Н. Х. Агаханов
И. И. Богданов
П. А. Кожевников
О. К. Подлипский
Д. А. Терешин

ВСЕРОССИЙСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

1993–2006

ОКРУЖНОЙ И ФИНАЛЬНЫЙ ЭТАПЫ

Под редакцией Н. Х. Агаханова

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
Р76

Авторы:
Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников
О. К. Подлипский, Д. А. Терешин

Под редакцией Н. Х. Агаханова

Издание осуществлено при поддержке
Московского института открытого образования.

Р76 **Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006**: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. — М.: МЦНМО, 2007. — 472 с.

ISBN 978-5-94057-262-6

В книге приведены задачи заключительных (четвертого и пятого) этапов Всероссийских математических олимпиад школьников 1993–2006 годов с ответами и полными решениями.

Все приведенные задачи являются авторскими. Многие из них одновременно красивы и трудны, что отражает признанный в мире высокий уровень российской олимпиадной школы. Часть задач уже стала олимпиадной классикой.

Книга предназначена для подготовки к математическим соревнованиям высокого уровня. Она будет интересна педагогам, руководителям кружков и факультативов, школьникам старших классов. Для удобства работы приведен тематический рубрикатор.

ББК 74.200.58:22.1

ISBN 978-5-94057-262-6

ВВЕДЕНИЕ

Данная книга посвящена Всероссийским олимпиадам школьников по математике. Книга рекомендуется как школьникам, интересующимся олимпиадами, так и учителям, руководителям кружков и факультативов.

История математических олимпиад школьников в нашей стране берет свое начало в 30-х годах прошлого века, когда в Ленинграде и Москве были организованы первые олимпиады.

До войны олимпиады проводились ежегодно. Они быстро завоевали популярность. Сразу после войны они были возобновлены и проводились первоначально только в больших городах, где находились сильные университеты. В конце 50-х — начале 60-х годов прошлого столетия математические олимпиады стали традиционными для многих городов Советского Союза.

Первой математической олимпиадой, в которой приняли участие несколько областей РСФСР, стала проводившаяся в Москве олимпиада 1960 года. Ее иногда называют «нулевой» Всероссийской математической олимпиадой школьников. Официальная нумерация началась с 1961 года. В первой Всероссийской математической олимпиаде приняли участие команды почти всех областей РСФСР, а также команды союзных республик. Фактически в олимпиаде принимали участие команды всех территорий Советского Союза, поэтому с 1967 года эта олимпиада была переименована во Всесоюзную олимпиаду школьников по математике.

А с 1974 года было принято решение о направлении на Всесоюзную олимпиаду не команд областей, а команд союзных республик. РСФСР на олимпиаде представляли шесть команд: Москвы, Ленинграда и четырех зон (Северо-Западной, Центральной, Юго-Западной, а также Сибири и Дальнего Востока). Структурно Всероссийская олимпиада состояла из четырех этапов: школьного, городского (районного), областного (республиканского, краевого) и зонального. В отдельные зоны были выделены города Москва и Ленинград. Роль финала для школьников РСФСР играла Всесоюзная олимпиада. Такая структура олимпиады сохранялась вплоть до распада Советского Союза. С 1992—93 учебного года в Российской Федерации стал проводиться пятый, заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников. Впервые он был проведен в Краснодарском крае (город Анапа).

В последующие годы заключительные этапы Всероссийской математической олимпиады проходили дважды в Майкопе и Твери, и по одному разу в Казани, Калуге, Нижнем Новгороде, Орле, Пскове, Рязани, Саратове, Чебоксарах, Ярославле.

В 2001 году произошли изменения в схеме проведения четвертого этапа. Было введено новое деление (вместо зонального) — на семь федеральных округов: Южный, Центральный, Северо-Западный, Приволжский, Уральский, Сибирский и Дальневосточный. И сам четвертый этап стал называться федеральным окружным. При этом был сохранен особый статус городских олимпиад Москвы и Санкт-Петербурга. Такая структура проведения Всероссийской олимпиады (в пять этапов) сохраняется и в настоящее время.

Согласно Положению, задания для четвертого и пятого этапов олимпиады разрабатываются Методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников. В ее состав в разные годы входили и входят студенты, аспиранты, преподаватели и научные сотрудники МГУ, СПбГУ, МФТИ(ГУ), ЯрГУ, НГУ, вузов и специализированных физико-математических школ Иваново, Калуги, Кирова, Костромы, Москвы, Нижнего Новгорода, Самары, Санкт-Петербурга, Саратова, члены редколлегии журнала «Квант», а ее руководителем бессменно является профессор кафедры высшей математики МФТИ(ГУ) Геннадий Николаевич Яковлев. Большинство членов Комиссии — победители и призеры Всесоюзных, Всероссийских и Международных математических олимпиад прошлых лет. Традиции современных Всероссийских олимпиад, их стиль закладывались в начале 90-х годов выдающимися математиками и педагогами, в их числе В.В. Вавилов, Л.П. Купцов, Ю.В. Нестеренко, С.В. Резниченко, И.Н. Сергеев, М.Г. Сонкин, А.А. Фомин. Большой вклад в олимпиадное движение был сделан безвременно ушедшими Н.Б. Васильевым, А.П. Савиным, М.В. Смуровым, И.Ф. Шарыгиным.

Все задачи, включенные в книгу, являются авторскими. Многие из них уже стали олимпиадной классикой. В книгу вошли задания четвертого и пятого этапов Всероссийской математической олимпиады школьников, проводившихся в 1993–2006 годах. После условия каждой задачи в скобках указан ее автор. Также в книгу включены решения задач. Для удобства работы с книгой приводится тематический рубрикатор.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A;

$\varnothing$ — пустое множество;

$B \subset A$ — множество B является подмножеством множества A;

$A \cup B$ — объединение множеств A и B;

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B;

$A \setminus B$ — разность множеств A и B (т. е. множество, содержащее все такие элементы множества A, которые не принадлежат B);

$f : A \to B$ — функция f, определенная на множестве A, значения которой лежат в множестве B;

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — сумма чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ — произведение чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$[x]$ — целая часть действительного числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x;

$\{x\}$ — дробная часть действительного числа x, ($\{x\} = x - [x]$);

$a \,\vdots\, b$ или $b \mid a$ — a делится на b (или b делит a);

$a \equiv b \pmod n$ — a сравнимо с b по модулю n (т. е. целые числа a и b дают равные остатки при делении на n);

НОД(a, b) (или (a, b)) — наибольший общий делитель чисел a и b;

НОК(a, b) (или $[a, b]$) — наименьшее общее кратное чисел a и b;

$\smile\!\!\!\!\!\!AC$ ($\smile\!\!\!\!\!\!ABC$) — дуга AC (дуга AC, на которой лежит точка B);

$P(M)$ или P_M — периметр многоугольника M;

$S(M)$ или S_M — площадь многоугольника M;

$V(M)$ или V_M — объем многогранника M;

$(\vec{a}, \vec{b})$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

$n!$ — *n-факториал*, произведение n первых натуральных чисел, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$;

C_n^k — число сочетаний из n по k, т. е. количество k-элементных подмножеств n-элементного множества, $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Условия задач

Окружной этап олимпиады

1992–1993 г.

9 класс

1. Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство
$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1).$$

2. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11. (*Р.Женодаров*)

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, причем $AO = CO$. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный, если

а) $AM = CN$; б) $BM = BN$? (*Б.Кукушкин*)

4. В колоде n карт. Часть из них лежит рубашками вверх, остальные — рубашками вниз. За один ход разрешается взять несколько карт сверху, перевернуть полученную стопку и снова положить ее сверху колоды. За какое наименьшее число ходов при любом начальном расположении карт можно добиться того, чтобы все карты лежали рубашками вниз? (*Д.Карпов*)

5. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ не имеет решений в целых числах. (*А.Калинин*)

6. Три прямоугольных треугольника расположены в одной полуплоскости относительно данной прямой l так, что один из катетов каждого треугольника лежит на этой прямой. Известно, что существует прямая, параллельная l, пересекающая треугольники по равным отрезкам. Докажите, что если расположить треугольники в одной полуплоскости относительно прямой l так, чтобы другие их катеты лежали на прямой l, то также найдется прямая, параллельная l, пересекающая их по равным отрезкам.

(*В.Вавилов*)

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

(*П.Кожевников*)

8. На доске написано число 0. Два игрока по очереди приписывают справа к выражению на доске: первый — знак «+» или «−», второй — одно из натуральных чисел от 1 до 1993. Игроки делают по 1993 хода, причем второй записывает каждое из чисел от 1 до 1993 ровно по одному разу. В конце игры второй игрок получает выигрыш, равный модулю алгебраической суммы, написанной на доске. Какой наибольший выигрыш он может себе гарантировать? *(О.Богопольский, Д.Фон-дер-Флаас)*

10 класс

9. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. Медиана AM пересекает высоту CH и отрезок BD в точках N и K соответственно. Докажите, что если $AK = BK$, то $AN = 2KM$.

(Е.Малинникова)

10. См. задачу 2.

11. Решите в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{x_2} = 4, \\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 1, \\ x_3 + \frac{1}{x_4} = 4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 4, \\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 1. \end{cases}$$

(А.Перлин)

12. У каждого из жителей города N знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идет на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города N из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей. *(А.Перлин)*

13. См. задачу 5.

14. Докажите, что $\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots \sqrt[1993]{1993}}} < 2$. *(В.Жуховицкий)*

15. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N соответственно. Диагональ BD пересекает стороны AM и AN треугольника AMN соответственно в точках E и F, разбивая его на две части. Докажите, что эти части имеют одинаковые площади тогда и только тогда, когда точка K, определяемая условиями $EK \parallel AD$, $FK \parallel AB$, лежит на отрезке MN. *(М.Сонкин)*

16. Из квадратной доски 1000×1000 клеток удалены четыре прямоугольника 2×994 (см. рис. 1). На клетке, помеченной звездочкой, стоит кентавр — фигура, которая за один ход может перемещаться на одну клетку вверх, влево или по диагонали вправо и вверх. Двое игроков ходят кентавром по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре? *(Р.Женодаров)*

11 класс

17. Найдите все натуральные числа n, для которых сумма цифр числа 5^n равна 2^n. *(Д.Кузнецов)*

18. Докажите, что для любого натурального $n > 2$ число
$$\left[\left(\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2}\right)^3\right] + 1$$
делится на 8. (*А.Калинин*)

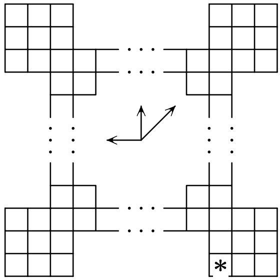


Рис. 1

19. Точка O — основание высоты четырехугольной пирамиды. Сфера с центром O касается всех боковых граней пирамиды. Точки A, B, C и D взяты последовательно по одной на боковых ребрах пирамиды так, что отрезки AB, BC и CD проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок AD проходит через четвертую точку касания. (*М.Смуров*)

20. Дан правильный $2n$-угольник. Докажите, что на всех его сторонах и диагоналях можно расставить стрелки так, чтобы сумма полученных векторов была нулевой. (*С.Токарев*)

21. На доске написано: $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$. Два школьника по очереди вписывают вместо многоточий действительные числа. Цель первого — получить уравнение, имеющее ровно один действительный корень. Сможет ли второй ему помешать? (*И.Сергеев*)

22. Семь треугольных пирамид стоят на столе. Для любых трех из них существует горизонтальная плоскость, которая пересекает их по треугольникам равной площади. Доказать, что существует плоскость, пересекающая все семь пирамид по треугольникам равной площади.

(*В.Вавилов*)

23. Дан правильный треугольник ABC. Через вершину B проводится произвольная прямая l, а через точки A и C проводятся прямые, перпендикулярные прямой l, пересекающие ее в точках D и E. Затем, если $D \neq E$, строятся правильные треугольники DEP и DET, лежащие по разные стороны от прямой l. Найдите геометрическое место точек P и T.

(*А.Савин*)

24. В стране 1993 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из любого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками. (Дорога соединяет между собой два города.) (*Е.Малинникова*)

1993–1994 г.

9 класс

25. Как-то Кролик торопился на встречу с осликом Иа-Иа, но к нему неожиданно пришли Винни-Пух и Пятачок. Будучи хорошо воспитанным, Кролик предложил гостям подкрепиться. Пух завязал салфеткой рот Пятачку и в одиночку съел 10 горшков меда и 22 банки сгущенного молока, причем горшок меда он съедал за 2 минуты, а банку молока — за минуту. Узнав, что больше ничего сладкого в доме нет, Пух попрощался и увел Пятачка. Кролик с огорчением подумал, что он бы не опоздал на встречу с осликом, если бы Пух поделился с Пятачком. Зная, что Пятачок съедает горшок меда за 5 минут, а банку молока — за 3 минуты, Кролик вычислил наименьшее время, за которое гости смогли бы уничтожить его запасы. Чему равно это время? (Банку молока и горшок меда можно делить на любые части). (*Д.Терёшин*)

26. Города A, B, C и D расположены так, что расстояние от C до A меньше расстояния от D до A, а расстояние от C до B меньше расстояния от D до B. Докажите, что расстояние от города C до любой точки прямолинейной дороги, соединяющей города A и B, меньше расстояния от города D до этой точки. (*А.Левин*)

27. Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами? (*А.Перлин*)

28. На совместной конференции партий лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбы всегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого). (*Р.Женодаров*)

29. Известно, что уравнение $ax^5 + bx^4 + c = 0$ имеет три различных корня. Докажите, что уравнение $cx^5 + bx + a = 0$ также имеет три различных корня. (*Н.Агаханов*)

30. Внутри прямого угла KLM взята точка P. Окружность S_1 с центром O_1 касается сторон LK и LP угла KLP в точках A и D соответственно, а окружность S_2 такого же радиуса с центром O_2 касается сторон угла MLP, причем стороны LP — в точке B. Оказалось, что точка O_1 лежит на отрезке AB. Пусть C — точка пересечения прямых O_2D и KL. Докажите, что BC — биссектриса угла ABD. *(А.Кочерова)*

31. Найдите все простые числа p, q, r и s такие, что их сумма — простое число. а числа $p^2 + qs$ и $p^2 + qr$ — квадраты натуральных чисел. (Числа p, q, r и s предполагаются различными.) *(Р.Женодаров)*

32. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы любые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах? *(Д.Тамаркин)*

10 класс

33. Имеется семь стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй — на треть, третий — на четверть, четвертый — на одну пятую, пятый — на одну восьмую, шестой — на одну девятую, и седьмой — на одну десятую. Разрешается переливать всю воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока он не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться заполненным

а) на одну двенадцатую; б) на одну шестую? *(Н.Агаханов)*

34. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет четыре различных действительных корня. *(С.Берлов)*

35. Окружность с центром O вписана в четырехугольник $ABCD$ и касается его непараллельных сторон BC и AD в точках E и F соответственно. Пусть прямая AO и отрезок EF пересекаются в точке K, прямая DO и отрезок EF — в точке N, а прямые BK и CN — в точке M. Докажите, что точки O, K, M и N лежат на одной окружности. *(М.Сонкин)*

36. Прямоугольник $m \times n$ разрезан на уголки:

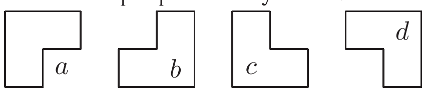


Рис. 2

Докажите, что разность между количеством уголков вида a и количеством уголков вида b делится на 3. *(Л.Емельянов)*

37. Найдите все простые числа, которые являются одновременно суммой двух простых чисел и разностью двух простых чисел. *(С.Кожухов)*

38. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 1994$. *(Н.Агаханов)*

39. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB перпендикулярна стороне CD, а сторона BC — стороне DE. Докажите, что если $AB = AE = ED = 1$, то $BC + CD < 1$. *(С.Берлов)*

40. В городе Цветочном n площадей и m улиц ($m \geqslant n + 1$). Каждая улица соединяет две площади и не проходит через другие площади. По существующей в городе традиции улица может называться либо синей, либо красной. Ежегодно в городе происходит переименование: выбирается площадь и переименовываются все выходящие из нее улицы. Докажите, что вначале можно назвать улицы так, что переименованиями нельзя добиться одинаковых названий у всех улиц города. *(С.Берлов, С.Рукшин)*

11 класс

41. Докажите, что при всех x, $0 < x < \pi/3$, справедливо неравенство
$$\sin 2x + \cos x > 1.$$
(Н.Агаханов)

42. В один из дней года оказалось, что каждый житель города сделал не более одного звонка по телефону. Докажите, что население города можно разбить не более, чем на три группы так, чтобы жители, входящие в одну группу, не разговаривали в этот день между собой по телефону. *(С.Гулько)*

43. Окружность с центром O вписана в треугольник ABC и касается его сторон AB, BC и AC в точках E, F и D соответственно. Прямые AO и CO пересекают прямую EF в точках N и M. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника OMN, точка O и точка D лежат на одной прямой. *(М.Сонкин)*

44. В вершинах выпуклого n-угольника расставлены m фишек ($m > n$). За один ход разрешается передвинуть две фишки, стоящие в одной вершине, в соседние вершины: одну — вправо, вторую — влево. Докажите, что если после нескольких ходов в каждой вершине n-угольника будет стоять столько же фишек, сколько и вначале, то количество сделанных ходов кратно n. *(И.Рубанов)*

45. См. задачу 37.

46. Функция $f(x)$ определена и удовлетворяет соотношению
$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$$
при всех $x \neq 1$. Найдите все такие функции. *(А.Калинин)*

47. На боковых ребрах SA, SB и SC правильной треугольной пирамиды $SABC$ взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны. Пусть O — центр сферы, проходящей через точки S, A, B и C_1. Докажите, что прямая SO перпендикулярна плоскости A_1B_1C. *(Д.Терёшин)*

48. Внутри круга расположены точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а на его границе — точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ так, что отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ не пересекаются. Кузнечик может перепрыгнуть из точки A_i в точку A_j, если отрезок A_iA_j не пересекается ни с одним из отрезков A_kB_k, $k \neq i, j$. Докажите, что за несколько прыжков кузнечик сможет попасть из любой точки A_p в любую точку A_q. *(С.Мисник, Д.Фон-дер-Флаас)*

1994–1995 г.

