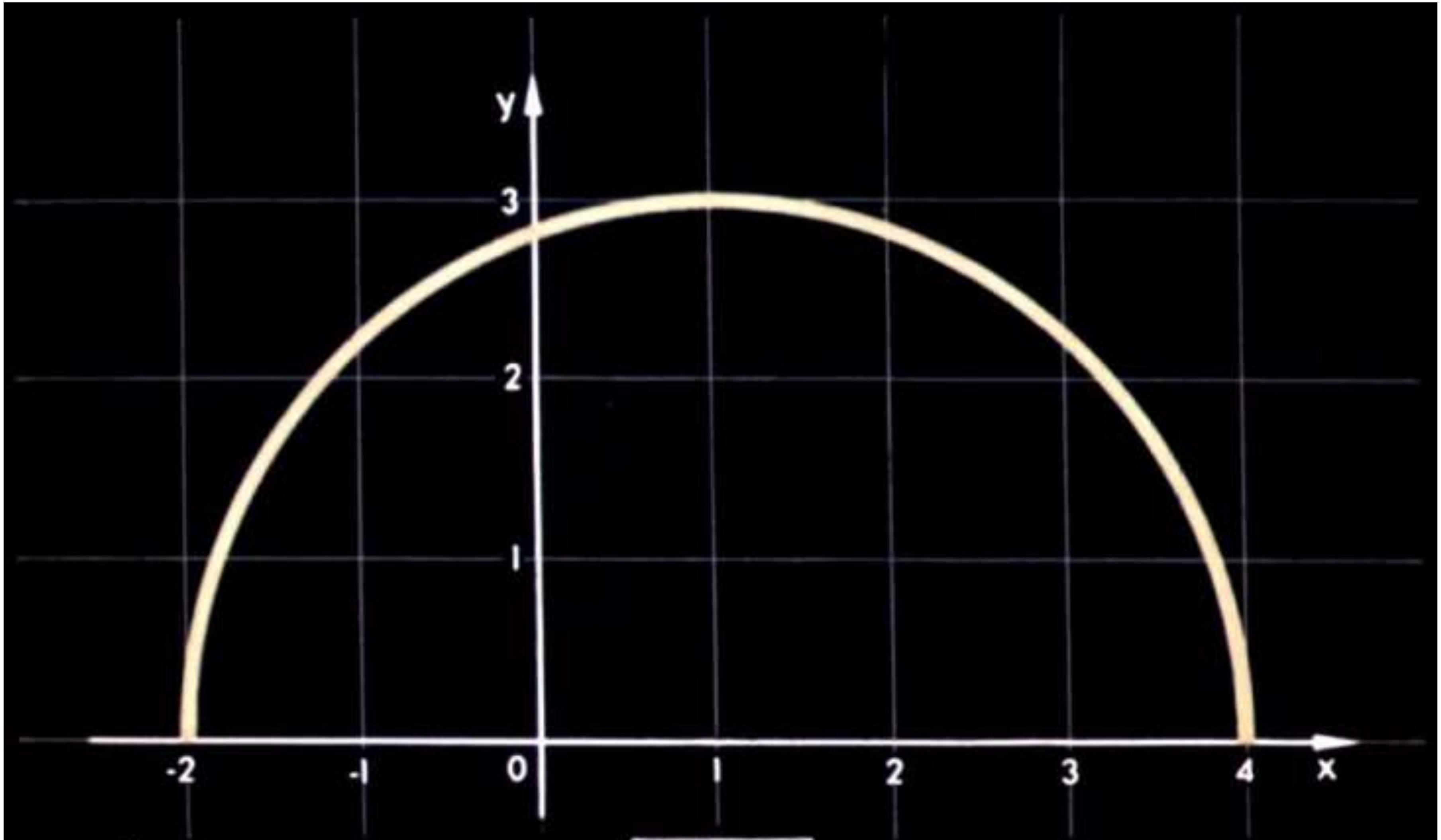
Область определения функции $x\leq 1$ или $x\geq 1$

при $x=\pm 1$, $y=\sqrt{2}$; при $x\to\pm\infty$, $y\to 0$.

Область изменения функции $0<y\leq\sqrt{2}$.

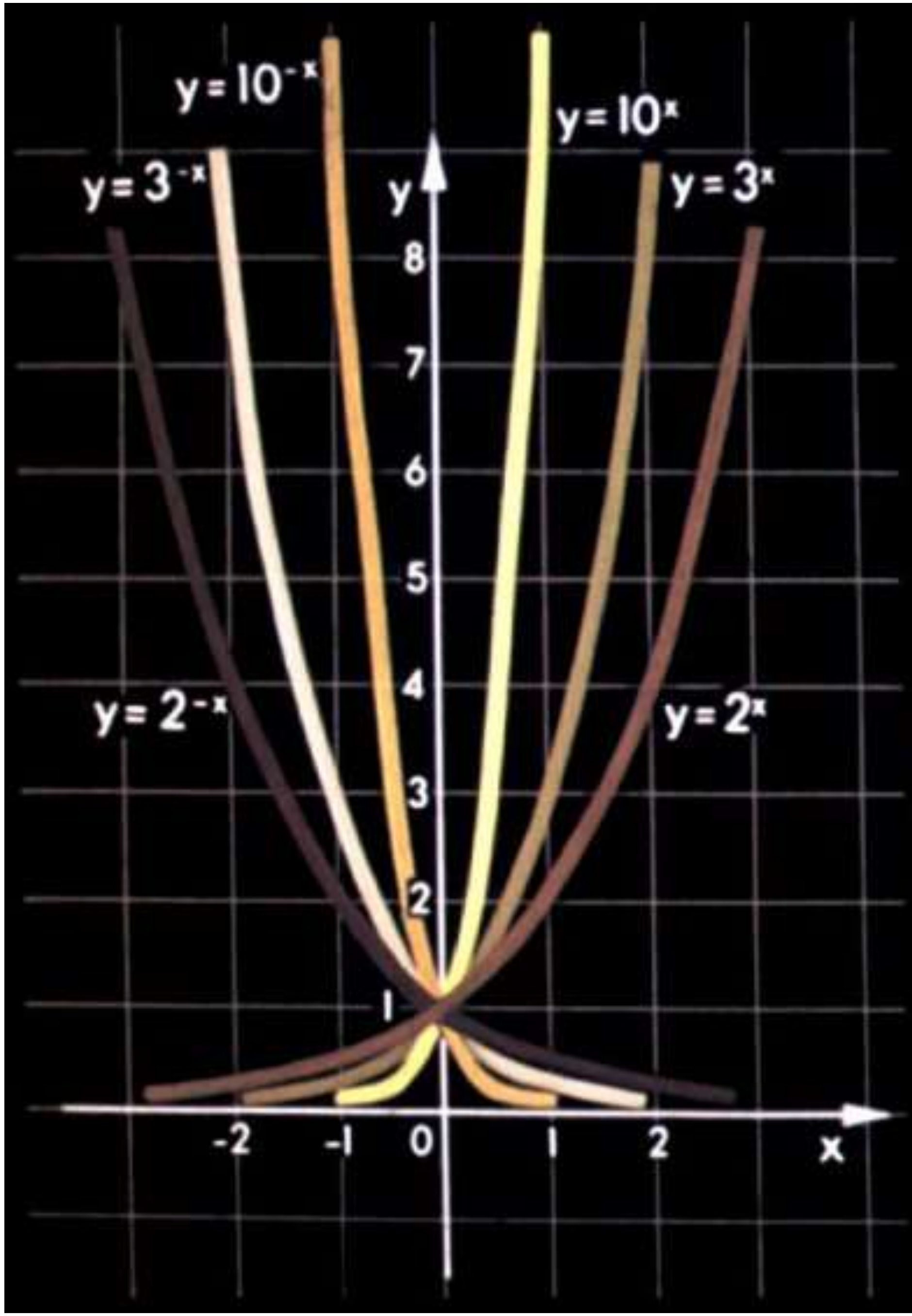
Функция чётная.



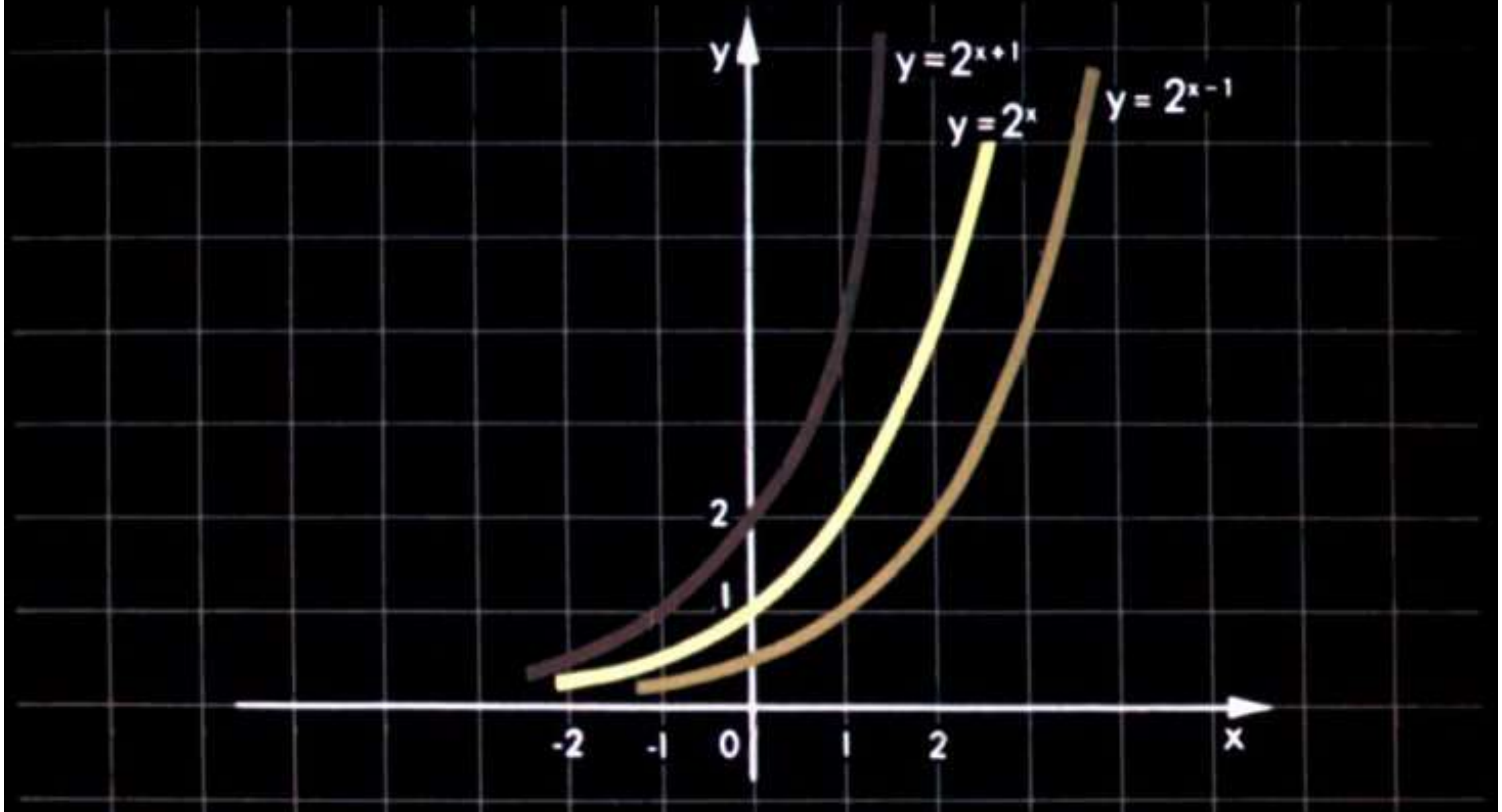


Графиком функции $y=\sqrt{8+2x-x^2}$ служит полуокружность с радиусом $R=3$ и центром в точке $(1; 0)$