9 класс

49. Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leqslant \frac{1}{xy}\,.$$

(С.Дворянинов)

50. Можно ли расставить по кругу 1995 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом? *(А.Шаповалов)*

51. Две окружности радиусом R и r касаются прямой l в точках A и B и пересекаются в точках C и D (см. рис. 3). Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC не зависит от длины отрезка AB. *(М.Сонкин)*

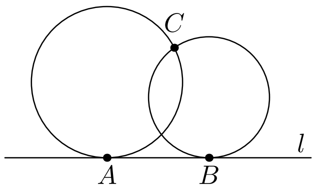


Рис. 3

52. Все стороны и диагонали правильного 12-угольника раскрашиваются в 12 цветов (каждый отрезок — одним цветом). Существует ли такая раскраска, что для любых трех цветов найдутся три вершины, попарно соединенные между собой отрезками этих цветов? *(С.Токарев)*

53. Найдите все простые p такие, что число p^2+11 имеет ровно 6 различных делителей (включая единицу и само число). *(Р.Женодаров)*

54. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (см. рис. 4). Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, вторично пересекает окружность S_1 в точке D, окружность S_2 — в точке E и прямую AB — в точке C. Докажите, что $CD = CB = CE$. *(М.Сонкин)*

55. Правильный шестиугольник со стороной 5 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1 (см. рис. 5). Назовем узлами вершины всех таких треугольников. Известно, что более половины узлов отмечено. Докажите, что найдутся пять отмеченных узлов, лежащих на одной окружности. *(Д.Кузнецов)*

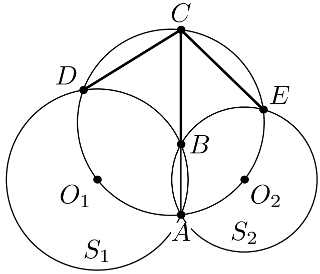


Рис. 4

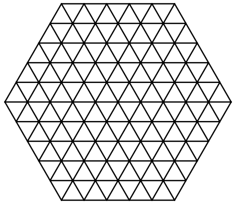


Рис. 5

56. Можно ли в таблице 11×11 расставить натуральные числа от 1 до 121 так, чтобы числа, отличающиеся друг от друга на единицу, располагались в клетках с общей стороной, а все точные квадраты попали в один столбец? *(А.Шаповалов)*

10 класс

57. Дана функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Найдите $\underbrace{f(\ldots f(f(19))\ldots)}_{95\text{ раз}}$. *(А.Белов)*

58. Натуральные числа m и n таковы, что

$$\text{НОК}(m,n) + \text{НОД}(m,n) = m + n$$

Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое. *(С.Токарев)*

59. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на медиане треугольника, проведенной из вершины B. *(А.Скопенков)*

60. На прямоугольном столе разложено несколько одинаковых квадратных листов бумаги так, что их стороны параллельны краям стола (листы могут перекрываться). Докажите, что можно воткнуть несколько булавок таким образом, что каждый лист будет прикреплен к столу ровно одной булавкой. *(А.Берзиньш, И.Изместьев)*

61. Рассматриваются всевозможные квадратичные функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, такие, что $a < b$ и $f(x) \geqslant 0$ для всех x. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\dfrac{a+b+c}{b-a}$? *(Р.Женодаров)*

62. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$. *(М.Сонкин)*

63. N^3 единичных кубиков просверлены по диагонали и плотно нанизаны на нить, после чего нить связана в кольцо (т. е. вершина первого кубика соединена с вершиной последнего). При каких N такое «ожерелье» из кубиков можно упаковать в кубическую коробку с ребром длины N?

(*Н.Авилов*)

64. Улицы города Дужинска — простые ломаные, не пересекающиеся между собой во внутренних точках. Каждая улица соединяет два перекрестка и покрашена в один из трех цветов: белый, красный или синий. На каждом перекрестке сходятся ровно три улицы, по одной каждого цвета. Перекресток называется положительным, если при его обходе против часовой стрелки цвета улиц идут в следующем порядке: белый, синий, красный, и отрицательным в противном случае. Докажите, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков кратна четырем. (*С.Дужин*)

11 класс

65. См. задачу 57.

66. В прямоугольном параллелепипеде одно из сечений является правильным шестиугольником. Докажите, что этот параллелепипед — куб.

(*Д.Терёшин, Р.Карасёв*)

67. См. задачу 52.

68. На плоскости рассматривается конечное множество равных, параллельно расположенных квадратов, причем среди любых $k+1$ квадратов найдутся два пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более чем на $2k-1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку. (*В.Дольников*)

69. Для углов α, β, γ справедливо равенство $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geqslant 2$. Докажите, что $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\sqrt{5}$. (*А.Галочкин*)

70. Числовая последовательность a_0, a_1, a_2, … такова, что при всех неотрицательных m и n $(m\geqslant n)$ выполняется соотношение

$$a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}\,(a_{2m}+a_{2n}).$$

Найдите a_{1995}, если $a_1=1$. (*О.Мусин*)

71. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (см. рис. 6). Луч O_1B пересекает S_2 в точке F, а луч O_2B пересекает S_1 в точке E. Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой EF, вторично пересекает окружности S_1 и S_2 в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN=AE+AF$.

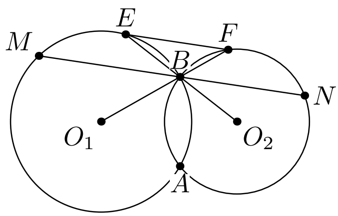


Рис. 6

(*М.Сонкин*)

72. См. задачу 64.

1995–1996 г.

8 класс

73. Мороженое стоит 2000 рублей. У Пети имеется

$$400^5 - 399^2 \cdot (400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$$

рублей. Достаточно ли у Пети денег на мороженое?[1] *(К.Кноп)*

74. Назовем билет с номером от 000000 до 999999 *отличным*, если разность некоторых двух соседних цифр его номера равна 5. Найдите число *отличных* билетов. *(А.Шаповалов)*

75. Существует ли такой выпуклый (все углы меньше $180°$) пятиугольник $ABCDE$, что все углы ABD, BCE, CDA, DEB и EAC — тупые? *(К.Кноп)*

76. На столе лежат n спичек ($n > 1$). Двое игроков по очереди снимают их со стола. Первым ходом игрок снимает со стола любое число спичек от 1 до $n - 1$, а дальше каждый раз можно брать со стола не больше спичек, чем взял предыдущим ходом партнер. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Найдите все n, при которых первый игрок может обеспечить себе выигрыш. *(И.Рубанов)*

77. Можно ли так расставить фишки в клетках доски 8×8, чтобы в любых двух столбцах количество фишек было одинаковым, а в любых двух строках — различным? *(А.Шаповалов)*

78. Точечный прожектор, находящийся в вершине B равностороннего треугольника ABC, освещает угол α. Найдите все такие значения α, не превосходящие $60°$, что при любом положении прожектора, когда освещенный угол целиком находится внутри угла ABC, из освещенного и двух неосвещенных отрезков стороны AC можно составить треугольник. *(С.Дворянинов)*

79. Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил (в уме) сумму этих чисел на их произведение. После этого Незнайка стер самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался в 3 раза больше первого. Какое число Незнайка стер? *(К.Кохась)*

80. Имеется 4 монеты, из которых 3 — настоящие, которые весят одинаково, и одна фальшивая, отличающаяся по весу от остальных. Чашечные весы без гирь таковы, что если положить на их чашки равные грузы, то любая из чашек может перевесить, если же грузы различны по массе, то обязательно перетягивает чашка с более тяжелым грузом. Как за три

[1] Напомним, что олимпиада происходила до деноминации.

взвешивания наверняка определить фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее остальных? *(С.Токарев)*

9 класс

81. Найдите все пары квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ такие, что a и b — корни второго трехчлена, c и d — корни первого. *(И.Изместьев)*

82. В треугольнике ABC, в котором $AB = BC$, на стороне AB выбрана точка D, и вокруг треугольников ADC и BDC описаны окружности S_1 и S_2 соответственно. Касательная, проведенная к S_1 в точке D, пересекает второй раз S_2 в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$. *(М.Сонкин)*

83. Пусть a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое. *(Д.Храмцов)*

84. В одном из узлов шестиугольника со стороной n, разбитого на правильные треугольники (см. рис. 7), стоит фишка. Двое играющих по очереди передвигают ее в один из соседних узлов, причем запрещается ходить в узел, в котором фишка уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре? *(Ф.Дужин)*

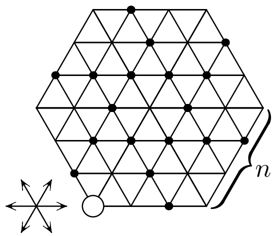


Рис. 7

85. Найдите все натуральные числа, имеющие ровно шесть делителей, сумма которых равна 3500. *(Р.Женодаров)*

86. См. задачу 78.

87. Докажите, что если $0 < a, b < 1$, то $\dfrac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \dfrac{1}{4}$. *(Л.Медников, М.Сонкин)*

88. Имеется 8 монет, 7 из которых — настоящие, которые весят одинаково, и одна фальшивая, отличающаяся по весу от остальных. Чашечные весы без гирь таковы, что если положить на их чашки равные грузы, то любая из чашек может перевесить, если же грузы различны по массе, то обязательно перетягивает чашка с более тяжелым грузом. Как за четыре взвешивания наверняка определить фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее остальных? *(С.Токарев)*

10 класс

89. Докажите, что если a, b, c — положительные числа и $ab + bc + ca > a + b + c$, то $a + b + c > 3$. *(Р.Женодаров)*

90. Верно ли, что из произвольного треугольника можно вырезать три равные фигуры, площадь каждой из которых больше четверти площади треугольника? (*С.Августинович*)

91. Дан угол с вершиной B. Построим точку M следующим образом. Возьмем произвольную равнобедренную трапецию, боковые стороны которой лежат на сторонах данного угла. Через две противоположные ее вершины проведем касательные к описанной около нее окружности. Через M обозначим точку пересечения этих касательных. Какую фигуру образуют все такие точки M? (*М.Сонкин*)

92. В каждой клетке квадратной таблицы размером $n \times n$ клеток ($n \geqslant 3$) записано число 1 или -1. Если взять любые две строки, перемножить числа, стоящие в них друг над другом и сложить n получившихся произведений, то сумма будет равна 0. Докажите, что число n делится на 4. (*В.Дольников*)

93. См. задачу 85.

94. Дан треугольник $A_0B_0C_0$. На отрезке A_0B_0 отмечены точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n, а на отрезке B_0C_0 — точки C_1, C_2, $\ldots$, C_n так, что все отрезки A_iC_{i+1} ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) параллельны между собой и все отрезки C_iA_{i+1} ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) — тоже. Отрезки C_0A_1, A_1C_2, A_2C_1 и C_1A_0 ограничивают некоторый параллелограмм, отрезки C_1A_2, A_2C_3, A_3C_2 и C_2A_1 — тоже, и т. д. Докажите, что сумма площадей всех $n-1$ получившихся параллелограммов меньше половины площади треугольника $A_0B_0C_0$. (*Л.Медников, М.Сонкин*)

95. См. задачу 88.

96. На прямой через равные промежутки отмечены 1996 точек. Петя раскрашивает половину из них в красный цвет, а остальные — в синий. Затем Вася разбивает их на пары «красная»–«синяя» так, чтобы сумма расстояний между точками в парах была максимальной. Докажите, что этот максимум не зависит от того, какую раскраску сделал Петя. (*И.Изместьев*)

11 класс

97. См. задачу 81.

98. Назовем медианой системы $2n$ точек плоскости прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой точек этой системы поровну. Какое наименьшее количество медиан может быть у системы из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? (*А.Шаповалов*)

99. Длина наибольшей стороны треугольника равна 1. Докажите, что три круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ с центрами в вершинах покрывают весь треугольник. (*В.Дольников*)

100. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю? *(И.Рубанов)*

101. Дана функция $f(x) = \big|4 - 4|x|\big| - 2$. Сколько решений имеет уравнение $f(f(x)) = x$? *(Н.Нецветаев)*

102. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых различных натуральных a, b, c и d среди чисел

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)},\quad \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)},\quad \frac{(a-b)(d-c)}{(a-d)(b-c)},\quad \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)},$$

есть по крайней мере два числа, равных n. *(С.Дужин)*

103. В треугольнике ABC взята точка O такая, что

$$\angle COA = \angle B + 60^\circ,\quad \angle COB = \angle A + 60^\circ,\quad \angle AOB = \angle C + 60^\circ.$$

Докажите, что если из отрезков AO, BO, CO можно составить треугольник, то из высот треугольника ABC тоже можно составить треугольник и эти треугольники подобны. *(К.Кноп)*

104. Существует ли бесконечная периодическая последовательность, состоящая из букв a и b, такая, что при одновременной замене всех букв a на aba и букв b на bba она переходит в себя (возможно, со сдвигом)? (Последовательность называется периодической, если существует такое натуральное n, что для всякого $i = 1, 2, \ldots$ i-й член этой последовательности равен $(i+n)$-му.) *(А.Белов)*

1996—1997 г.

8 класс

105. Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа. *(Н.Агаханов)*

106. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза. *(А.Шаповалов)*

107. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и K, а на стороне AC — точки E и M так, что $DA + AE = KC + CM = AB$. Докажите, что угол между прямыми DM и KE равен 60°. *(В.Произволов)*

108. На предприятии трудятся 50 000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчиненных равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издает приказ и выдает копию этого приказа каждому своему непосредственному подчиненному (если такие есть). Далее, каждый день работник берет все полученные им в предыдущие день приказы и либо раздает их копии всем своим непосредственным подчиненным, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по учреждению не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников. (*Е.Малинникова*)

109. Отрезки AB, BC и CA — соответственно диагонали квадратов K_1, K_2, K_3. Докажите, что если треугольник ABC — остроугольный, то он полностью покрывается квадратами K_1, K_2 и K_3. (*Н.Агаханов*)

110. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1? (*А.Шаповалов*)

111. Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p+q)^2$. (*С.Токарев*)

112. В Мехико для ограничения транспортного потока для каждой частной автомашины устанавливаются два дня недели, в которые она не может выезжать на улицы города. Семье требуется каждый день иметь в распоряжении не менее 10 машин. Каким наименьшим количеством машин может обойтись семья, если ее члены могут сами выбирать запрещенные дни для своих автомобилей? (*И.Ященко*)

9 класс

113. Правильный 1997-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что среди них ровно один — остроугольный. (*А.Шаповалов*)

114. На доске записаны числа $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются два числа. Если их сумма делится на три, то побеждает тот, кто делал первый ход, если нет — то его партнер. Кто из них выиграет при правильной игре? (*А.Шаповалов*)

115. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза. (*А.Шаповалов*)

116. Назовем «сочетанием цифр» несколько цифр, записанных подряд. В стране Роботландии некоторые сочетания цифр объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных сочетаний конечное число и существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний. Докажите, что существует бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний. *(А.Белов)*

117. Дан набор, состоящий из 1997 чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0. *(А.Фомин)*

118. См. задачу 110.

119. Дан треугольник ABC. Точка B_1 делит пополам длину ломаной ABC (составленной из отрезков AB и BC), точка C_1 делит пополам длину ломаной ACB, точка A_1 делит пополам длину ломаной CAB. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые l_A, l_B, l_C, параллельные биссектрисам углов BAC, ABC и ACB соответственно. Докажите, что прямые l_A, l_B и l_C пересекаются в одной точке. *(М.Сонкин)*

120. См. задачу 112.

10 класс

121. Микрокалькулятор «МК-97» умеет над числами, занесенными в память, производить только три операции:

а) проверять, равны ли выбранные два числа;

б) складывать выбранные числа;

в) по выбранным числам a и b находить корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а если корней нет, выдавать сообщение об этом.

Результаты всех действий заносятся в память. Первоначально в памяти записано одно число x. Как с помощью «МК-97» узнать, равно ли это число единице? *(И.Рубанов)*

122. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности S_1, а вершины B и D — на окружности S_2, то точка пересечения его диагоналей лежит на прямой MN. *(Л.Смирнова)*

123. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что число $2^n - 1$ делится на число $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m(2^m - 1)$. *(О.Тен)*

124. Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить 3 его грани, имеющие общую вершину, шестнадцатью бумажными прямоугольными полосками размером 1×3? *(Л.Емельянов)*

125. Дан набор, состоящий из 100 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе положительно. *(А.Фомин)*

126. В городе Мехико в целях ограничения транспортного потока для каждой частной автомашины устанавливаются один день в неделю, в который она не может выезжать на улицы города. Состоятельная семья из

10 человек подкупила полицию, и для каждой машины они называют 2 дня, один из которых полиция выбирает в качестве «невыездного» дня. Какое наименьшее количество машин нужно купить семье, чтобы каждый день каждый член семьи мог самостоятельно ездить, если утверждение «невыездных» дней для автомобилей идет последовательно?

(И.Ященко)

127. Точки O_1 и O_2 — центры соответственно описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружности, описанные около треугольников ABC и O_1O_2A, пересекаются в точках A и D. Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около треугольника O_1O_2A. *(М.Сонкин)*

128. Докажите, что если

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{y+b}+\sqrt{z+c}=\sqrt{y+a}+\sqrt{z+b}+\sqrt{x+c}=\\=\sqrt{z+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{y+c}$$

для некоторых a, b, c, x, y, z, то $x = y = z$ или $a = b = c$. *(М.Сонкин)*

11 класс

129. См. задачу 121.

130. Все вершины треугольника ABC лежат внутри квадрата K. Докажите, что если все их отразить симметрично относительно точки пересечения медиан треугольника ABC, то хотя бы одна из полученных трех точек окажется внутри K. *(А.Белов)*

131. Обозначим через $S(m)$ сумму цифр натурального числа m. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что

$$S(3^n) \geqslant S(3^{n+1}).$$ *(В.Дольников)*

132. См. задачу 124.

133. Члены Государственной Думы образовали фракции так, что для любых двух фракций A и B (не обязательно различных) $\overline{A \cup B}$ — тоже фракция (через $\overline{C}$ обозначается множество всех членов Думы, не входящих в C). Докажите, что для любых двух фракций A и B $A \cup B$ — также фракция. *(А.Скопенков)*

134. Докажите, что если $1 < a < b < c$, то

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0.$$ *(С.Токарев)*

135. Существуют ли выпуклая n-угольная ($n \geqslant 4$) и треугольная пирамиды такие, что четыре трехгранных угла n-угольной пирамиды равны трехгранным углам треугольной пирамиды? *(Н.Агаханов, Р.Карасёв)*

136. Для каких α существует функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, отличная от константы, такая, что

$$f(\alpha(x+y)) = f(x) + f(y)\ ?$$ *(Л.Емельянов)*

1997–1998 г.

8 класс

137. Существуют ли n-значные числа M и N такие, что все цифры M — четные, все цифры N — нечетные, каждая цифра от 0 до 9 встречается в десятичной записи M или N хотя бы один раз, и M делится на N?

(*Н.Агаханов*)

138. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно. Могут ли лучи AM и AN делить угол BAD на три равные части? (*Д.Кузнецов*)

139. В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз. (*И.Изместьев*)

140. На плоскости дано множество из $n \geqslant 9$ точек. Для любых 9 его точек можно выбрать две окружности так, что все эти точки окажутся на выбранных окружностях. Докажите, что все n точек лежат на двух окружностях. (*В.Дольников*)

141. Числа от 1 до 9 разместите в кружках фигуры (см. рис. 8) так, чтобы сумма четырех чисел, находящихся в кружках-вершинах всех квадратов (их шесть), была постоянной. (*Н.Авилов*)

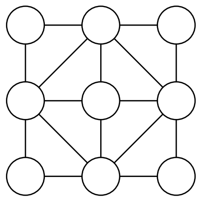


Рис. 8

142. У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что все овцы собрались у одного крестьянина. (*А.Шаповалов*)

143. Пусть O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, S_A, S_B, S_C — окружности с центром O, касающиеся сторон BC, CA, AB соответственно. Докажите, что сумма трех углов: между касательными к S_A, проведенными из точки A, к S_B — из точки B и к S_C — из точки C, равна 180°. (*М.Сонкин*)

144. На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, отдает голос за себя (если он является кандидатом) и за тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается *хорошим*, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и *нехорошим* в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется *нехорошим*. (*А.Разборов*)

9 класс

145. Длины сторон некоторого треугольника и диаметр вписанной в него окружности являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите все такие треугольники. (*Я.Губин*)

146. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая пересекает эти окружности в точках A, B, C, D, как показано на рис. 9. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$. (*П.Кожевников*)

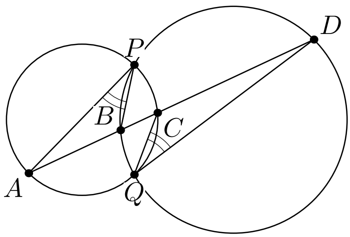


Рис. 9

147. Назовем десятизначное число *интересным*, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел? (*И.Рубанов, А.Воронецкий*)

148. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клеток и связная фигура неизвестной формы, состоящая из 101 клетки. Какое наибольшее число таких фигур можно с гарантией вырезать из этого квадрата? Фигура, составленная из клеток, называется *связной*, если любые две ее клетки можно соединить цепочкой ее клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону. (*И.Рубанов*)

149. Корни двух приведенных квадратных трехчленов — отрицательные целые числа, причем один из этих корней — общий. Могут ли значения этих трехчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98? (*И.Рубанов*)

150. На концах клетчатой полоски размером 1×101 клеток стоят две фишки: слева — фишка первого игрока, справа — второго. За ход разрешается сдвинуть свою фишку в направлении противоположного края полоски на 1, 2, 3 или 4 клетки. При этом разрешается перепрыгивать через фишку соперника, но запрещается ставить свою фишку на одну клетку с ней. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края полоски. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник? (*О.Подлипский*)

151. Дан биллиард в форме правильного 1998-угольника $A_1A_2\ldots A_{1998}$. Из середины стороны A_1A_2 выпустили шар, который, отразившись последовательно от сторон $A_2A_3, A_3A_4, \ldots, A_{1998}A_1$ (по закону «угол падения равен углу отражения»), вернулся в исходную точку. Докажите, что траектория шара — правильный 1998-угольник. (*П.Кожевников*)

152. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами? (*Д.Храмцов*)

10 класс

153. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b\cos x$. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $f(x) = 0$ и $f(f(x)) = 0$ имеют совпадающие непустые множества действительных корней. (*Н.Агаханов*)

154. В остроугольном треугольнике ABC через центр O описанной окружности и вершины B и C проведена окружность S. Пусть OK — диаметр окружности S, D и E — соответственно точки ее пересечения с прямыми AB и AC. Докажите, что $ADKE$ — параллелограмм. (*М.Сонкин*)

155. Докажите, что из любого конечного множества точек на плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на две части меньшего диаметра. (Диаметр — это максимальное расстояние между точками множества.) (*В.Дольников*)

156. В первые 1999 ячеек компьютера в указанном порядке записаны числа: $1, 2, 4, \ldots, 2^{1998}$. Два программиста по очереди уменьшают за один ход на единицу числа в пяти различных ячейках. Если в одной из ячеек появляется отрицательное число, то компьютер ломается и сломавший его оплачивает ремонт. Кто из программистов может уберечь себя от финансовых потерь независимо от ходов партнера, и как он должен для этого действовать? (*Р.Женодаров*)

157. Решите уравнение $\{(x+1)^3\} = x^3$, где $\{z\}$ — дробная часть числа z, т. е. $\{z\} = z - [z]$. (*А.Шаповалов*)

158. В пятиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5$ проведены биссектрисы $l_1, l_2, \ldots, l_5$ углов $A_1, A_2, \ldots, A_5$ соответственно. Биссектрисы l_1 и l_2 пересекаются в точке B_1, l_2 и l_3 — в точке B_2 и т. д., l_5 и l_1 пересекаются в точке B_5. Может ли пятиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5$ оказаться выпуклым?

(*Л.Смирнова, Д.Тарасенко*)

159. Куб со стороной n $(n \geqslant 3)$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба? (*Д.Храмцов*)

160. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» — 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число? *(М.Островский)*

11 класс

161. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т. е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т. д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел? *(А.Шаповалов)*

162. Окружность S с центром O и окружность S' пересекаются в точках A и B. На дуге окружности S, лежащей внутри S' взята точка C. Точки пересечения AC и BC с S', отличные от A и B, обозначим E и D соответственно. Докажите, что прямые DE и OC перпендикулярны. *(М.Сонкин)*

163. См. задачу 155.

164. Имеется таблица $n \times n$, в $n-1$ клетках которой записаны единицы, а в остальных клетках — нули. С таблицей разрешается проделывать следующую операцию: выбрать клетку, вычесть из числа, стоящего в этой клетке, единицу, а ко всем остальным числам, стоящим в одной строке или в одном столбце с выбранной клеткой, прибавить единицу. Можно ли из этой таблицы с помощью указанных операций получить таблицу, в которой все числа равны? *(О.Подлипский)*

165. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и умноженная на 5 прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{1998}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 1998^7? *(Л.Емельянов)*

166. Из бесконечной шахматной доски вырезали многоугольник со сторонами, идущими по сторонам клеток. Отрезок периметра многоугольника называется черным, если примыкающая к нему изнутри многоугольника клетка — черная, соответственно белым, если клетка белая. Пусть A — количество черных отрезков на периметре, B — количество белых, и пусть многоугольник состоит из a черных и b белых клеток. Докажите, что $A - B = 4(a - b)$. *(И.Изместьев)*

167. Даны два правильных тетраэдра с ребрами длины $\sqrt{2}$, переводящихся один в другой при центральной симметрии. Пусть Φ — множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объем фигуры Φ. *(А.Белов)*

168. В последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, каждое натуральное число встречается хотя бы один раз, и для любых различных n и m выполнено неравенство

$$\frac{1}{1998} < \frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < 1998.$$

Докажите, что тогда $|a_n - n| < 2\,000\,000$ для всех натуральных n.

(Д.Храмцов)

1998–1999 г.

8 класс

169. Отец с двумя сыновьями отправились навестить бабушку, которая живет в 33 км от города. У отца есть мотороллер, скорость которого 25 км/ч, а с пассажиром — 20 км/ч (двух пассажиров на мотороллере перевозить нельзя). Каждый из братьев идет по дороге со скоростью 5 км/ч. Докажите, что все трое могут добраться до бабушки за 3 часа.

(А.Шаповалов)

170. К натуральному числу A приписали справа три цифры. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до A. Найдите A. *(И.Акулич)*

171. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым AB, BC, CA. Определите, в каком отношении точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника ABC. *(А.Шаповалов)*

172. Имеется 40 одинаковых газовых баллонов, значения давления газа в которых нам неизвестны и могут быть различны. Разрешается соединять любые баллоны друг с другом в количестве, не превосходящем заданного натурального числа k, а затем разъединять их; при этом давление газа в соединяемых баллонах устанавливается равным среднему арифметическому давлений в них до соединения. При каком наименьшем k существует способ уравнивания давлений во всех 40 баллонах независимо от первоначального распределения давлений в баллонах? *(И.Акулич)*

173. Докажите, что числа от 1 до 15 нельзя разбить на две группы: A из 2 чисел и B из 13 чисел так, чтобы сумма чисел в группе B была равна произведению чисел в группе A. *(Н.Агаханов)*

174. Дан треугольник ABC. Точка A_1 симметрична вершине A относительно прямой BC, а точка C_1 симметрична вершине C относительно прямой AB. Докажите, что если точки A_1, B и C_1 лежат на одной прямой и $C_1B = 2A_1B$, то угол CA_1B — прямой. *(Н.Агаханов)*

175. В коробке лежит полный набор костей домино. Два игрока по очереди выбирают из коробки по одной кости и выкладывают их на стол, прикладывая к уже выложенной цепочке с любой из двух сторон по правилам домино. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре? *(Д.Храмцов)*

176. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов полностью закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$? *(А.Шаповалов)*

9 класс

177. По кругу выписаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до N, $N \geqslant 2$. При этом для любой пары соседних чисел имеется хотя бы одна цифра, встречающаяся в десятичной записи каждого из них. Найдите наименьшее возможное значение N. *(Д.Кузнецов)*

178. В треугольнике ABC на стороне AC нашлись такие точки D и E, что $AB = AD$ и $BE = EC$ (E между A и D). Точка F — середина дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что точки B, E, D, F лежат на одной окружности. *(С.Берлов)*

179. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что если

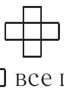
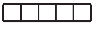
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z,$$

то для любого натурального k выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geqslant x^k + y^k + z^k.$$

(С.Злобин)

180. Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке $1 \times \times 1$ которого нарисована одна из четырех стрелок (вверх, вниз, вправо, влево). Верхняя сторона правой верхней клетки — выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелкой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на $90°$ по часовой стрелке. Если фишка должна сделать ход, выводящий ее за пределы квадрата 8×8, она остается на месте, а стрелка также поворачивается на $90°$ по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта. *(М.Антонов)*

181. Все клетки клетчатой плоскости окрашены в 5 цветов так, что в любой фигуре вида  все цвета различны. Докажите, что и в любой фигуре вида  все цвета различны. *(С.Берлов)*

182. См. задачу 175.

183. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается 1 раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.) *(С.Токарев)*

184. В треугольнике ABC ($AB > BC$) K и M — середины сторон AB и AC, O — точка пересечения биссектрис. Пусть P — точка пересечения прямых KM и CO, а точка Q такова, что $QP \perp KM$ и $QM || BO$. Докажите, что $QO \perp AC$. *(М.Сонкин)*

10 класс

185. См. задачу 170.

186. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY, такие что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой. *(П.Кожевников)*

187. В пространстве даны n точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой, никакие четыре не лежат в одной плоскости). Через каждые три из них проведена плоскость. Докажите, что какие бы $n-3$ точки в пространстве ни взять, найдется плоскость из проведенных, не содержащая ни одной из этих $n-3$ точек. *(В.Дольников, С.Игонин)*

188. См. задачу 180.

189. Существуют ли 10 различных целых чисел таких, что все суммы, составленные из 9 из них — точные квадраты? *(Р.Садыков, Е.Черепанов)*

190. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Пусть K — точка на окружности, диаметрально противоположная точке C_1, D — точка пересечения прямых B_1C_1 и A_1K. Докажите, что $CD = CB_1$. *(М.Евдокимов)*

191. Каждый голосующий на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии n кандидатов. На избирательном участке находится $n+1$ урна. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит по крайней мере один бюллетень и при всяком выборе $(n+1)$-го бюллетеня по одному из каждой урны найдется кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата. *(В.Дольников)*

192. Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что на каждом отрезке числовой прямой длины 1999 есть отмеченное число. Докажите, что найдется пара отмеченных чисел, одно из которых делится на другое. *(С.Берлов)*

11 класс

193. О функции $f(x)$, заданной на всей действительной прямой, известно, что при любом $a > 1$ функция $f(x)+f(ax)$ непрерывна на всей прямой. Докажите, что $f(x)$ также непрерывна на всей прямой. *(А.Голованов)*

194. См. задачу 179.

195. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей — молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали. *(С.Берлов)*

196. Многогранник описан около сферы. Назовем его грань *большой*, если проекция сферы на плоскость грани целиком попадает в грань. Докажите, что больших граней не больше 6. *(М.Евдокимов)*

197. Существуют ли действительные числа a, b и c такие, что при всех действительных x и y выполняется неравенство

$$|x+a| + |x+y+b| + |y+c| > |x| + |x+y| + |y|?$$ *(В.Сендеров)*

198. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырех сторон от которой (т. е. сверху, снизу, слева и справа) имеются клетки одного с ней цвета (не обязательно соседние с этой клеткой). *(А.Голованов, Е.Сопкина)*

199. См. задачу 184.

200. Для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках. Докажите, что существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке. *(А.Голованов)*

1999–2000 г.

8 класс

201. Ненулевые числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^2b^2(a^2b^2+4) = 2(a^6+b^6).$$

Докажите, что хотя бы одно из них иррационально. *(Н.Агаханов)*

202. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета. *(С.Дужин)*

203. Какое наименьшее число сторон может иметь нечетноугольник (не обязательно выпуклый), который можно разрезать на параллелограммы? (*Л.Емельянов*)

204. Два пирата делят добычу, состоящую из двух мешков монет и алмаза, действуя по следующим правилам. Вначале первый пират забирает себе из любого мешка несколько монет и перекладывает из этого мешка в другой такое же количество монет. Затем также поступает второй пират (выбирая мешок, из которого он берет монеты, по своему усмотрению) и т. д. до тех пор, пока можно брать монеты по этим правилам. Пирату, взявшему монеты последним, достается алмаз. Кому достанется алмаз, если каждый из пиратов старается получить его? Дайте ответ в зависимости от первоначального количества монет в мешках. (*Д.Храмцов*)

205. Даны 8 гирек весом $1, 2, \ldots, 8$ грамм, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он? (*А.Шаповалов*)

206. Путь от платформы A до платформы B электропоезд прошел за X минут ($0 < X < 60$). Найдите X, если известно, что как в момент отправления от A, так и в момент прибытия в B угол между часовой и минутной стрелками равнялся X градусам. (*С.Токарев*)

207. Биссектрисы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая, симметричная AB относительно CE, пересекает прямую, симметричную BC относительно AD, в точке K. Докажите, что $KO \perp \perp AC$. (*М.Сонкин*)

208. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (т. е. $1, 2, 4, 8, \ldots$). Для каждого города A статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих A с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100 000. Докажите, что статистик ошибся. (*И.Рубанов*)

9 класс

209. Миша решил уравнение $x^2 + ax + b = 0$ и сообщил Диме набор из четырех чисел — два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие — коэффициенты). Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными? (*М.Евдокимов*)

210. Существуют ли различные взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c, большие 1 и такие, что 2^a+1 делится на b, 2^b+1 делится на c, а 2^c+1 делится на a? *(В.Сендеров)*

211. На прямой имеется $2n+1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными. *(С.Берлов)*

212. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Через точку A окружности S_1 проведены прямые AM и AN, пересекающие S_2 в точках B и C, а через точку D окружности S_2 — прямые DM и DN, пересекающие S_1 в точках E и F, причем A, E, F лежат по одну сторону от прямой MN, а D, B, C — по другую (см. рис. 10). Докажите, что если $AB = DE$, то точки A, F, C и D лежат на одной окружности, положение центра которой не зависит от выбора точек A и D. *(М.Сонкин, Д.Терёшин)*

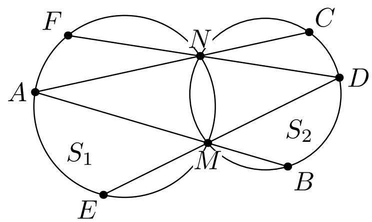


Рис. 10

213. В таблице 99×101 расставлены кубы натуральных чисел, как показано на рис. 11. Докажите, что сумма всех чисел в таблице делится на 200. *(Л.Емельянов)*

1^3	2^3	3^3	$\cdots$
2^3	3^3	4^3	$\cdots$
3^3	4^3	5^3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Рис. 11

214. Среди 2000 внешне неразличимых шариков половина — алюминиевые массой 10г, а остальные — дюралевые массой 9,9г. Требуется выделить две кучки шариков так, чтобы массы кучек были различны, а число шариков в них — одинаково. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать? *(С.Токарев)*

215. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника BCD, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ACD, пересекает сторону BC в точке N ($M, N \neq C$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника CMN. Докажите, что прямая OD перпендикулярна стороне AB. *(М.Сонкин)*

216. Клетки таблицы 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2, в котором число белых клеток нечетно.

(Р.Садыков, Е.Черепанов)

10 класс

217. Рассматриваются 2000 чисел: 11, 101, 1001, ... Докажите, что среди этих чисел не менее 99% составных. *(В.Произволов, В.Сендеров)*

218. Среди пяти внешне одинаковых монет 3 настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету? *(Л.Емельянов)*

219. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным $60°$. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABD. Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K. Найдите отношение AO/OK. *(С.Берлов)*

220. При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали? *(В.Замятин)*

221. Существует ли функция $f(x)$, определенная при всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяющая неравенству

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2?$$

(Е.Знак, Жюри)

222. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечетно, и $\frac{a_n}{2}$, если a_n четно. Докажите, что при любом нечетном $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа. *(А.Храбров)*

223. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ провели биссектрисы l_a, l_b, l_c, l_d внешних углов A, B, C, D соответственно. Точки пересечения прямых l_a и l_b, l_b и l_c, l_c и l_d, l_d и l_a обозначили через K, L, M, N. Известно, что 3 перпендикуляра, опущенных из K на AB, из L на BC, из M на CD пересекаются в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный. *(П.Кожевников)*

224. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более N различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечетной длины. Докажите, что страну можно разделить на $2N+2$ республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой. *(В.Дольников, Д.Карпов)*

11 класс

225. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, что уравнение

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{10}) = (x+a_1)(x+a_2)\cdot\ldots\cdot(x+a_{10})$$

будет иметь ровно 5 различных действительных корней. *(Н.Агаханов)*

226. Высота и радиус основания цилиндра равны 1. Каким наименьшим числом шаров радиуса 1 можно целиком покрыть этот цилиндр? *(И.Рубанов)*

227. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{2000}$ действительных чисел такова, что для любого натурального n, $1 \leqslant n \leqslant 2000$, выполняется равенство
$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2.$$
Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.

(С.Тухвебер)

228. См. задачу 220.

229. Для неотрицательных чисел x и y, не превосходящих 1, докажите, что
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+xy}}\,.$$
(А.Храбров)

230. Окружность, вписанная в треугольник ABC, имеет центр O и касается стороны AC в точке K. Вторая окружность — также с центром O, пересекает все стороны треугольника ABC. Пусть E и F — соответственно ее точки пересечения со сторонами AB и BC, ближайшие к вершине B; B_1 и B_2 — точки ее пересечения со стороной AC, причем B_1 — ближе к A. Докажите, что точки B, K и точка P пересечения отрезков B_2E и B_1F лежат на одной прямой. *(М.Сонкин)*

231. Даны числа $1, 2, \ldots, N$, каждое из которых окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые три числа, одно из которых равно полусумме двух других. При каких N всегда можно сделать все числа белыми? *(С.Токарев)*

232. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более N различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечетной длины. Докажите, что страну можно разделить на $N+2$ республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой.

(В.Дольников, Д.Карпов, С.Берлов)

2000–2001 г.

8 класс

233. *Можно ли числа 1, 2, ..., 10 расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы каждое из них, начиная со второго, отличалось от предыдущего на целое число процентов?* *(Р.Женодаров)*

234. N цифр — единицы и двойки — расположены по кругу. *Изображенным* назовем число, образуемое несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N все четырехзначные числа, запись которых содержит только цифры 1 и 2, могут оказаться среди изображенных?