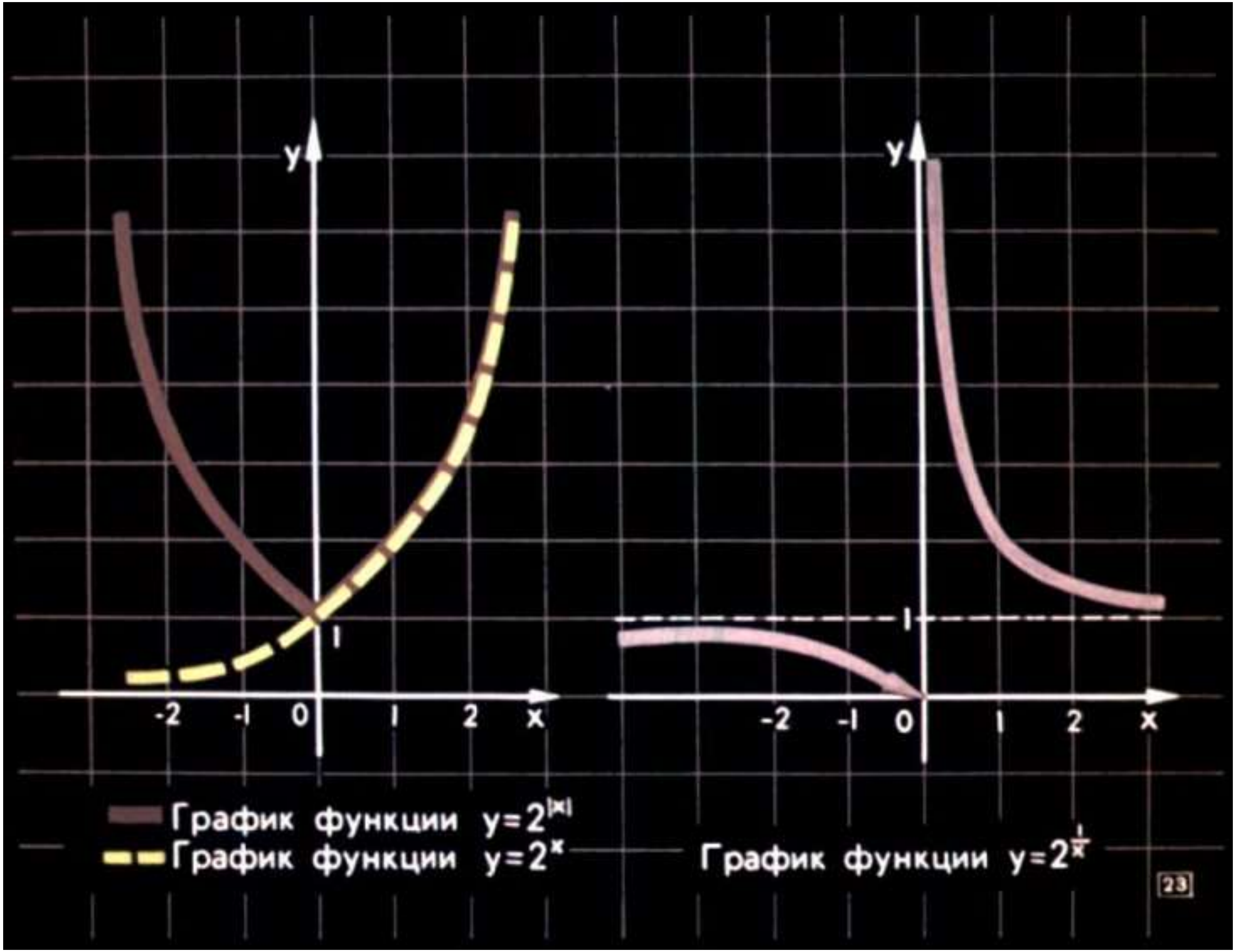
$$y=\sqrt{8+2x-x^2}=\sqrt{9-1+2x-x^2}=\sqrt{9-(x-1)^2}.$$



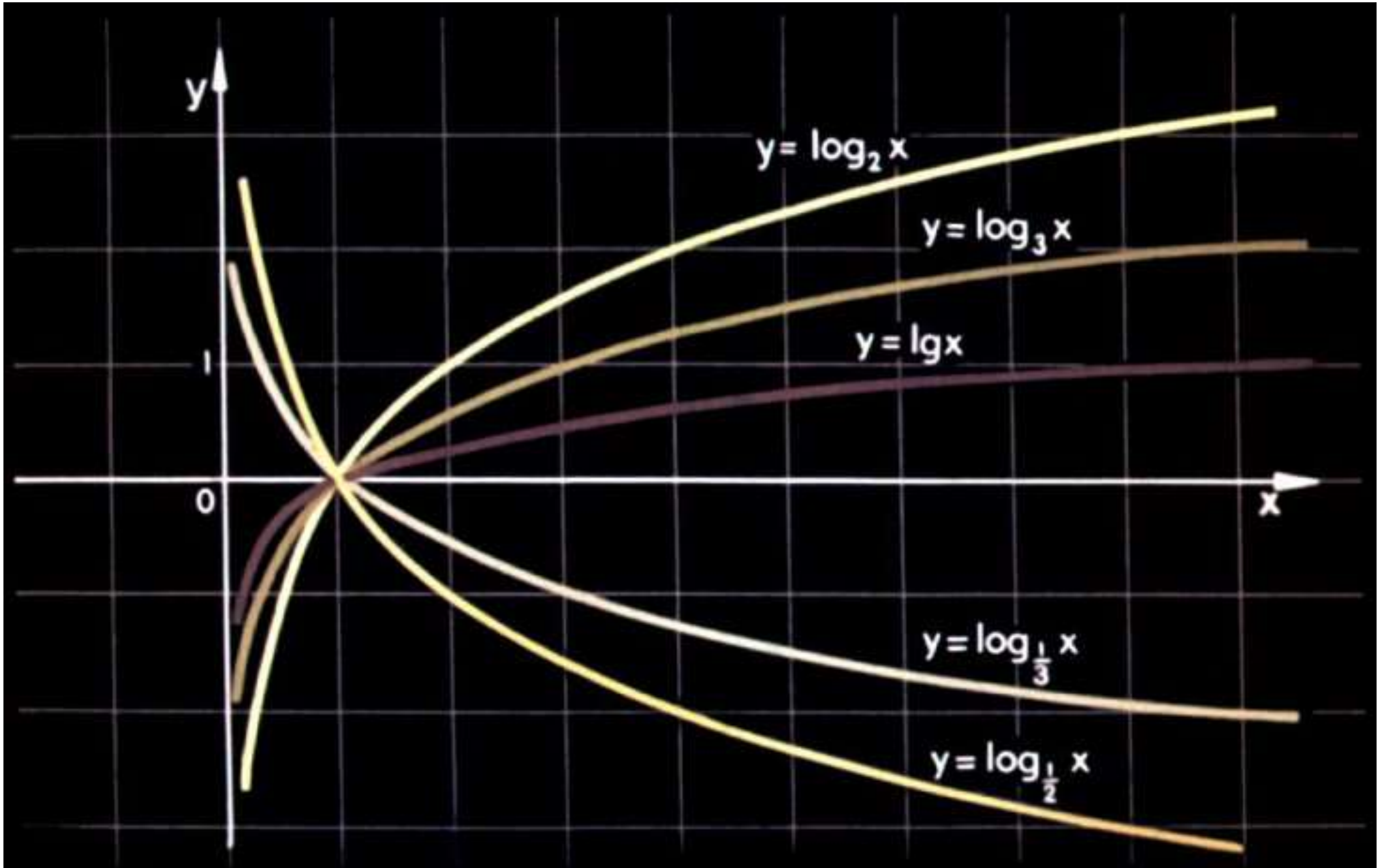
Здесь изображено семейство показательных функций $y = a^x$ при $a = 2; 3; 10; \frac{1}{10}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}$.



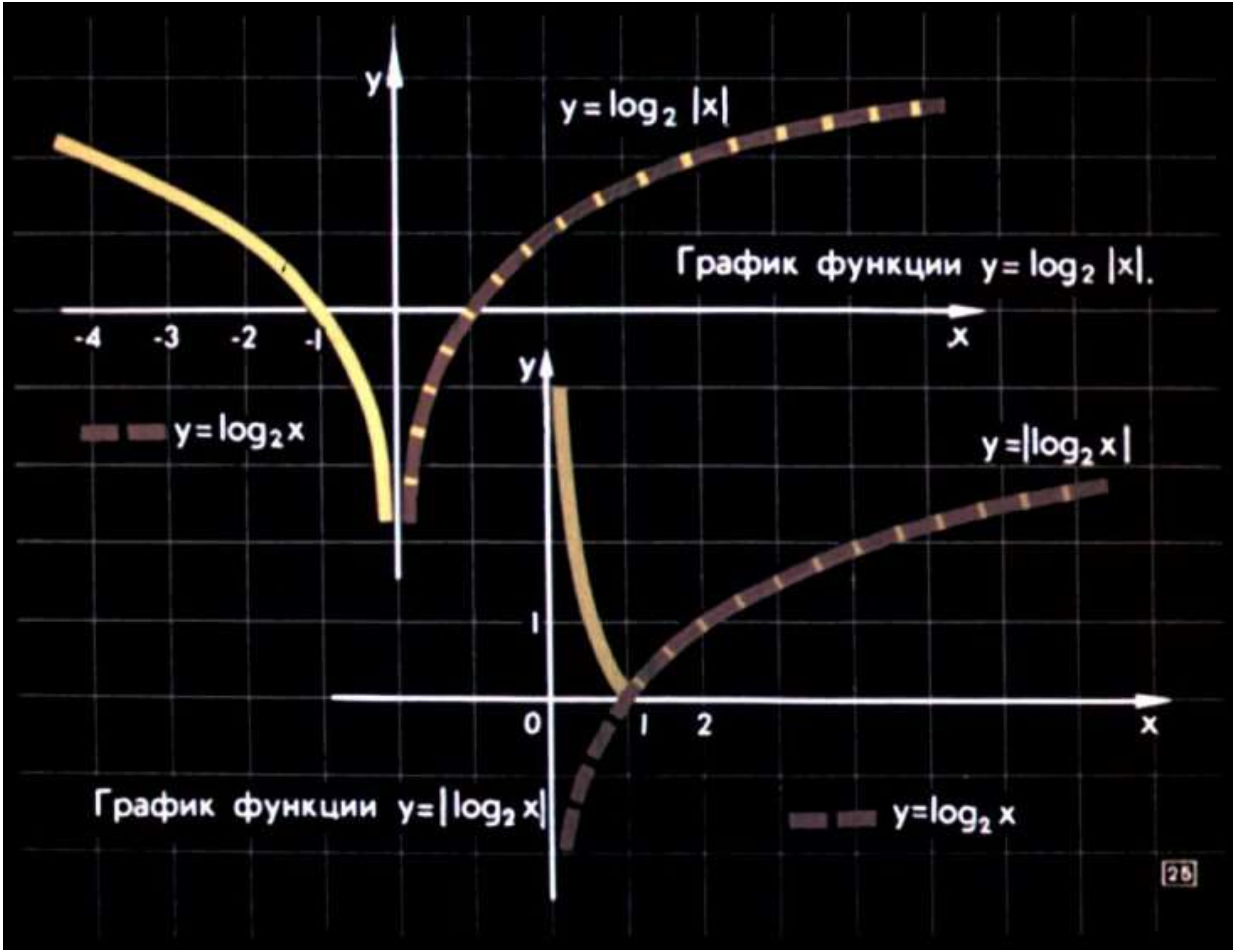
Здесь изображено семейство функций $y=2^{x-m}$, где $m=1;\ 0;\ -1$. График функции $y=2^{x-1}$ можно получить из графика функции $y=2^x$ либо параллельным переносом вправо вдоль оси OX на одну единицу, либо сжатием вдвое вдоль оси OY, так как $y=2^{x-1}=\frac{1}{2}2^x$.