(С.Волчёнков)

235. Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а все углы различны. Докажите, что максимальный и минимальный углы прилегают к одной стороне пятиугольника. *(Д.Джукич)*

236. *Уголком* размера $n \times m$, где $m, n \geqslant 2$, называется фигура, получаемая из прямоугольника размера $n \times m$ клеток удалением прямоугольника размера $(n-1) \times (m-1)$ клеток. Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрашивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить одну клетку дважды нельзя. Проигрывает тот, после чьего хода все клетки уголка окажутся окрашенными. Кто из игроков победит при правильной игре? *(Д.Храмцов)*

237. Пусть a, b, c, d, e и f — некоторые числа, причем $a \cdot c \cdot e \neq 0$. Известно, что значения выражений $|ax+b|+|cx+d|$ и $|ex+f|$ равны при всех значениях x. Докажите, что $ad = bc$. *(Р.Женодаров)*

238. Натуральное число n назовем *хорошим*, если каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$ и $n+3$ делится на сумму своих цифр. (Например, $n = 60398$ — хорошее.) Обязательно ли предпоследней цифрой хорошего числа, оканчивающегося восьмеркой, будет девятка? *(В.Замков)*

239. Можно ли клетки доски 5×5 покрасить в 4 цвета так, чтобы клетки, стоящие на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов, были покрашены не менее чем в 3 цвета? *(О.Подлипский)*

240. Докажите, что любой треугольник можно разрезать не более чем на 3 части, из которых складывается равнобедренный треугольник. *(Л.Емельянов)*

9 класс

241. См. задачу 233.

242. Петя и Коля играют в следующую игру: они по очереди изменяют один из коэффициентов a или b квадратного трехчлена $f = x^2 + ax + b$: Петя на 1, Коля — на 1 или на 3. Коля выигрывает, если после хода одного из игроков получается трехчлен, имеющий целые корни. Верно ли, что Коля может выиграть при любых начальных целых коэффициентах a и b независимо от игры Пети? *(Н.Агаханов)*

243. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = NC$, Q — точка пересечения отрезков AN и CM. Докажите, что DQ — биссектриса угла D. *(Л.Емельянов)*

244. Мишень представляет собой треугольник, разбитый тремя семействами параллельных прямых на 100 равных правильных треугольничков с единичными сторонами. Снайпер стреляет по мишени. Он целится в треугольничек и попадает либо в него, либо в один из соседних с ним по стороне. Он видит результаты своей стрельбы и может выбирать, когда стрельбу заканчивать. Какое наибольшее число треугольничков он может с гарантией поразить ровно пять раз? *(Ю.Лифшиц)*

245. В выпуклом пятиугольнике выбраны две точки. Докажите, что можно выбрать четырехугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что в него попадут обе выбранные точки. *(В.Дольников)*

246. Существует ли такое натуральное число, что произведение всех его натуральных делителей (включая 1 и само число) оканчивается ровно на 2001 ноль? *(А.Храбров)*

247. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B, K — произвольная точка на меньшей из двух дуг AB этой окружности. На прямой OB взята точка L такая, что прямые OA и KL параллельны. Пусть M — точка пересечения окружности ω, описанной около треугольника KLB, с прямой AK, отличная от K. Докажите, что прямая OM касается окружности ω. *(С.Берлов, П.Кожевников)*

248. Саша написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат. *(А.Голованов)*

10 класс

249. Длины сторон многоугольника равны a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \ldots + a_n)$. Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон многоугольника, B — сумма длин остальных его сторон, то $f(A) = f(B)$. *(Н.Агаханов)*

250. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность s_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD (s_1 вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK). Окружность s_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD (s_2 вторично пересекает диагональ AC на отрезке KC). Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей s_1 и s_2, будут параллельны между собой. *(Т.Емельянова)*

251. Опишите все способы покрасить каждое натуральное число в один из трех цветов так, чтобы выполнялось условие: если числа a, b и c (не обязательно различные) удовлетворяют условию $2000(a + b) = c$, то они либо все одного цвета, либо трех разных цветов. *(Ю.Лифшиц)*

252. Проведено три семейства параллельных прямых, по 10 прямых в каждом. Какое наибольшее число треугольников они могут вырезать из плоскости? *(Ю.Лифшиц)*

253. Даны целые числа a, b и c, $c \neq b$. Известно, что квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ и $(c - b)x^2 + (c - a)x + (a + b)$ имеют общий корень (не обязательно целый). Докажите, что $a + b + 2c$ делится на 3. *(А.Храбров)*

254. Дан треугольник ABC. На прямой AC отмечена точка B_1 так, что $AB = AB_1$, при этом B_1 и C находятся по одну сторону от A. Через точки C, B_1 и основание биссектрисы угла A треугольника ABC проводится окружность ω, вторично пересекающая окружность, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что касательная, проведенная к ω в точке Q, параллельна AC. *(Л.Емельянов)*

255. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем *ладейно связным*, если из любой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце. *(И.Певзнер)*

256. На окружности расположена тысяча непересекающихся дуг, и на каждой из них написаны два натуральных числа. Сумма чисел каждой дуги делится на произведение чисел дуги, следующей за ней по часовой стрелке. Каково наибольшее возможное значение наибольшего из написанных чисел? *(В.Сендеров)*

11 класс

257. Найдите все простые числа p и q такие, что $p + q = (p - q)^3$. *(Р.Женодаров)*

258. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет 3 различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ — 7 различных корней? *(Н.Агаханов, О.Подлипский)*

259. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC, и прямая l касается окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD, DC и MN, касается прямой l. *(Н.Седракян)*

260. См. задачу 252.

261. Дана последовательность $\{x_k\}$ такая, что $x_1 = 1$, $x_{n+1} = n \sin x_n + 1$. Докажите, что последовательность непериодична. *(А.Голованов)*

262. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней, также пересекаются. *(Фольклор)*

263. На плоскости дано бесконечное множество точек S, при этом в любом квадрате 1×1 лежит конечное число точек из множества S. Докажите, что найдутся две разные точки A и B из S такие, что для любой другой точки X из S выполняются неравенства:

$$|XA|,\ |XB| \geqslant 0{,}999|AB|.$$

(Р.Карасёв)

264. Докажите, что в любом множестве, состоящем из 117 попарно различных трехзначных чисел, можно выбрать 4 попарно непересекающихся подмножества, суммы чисел в которых равны. *(Д.Храмцов, Г.Челноков)*

2001–2002 г.

8 класс

265. Можно ли все клетки таблицы 9×2002 заполнить натуральными числами так, чтобы сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке были бы простыми числами? *(О.Подлипский)*

266. Клетки квадрата 9×9 окрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется или клетка, у которой ровно два красных соседа по углу, или клетка, у которой ровно два синих соседа по углу (или и то, и другое). *(Ю.Лифшиц)*

267. Имеется 11 пустых коробок. За один ход можно положить по одной монете в какие-то 10 из них. Играют двое, ходят по очереди. Побеждает тот, после хода которого впервые в одной из коробок окажется 21 монета. Кто выигрывает при правильной игре? *(И.Рубанов)*

268. Дан треугольник ABC с попарно различными сторонами. На его сторонах построены внешним образом правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ не может быть правильным. *(Ю.Лифшиц)*

269. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9; либо, вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002? *(Н.Агаханов)*

270. Каждую сторону выпуклого четырехугольника продолжили в обе стороны и на всех восьми продолжениях отложили равные между собой отрезки. Оказалось, что получившиеся 8 точек — внешние концы построенных отрезков — различны и лежат на одной окружности. Докажите, что исходный четырехугольник — квадрат. *(Н.Агаханов)*

271. По шоссе мимо наблюдателя проехали «Москвич», «Запорожец» и двигавшаяся им навстречу «Нива». Известно, что когда с наблюдателем поравнялся «Москвич», то он был равноудален от «Запорожца» и

«Нивы», а когда с наблюдателем поравнялась «Нива», то она была равноудалена от «Москвича» и «Запорожца». Докажите, что «Запорожец» в момент проезда мимо наблюдателя был равноудален от «Нивы» и «Москвича». (Скорости автомашин считаем постоянными. В рассматриваемые моменты равноудаленные машины находились по разные стороны от наблюдателя.) *(С.Токарев)*

272. Среди 18 деталей, выставленных в ряд, какие-то три подряд стоящие весят по 99 г, а все остальные — по 100 г. Двумя взвешиваниями на весах со стрелкой определите все 99-граммовые детали. *(С.Токарев)*

9 класс

273. См. задачу 266.

274. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке. *(Н.Агаханов)*

275. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка O — центр описанной окружности. Точка M лежит на отрезке BO, точка M' симметрична M относительно середины AB. Точка K — точка пересечения $M'O$ и AB. Точка L на стороне BC такова, что $\angle CLO = \angle BLM$. Докажите, что точки O, K, B, L лежат на одной окружности. *(С.Злобин)*

276. На плоскости расположено $\left[\frac{4}{3}n\right]$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с n прямоугольниками. Доказать, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми прямоугольниками. *(В.Дольников)*

277. Можно ли расставить по кругу числа $1, 2, \ldots, 60$ в таком порядке, чтобы сумма любых двух чисел, между которыми находится одно число, делилась на 2, сумма любых двух чисел, между которыми находятся два числа, делилась на 3, ..., сумма любых двух чисел, между которыми находятся шесть чисел, делилась на 7? *(И.Рубанов)*

278. Пусть A' — точка на одной из сторон трапеции $ABCD$ такая, что прямая AA' делит площадь трапеции пополам. Точки B', C', D' определяются аналогично. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ симметричны относительно середины средней линии трапеции $ABCD$. *(Л.Емельянов)*

279. На отрезке $[0, 2002]$ отмечены его концы и точка с координатой d, где d — взаимно простое с 1001 число. Разрешается отметить середину любого отрезка с концами в отмеченных точках, если ее координата целая. Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, отметить все целые точки на отрезке? *(И.Богданов, О.Подлипский)*

280. См. задачу 272.

10 класс

281. Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, с разностью 2, обладающей свойством: a_k^2+1 — простое при всех $k = 1, 2, \ldots, n$? *(Н.Агаханов)*

282. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше $m^2 + 1$ точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдется $m+1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.

(В.Дольников)

283. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M (см. рис. 12). Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB. *(С.Берлов)*

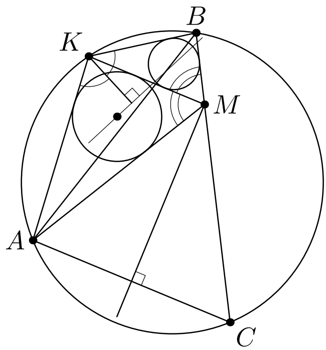


Рис. 12

284. Набор чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяет условиям: $a_0 = 0$, $0 \leqslant a_{k+1} - a_k \leqslant 1$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

(А.Храбров)

285. На оси Ox произвольно расположены различные точки $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 3$. Построены все параболы, задаваемые приведенными квадратными трехчленами и пересекающие ось Ox в данных точках (и не пересекающие ось в других точках). Пусть $y = f_1, \ldots, y = f_m$ — функции, задающие эти параболы. Докажите, что парабола $y = f_1 + \ldots + f_m$ пересекает ось Ox в двух точках. *(Н.Агаханов)*

286. См. задачу 278.

287. На отрезке $[0, 2002]$ отмечены его концы и $n - 1 > 0$ целых точек так, что длины отрезков, на которые разбился отрезок $[0, 2002]$, взаимно просты в совокупности (т. е. не имеют общего делителя, большего 1). Разрешается разделить любой отрезок с отмеченными концами на n равных частей и отметить точки деления, если они все целые. (Точку можно отметить второй раз, при этом она остается отмеченной.) Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, отметить все целые точки на отрезке?

(И.Богданов, О.Подлипский)

288. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить все клетки доски размера 10×10 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находились клетки не более, чем пяти различных цветов? *(Д.Храмцов)*

11 класс

289. Действительные числа x и y таковы, что для любых различных простых нечетных p и q число $x^p + y^q$ рационально. Докажите, что x и y — рациональные числа. *(Н.Агаханов)*

290. Высота четырехугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей ее основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку. *(Н.Агаханов)*

291. Набор чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяет условиям: $a_0 = 0$, $a_{k+1} \geqslant a_k + 1$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

(А.Храбров)

292. Каждая клетка клетчатой плоскости раскрашена в один из n^2 цветов так, что в любом квадрате из $n \times n$ клеток встречаются все цвета. Известно, что в какой-то строке встречаются все цвета. Докажите, что существует столбец, раскрашенный ровно в n цветов. *(И.Богданов, Г.Челноков)*

293. Пусть $P(x)$ — многочлен нечетной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$. *(И.Рубанов)*

294. На плоскости даны $n > 1$ точек. Двое по очереди соединяют еще не соединенную пару точек вектором одного из двух возможных направлений. Если после очередного хода какого-то игрока сумма всех нарисованных векторов нулевая, то выигрывает второй; если же очередной ход невозможен, а нулевой суммы не было, то выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре? *(Н.Агаханов)*

295. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть l_A, l_B, l_C, l_D — биссектрисы внешних углов этого четырехугольника. Прямые l_A и l_B пересекаются в точке K, прямые l_B и l_C — в точке L, прямые l_C и l_D — в точке M, прямые l_D и l_A — в точке N. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников ABK и CDM, касаются внешним образом, то и окружности, описанные около треугольников BCL и DAN касаются внешним образом. *(Л.Емельянов)*

296. На отрезке $[0, N]$ отмечены его концы и еще 2 точки так, что длины отрезков, на которые разбился отрезок $[0, N]$, целые и взаимно просты в совокупности. Если нашлись две отмеченные точки A и B такие, что расстояние между ними кратно 3, то можно разделить отрезок AB на 3 равных части, отметить одну из точек деления и стереть одну из точек A, B. Верно ли, что за несколько таких действий можно отметить любую наперед заданную целую точку отрезка $[0, N]$? (*И.Богданов, О.Подлипский*)

2002–2003 г.

8 класс

297. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе? (*А.Голованов*)

298. По каждой из двух пересекающихся прямых с постоянными скоростями, не меняя направления, ползет по жуку. Известно, что проекции жуков на ось OX никогда не совпадают (ни в прошлом, ни в будущем). Докажите, что проекции жуков на ось OY обязательно совпадут или совпадали раньше. (*Л.Емельянов*)

299. Двое по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает на доску число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число $2a$, либо число $a + 1$, если на доске уже написано число a. При этом запрещается выписывать числа, которые уже написаны на доске. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000. Кто выигрывает при правильной игре? (*О.Подлипский*)

300. Докажите, что произвольный треугольник можно разрезать на три многоугольника, один из которых должен быть тупоугольным треугольником, так, чтобы потом сложить из них прямоугольник. (Переворачивать части можно). (*О.Дмитриев*)

301. В вершинах кубика написали числа от 1 до 8, а на каждом ребре — модуль разности чисел, стоящих в его концах. Какое наименьшее количество различных чисел может быть написано на ребрах? (*В.Сендеров*)

302. Для некоторых натуральных чисел a, b, c и d выполняются равенства
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}.$$
Докажите, что $a = c$ и $b = d$. (*В.Сендеров*)

303. В треугольнике ABC угол C — прямой. На стороне AC нашлась точка D, а на отрезке BD — точка K такие, что $\angle ABC = \angle KAD = \angle AKD$. Докажите, что $BK = 2DC$. (*С.Иванов*)

304. Набор из 2003 положительных чисел таков, что для любых двух входящих в него чисел a и b ($a > b$) хотя бы одно из чисел $a + b$ или $a - b$ тоже входит в набор. Докажите, что если данные числа упорядочить по возрастанию, то разности между соседними числами окажутся одинаковыми. (*И.Рубанов*)

9 класс

305. Докажите, что стороны любого неравнобедренного треугольника можно либо все увеличить, либо все уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы получился прямоугольный треугольник. (*В.Сендеров*)

306. См. задачу 298.

(*Л.Емельянов*)

307. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) средняя линия, параллельная стороне BC, пересекается со вписанной окружностью в точке F, не лежащей на основании AC. Докажите, что касательная к окружности в точке F пересекается с биссектрисой угла C на стороне AB.

(*Л.Емельянов*)

308. Два игрока по очереди выписывают на доске в ряд слева направо произвольные цифры. Проигрывает игрок, после хода которого одна или несколько цифр, записанных подряд, образуют число, делящееся на 11. Кто из игроков победит при правильной игре? (*Д.Храмцов*)

309. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Обозначим через A', B', C' точки, симметричные I относительно сторон треугольника ABC. Докажите, что еслн окружность, описанная около треугольника $A'B'C'$, проходит через вершину B, то $\angle ABC = 60°$.

(*Л.Емельянов*)

310. На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, $\ldots$, 99 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце? (*С.Берлов*)

311. Докажите, что из любых шести четырехзначных чисел, взаимно простых в совокупности, всегда можно выбрать пять чисел, также взаимно простых в совокупности. (*Д.Храмцов*)

312. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом. (*П.Кожевников*)

10 класс

313. Найдите все углы α, для которых набор чисел $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ совпадает с набором $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$. (*Н.Агаханов*)

314. См. задачу 307.

315. На встречу выпускников пришло 45 человек. Оказалось, что любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы друг с другом. Какое наибольшее число пар знакомых могло быть среди участвовавших во встрече? (*С.Берлов*)

316. На плоскости отметили n $(n > 2)$ прямых, проходящих через одну точку O таким образом, что для любых двух из них найдется такая отмеченная прямая, которая делит пополам одну из пар вертикальных углов, образованных этими прямыми. Докажите, что проведенные прямые делят полный угол на равные части. (*И.Рубанов*)

317. Найдите все x, при которых уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ (относительно z) имеет действительное решение при любом y. (*Д.Храмцов*)

318. Пусть A_0 — середина стороны BC треугольника ABC, а A' — точка касания с этой стороной вписанной окружности. Построим окружность ω с центром в A_0 и проходящую через A'. На других сторонах построим аналогичные окружности. Докажите, что если ω касается описанной окружности на дуге BC, не содержащей A, то еще одна из построенных окружностей касается описанной окружности. (*Л.Емельянов*)

319. Докажите, что из произвольного множества трехзначных чисел, включающего не менее четырех чисел, взаимно простых в совокупности, можно выбрать четыре числа, также взаимно простых в совокупности. (*Д.Храмцов*)

320. В наборе из 17 внешне одинаковых монет две фальшивых, отличающихся от остальных по весу. Известно, что суммарный вес двух фальшивых монет вдвое больше веса настоящей. Всегда ли можно ли определить пару фальшивых монет, совершив 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? (Определить, какая из фальшивых тяжелее, не требуется.) (*И.Богданов, Ю.Хромин*)

11 класс

321. Найдите все простые p, для каждого из которых существуют такие натуральные x и y, что $p^x = y^3 + 1$. (*В.Сендеров*)

322. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана такая точка K, что $KD = DC$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle KDC$, $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle KBC$. Докажите, что $\angle KDA = \angle BCA$ или $\angle KDA = \angle KBA$. (*С.Берлов*)

323. Функции $f(x)-x$ и $f(x^2)-x^6$ определены при всех положительных x и возрастают. Докажите, что функция $f(x^3) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^6$ также возрастает при всех положительных x. *(А.Голованов)*

324. На плоскости даны точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Докажите, что точки B_i можно перенумеровать так, что для всех $i \neq j$ угол между векторами $\overline{A_iA_j}$ и $\overline{B_iB_j}$ — острый или прямой. *(Р.Карасёв)*

325. Квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$. *(И.Рубанов)*

326. См. задачу 310.

327. Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера ω касается грани ABC в точке T. Сфера ω' касается грани ABC в точке T' и продолжений граней ABD, BCD, CAD. Докажите, что прямые AT и AT' симметричны относительно биссектрисы угла BAC. *(А.Заславский)*

328. См. задачу 320.

2003–2004 г.

8 класс

329. По двум пересекающимся дорогам с равными постоянными скоростями движутся автомобили «Ауди» и «БМВ». Оказалось, что как в 17.00, так и в 18.00 «БМВ» находился в два раза дальше от перекрестка, чем «Ауди». В какое время «Ауди» мог проехать перекресток? *(Н.Агаханов)*

330. Имеется набор гирь со следующими свойствами:

1) В нем есть 5 гирь, попарно различных по весу.

2) Для любых двух гирь найдутся две другие гири того же суммарного веса.

Какое наименьшее число гирь может быть в этом наборе? *(И.Рубанов)*

331. В остроугольном треугольнике расстояние от середины любой стороны до противоположной вершины равно сумме расстояний от нее до сторон треугольника. Докажите, что этот треугольник — равносторонний. *(Н.Агаханов)*

332. В ячейки куба $11 \times 11 \times 11$ поставлены по одному числа $1, 2, \ldots \ldots 1331$. Из одного углового кубика в противоположный угловой отправляются два червяка. Каждый из них может проползать в соседний по грани кубик, при этом первый может проползать, если число в соседнем кубике отличается на 8, второй — если отличается на 9. Существует ли такая расстановка чисел, что оба червяка смогут добраться до противоположного углового кубика? *(О.Подлипский)*

333. Может ли в наборе из шести чисел $\left\{a; b; c; \frac{a^2}{b}; \frac{b^2}{c}; \frac{c^2}{a}\right\}$, где a, b, c — положительные числа, оказаться ровно три различных числа?

(В.Сендеров)

334. Пусть $ABCD$ — четырехугольник с параллельными сторонами AD и BC; M и N — середины его сторон AB и CD соответственно. Прямая MN делит пополам отрезок, соединяющий центры окружностей, описанных около треугольников ABC и ADC. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм. *(Н.Агаханов)*

335. Набор пятизначных чисел $\{N_1, \ldots, N_k\}$ таков, что любое пятизначное число, все цифры которого идут в возрастающем порядке, совпадает хотя бы в одном разряде хотя бы с одним их чисел N_1, …, N_k. Найдите наименьшее возможное значение k. *(С.Токарев)*

336. Можно ли во всех точках плоскости с целыми координатами записать натуральные числа так, чтобы три точки с целыми координатами лежали на одной прямой тогда и только тогда, когда записанные в них числа имели общий делитель, бóльший единицы? *(А.Храбров)*

9 класс

337. См. задачу 330.

338. В треугольнике ABC медианы AA', BB', CC' продлили до пересечения с описанной окружностью в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. Известно, что точка M пересечения медиан треугольника ABC делит отрезок AA_0 пополам. Докажите, что треугольник $A_0B_0C_0$ — равнобедренный. *(Л.Емельянов)*

339. См. задачу 332.

340. Три натуральных числа таковы, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что эти три числа имеют общий делитель, бóльший единицы. *(С.Берлов)*

341. В клетки таблицы 100×100 записаны ненулевые цифры. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали, делятся на 11. Могло ли так оказаться, что ровно 99 стозначных чисел, записанных по вертикали, также делятся на 11? *(О.Подлипский)*

342. Положительные числа x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите, что

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z.$$ *(Н.Агаханов)*

343. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M, а внутри треугольника AMD — точка N таким образом, что $\angle MNA + \angle MCB = \angle MND + \angle MBC = 180°$. Докажите, что прямые MN и AB параллельны.

(С.Берлов)

344. Мишень «бегущий кабан» находится в одном из n окошек, расположенных в ряд. Окошки закрыты занавесками так, что для стрелка мишень все время остается невидимой. Чтобы поразить мишень, достаточно выстрелить в окошко, в котором она в момент выстрела находится. Если мишень находится не в самом правом окошке, то сразу после выстрела она перемещается на одно окошко вправо; из самого правого окошка мишень никуда не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка поразить мишень? *(С.Токарев)*

10 класс

345. Сумма положительных чисел a, b, c равна $\pi/2$. Докажите, что $\cos a + \cos b + \cos c > \sin a + \sin b + \sin c$. *(В.Сендеров)*

346. См. задачу 338.

347. См. задачу 340.

348. На плоскости отмечено $N \geqslant 3$ различных точек. Известно, что среди попарных расстояний между отмеченными точками встречаются не более n различных расстояний. Докажите, что $N \leqslant (n+1)^2$. *(В.Дольников)*

349. Уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с целыми ненулевыми коэффициентами a_1, a_2, …, a_n имеет n различных целых корней. Докажите, что если любые два корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты. *(Н.Агаханов)*

350. Набор пятизначных чисел $\{N_1, \ldots, N_k\}$ таков, что любое пятизначное число, все цифры которого идут в неубывающем порядке, совпадает хотя бы в одном разряде хотя бы с одним их чисел N_1, …, N_k. Найдите наименьшее возможное значение k. *(С.Токарев)*

351. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. В точке A к ω_1 и ω_2 проведены соответственно касательные l_1 и l_2. Точки T_1 и T_2 выбраны соответственно на окружностях ω_1 и ω_2 так, что угловые меры дуг T_1A и AT_2 равны (величина дуги окружности считается по часовой стрелке). Касательная t_1 в точке T_1 к окружности ω_1 пересекает l_2 в точке M_1. Аналогично, касательная t_2 в точке T_2 к окружности ω_2 пересекает l_1 в точке M_2. Докажите, что середины отрезков M_1M_2 находятся на одной прямой, не зависящей от положения точек T_1, T_2. *(Л.Емельянов)*

352. Даны натуральные числа $p < k < n$. На бесконечной клетчатой плоскости отмечены некоторые клетки так, что в любом прямоугольнике $(k+1) \times n$ (n клеток по горизонтали, $k+1$ — по вертикали) отмечено ровно p клеток. Докажите, что существует прямоугольник $k \times (n+1)$ ($n+1$ клетка по горизонтали, k — по вертикали), в котором отмечено не менее $p+1$ клетки. *(С.Берлов)*

11 класс

353. В языке жителей Банановой Республики количество слов превышает количество букв в их алфавите. Докажите, что найдется такое натуральное k, для которого можно выбрать k различных слов, в записи которых используется ровно k различных букв. *(С.Волчёнков)*

354. Три окружности ω_1, ω_2, ω_3 радиуса r проходят через точку S и касаются внутренним образом окружности ω радиуса R $(R > r)$ в точках T_1, T_2, T_3 соответственно. Докажите, что прямая T_1T_2 проходит через вторую (отличную от S) точку пересечения окружностей ω_1 и ω_2. *(Т.Емельянова)*

355. Пусть многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень. *(Д.Храмцов)*

356. В некотором государстве было 2004 города, соединенных дорогами так, что из любого города можно было добраться до любого другого. Известно, что при запрещенном проезде по любой из дорог, по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого. Министр транспорта и министр внутренних дел по очереди вводят на дорогах, пока есть возможность, одностороннее движение (на одной дороге за ход), причем министр, после хода которого из какого-либо города стало невозможно добраться до какого-либо другого, немедленно уходит в отставку. Первым ходит министр транспорта. Может ли кто-либо из министров добиться отставки другого независимо от его игры? *(А.Пастор)*

357. См. задачу 341.

358. *Расстоянием* между числами $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ и $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ назовем максимальное i, для которого $a_i \neq b_i$. Все пятизначные числа выписаны друг за другом в некотором порядке. Какова при этом минимально возможная сумма расстояний между соседними числами? *(Р.Карасёв)*

359. При каких натуральных n для любых чисел α, β, γ, являющихся величинами углов остроугольного треугольника, справедливо неравенство
$$\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma < 0?$$
(В.Сендеров)

360. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера S_1, проходящая через точки A, B, C, пересекает ребра AD, BD, CD в точках K, L, M соответственно; сфера S_2, проходящая через точки A, B, D, пересекает ребра AC, BC, DC в точках P, Q, M соответственно. Оказалось, что $KL \parallel PQ$. Докажите, что биссектрисы плоских углов KMQ и LMP совпадают. *(С.Берлов)*

2004–2005 г.

8 класс

361. В 12 часов дня «Запорожец» и «Москвич» находились на расстоянии 90 км и начали двигаться навстречу друг другу с постоянной скоростью. Через два часа они снова оказались на расстоянии 90 км. Незнайка утверждает, что «Запорожец» до встречи с «Москвичом» и «Москвич» после встречи с «Запорожцем» проехали в сумме 60 км. Докажите, что он не прав. (*Е.Куликов*)

362. В средней клетке полоски 1×2005 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают ее: сначала первый игрок передвигает фишку на одну клетку в любую сторону, затем второй передвигает ее на 2 клетки, 1-й — на 4 клетки, 2-й — на 8 и т. д. (k-й сдвиг происходит на 2^{k-1} клеток). Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто может выиграть независимо от игры соперника? (*О.Подлипский*)

363. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, делящееся на 11? (*Р.Женодаров, И.Богданов*)

364. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B' и C' симметричны соответственно вершинам B и C относительно прямых AC и AB. Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC', отличная от A. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA. (*В.Филимонов*)

365. Известно, что сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N четно. (*И.Богданов*)

366. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке P. Перпендикуляр к BP, проходящий через точку A пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что прямые PQ и CD параллельны. (*А.Акопян*)

367. Найдите все такие пары (x, y) натуральных чисел, что $x + y = a^n$, $x^2 + y^2 = a^m$ для некоторых натуральных a, n, m. (*В.Сендеров*)

368. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов. (*И.Богданов, Г.Челноков*)

9 класс

369. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль? (*Р.Женодаров, А.Храбров*)

370. См. задачу 363.

371. Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2 \times 2 \times 2$ числа $1, 2, 3, \ldots, 24$ (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Сможет ли первый игрок ему помешать? (*Л.Емельянов*)

372. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$. (*А.Бадзян*)

373. См. задачу 365.

374. Каждую вершину трапеции отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Докажите, что если получившиеся точки образуют четырехугольник, то он также является трапецией.

(*Л.Емельянов*)

375. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из натуральных чисел, что произведение $a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+9}$ делится на сумму $a_n + \ldots + a_{n+9}$ при любом натуральном n? (*В.Сендеров*)

376. В 100 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 34 ящика, что в них окажется не менее трети всех яблок и не менее трети всех апельсинов. (*И.Богданов, Г.Челноков*)

10 класс

377. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников. (*Н.Агаханов*)

378. Докажите, что для любого $x > 0$ и натурального n выполнено неравенство

$$1 + x^{n+1} \geqslant \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}\,.$$

(*А.Храбров*)

379. См. задачу 372.

380. Даны $N \geqslant 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем *однотонной*, если нет двух таких точек A и B, что от A до B можно добраться и только по красным стрелкам, и только по синим. Найдите количество однотонных раскрасок. (*И.Богданов, Г.Челноков*)

381. Арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots$, состоящая из натуральных чисел, такова, что при любом n произведение $a_n \cdot a_{n+31}$ делится на 2005.

Можно ли утверждать, что все члены прогрессии делятся на 2005?

(В.Сендеров)

382. См. задачу 374.

383. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что при любом натуральном n число $a^n + b^n$ является точной $(n+1)$-й степенью.

(В.Сендеров)

384. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник, стороны которого образуют углы в 45° с линиями сетки, а вершины не лежат на линиях сетки. Может ли каждую сторону прямоугольника пересекать нечетное число линий сетки? *(С.Волчёнков)*

11 класс

385. Найдите все пары чисел $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие равенству $\sin x + \sin y = \sin(xy)$. *(И.Богданов)*

386. Известно, что существует число S, такое, что если $a+b+c+d = S$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = S$ (a, b, c, d отличны от нуля и единицы), то $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = S$. Найти S. *(Р.Женодаров)*

387. См. задачу 380.

388. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную AB, в точке C'. Докажите, что отрезок CC' перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC. *(Л.Емельянов)*

389. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k. *(А.Голованов)*

390. Каждую вершину выпуклого четырехугольника площади S отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Обозначим площадь получившегося четырехугольника через S'. Докажите, что $\frac{S'}{S} < 3$. *(Л.Емельянов)*

391. Каких точных квадратов, не превосходящих 10^{20}, больше: тех, у которых семнадцатая с конца цифра — 7, или тех, у которых семнадцатая с конца цифра — 8? *(А.Голованов)*

392. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов. *(И.Богданов, Г.Челноков, Е.Куликов)*

2005–2006 г.

8 класс

393. Найдите какое-нибудь девятизначное число N, состоящее из различных цифр, такое, что среди всех чисел, получающихся из N вычеркиванием семи цифр, было бы не более одного простого. Докажите, что найденное число подходит. (Если полученное вычеркиванием цифр число начинается на ноль, то ноль тоже вычеркивается.) (*О.Подлипский*)

394. Двое играют в такую игру. В начале по кругу стоят числа 1, 2, 3, 4. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Может ли второй ему помешать?

(*П.Мартынов*)

395. В круговых автогонках участвовали четыре гонщика. Их машины стартовали одновременно из одной точки и двигались с постоянными скоростями. Известно, что после начала гонок для любых трех машин нашелся момент, когда они встретились. Докажите, что после начала гонок найдется момент, когда встретятся все 4 машины. (Гонки считаем бесконечно долгими по времени.)

(*И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Г.Челноков*)

396. Каждая деталь конструктора «Юный паяльщик» — это скобка в виде буквы «П», состоящая из трех единичных отрезков. Можно ли из деталей этого конструктора спаять полный проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$? (Каркас состоит из 27 точек, соединенных единичными отрезками; любые две соседние точки должны быть соединены ровно одним проволочным отрезком.) (*Л.Емельянов*)

397. На доске записано произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100}$, где $a_1, \ldots, a_{100}$ — натуральные числа. Рассмотрим 99 выражений, каждое из которых получается заменой одного из знаков умножения на знак сложения. Известно, что значения ровно 32 из этих выражений четные. Какое наибольшее количество четных чисел среди $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ могло быть? (*Р.Женодаров*)

398. В клетчатом квадрате 101×101 каждая клетка внутреннего квадрата 99×99 покрашена в один из десяти цветов (клетки, примыкающие к границе квадрата, не покрашены). Может ли оказаться, что в каждом квадрате 3×3 в цвет центральной клетки покрашена еще ровно одна клетка? (*Н.Агаханов*)

399. Медиану AA_0 треугольника ABC отложили от точки A_0 перпендикулярно стороне BC во внешнюю сторону треугольника. Обозначим второй конец построенного отрезка через A_1. Аналогично строятся точки B_1 и C_1. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если углы треугольника ABC равны $30°$, $30°$ и $120°$. *(Л.Емельянов)*

400. При изготовлении партии из $N \geqslant 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать? *(К.Кноп, Л.Емельянов)*

9 класс

401. См. задачу 393.

402. В каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записано одно из чисел 1, 2, 3, 4 так, что каждое число встречается хотя бы один раз. Назовем клетку *правильной*, если количество различных чисел, записанных в четыре соседние (по стороне) с ней клетки, равно числу, записанному в эту клетку. Могут ли все клетки плоскости оказаться правильными? *(Н.Агаханов)*

403. Известно, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 6$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 0$. Докажите, что $x_1x_2\ldots x_6 \leqslant \frac{1}{2}$. *(А.Храбров)*

404. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC, пересекается с прямой A_0C_0 в точке P. Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC. *(Л.Емельянов)*

405. См. задачу 397.

406. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD и высота BE. Докажите, что угол CED больше $45°$. *(М.Мурашкин)*

407. См. задачу 400.

408. Число N, не делящееся на 81, представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел, делящихся на 3. Докажите, что оно также представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел, не делящихся на 3. *(П.Козлов)*

10 класс

409. Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника. *(М.Мурашкин)*

410. Назовем раскраску доски 8×8 в три цвета *хорошей*, если в любом уголке из пяти клеток присутствуют клетки всех трех цветов. (Уголок из пяти клеток — это фигура, получающаяся из квадрата 3×3 вырезанием квадрата 2×2.) Докажите, что количество хороших раскрасок не меньше, чем 6^8. *(О.Подлипский)*

411. См. задачу 404.

412. Даны $n > 1$ приведенных квадратных трехчленов $x^2 - a_1x + b_1$, $\ldots$, $x^2 - a_nx + b_n$, причем все $2n$ чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ различны. Может ли случиться, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ является корнем одного из этих трехчленов? *(А.Бадзян)*

413. Докажите, что для каждого x такого, что $\sin x \neq 0$, найдется такое натуральное n, что $|\sin nx| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. *(И.Богданов, А.Храбров)*

414. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному. *(Л.Емельянов)*

415. При каких натуральных n найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа a и b, что оба числа $a + b$ и $a^n + b^n$ — целые? *(В.Сендеров)*

416. У выпуклого многогранника $2n$ граней ($n \geqslant 3$), и все грани являются треугольниками. Какое наибольшее число вершин, в которых сходится ровно 3 ребра, может быть у такого многогранника? *(А.Гарбер)*

11 класс

417. См. задачу 409.

418. Произведение квадратных трехчленов $x^2 + a_1x + b_1$, $x^2 + a_2x + b_2$, $\ldots$, $x^2 + a_nx + b_n$ равно многочлену $P(x) = x^{2n} + c_1x^{2n-1} + c_2x^{2n-2} + \ldots$ $\ldots + c_{2n-1}x + c_{2n}$, где коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ положительны. Докажите, что для некоторого k ($1 \leqslant k \leqslant n$) коэффициенты a_k и b_k положительны. *(В.Сендеров)*

419. В гоночном турнире 12 этапов и n участников. После каждого этапа все участники в зависимости от занятого места k получают баллы a_k (числа a_k натуральны и $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$). При каком наименьшем n устроитель турнира может выбрать числа $a_1, \ldots, a_n$ так, что после предпоследнего этапа при любом возможном распределении мест хотя бы двое участников имели шансы занять первое место. *(М.Мурашкин)*

420. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают его стороны в точках A_1 и C_1, а описанную окружность этого треугольника — в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямые A_1C_1 и A_0C_0 пересекаются в точке P. Докажите, что отрезок, соединяющий P с центром вписанной окружности треугольника ABC, параллелен AC. *(Л.Емельянов)*

421. См. задачу 413.

422. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $(B'C'D')$ параллельна плоскости (BCD). (*А.Бадзян*)

423. Докажите, что если натуральное число N представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, делящихся на 3, то оно также представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, не делящихся на 3. (*П.Козлов*)

424. Какое минимальное количество клеток можно закрасить черным в белом квадрате 300×300, чтобы никакие три черные клетки не образовывали уголок, а после закрашивания любой белой клетки это условие нарушалось? (*И.Богданов, О.Подлипский*)

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ

1992–1993 г.