y
x
-2
-1
0
1
2
График функции $y=2^{|x|}$
График функции $y=2^{x}$
График функции $y=2^{\frac{1}{x}}$
23



Здесь изображено семейство логарифмических функций $y=\log_a x$. $a=2;\ 3;\ 10;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2}$.



y
$y = \log_2 |x|$
График функции $y = \log_2 |x|$.
-4 -3 -2 -1
x
y
$y = \log_2 x$
$y = |\log_2 x|$
1
0 1 2
x
График функции $y = |\log_2 x|$
$y = \log_2 x$
28

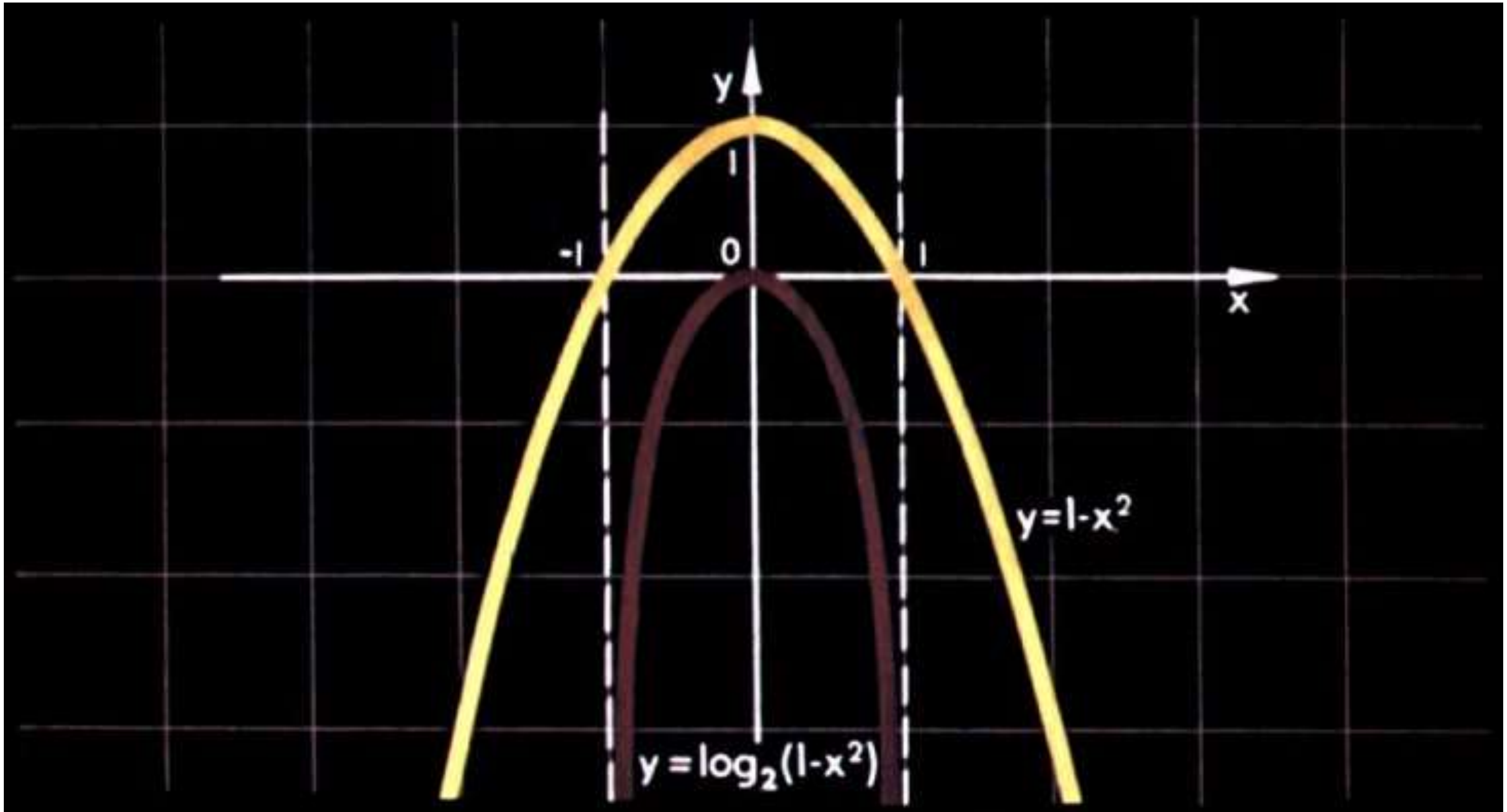


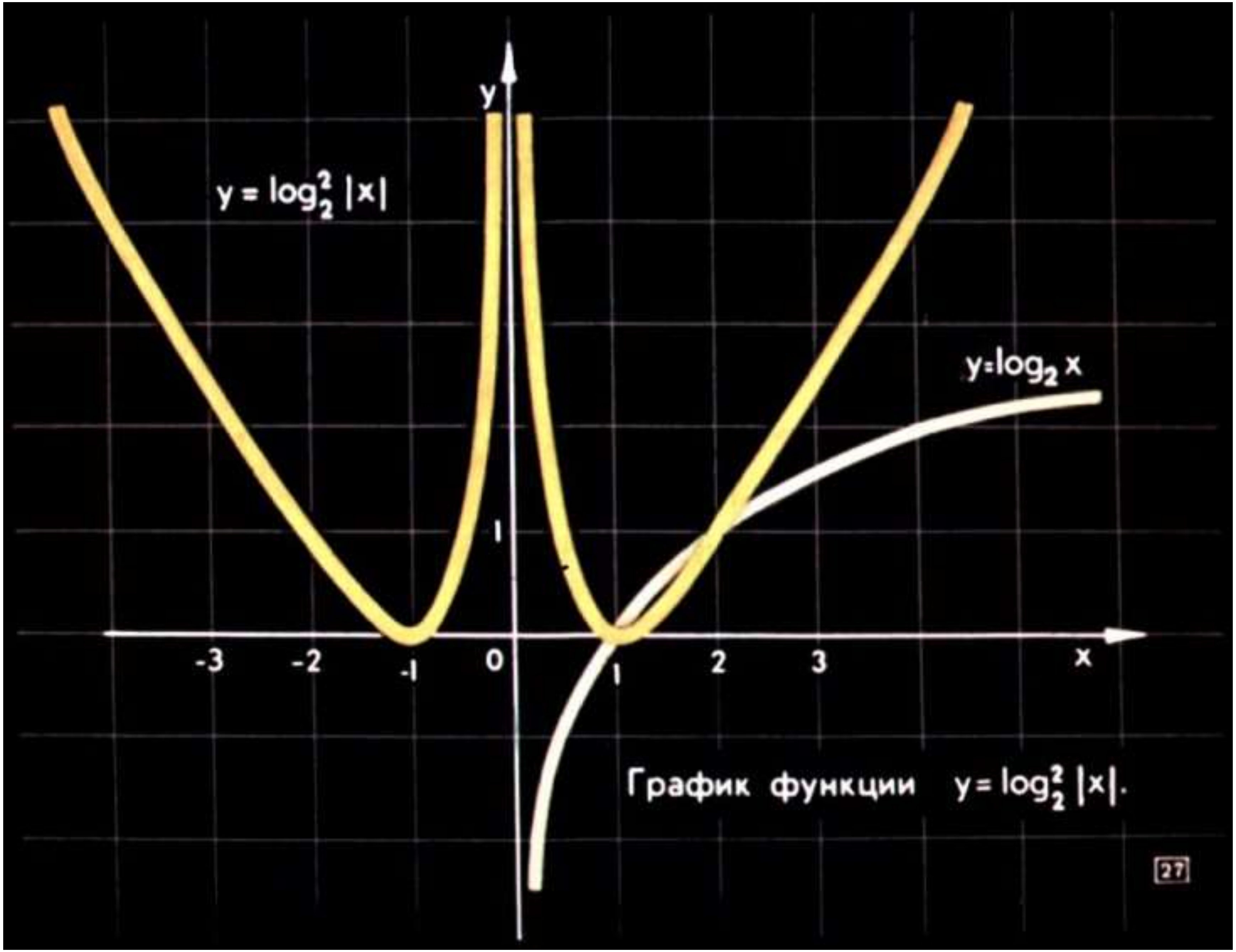
График функции $y=\log_2(1-x^2)$.

Область определения функции — интервал $-1<x<1$.

Область изменения функции $0\leqslant y<-\infty$.