9 класс

425. Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются квадратами. Может ли при этом число $5n+3$ быть простым? (*Е.Гладкова*)

426. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причем $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$. (*С.Берлов*)

427. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трехчленов $x^2 f\left(\frac{1}{x}+1\right)$ или $(x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right)$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трехчлена x^2+4x+3 получить трехчлен $x^2+ +10x+9$? (*А.Перлин*)

428. В семейном альбоме есть десять фотографий. На каждой из них изображены три человека: в центре стоит мужчина, слева от мужчины — его сын, а справа — его брат. Какое наименьшее количество различных людей может быть изображено на этих фотографиях, если известно, что все десять мужчин, стоящих в центре, различны? (*С.Конягин*)

429. Целые числа x, y и z таковы, что

$$(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z.$$

Докажите, что число $x+y+z$ делится на 27. (*Н.Агаханов*)

430. Внутри окружности расположен выпуклый четырехугольник, продолжения сторон которого пересекают ее в точках A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1 и D_2 (см. рис. 13). Докажите, что если $A_1B_2 = B_1C_2 = C_1D_2 = D_1A_2$, то четырехугольник, образованный прямыми A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2, можно вписать в окружность. (*Д.Терёшин*)

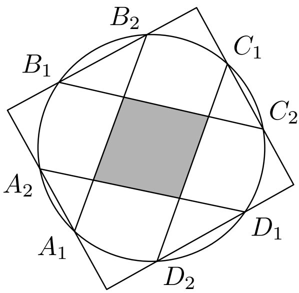


Рис. 13

431. Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на любой горизонтали, вертикали и диагонали находилось четное число фишек? (*С.Зайцев*)

432. На доске написано n выражений вида $*x^2+*x+*=0$ (n — нечетное число). Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешается заменить одну из звездочек числом, не равным нулю. Через $3n$ ходов получится n квадратных уравнений. Первый игрок стремится к тому, чтобы как можно большее число этих уравнений не имело корней, а второй хочет ему помешать. Какое наибольшее число уравнений, не имеющих корней, может получить первый игрок независимо от игры второго? *(И.Рубанов)*

10 класс

433. Длины сторон треугольника — простые числа. Докажите, что его площадь не может быть целым числом. *(Д.Митькин)*

434. Из центра симметрии двух равных пересекающихся окружностей проведены два луча, пересекающие окружности в четырех точках, не лежащих на одной прямой. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности. *(Л.Купцов)*

435. См. задачу 427.

436. За круглым столом сидит компания из тридцати человек. Каждый из них либо дурак, либо умный. Всех сидящих спрашивают: «Кто Ваш сосед справа — умный или дурак?» В ответ умный говорит правду, а дурак может сказать как правду, так и ложь. Известно, что количество дураков не превосходит F. При каком наибольшем значении F всегда можно, зная эти ответы, указать на умного человека в этой компании? *(О.Ляшко)*

437. См. задачу 429.

438. Верно ли, что любые два прямоугольника равной площади можно расположить на плоскости так, что любая горизонтальная прямая, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по отрезку той же длины? *(Д.Терёшин)*

439. Квадратная доска разделена сеткой горизонтальных и вертикальных прямых на n^2 клеток со стороной 1. При каком наибольшем n можно отметить n клеток так, чтобы любой прямоугольник площади не менее n со сторонами, идущими по линиям сетки, содержал хотя бы одну отмеченную клетку? *(Д.Фон-дер-Флаас)*

440. Назовем *усреднением* последовательности $\{a_k\}$ действительных чисел последовательность $\{a'_k\}$ с общим членом $a'_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$. Рассмотрим последовательности: $\{a_k\}$, $\{a'_k\}$ — ее усреднение, $\{a''_k\}$ — усреднение последовательности $\{a'_k\}$, и т. д. Если все эти последовательности состоят из целых чисел, то будем говорить, что последовательность $\{a_k\}$ — *хорошая*. Докажите, что если последовательность $\{x_k\}$ — хорошая, то последовательность $\{x_k^2\}$ — тоже хорошая. *(Д.Тамаркин)*

11 класс

441. См. задачу 425.

442. Два прямоугольных треугольника расположены на плоскости так, что их медианы, проведенные к гипотенузам, параллельны. Докажите, что угол между некоторым катетом одного треугольника и некоторым катетом другого треугольника вдвое меньше угла между их гипотенузами.

(*К.Фельдман*)

443. Найдите все функции $f(x)$, определенные при всех положительных x, принимающие положительные значения и удовлетворяющие при любых положительных x и y равенству $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$. (*С.Токарев*)

444. Докажите, что существует такое натуральное число n, что если правильный треугольник со стороной n разбить прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных треугольников со стороной 1, то среди вершин этих треугольников можно выбрать $1993n$ точек, никакие три из которых не являются вершинами правильного треугольника (не обязательно со сторонами, параллельными сторонам исходного треугольника).

(*С.Августинович, Д.Фон-дер-Флаас*)

445. Найдите все четверки действительных чисел, в каждой из которых любое число равно произведению каких-либо двух других чисел.

(*Д.Митькин*)

446. В строку записаны в некотором порядке натуральные числа от 1 до 1993. Над строкой производится следующая операция: если на первом месте стоит число k, то первые k чисел в строке переставляются в обратном порядке. Докажите, что через несколько таких операций на первом месте обязательно окажется число 1. (*Д.Терёшин*)

447. В турнире по теннису n участников хотят провести парные (двое на двое) матчи так, чтобы каждый из участников имел своим противником каждого из остальных ровно в одном матче. При каких n возможен такой турнир? (*С.Токарев*)

448. Докажите, что если два прямоугольных параллелепипеда имеют равные объемы, то их можно расположить в пространстве так, что любая горизонтальная плоскость, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по многоугольнику той же площади. (*Д.Терёшин*)

1993–1994 г.

9 класс

449. Докажите, что если $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$, то $x+y=0$.

(*А.Галочкин*)

450. Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке F. Прямая l касается S_1 и S_2 в точках A и B соответственно. Прямая, параллельная прямой l, касается S_2 в точке C и пересекает S_1 в двух точках. Докажите, что точки A, F и C лежат на одной прямой. (*А.Калинин*)

451. На столе лежат три кучки спичек. В первой кучке находится 100 спичек, во второй — 200, а в третьей — 300. Двое играют в такую игру.

Ходят по очереди, за один ход игрок должен убрать одну из кучек, а любую из оставшихся разделить на две непустые части. Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер? *(К.Кохась)*

452. На прямой отмечены n различных синих точек и n различных красных точек. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы попарных расстояний между точками разного цвета. *(О.Мусин)*

453. Докажите тождество

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+\ldots+\frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)}=$$
$$=\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)}+\ldots+\frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}.$$ *(Р.Женодаров)*

454. Натуральные числа от 1 до 1000 по одному выписали на карточки, а затем накрыли этими карточками какие-то 1000 клеток прямоугольника 1×1994. Если соседняя справа от карточки с числом n клетка свободна, то за один ход ее разрешается накрыть карточкой с числом $n+1$. Докажите, что нельзя сделать более полумиллиона таких ходов. *(Д.Карпов)*

455. Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) такова, что на ее сторонах AD и BC существуют точки P и Q соответственно, удовлетворяющие условиям: $\angle APB = \angle CPD$, $\angle AQB = \angle CQD$. Докажите, что точки P и Q равноудалены от точки пересечения диагоналей трапеции. *(М.Смуров)*

456. Плоскость разбита двумя семействами параллельных прямых на единичные квадратики. Назовем *каемкой* квадрата $n\times n$, состоящего из квадратиков разбиения, объединение тех квадратиков, которые хотя бы одной из своих сторон примыкают изнутри к его границе. Докажите, что существует ровно один способ покрытия квадрата 100×100, состоящего из квадратиков разбиения, неперекрывающимися каемками пятидесяти квадратов. (Каемки могут и не содержаться в квадрате 100×100.) *(А.Перлин)*

10 класс

457. Даны три квадратных трехчлена: $P_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$, $P_2(x) = x^2+p_2x+q_2$ и $P_3(x) = x^2+p_3x+q_3$. Докажите, что уравнение $|P_1(x)| + |P_2(x)| = |P_3(x)|$ имеет не более восьми корней. *(А.Голованов)*

458. См. задачу 451.

459. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, m_a, m_b и m_c — длины медиан, проведенных к этим сторонам, D — диаметр окружности, описанной около треугольника. Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\leqslant 6D.$$ *(Д.Терёшин)*

460. В правильном $(6n+1)$-угольнике K вершин покрашено в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с одноцветными вершинами не зависит от способа раскраски. *(Д.Тамаркин)*

461. Докажите, что для натуральных чисел k, m и n справедливо неравенство

$$[k,m]\cdot[m,n]\cdot[n,k] \geqslant [k,m,n]^2$$

(здесь через $[x,y,\ldots]$ обозначено наименьшее общее кратное чисел $x,y,\ldots$). *(А.Голованов)*

462. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве целых чисел, не превосходящих по модулю 1000. Обозначим через m число пар (x,y), для которых $f(x)=g(y)$, через n — число пар, для которых $f(x)=f(y)$, а через k — число пар, для которых $g(x)=g(y)$. Докажите, что $2m \leqslant n+k$. *(А.Белов)*

463. Каждая из окружностей S_1, S_2 и S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC (см. рис. 14). Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. *(Д.Терёшин)*

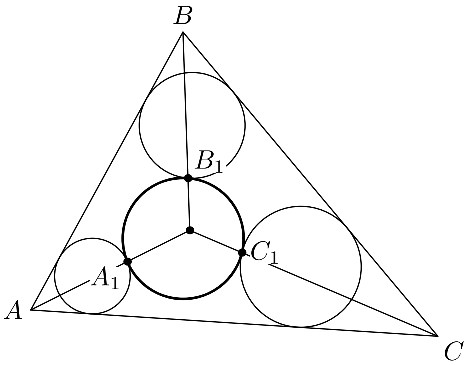


Рис. 14

464. В классе 30 учеников, и у каждого из них одинаковое число друзей среди одноклассников. Каково наибольшее возможное число учеников, которые учатся лучше большинства своих друзей? (Про любых двух учеников в классе можно сказать, кто из них учится лучше; если A учится лучше B, а тот — лучше C, то A учится лучше C.) *(С.Токарев)*

11 класс

465. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит числа $\sqrt{a+b}$. *(А.Голованов, Е.Малинникова)*

466. Внутри выпуклого стоугольника выбрано k точек, $2\leqslant k\leqslant 50$. Докажите, что можно отметить $2k$ вершин стоугольника так, чтобы все выбранные точки оказались внутри $2k$-угольника с отмеченными вершинами. *(С.Берлов)*

467. Две окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке F. Их общая касательная касается S_1 и S_2 в точках A и B соответственно. Прямая, параллельная AB, касается окружности S_2 в точке C и пересекает окружность S_1 в точках D и E.

Докажите, что общая хорда окружностей, описанных около треугольников ABC и BDE, проходит через точку F. *(А.Калинин)*

468. В клетках бесконечного листа клетчатой бумаги записаны действительные числа. Рассматриваются две фигуры, каждая из которых состоит из конечного числа клеток. Фигуры разрешается перемещать параллельно линиям сетки на целое число клеток. Известно, что для любого положения первой фигуры сумма чисел, записанных в накрываемых ею клетках, положительна. Докажите, что существует положение второй фигуры, при котором сумма чисел в накрываемых ею клетках положительна.

(И.Соловьёв)

469. Дана последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, в которой a_1 не делится на 5 и для всякого n имеет место равенство

$$a_{n+1} = a_n + b_n,$$

где b_n — последняя цифра числа a_n. Докажите, что последовательность содержит бесконечно много степеней двойки. *(Н.Агаханов)*

470. См. задачу 462.

471. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ пересекаются в центре H сферы, вписанной в тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что тетраэдр $ABCD$ — правильный. (Высотой тетраэдра называется отрезок перпендикуляра, проведенного из его вершины к противоположной грани, заключенный между этой вершиной и плоскостью этой грани).

(Д.Терёшин)

472. Игроки A и B по очереди ходят конем на шахматной доске 1994×1994. Игрок A может делать только горизонтальные ходы, т. е. такие, при которых конь перемещается на соседнюю горизонталь. Игроку B разрешены только вертикальные ходы, при которых конь перемещается на соседнюю вертикаль. Игрок A ставит коня на поле, с которого начинается игра, и делает первый ход. При этом каждому игроку запрещено ставить коня на то поле, на котором он уже побывал в данной игре. Проигравшим считается игрок, которому некуда ходить. Докажите, что для игрока A существует выигрышная стратегия. *(А.Перлин)*

1994–1995 г.

9 класс

473. Товарный поезд, отправившись из Москвы в x часов y минут, прибыл в Саратов в y часов z минут. Время в пути составило z часов x минут. Найдите все возможные значения x. *(С.Токарев)*

474. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC. *(В.Гордон)*

475. Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трехчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x))) = 0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8? *(С.Токарев)*

476. Можно ли в клетки таблицы 9×9 записать натуральные числа от 1 до 81 так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 3×3 была одна и та же? *(С.Токарев)*

477. Назовем натуральные числа *похожими*, если они записываются с помощью одного и того же набора цифр (например, для набора цифр 1, 1, 2 похожими будут числа 112, 121, 211). Докажите, что существуют три похожих 1995-значных числа, в записи которых нет нулей, такие, что сумма двух из них равна третьему. *(С.Дворянинов)*

478. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC. Найдите сумму углов $B_2A_1C_2$, $C_2B_1A_2$ и $A_2C_1B_2$. *(Д.Терёшин)*

479. Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.)

В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент? *(И.Изместьев)*

480. В клетках таблицы 2000×2000 записаны числа 1 и -1. Известно, что сумма всех чисел в таблице неотрицательна. Докажите, что найдутся 1000 строк и 1000 столбцов таблицы таких, что сумма чисел, записанных в клетках, находящихся на их пересечении, не меньше 1000. *(Д.Карпов)*

10 класс

481. Решите уравнение $\cos\cos\cos\cos x = \sin\sin\sin\sin x$.
(В.Сендеров, Л.Ященко)

482. См. задачу 474.

483. Существует ли последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается ровно один раз и при этом для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ сумма первых k членов последовательности делится на k? *(А.Шаповалов)*

484. Докажите, что если у выпуклого многоугольника все углы равны, то по крайней мере у двух его сторон длины не превосходят длин соседних с ними сторон. *(А.Берзиньш, О.Мусин)*

485. Последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такова, что $\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$ для всех $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. (Через (m, n) обозначен наибольший общий делитель натуральных чисел m и n.) *(А.Голованов)*

486. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D, а прямую AB — в точке M ($MB < MA$, $MD < MC$). Пусть K — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB. Докажите, что угол MKO прямой. *(Л.Купцов)*

487. См. задачу 480.

488. Даны непостоянные многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, у которых старшие коэффициенты равны 1. Докажите, что сумма квадратов коэффициентов многочлена $P(x)Q(x)$ не меньше суммы квадратов свободных членов $P(x)$ и $Q(x)$. *(А.Галочкин, О.Ляшко)*

11 класс

489. Могут ли все числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ быть членами 12 геометрических прогрессий? *(А.Голованов)*

490. Докажите, что любую функцию, определенную на всей оси, можно представить в виде суммы двух функций, график каждой из которой имеет ось симметрии. *(Д.Терёшин)*

491. На плоскости отмечены две точки на расстоянии 1. Разрешается, измерив циркулем расстояние между двумя отмеченными точками, провести окружность с центром в любой отмеченной точке с измеренным радиусом. Линейкой разрешается провести прямую через любые две отмеченные точки. При этом отмечаются новые точки — точки пересечения построенных линий.

Пусть Ц(n) — наименьшее число линий, проведение которых одним циркулем позволяет получить две отмеченные точки на расстоянии n, n —

натуральное. ЛЦ(n) — то же, но циркулем и линейкой. Докажите, что последовательность Ц(n)/ЛЦ(n) неограничена. (*А.Белов*)

492. См. задачу 484.

493. Докажите, что для любого натурального числа $a_1 > 1$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... такая, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$ делится на $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ при всех $k \geqslant 1$. (*А.Голованов*)

494. На карусели с n сиденьями мальчик катался n сеансов подряд. После каждого сеанса он вставал и, двигаясь по часовой стрелке, пересаживался на другое сиденье. Число сидений карусели, мимо которых мальчик проходит при пересаживании, включая и то, на которое он садится, назовем *длиной перехода*. При каких n за n сеансов мальчик мог побывать на каждом сиденье, если длины всех $n-1$ переходов различны и меньше n? (*В.Ню*)

495. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в отношении 2 : 1, считая от вершин, лежат на одной сфере. (*Д.Терёшин*)

496. См. задачу 488.

1995–1996 г.

9 класс

497. Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 1 000 000 включительно: представимых в виде суммы точного квадрата и точного куба или не представимых в таком виде? (*А.Голованов*)

498. Центры O_1, O_2 и O_3 трех непересекающихся окружностей одинакового радиуса расположены в вершинах треугольника. Из точек O_1, O_2 и O_3 проведены касательные к данным окружностям так, как показано на рисунке. Известно, что эти касательные, пересекаясь, образовали выпуклый шестиугольник, стороны которого через одну покрашены в

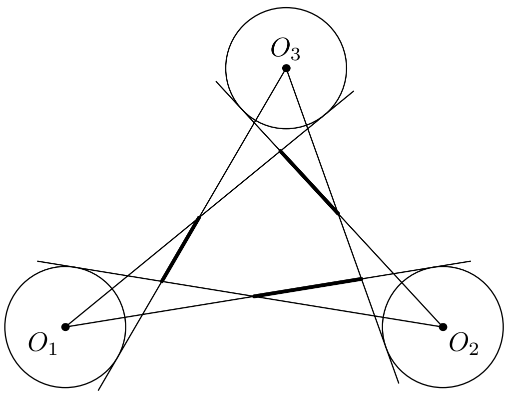


Рис. 15

красный и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков. *(Д.Терёшин)*

499. Пусть натуральные числа x, y, p, n и k таковы, что

$$x^n + y^n = p^k.$$

Докажите, что если число n ($n > 1$) нечетное, а число p нечетное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).

(А.Ковальджи, В.Сендеров)

500. В Думе 1600 депутатов, которые образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырех общих членов. *(А.Скопенков)*

501. Докажите, что в арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов, являющихся степенью числа 10. *(Л.Купцов)*

502. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) точка O — центр описанной окружности, точка I — центр вписанной окружности, а точка D на стороне BC такова, что прямые OD и BI перпендикулярны. Докажите, что прямые ID и AC параллельны. *(М.Сонкин)*

503. На столе лежат две кучки монет. Известно, что суммарный вес монет из первой кучки равен суммарному весу монет из второй кучки, а для каждого натурального числа k, не превосходящего числа монет как в первой, так и во второй кучке, суммарный вес k самых тяжелых монет из первой кучки не больше суммарного веса k самых тяжелых монет из второй кучки. Докажите, что если заменить каждую монету, вес которой не меньше x, на монету веса x (в обеих кучках), то первая кучка монет окажется не легче второй, каково бы ни было положительное число x.