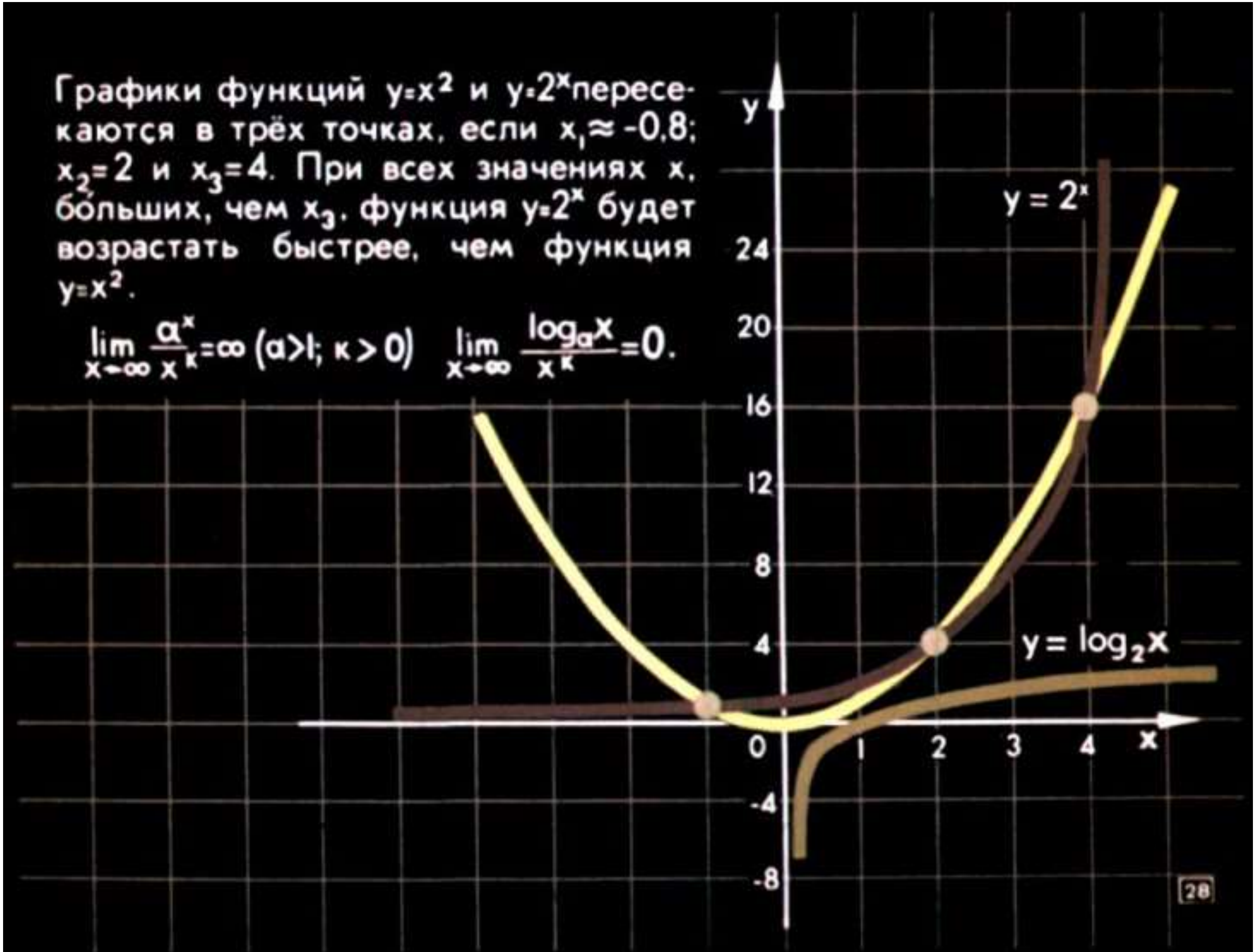
Функция чётная.

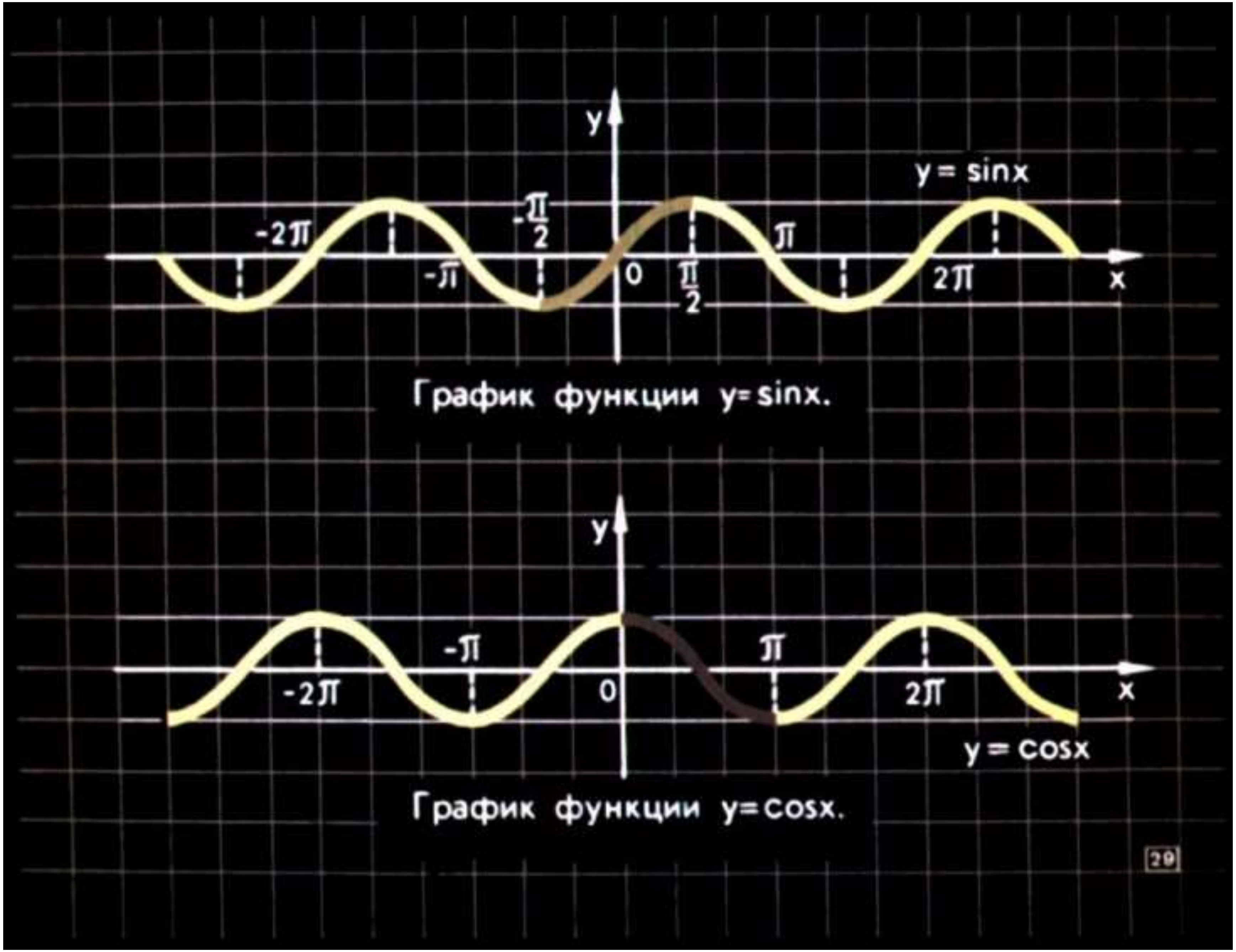
Прямые $x=\pm1$ служат вертикальными асимптотами.

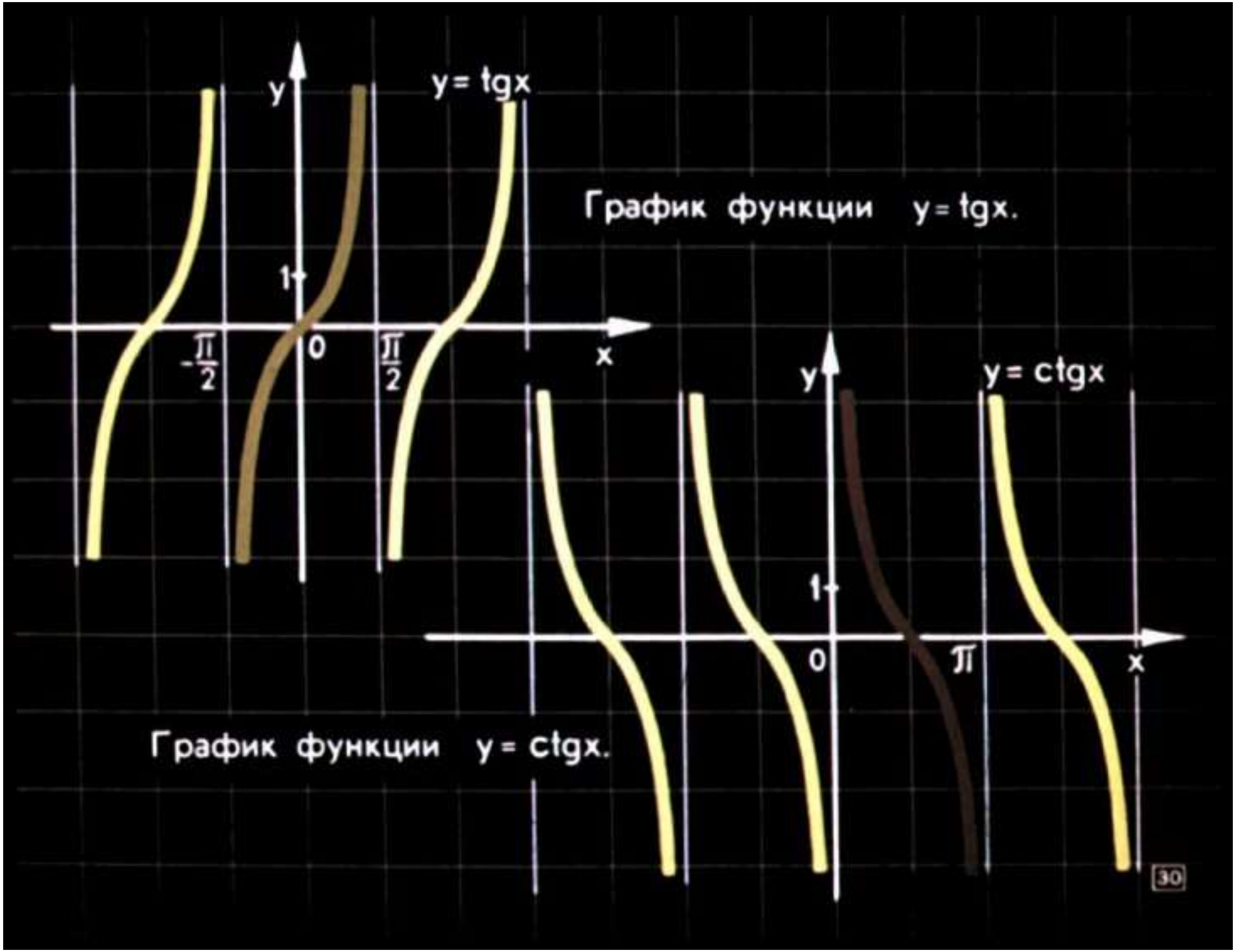

y
$y = \log_2^2 |x|$
$y = \log_2 x$
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
График функции $y = \log_2^2 |x|$.
27

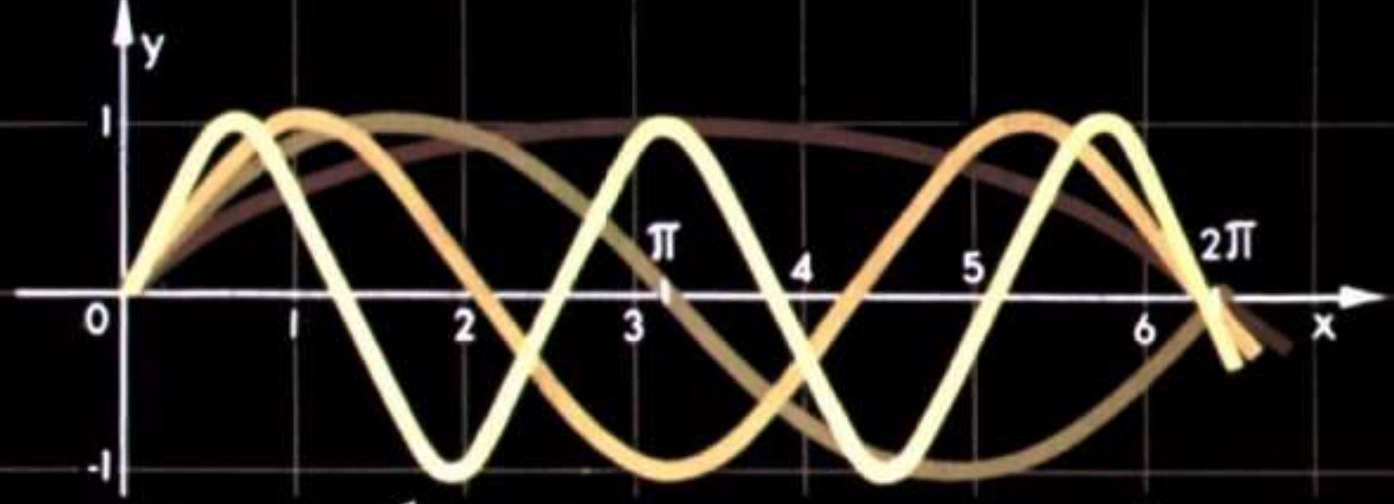
Графики функций $y=x^2$ и $y=2^x$ пересекаются в трёх точках, если $x_1 \approx -0{,}8$; $x_2=2$ и $x_3=4$. При всех значениях x, бо́льших, чем x_3, функция $y=2^x$ будет возрастать быстрее, чем функция $y=x^2$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^k}=\infty \quad (a>1;\ k>0) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=0.$$

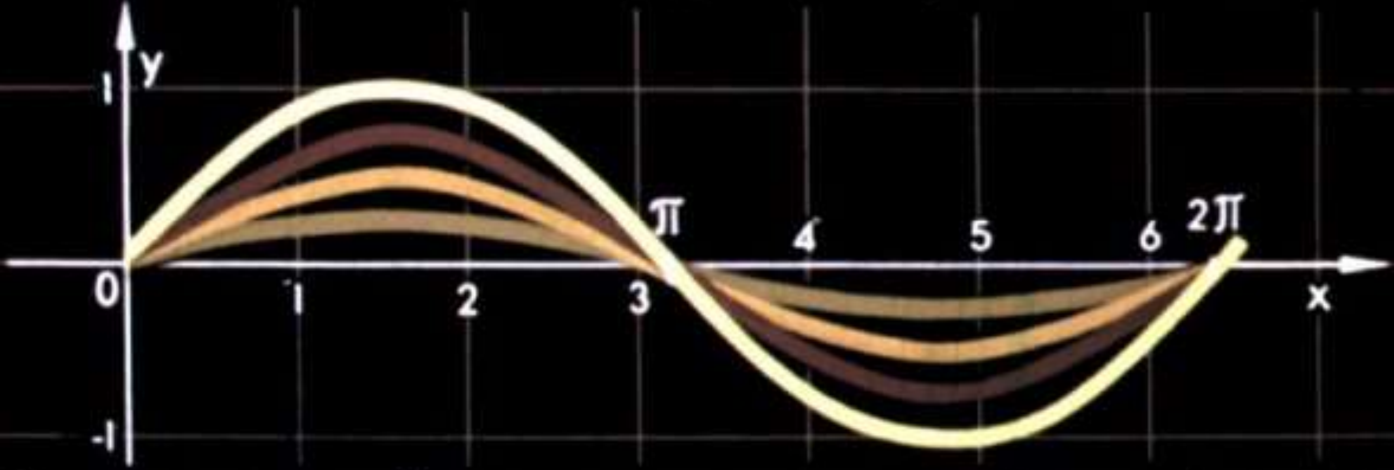



y
y = sinx
-2π
-π/2
π
-π
0
π/2
2π
x
График функции y= sinx.
y
-π
π
-2π
0
2π
x
y = cosx
График функции y=cosx.
29

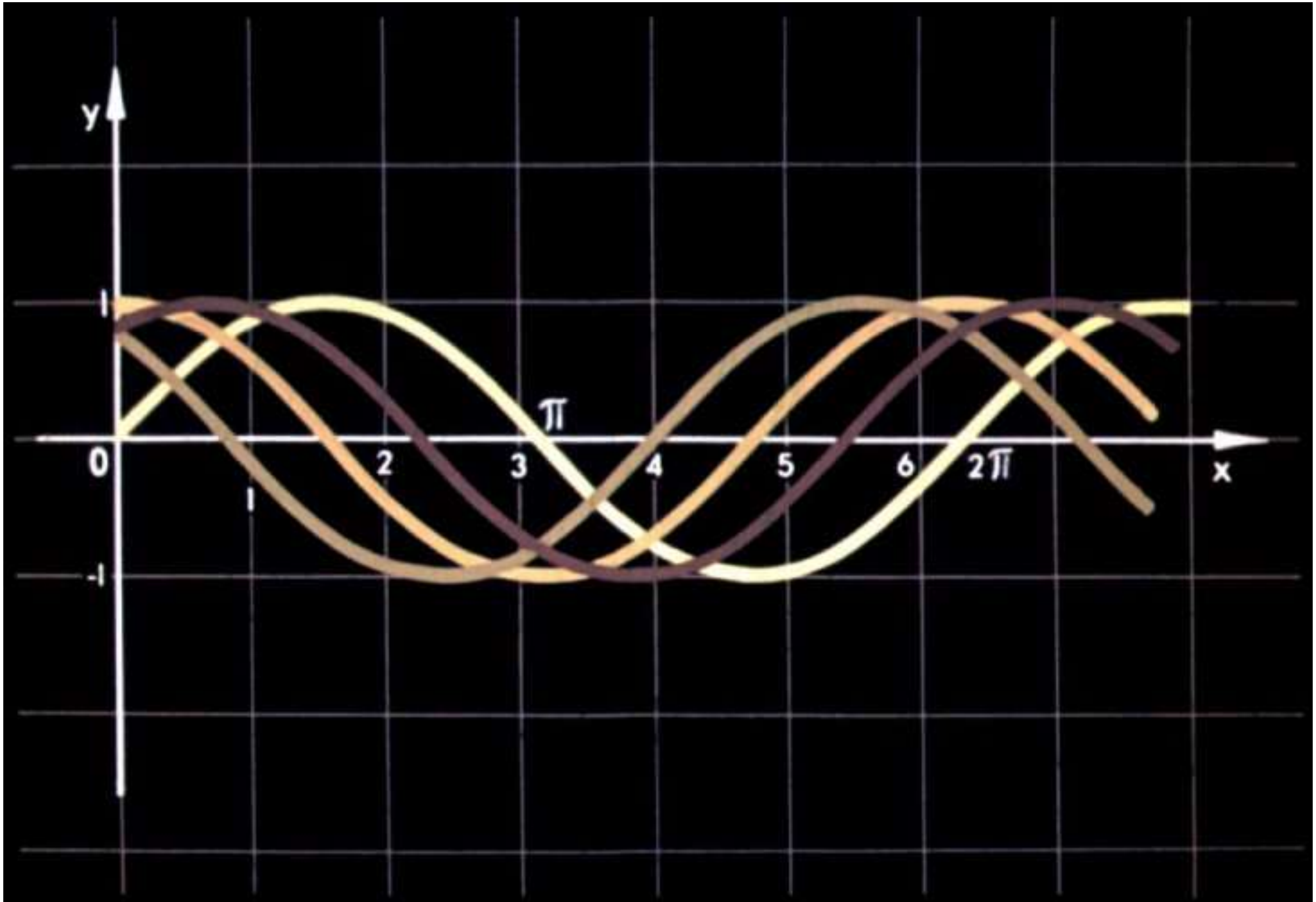

y
y= tgx
1
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
x
График функции y= tgx.
y
y= ctgx
1
0
π
x
График функции y= ctgx.
30



Гармонические колебательные движения различной частоты.

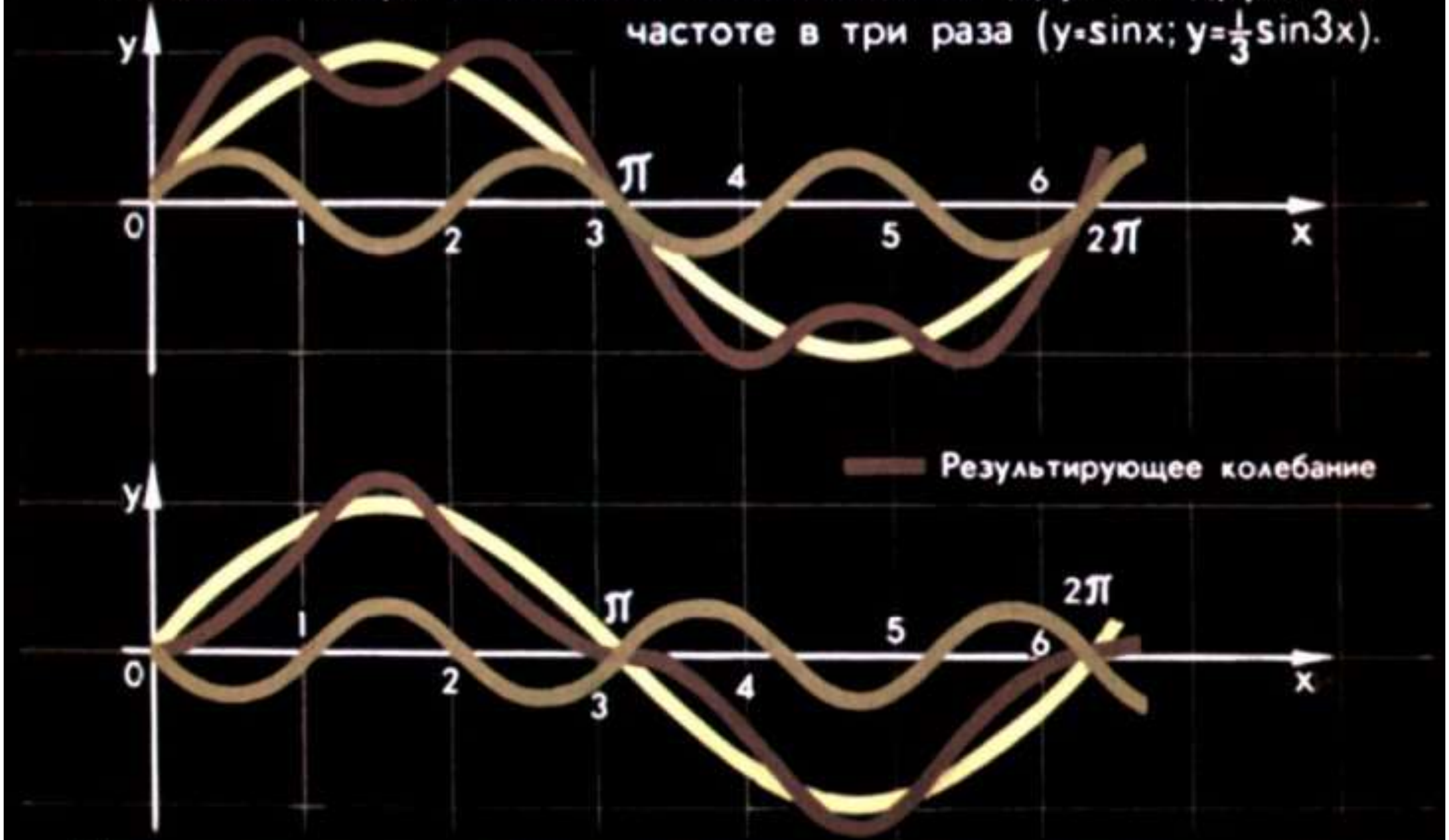


Гармонические колебательные движения с различной амплитудой, но с одной и той же частотой и фазой.