(Д.Фон-дер-Флаас)

504. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток (т. е. фигурками, которые получаются из квадрата 2×2 удалением одной клетки), не выходящими за его пределы, в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам? *(М.Евдокимов)*

10 класс

505. На стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки E и F (точка E ближе к точке B, чем точка F). Известно, что $\angle BAE = \angle CDF$ и $\angle EAF = \angle FDE$. Докажите, что $\angle FAC = \angle EDB$.

(М.Смуров)

506. На координатной плоскости расположены четыре фишки, центры которых имеют целочисленные координаты. Разрешается сдвинуть любую фишку на вектор, соединяющий центры любых двух из остальных фишек. Докажите, что несколькими такими перемещениями можно совместить любые две наперед заданные фишки. *(Р.Садыков)*

507. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном k, $k > 1$, выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

(А.Ковальджи, В.Сендеров)

508. Докажите, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ отличны от нуля и для любого целого $k = 0, 1, \ldots, n$ $(n < m - 1)$

$$a_1 + a_2 \cdot 2^k + a_3 \cdot 3^k + \ldots + a_m \cdot m^k = 0,$$

то в последовательности a_1, a_2, $\ldots$, a_m есть по крайней мере $n + 1$ пара соседних чисел, имеющих разные знаки. *(О.Мусин)*

509. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на ребрах?

(А.Шаповалов)

510. Во взводе служат три сержанта и несколько солдат. Сержанты по очереди дежурят по взводу. Командир издал такой приказ:

1) За каждое дежурство должен быть дан хотя бы один наряд вне очереди.

2) Никакой солдат не должен иметь более двух нарядов и получать более одного наряда за одно дежурство.

3) Списки получивших наряды ни за какие два дежурства не должны совпадать.

4) Сержант, первым нарушивший одно из изложенных выше правил, наказывается гауптвахтой.

Сможет ли хотя бы один из сержантов, не сговариваясь с другими, давать наряды так, чтобы не попасть на гауптвахту? *(М.Куликов)*

511. Дан выпуклый многоугольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой из его сторон рассмотрим угол, под которым она видна из вершины, наиболее удаленной от прямой, содержащей эту сторону. Докажите, что сумма всех таких углов равна $180°$. *(М.Смуров)*

512. Знайка пишет на доске 10 чисел, потом Незнайка дописывает еще 10 чисел, причем все 20 чисел должны быть положительными и различными. Мог ли Знайка написать такие числа, чтобы потом гарантированно суметь составить 10 квадратных трехчленов вида $x^2 + px + q$, среди коэффициентов p и q которых встречались бы все записанные числа, и действительные корни этих трехчленов принимали ровно 11 различных значений?

(И.Рубанов)

11 класс

513. Может ли число, получаемое выписыванием в строку друг за другом целых чисел от 1 до n ($n > 1$), одинаково читаться слева направо и справа налево? *(Н.Агаханов)*

514. Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных тоже монотонно уменьшалась. *(А.Шаповалов)*

515. Докажите, что при $n \geqslant 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником. *(Н.Агаханов, Д.Терёшин)*

516. См. задачу 508.

517. Существуют ли три натуральных числа, больших 1 и таких, что квадрат каждого из них, уменьшенный на единицу, делится на каждое из остальных? *(А.Голованов)*

518. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD. Прямая, перпендикулярная CD и проходящая через центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает BC в точке E. Прямая, проходящая через точку E параллельно CD, пересекает AB в точке F. Докажите, что $BE = FD$. *(М.Сонкин)*

519. Существует ли такое конечное множество $\mathcal{M}$ ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества $\mathcal{M}$, все корни которого действительны и также принадлежат $\mathcal{M}$? *(Е.Малинникова)*

520. В строку в неизвестном порядке записаны все целые числа от 1 до 100. За один вопрос про любые 50 чисел можно узнать, в каком порядке относительно друг друга записаны эти 50 чисел. За какое наименьшее число вопросов наверняка можно узнать, в каком порядке записаны все 100 чисел? *(С.Токарев)*

1996–1997 г.

9 класс

521. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство

$$(P(xy))^2 \leqslant P(x^2) \cdot P(y^2).$$

(Е.Малинникова)

522. Выпуклый многоугольник M переходит в себя при повороте на угол 90°. Докажите, что найдутся два круга с отношением радиусов, равным $\sqrt{2}$, один из которых содержит M, а другой содержится в M. *(А.Храбров)*

523. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда с основанием $a \times b$ и высотой c (a, b и c — натуральные числа) оклеена «по клеточкам» без наложений и пропусков прямоугольниками со сторонами, параллельными ребрам параллелепипеда, каждый из которых состоит из четного числа единичных квадратов. При этом разрешается перегибать прямоугольники через боковые ребра параллелепипеда. Докажите, что если c нечетно, то число способов оклейки четно.

(Д.Карпов, С.Рукшин, Д.Фон-дер-Флаас)

524. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает каждому колпак белого или черного цветов. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из двух цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз). После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни? *(Фольклор)*

525. Существуют ли действительные числа b и c такие, что каждое из уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$ имеет по два целых корня? *(Н.Агаханов)*

526. В классе 33 человека. У каждого ученика спросили, сколько у него в классе тезок и сколько однофамильцев (включая родственников). Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые от 0 до 10 включительно. Докажите, что в классе есть два ученика с одинаковыми именем и фамилией. *(А.Шаповалов)*

527. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках M, N и K соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная NK, пересекает прямую MN в точке D. Прямая, проходящая через A и параллельная MN, пересекает прямую NK в точке E. Докажите, что прямая DE содержит среднюю линию треугольника ABC. *(М.Сонкин)*

528. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ так, что сумма любых двух соседних чисел не превосходит S. Найдите наименьшее возможное значение S. (Числа называются *соседними*, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону.) *(Д.Храмцов)*

10 класс

529. Решите в целых числах уравнение
$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y.$$
(*М.Сонкин*)

530. Квадрат $n \times n$ ($n \geqslant 3$) склеен в цилиндр. Часть клеток покрашена в черный цвет. Докажите, что найдутся две параллельных линии (две горизонтали, две вертикали или две диагонали), содержащие одинаковое количество черных клеток. (*Е.Порошенко*)

531. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN прямой. (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A.) (*Д.Терёшин*)

532. Многоугольник можно разбить на 100 прямоугольников, но нельзя — на 99. Докажите, что его нельзя разбить на 100 треугольников. (*А.Шаповалов*)

533. Существуют ли два квадратных трехчлена $ax^2 + bx + c$ и $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня? (*Н.Агаханов*)

534. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Медиана BB_1 треугольника пересекает MN в точке D. Докажите, что точка O лежит на прямой DK. (*М.Сонкин*)

535. Найдите все тройки натуральных чисел m, n и l такие, что $m + n = (\text{НОД}(m, n))^2$, $m + l = (\text{НОД}(m, l))^2$, $n + l = (\text{НОД}(n, l))^2$. (*С.Токарев*)

536. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по нескольку в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:

1) Снять по одному камню с клеток $n - 1$ и n и положить один камень в клетку $n + 1$;

2) Снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n + 1, n - 2$.

Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам). (*Д.Фон-дер-Флаас*)

11 класс

537. См. задачу 529.

538. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает каждому колпак белого, синего или красного цветов. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из трех цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз). После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни? *(К.Кноп)*

539. См. задачу 531.

540. Куб $n \times n \times n$ сложен из единичных кубиков. Дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная, каждое звено которой соединяет центры двух соседних (имеющих общую грань) кубиков. Назовем *отмеченными* грани кубиков, пересекаемые данной ломаной. Докажите, что ребра кубиков можно покрасить в два цвета так, чтобы каждая отмеченная грань имела нечетное число, а всякая неотмеченная грань — четное число сторон каждого цвета. *(М.Смуров)*

541. Рассматриваются всевозможные квадратные трехчлены вида $x^2 + px + q$, где p, q — целые, $1 \leqslant p \leqslant 1997$, $1 \leqslant q \leqslant 1997$. Каких трехчленов среди них больше: имеющих целые корни или не имеющих действительных корней? *(М.Евдокимов)*

542. Даны многоугольник, прямая l и точка P на прямой l в общем положении (т. е. все прямые, содержащие стороны многоугольника, пересекают l в различных точках, отличных от P.)

Отметим те вершины многоугольника, для каждой из которых прямые, на которых лежат выходящие из нее стороны многоугольника, пересекают l по разные стороны от точки P. Докажите, что точка P лежит внутри многоугольника тогда и только тогда, когда по каждую сторону от l отмечено нечетное число вершин. *(О.Мусин)*

543. Сфера, вписанная в тетраэдр, касается одной из его граней в точке пересечения биссектрис, другой — в точке пересечения высот, третьей — в точке пересечения медиан. Докажите, что тетраэдр правильный.

(Н.Агаханов)

544. В прямоугольную коробку с основанием $m \times n$, где m и n — нечетные числа, уложены домино размера 2×1 так, что остался не покрыт только квадрат 1×1 (дырка) в углу коробки. Если доминошка прилегает к дырке короткой стороной, ее разрешается сдвинуть вдоль себя на одну клетку, закрыв дырку (при этом открывается новая дырка). Докажите, что с помощью таких передвижений можно перегнать дырку в любой другой угол. *(А.Шаповалов)*

1997—1998 г.

9 класс

545. Угол, образованный лучами $y = x$ и $y = 2x$ при $x \geqslant 0$, высекает на параболе $y = x^2 + px + q$ две дуги. Эти дуги спроектированы на ось $0x$. Докажите, что проекция левой дуги на 1 короче проекции правой. *(Жюри)*

546. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину многоугольника, принадлежащую только одному параллелограмму, назовем *хорошей*. Докажите, что хороших вершин не менее трех. *(М.Смуров)*

547. Обозначим $S(x)$ сумму цифр числа x. Найдутся ли три таких натуральных числа a, b и c, что $S(a + b) < 5$, $S(a + c) < 5$ и $S(b + c) < 5$, но $S(a + b + c) > 50$? *(С.Волчёнков, Л.Медников)*

548. Назовем *лабиринтом* шахматную доску 8×8, на которой между некоторыми полями поставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа находится край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Программист пишет программу — конечную последовательность указанных команд, и дает ее пользователю, после чего пользователь выбирает лабиринт и помещает в него ладью на любое поле. Верно ли, что программист может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе пользователя? *(В.Уфнаровский, А.Шаповалов)*

549. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые несколько из них перевести вперед. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем *временем перевода*. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать? *(О.Подлипский)*

550. В треугольнике ABC ($AB > BC$) проведены медиана BM и биссектриса BL. Прямая, проходящая через точку M параллельно AB, пересекает BL в точке D, а прямая, проходящая через L параллельно BC, пересекает BM в точке E. Докажите, что прямые ED и BL перпендикулярны. *(М.Сонкин)*

551. Ювелир сделал незамкнутую цепочку из $N > 3$ пронумерованных звеньев. Капризная заказчица потребовала изменить порядок звеньев в цепочке. Из вредности она заказала такую незамкнутую цепочку, чтобы ювелиру пришлось раскрыть как можно больше звеньев. Сколько звеньев придется раскрыть? (*А.Шаповалов*)

552. На доске написаны два различных натуральных числа a и b. Меньшее из них стирают, и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т. д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа. (*И.Изместьев*)

10 класс

553. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают график функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$: первая — в точках A, D и E, вторая — в точках B, C и F (см. рис. 16). Докажите, что длина проекции дуги CD на ось Ox равна сумме длин проекций дуг AB и EF. (*И.Изместьев*)

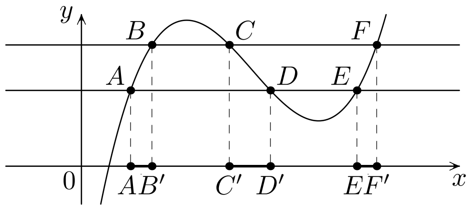


Рис. 16

554. Даны два выпуклых многоугольника. Известно, что расстояние между любыми двумя вершинами первого не больше 1, расстояние между любыми двумя вершинами второго также не больше 1, а расстояние между любыми двумя вершинами разных многоугольников больше, чем $1/\sqrt{2}$. Докажите, что многоугольники не имеют общих внутренних точек.

(*В.Дольников*)

555. Проведем через основание биссектрисы угла A разностороннего треугольника ABC отличную от стороны BC касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку ее касания с окружностью обозначим через K_a. Аналогично построим точки K_b и K_c. Докажите, что три прямые, соединяющие точки K_a, K_b и K_c с серединами сторон BC, CA и AB соответственно, имеют общую точку, причем эта точка лежит на вписанной окружности. (*И.Шарыгин*)

556. Часть подмножеств некоторого конечного множества выделена. Каждое выделенное подмножество состоит в точности из $2k$ элементов (k — фиксированное натуральное число). Известно, что в каждом подмножестве, состоящем не более чем из $(k+1)^2$ элементов, либо не содержится ни одного выделенного подмножества, либо все в нем содержащиеся выделенные подмножества имеют общий элемент. Докажите, что все выделенные подмножества имеют общий элемент. (*В.Дольников*)

557. С числом разрешается проводить одно из двух действий: возводить в квадрат или прибавлять единицу. Даны числа 19 и 98. Можно ли из них за одно и то же количество действий получить равные числа?

(Е.Малинникова)

558. На множестве действительных чисел задана операция $*$, которая каждым двум числам a и b ставит в соответствие число $a*b$. Известно, что равенство $(a*b)*c = a+b+c$ выполняется для любых трех чисел a, b и c. Докажите, что $a*b = a+b$. *(Б.Френкин)*

559. Дан выпуклый n-угольник ($n > 3$), никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Окружность, проходящую через три вершины многоугольника и содержащую внутри себя остальные его вершины, назовем *описанной*. Описанную окружность назовем *граничной*, если она проходит через три последовательные (соседние) вершины многоугольника; описанную окружность назовем *внутренней*, если она проходит через три вершины, никакие две из которых не являются соседними вершинами многоугольника. Докажите, что граничных описанных окружностей на две больше, чем внутренних. *(О.Мусин)*

560. В каждую клетку квадратной таблицы размера $(2^n-1)\times(2^n-1)$ ставится одно из чисел $+1$ или -1. Расстановку чисел назовем *удачной*, если каждое число равно произведению всех соседних с ним (соседними считаются числа, стоящие в клетках с общей стороной). Найдите число удачных расстановок. *(Д.Любшин)*

11 класс

561. См. задачу 553.

562. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 — середины дуг BAC, CBA, ACB описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке. *(М.Сонкин)*

563. На плоскости нарисовано некоторое семейство S правильных треугольников, получающихся друг из друга параллельными переносами, причем любые два треугольника пересекаются. Докажите, что найдутся три точки такие, что любой треугольник семейства S содержит хотя бы одну из них. *(В.Дольников, Р.Карасёв)*

564. В стране N 1998 городов и из каждого осуществляются беспосадочные перелеты в три других города (все авиарейсы двусторонние). Известно, что из любого города, сделав несколько пересадок, можно долететь до любого другого. Министерство Безопасности хочет объявить закрытыми 200 городов, никакие два из которых не соединены авиалинией. Докажите, что это можно сделать так, чтобы можно было долететь из любого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в закрытых городах. *(Д.Карпов, Р.Карасёв)*

565. Внутри параболы $y = x^2$ расположены несовпадающие окружности ω_1, ω_2, ω_3, $\ldots$ так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается ветвей параболы и внешним образом окружности ω_{n-1} (см. рис. 17). Найдите радиус окружности ω_{1998}, если известно, что диаметр ω_1 равен 1 и она касается параболы в ее вершине. *(М.Евдокимов)*

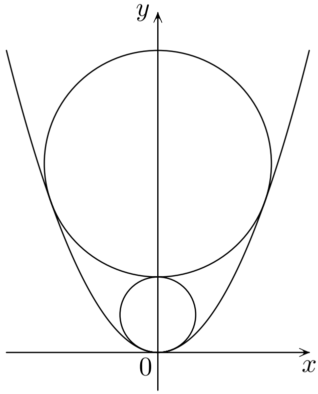


Рис. 17

566. Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности? *(Г.Гальперин)*

567. В тетраэдр $ABCD$, длины всех ребер которого не более 100, можно поместить две непересекающиеся сферы диаметра 1. Докажите, что в него можно поместить одну сферу диаметра 1,01. *(Р.Карасёв)*

568. Клетчатая фигура Ф обладает свойством: при любом заполнении клеток прямоугольника $m \times n$ числами, сумма которых положительна, фигуру Ф можно так расположить в прямоугольнике, чтобы сумма чисел в клетках прямоугольника, накрытых фигурой Ф была положительна (фигуру Ф можно поворачивать). Докажите, что данный прямоугольник может быть покрыт фигурой Ф в несколько слоев. *(А.Белов)*

1998–1999 г.

9 класс

569. В числе A цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9 \cdot A$? *(С.Волчёнков)*

570. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N - 1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого. *(Д.Карпов)*

571. Треугольник ABC вписан в окружность S. Пусть A_0 — середина дуги BC окружности S, не содержащей A; C_0 — середина дуги AB, не содержащей C. Окружность S_1 с центром A_0 касается BC, окружность S_2

с центром C_0 касается AB. Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на одной из общих внешних касательных к окружностям S_1 и S_2. *(М.Сонкин)*

572. Числа от 1 до 1 000 000 покрашены в два цвета — черный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1 000 000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были черными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми? *(С.Берлов)*

573. Правильный треугольник разбит на правильные треугольники со стороной 1 линиями, параллельными его сторонам и делящими каждую сторону на n частей (на рисунке $n = 5$).

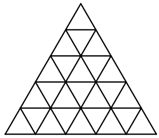


Рис. 18

Какое наибольшее число отрезков длины 1 с концами в вершинах этих треугольников можно отметить так, чтобы не нашлось треугольника, все стороны которого состоят из отмеченных отрезков? *(М.Антонов)*

574. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n^2}\{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}.$$

($\{k\}$ — дробная часть числа k.) *(А.Храбров)*

575. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO — прямой. *(С.Берлов)*

576. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя — либо один, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре? *(Д.Карпов)*

10 класс

577. На столе стоят три пустых банки из-под меда. Винни-Пух, Кролик и Пятачок по очереди кладут по одному ореху в одну из банок. Их порядковые номера до начала игры определяются жребием. При этом Винни может добавлять орех только в первую или вторую банку, Кролик — только во вторую или третью, а Пятачок — в первую или третью. Тот, после чьего хода в какой-нибудь банке оказалось ровно 1999 орехов, проигрывает. Докажите, что Винни-Пух и Пятачок могут, договорившись, играть так, чтобы Кролик проиграл. *(Ф.Бахарев)*

578. Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, для всех членов которых, начиная с третьего, выполнено
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{\text{НОД}(a_{n-1}, a_{n-2})}.$$ *(С.Волчёнков)*

579. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. К окружностям, вписанным в треугольники BKL, CLM и AKM, проведены попарно общие внешние касательные, отличные от сторон треугольника ABC. Докажите, что эти касательные пересекаются в одной точке. *(М.Сонкин)*

580. В квадрате $n \times n$ клеток бесконечной шахматной доски расположены n^2 фишек, по одной фишке в каждой клетке. *Ходом* называется перепрыгивание любой фишкой через соседнюю по стороне фишку, непосредственно за которой следует свободная клетка. При этом фишка, через которую перепрыгнули, с доски снимается. Докажите, что позиция, в которой дальнейшие ходы невозможны, возникнет не ранее, чем через $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ ходов. *(С.Токарев)*

581. Сумма цифр в десятичной записи натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа $44n$ равна 800. Чему равна сумма цифр числа $3n$? *(А.Голованов)*

582. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и B, касается прямой BC, а окружность, проходящая через вершины B и C, касается прямой AB и пересекает первую окружность в точке K, $K \neq B$. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что угол BKO — прямой. *(С.Берлов)*

583. Для некоторых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x^2 + y^3 \geqslant x^3 + y^4$. Докажите, что $x^3 + y^3 \leqslant 2$. *(С.Злобин)*

584. В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых. *(В.Дольников)*

11 класс

585. Существуют ли 19 попарно различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр таких, что их сумма равна 1999? *(О.Подлипский)*

586. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине. *(С.Берлов)*

587. Окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон DA, AB, BC, CD в точках K, L, M, N соответственно. Пусть

S_1, S_2, S_3, S_4 — соответственно окружности, вписанные в треугольники AKL, BLM, CMN, DNK. К окружностям S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 проведены общие внешние касательные, отличные от сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник, образованный этими четырьмя касательными, — ромб. *(М.Сонкин)*

588. См. задачу 580.