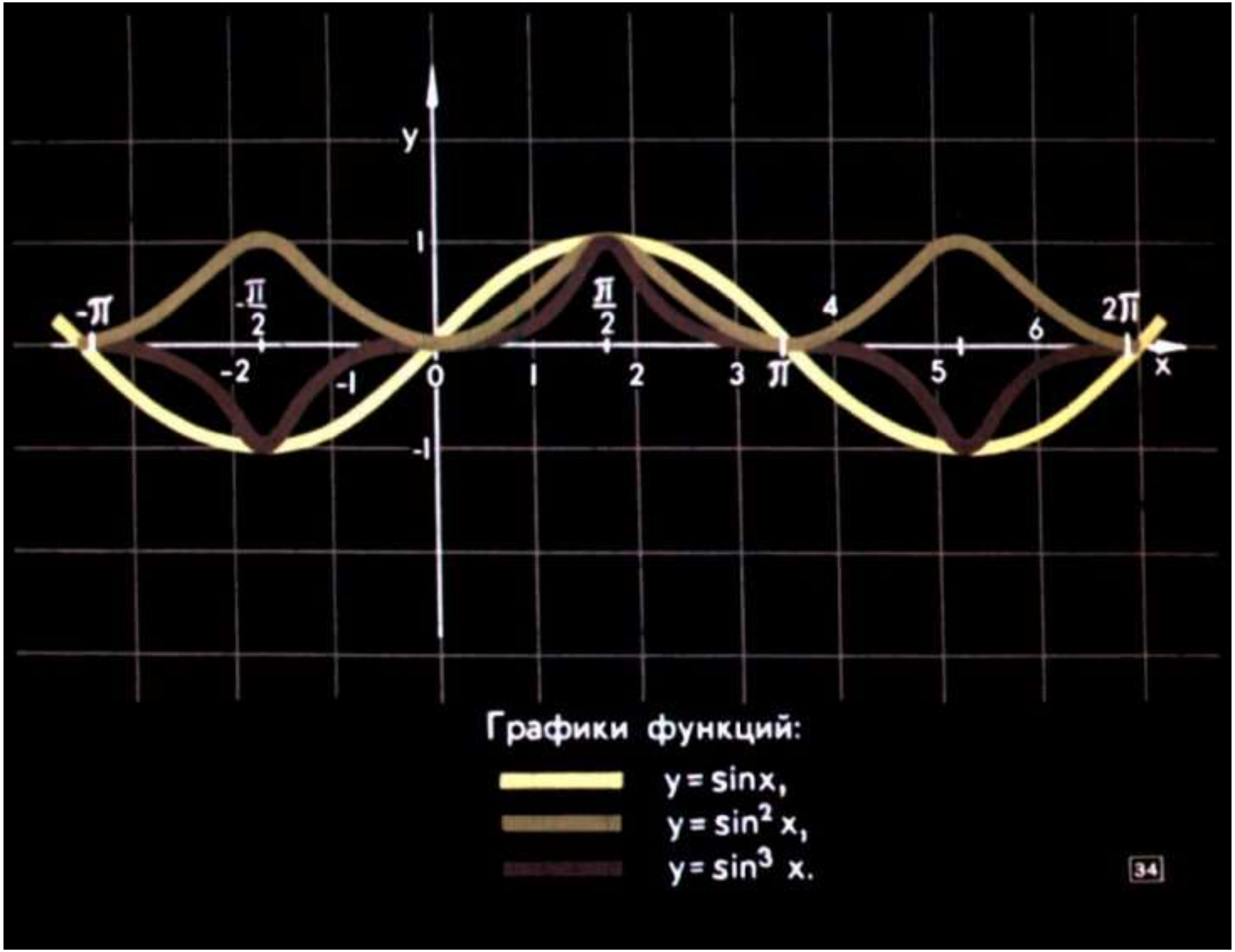


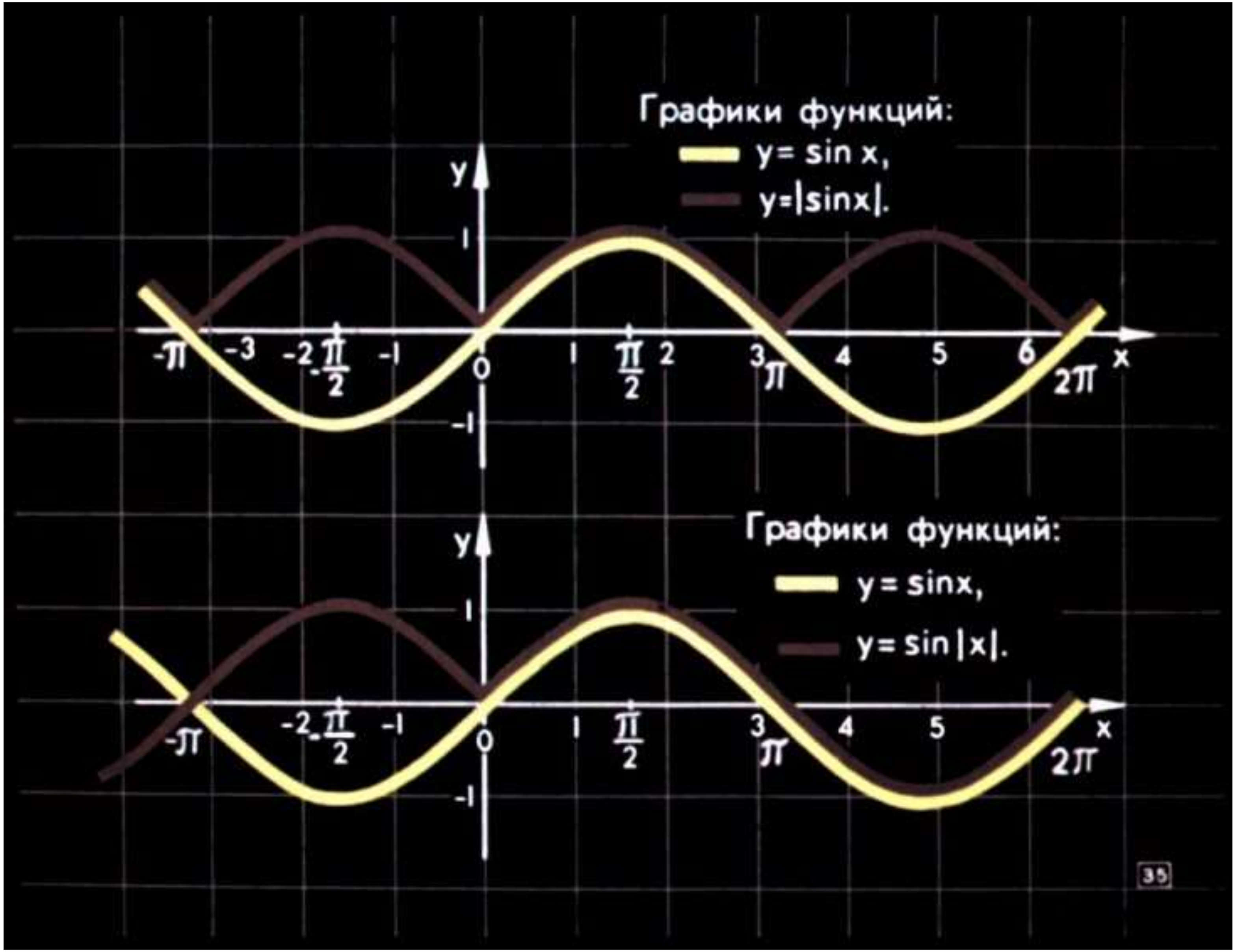
Гармонические колебательные движения с различными фазами.

Сложение двух колебаний, отличающихся друг от друга по частоте в три раза ($y = \sin x$; $y = \frac{1}{3}\sin 3x$).



Сложение двух колебаний различной частоты, отличающихся по фазе на π.


y
1
-1
-π
-π/2
π/2
2π
π
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x
Графики функций:
y = sinx,
y = sin² x,
y = sin³ x.
34


Графики функций:
y= sin x,
y=|sinx|.
Графики функций:
y= sinx,
y= sin|x|.
35

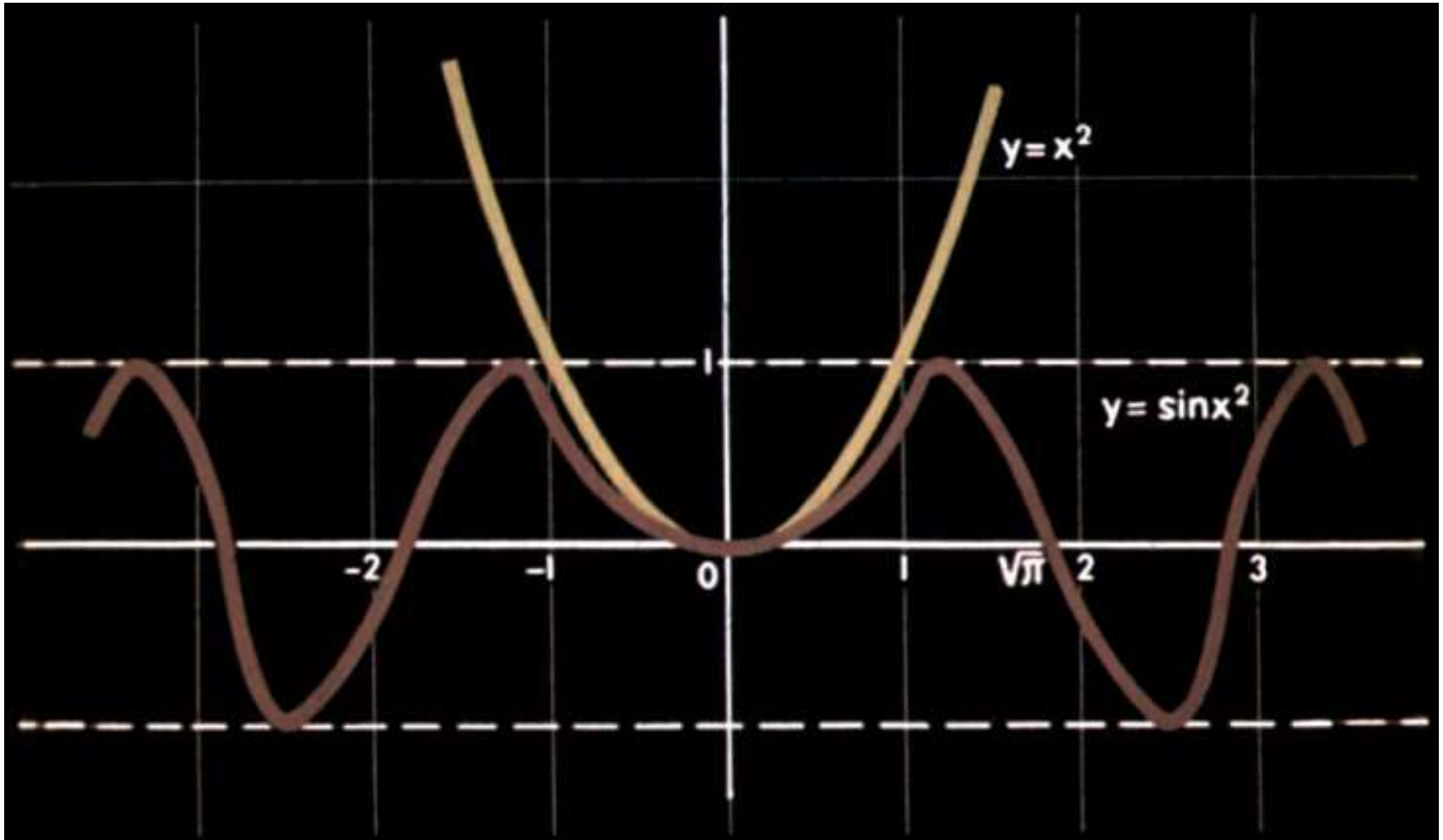


График функции $y = \sin x^2$ (кривая Френеля). Область определения функции — всё множество действительных чисел. Область изменения функции — сегмент $[-1; 1]$. Функция чётная. Корни функции $x = \pm\sqrt{\pi K}$ $K = 0; \pm 1; \pm 2 \ldots$

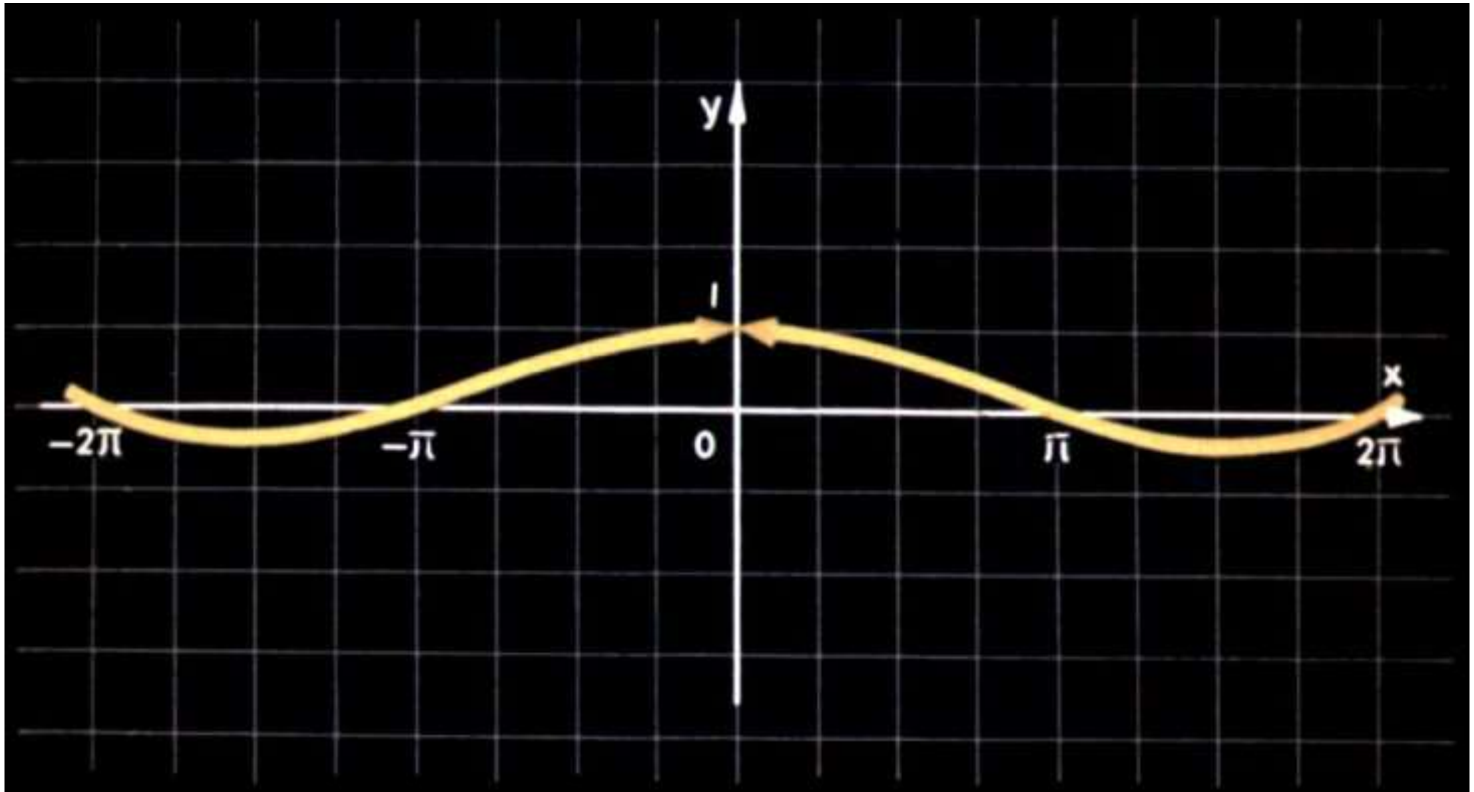
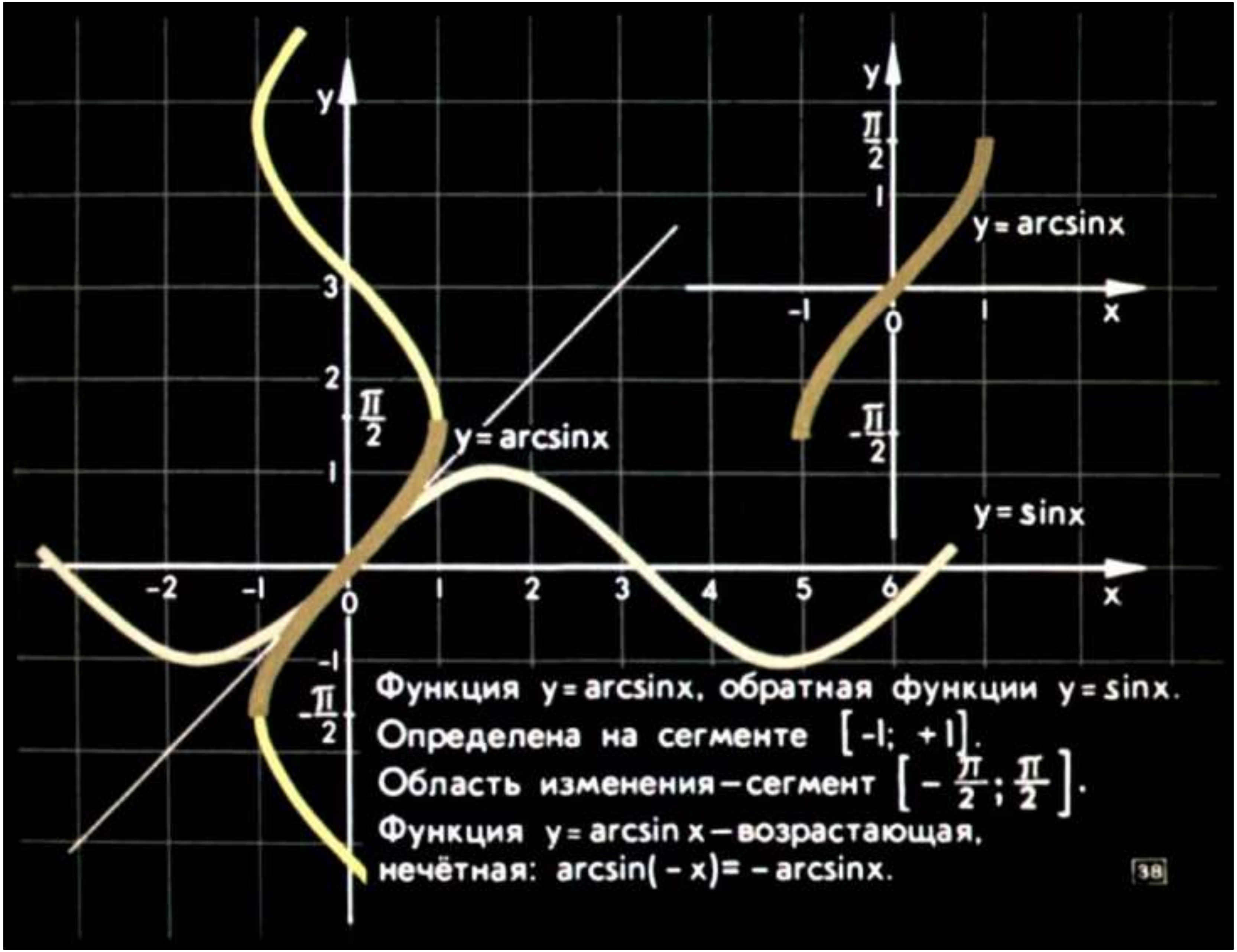
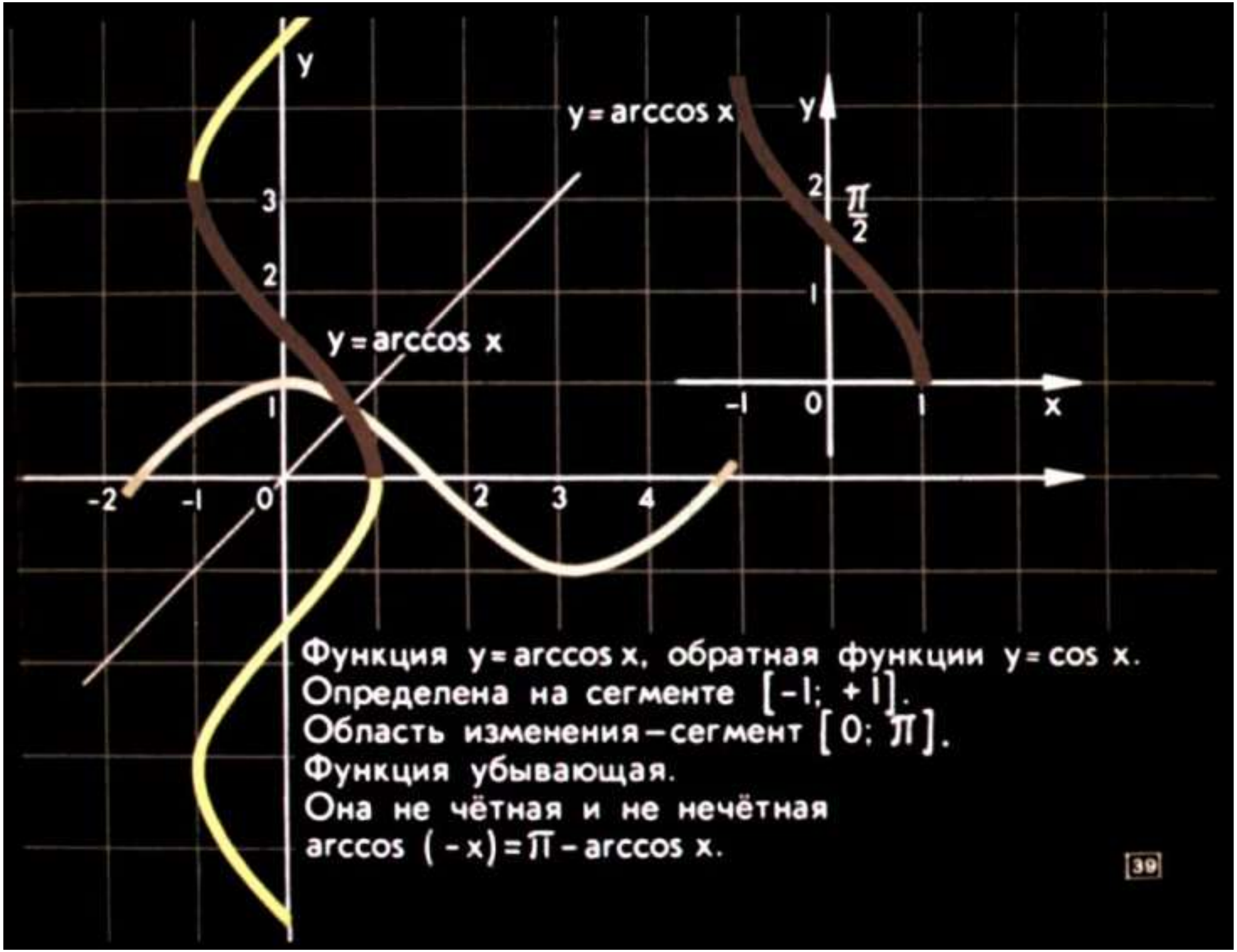
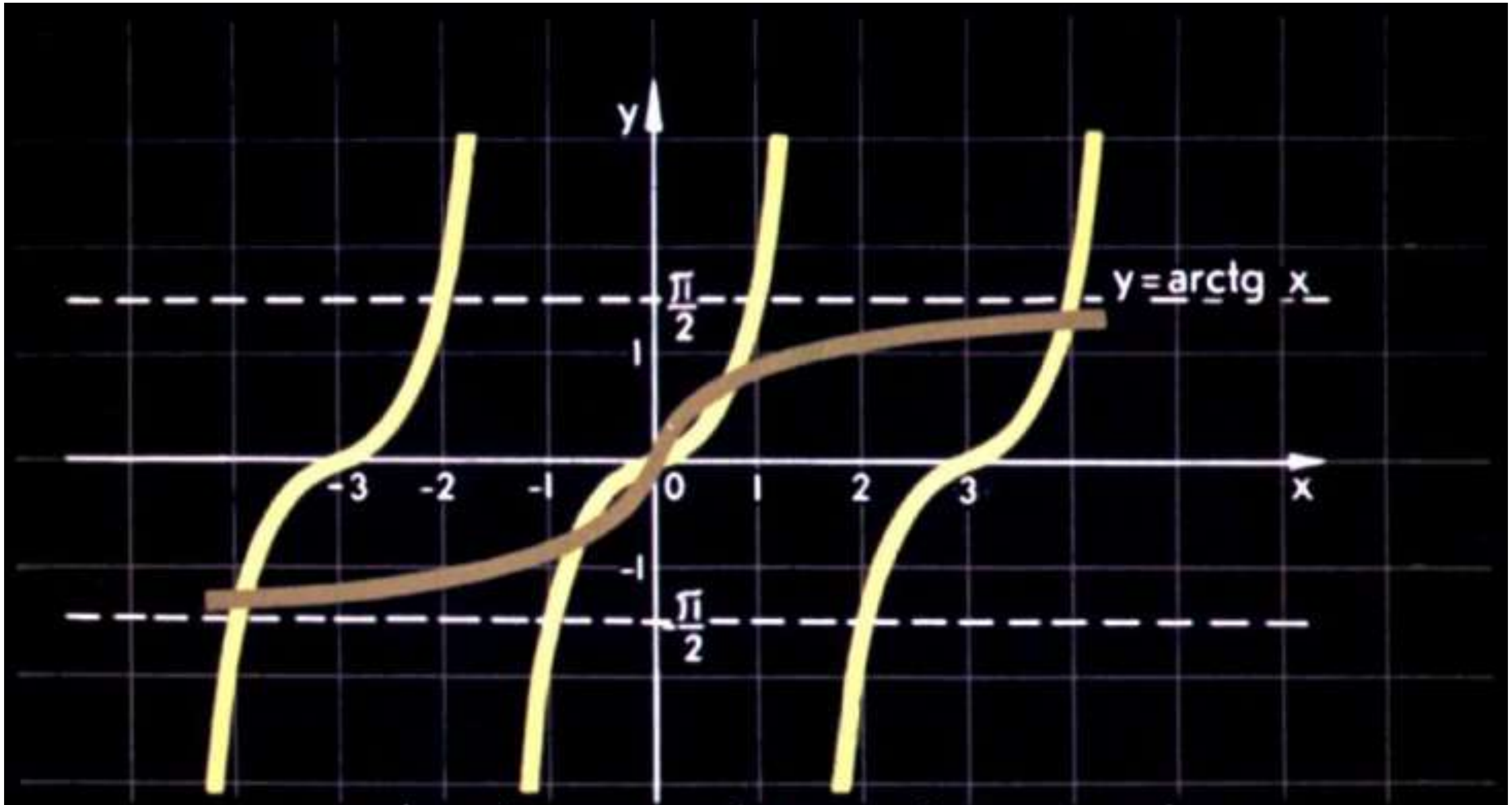


График функции $y=\frac{\sin x}{x}$.

Функция $y=\frac{\sin x}{x}$ определена при всех действительных значениях x, кроме $x=0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, то в точке $x=0$ функция имеет устранимый разрыв.


y = arcsinx
y = sinx
y = arcsinx
Функция y = arcsinx, обратная функции y = sinx.
Определена на сегменте [-1; +1].
Область изменения – сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
Функция y = arcsin x – возрастающая,
нечётная: arcsin(– x) = – arcsinx.
38


y
y = arccos x
y
2
π/2
1
-1
0
1
x
3
2
y = arccos x
1
-2
-1
0
2
3
4
Функция y = arccos x, обратная функции y = cos x.
Определена на сегменте [−1; +1].
Область изменения — сегмент [0; π].
Функция убывающая.
Она не чётная и не нечётная
arccos (−x) = π − arccos x.
39

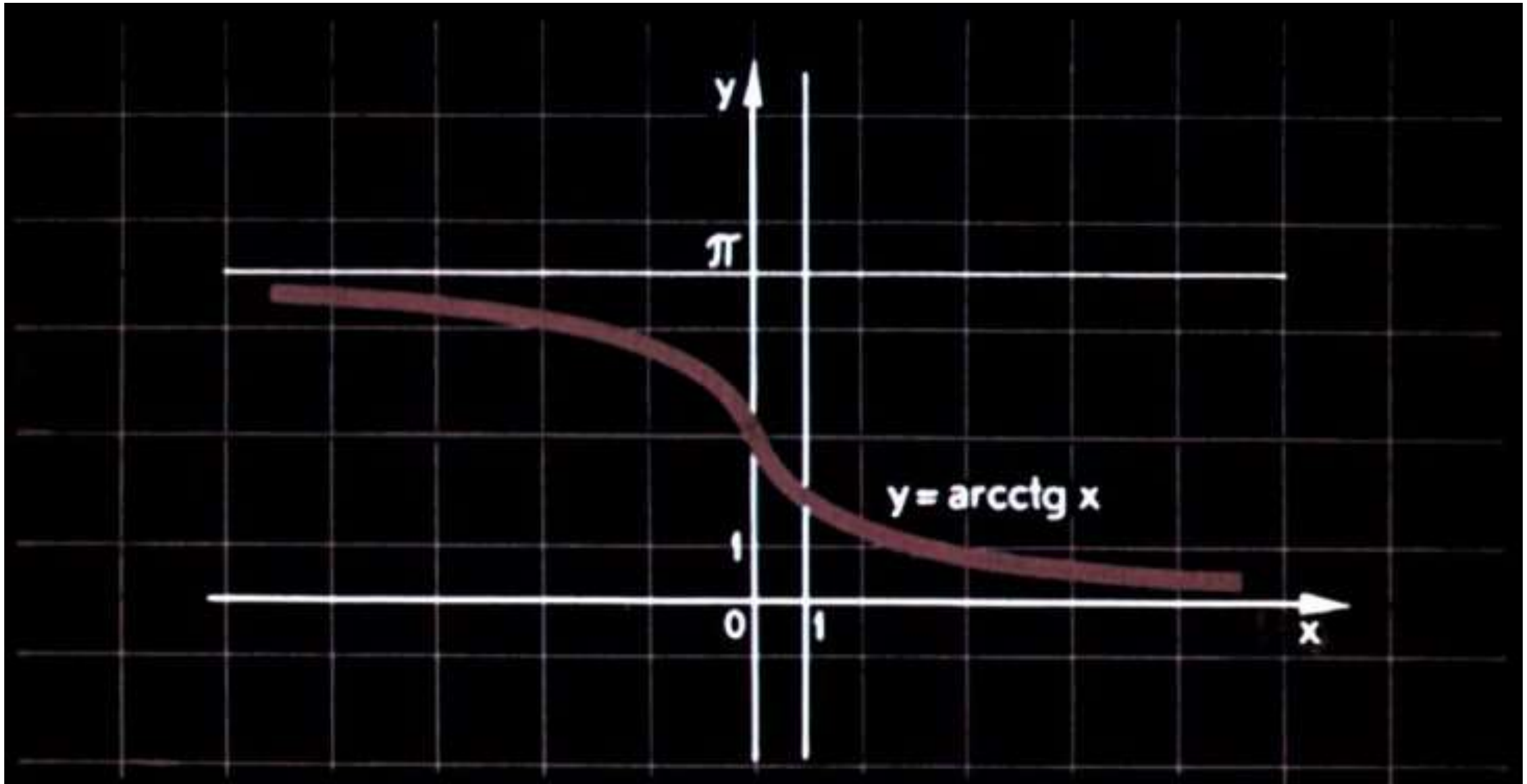


$y = \operatorname{arctg} x$ функция, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$.

Область определения функции – всё множество действительных чисел $-\infty < x < +\infty$.

Область изменения функции – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$.

$y = \operatorname{arctg} x$ – функция возрастающая, нечётная $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.



$y = \operatorname{arcctg} x$ функция, обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$.
Область определения функции—всё множество действительных чисел.
Область изменения функции—интервал $(0;\ \pi)$.
$y = \operatorname{arcctg} x$ функция убывающая.

КОНЕЦ

Автор **И. Б. Вейцман**
Чертежи и оформление **С. Н. Рогова**
Редактор **Л. Б. Книжникова**

Д-170-68

Студия «Диафильм», 1968 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Цветной 0-30

42