589. Четыре натуральных числа таковы, что квадрат суммы любых двух из них делится на произведение двух оставшихся. Докажите, что по крайней мере три из этих чисел равны между собой. *(С.Берлов)*

590. Докажите, что три выпуклых многоугольника на плоскости нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других прямой (т. е. существует прямая такая, что этот многоугольник и два остальных лежат по ее разные стороны). *(В.Дольников)*

591. Через вершину A тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, касательная к описанной около него сфере. Докажите, что линии пересечения этой плоскости с плоскостями граней ABC, ACD и ABD образуют шесть равных углов тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$. *(Д.Терёшин)*

592. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя — либо два, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре? *(Д.Карпов)*

1999–2000 г.

9 класс

593. Различные числа a, b и c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$. *(Н.Агаханов)*

594. Таня задумала натуральное число $X \leqslant 100$, а Саша пытается его угадать. Он выбирает пару натуральных чисел M и N, меньших 100, и задает вопрос: «Чему равен наибольший общий делитель $X + M$ и N?» Докажите, что Саша может угадать Танино число, задав 7 таких вопросов. *(А.Голованов)*

595. Пусть O — центр описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_1 с центром K проходит через точки A,

O, C и пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Известно, что точки L и K симметричны относительно прямой MN. Докажите, что $BL \perp AC$. *(М.Сонкин)*

596. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого не делится на 3. *(Д.Карпов)*

597. На доску последовательно выписываются числа $a_1 = 1, a_2, a_3, \ldots$ по следующим правилам: $a_{n+1} = a_n - 2$, если число $a_n - 2$ — натуральное и еще не выписано на доску, в противном случае $a_{n+1} = a_n + 3$. Докажите, что все квадраты натуральных чисел появятся в этой последовательности при прибавлении 3 к предыдущему числу. *(Н.Агаханов)*

598. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2. *(С.Берлов)*

599. На медиане CD треугольника ABC отмечена точка E. Окружность S_1, проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке A, пересекает сторону AC в точке M. Окружность S_2, проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке B, пересекает сторону BC в точке N. Докажите, что описанная окружность треугольника CMN касается S_1 и S_2. *(М.Сонкин)*

600. По окружности расставлено 100 натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Разрешается прибавлять к любому числу наибольший общий делитель его соседей. Докажите, что при помощи таких операций можно сделать все числа попарно взаимно простыми. *(С.Берлов)*

10 класс

601. Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \left[\frac{2^3}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{2^{1000}}{3}\right].$$ *(А.Голованов)*

602. Пусть $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ и

$$x_1^{13} + x_2^{13} + \ldots + x_n^{13} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Докажите, что если $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, то

$$x_1^{13}y_1 + x_2^{13}y_2 + \ldots + x_n^{13}y_n < x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$ *(О.Мусин)*

603. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса острого угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника ABC с серединой стороны

AC, в точке R. Докажите, что точки P, B, Q и R лежат на одной окружности. *(С.Берлов)*

604. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A, B и C и спросить, верно ли, что $m(A) < m(B) < m(C)$ (через $m(x)$ обозначена масса гири x. При этом дается ответ «Да» или «Нет»). Можно ли за девять вопросов гарантированно узнать, в каком порядке идут веса гирь? *(О.Подлипский)*

605. Пусть M — конечное множество чисел. Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M. Какое наибольшее число элементов может быть в M? *(Е.Черепанов)*

606. Совершенное число, большее 6, делится на 3. Докажите, что оно делится на 9. (Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например $6 = 1 + 2 + 3$.) *(А.Храбров)*

607. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Хорды BA и BC внешней окружности касаются внутренней в точках K и M соответственно. Пусть Q и P — середины дуг AB и BC, не содержащих точку N. Окружности, описанные около треугольников BQK и BPM, пересекаются второй раз в точке B_1. Докажите, что BPB_1Q — параллелограмм. *(Т.Емельянова)*

608. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты n различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые n квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2n - 2$ гвоздями. *(В.Дольников)*

11 класс

609. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $f(x+y)+f(y+z)+f(z+x) \geqslant 3f(x+2y+3z)$. *(Н.Агаханов, О.Подлипский)*

610. Докажите, что можно разбить все множество натуральных чисел на 100 непустых подмножеств так, чтобы в любой тройке a, b, c такой, что $a + 99b = c$, нашлись два числа из одного подмножества.

(Д.Джукич, Ф.Петров, И.Богданов, С.Берлов)

611. На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с вершинами в целых точках. Докажите, что внутри или на границе пятиугольника

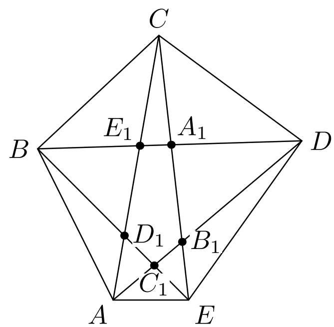


Рис. 19

$A_1B_1C_1D_1E_1$ (см. рис. 19) есть хотя бы одна целая точка.

(В.Дольников, И.Богданов)

612. Дана последовательность неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для любого k от 1 до n обозначим через m_k величину

$$\max_{l=1,2,\ldots,k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \ldots + a_k}{l}.$$

Докажите, что при любом $\alpha > 0$ число тех k, для которых $m_k > \alpha$, меньше, чем $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\alpha}$. *(В.Дольников)*

613. Докажите неравенство

$$\sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leqslant 1.$$ *(А.Храбров)*

614. Совершенное число, большее 28, делится на 7. Докажите, что оно делится на 49. (Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например $6 = 1 + 2 + 3$.) *(А.Храбров)*

615. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке K и продолжений сторон AB и CD, окружность ω_2 касается стороны AD в точке L и продолжений сторон AB и CD. Известно, что точки O, K, L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и центр окружности ω лежат на одной прямой.

(П.Кожевников)

616. Клетки таблицы 100×100 окрашены в 4 цвета так, что в любой строке и в любом столбце ровно по 25 клеток каждого цвета. Докажите, что найдутся две строки и два столбца, все четыре клетки на пересечении которых окрашены в разные цвета. *(С.Берлов)*

2000–2001 г.

9 класс

617. Числа от 1 до 999 999 разбиты на две группы: в первую отнесено каждое число, для которого ближайшим к нему квадратом является квадрат нечетного числа, во вторую — числа, для которых ближайшими являются квадраты четных чисел. В какой из групп сумма чисел больше?

(Н.Агаханов)

618. Два многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $Q(x) = x^2 + px + q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне I — неотрицательны. Докажите, что найдется такая точка x_0, что $P(x_0) < Q(x_0)$. *(Н.Агаханов)*

619. Внутри параллелограмма $ABCD$ с тупым углом A выбрана точка K таким образом, что середина отрезка AD равноудалена от точек K и C, а середина отрезка CD равноудалена от точек K и A. Точка N — середина отрезка BK. Докажите, что углы NAK и NCK равны. *(С.Берлов)*

620. Дан выпуклый 2000-угольник, никакие три диагонали которого не пересекаются в одной точке. Каждая из его диагоналей покрашена в один из 999 цветов. Докажите, что существует треугольник, все стороны которого целиком лежат на диагоналях одного цвета. (Вершины треугольника не обязательно должны оказаться вершинами исходного многоугольника.) *(Ю.Лифшиц)*

621. Юра выложил в ряд 2001 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трехкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Юры могло быть трехкопеечных монет? *(Ю.Лифшиц)*

622. В компании из $2n+1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех. *(С.Берлов)*

623. На большей стороне AC треугольника ABC взята точка N так, что серединные перпендикуляры к отрезкам AN и NC пересекают стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Докажите, что центр O описанной около треугольника ABC окружности лежит на окружности, описанной около треугольника KBM. *(С.Берлов)*

624. Найдите все нечетные натуральные n $(n > 1)$ такие, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a+b-1$ также является делителем n. *(Д.Джукич)*

10 класс

625. См. задачу 617.

626. На прямой выбрано 100 множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков (точка также считается отрезком). *(Р.Карасёв)*

627. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M — середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника BMK, не зависит от выбора точки K на внутренней окружности. *(Т.Емельянова)*

628. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем между любыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из любого города попасть в любой другой.

(Д.Карпов)

629. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2001$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2001) > \frac{1}{64}$. *(Д.Терёшин)*

630. В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел $1, 2, \ldots, n^2$, центры любых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю. (*Магическим* называется клетчатый квадрат, в клетках которого записаны числа так, что суммы чисел во всех его строках и столбцах равны.) *(И.Богданов)*

631. На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1, отличные от точки пересечения высот H, такие, что сумма площадей треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1 равна площади треугольника ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через H. *(С.Берлов)*

632. Найдите все натуральные числа n такие, что для любых двух его взаимно простых делителей a и b число $a + b - 1$ также является делителем n. *(Д.Джукич)*

11 класс

633. Пусть $2S$ — суммарный вес некоторого набора гирек. Назовем натуральное число k *средним*, если в наборе можно выбрать k гирек, суммарный вес которых равен S. Какое наибольшее количество средних чисел может иметь набор из 100 гирек? *(Д.Кузнецов)*

634. См. задачу 627.

635. На плоскости даны два таких конечных набора P_1 и P_2 выпуклых многоугольников, что любые два многоугольника из разных наборов имеют общую точку и в каждом из двух наборов P_1 и P_2 есть пара непересекающихся многоугольников. Докажите, что существует прямая, пересекающая все многоугольники обоих наборов. *(В.Дольников)*

636. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое положительное количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участником баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определить сложность вопросов, чтобы места между участниками распределились любым наперед заданным образом. При каком наибольшем числе участников это могло быть? *(С.Токарев)*

637. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β, что для любого действительного x будет выполняться неравенство $\alpha f(x) + \beta g(x) > 0$. *(С.Берлов, О.Подлипский)*

638. a и b — различные натуральные числа такие, что $ab(a+b)$ делится на a^2+ab+b^2. Докажите, что $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$. *(С.Берлов)*

639. В стране 2001 город, некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит хотя бы одна дорога и нет города, соединенного дорогами со всеми остальными. Назовем множество городов D *доминирующим*, если любой не входящий в D город соединен дорогой с одним из городов множества D. Известно, что в любом доминирующем множестве хотя бы k городов. Докажите, что страну можно разбить на $2001-k$ республик так, что никакие два города из одной республики не будут соединены дорогой. *(В.Дольников)*

640. Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает ребра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O — центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$. *(Л.Емельянов)*

2001–2002 г.

9 класс

641. Можно ли в клетках таблицы 2002×2002 расставить натуральные числа от 1 до 2002^2 так, чтобы для любой клетки этой таблицы из строки или из столбца, содержащих эту клетку, можно было бы выбрать тройку чисел, одно из которых равно произведению двух других? *(Н.Агаханов)*

642. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой — точки B и C так, что B лежит между O и C. Проведена окружность с центром O_1, вписанная в треугольник OAB, и окружность с центром O_2, касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA, OC треугольника

OAC. Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то треугольник ABC — равнобедренный. (*Л.Емельянов*)

643. На плоскости отмечено 6 красных, 6 синих и 6 зеленых точек, причем никакие три из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами. (*Ю.Лифшиц*)

644. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить ее на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более, чем N ударов. (*Ю.Лифшиц*)

645. На шахматной доске стоят 8 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых. (Расстояние между ладьями — это расстояние между центрами клеток, в которых они стоят.) (*Д.Кузнецов*)

646. Имеются одна красная и k ($k > 1$) синих ячеек, а также колода из $2n$ карт, занумерованных числами от 1 до $2n$. Первоначально вся колода лежит в произвольном порядке в красной ячейке. Из любой ячейки можно взять верхнюю карту и переложить ее либо в пустую ячейку, либо поверх карты с номером, большим на единицу. При каком наибольшем n можно такими операциями переложить всю колоду в одну из синих ячеек? (*А.Белов*)

647. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно таким образом, что $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC. (*С.Берлов*)

648. Из промежутка $(2^{2n}, 2^{3n})$ выбрано $2^{2n-1} + 1$ нечетное число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, квадрат каждого из которых не делится на другое. (*С.Берлов*)

10 класс

649. Многочлены P, Q и R с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству

$$P^2 + Q^2 = R^2.$$

Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные. (*А.Голованов*)

650. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω. Касательная к ω, проведенная через A, пересекает продолжение стороны BC за точку B в точке K, а касательная к ω, проведенная через B, пересекает продолжение стороны AD за точку A в точке M. Известно, что $AM = AD$ и $BK = BC$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция. (*С.Берлов*)

651. Докажите, что для любого натурального числа $n > 10\,000$ найдется такое натуральное число m, представимое в виде суммы двух квадратов, что $0 < m - n < 3\sqrt[4]{n}$. (*А.Голованов*)

652. В некотором государстве было 2002 города, соединенных дорогами так, что если запретить проезд через любой из городов, то из любого из оставшихся городов можно добраться до любого другого. Каждый год король выбирает некоторый несамопересекающийся циклический маршрут и приказывает построить новый город, соединить его дорогами со всеми городами выбранного маршрута, а все дороги этого маршрута закрыть за ненадобностью. Через несколько лет в стране не осталось ни одного несамопересекающегося циклического маршрута, проходящего по ее городам. Докажите, что в этот момент количество городов, из которых выходит ровно одна дорога, не меньше 2002. (*А.Пастор*)

653. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ac$. (*С.Злобин*)

654. См. задачу 646.

655. Пусть A' — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Прямая a проходит через точку A' и параллельна биссектрисе внутреннего угла A. Аналогично строятся прямые b и c. Докажите, что a, b и c пересекаются в одной точке. (*Л.Емельянов*)

656. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку. (*В.Дольников, И.Богданов*)

11 класс

657. См. задачу 649.

658. На плоскости отмечено несколько точек. Для любых трех из них существует декартова система координат (т. е. перпендикулярные оси и общий масштаб), в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты. (*С.Берлов*)

659. Докажите, что для всех $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ при $n > m$, где n, m — натуральные, справедливо неравенство

$$2|\sin^n x - \cos^n x| \leqslant 3|\sin^m x - \cos^m x|;$$

(*В.Сендеров*)

660. В городе несколько площадей. Некоторые пары площадей соединены улицами с односторонним движением так, что с каждой площади можно выехать ровно по двум улицам. Докажите, что город можно разделить на 1014 районов так, чтобы улицами соединялись только площади из разных районов, и для любых двух районов все соединяющие их улицы были направлены одинаково (либо все из первого района во второй, либо наоборот). (*А.Пастор*)

661. Найдите наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы 2002 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр и в виде суммы 2003 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр. (*С.Токарев*)

662. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Пусть окружности, описанные около треугольников ABO и COD, пересекаются в точке K. Точка L такова, что треугольники BLC и AKD соответственно подобны. Докажите, что если четырехугольник $BLCK$ выпуклый, то он является описанным. (*С.Берлов*)

663. См. задачу 656.

664. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для которых числитель несократимой дроби, равной $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, не является степенью простого числа с натуральным показателем. (*Ф.Петров*)

2002–2003 г.

9 класс

665. Числовое множество M, содержащее 2003 различных числа, таково, что для любых двух различных элементов a, b из M число $a^2+b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из M число $a\sqrt{2}$ рационально. (*Н.Агаханов*)

666. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Касательные к S_1 и S_2 в точке A пересекают отрезки BO_2 и BO_1 в точках K и L соответственно. Докажите, что $KL \parallel O_1O_2$. (*С.Берлов*)

667. На прямой расположены $2k-1$ белый и $2k-1$ черный отрезок. Известно, что любой белый отрезок пересекается хотя бы с k черными, а любой черный — хотя бы с k белыми. Докажите, что найдутся черный отрезок, пересекающийся со всеми белыми, и белый отрезок, пересекающийся со всеми черными. (*В.Дольников*)

668. Последовательность $\{a_n\}$ строится следующим образом: $a_1 = p$ — простое число, имеющее ровно 300 ненулевых цифр, a_{n+1} — период десятичной дроби $1/a_n$, умноженный на 2. Найдите число a_{2003}. (*И.Богданов, А.Храбров*)

669. В стране N городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придется поменять вид транспорта не более одного раза. *(О.Подлипский)*

670. Пусть a, b, c — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$ *(С.Берлов)*

671. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа расставить натуральные числа таким образом, чтобы при любых натуральных $m, n > 100$ сумма чисел в любом прямоугольнике $m \times n$ клеток делилась на $m+n$? *(С.Берлов)*

672. На сторонах AP и PD остроугольного треугольника APD выбраны соответственно точки B и C. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q. Точки H_1 и H_2 являются ортоцентрами треугольников APD и BPC соответственно. Докажите, что если прямая H_1H_2 проходит через точку X пересечения описанных окружностей треугольников ABQ и CDQ, то она проходит и через точку Y пересечения описанных окружностей треугольников BQC и AQD. ($X \neq Q, Y \neq Q$.)
(С.Берлов, Л.Емельянов)

10 класс

673. Числовое множество M, содержащее 2003 различных положительных числа, таково, что для любых трех различных элементов a, b, c из M число $a^2 + bc$ рационально. Докажите, что можно выбрать такое натуральное n, что для любого a из M число $a\sqrt{n}$ рационально. *(Н.Агаханов)*

674. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть S_1 и S_2 — соответственно окружности, описанные около треугольников ABO и CDO, O и K — точки пересечения окружностей S_1 и S_2. Прямые, проходящие через точку O параллельно прямым AB и CD, вторично пересекают S_1 и S_2 в точках L и M соответственно. На отрезках OL и OM выбраны соответственно точки P и Q так, что $OP : PL = MQ : QO$. Докажите, что точки O, K, P, Q лежат на одной окружности. *(С.Берлов)*

675. Дано дерево с n вершинами, $n \geqslant 2$ (т. е. граф с n вершинами и $n-1$ ребром, в котором из любой вершины в любую можно пройти по ребрам, и нет циклического маршрута, проходящего по ребрам). В его вершинах расставлены числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а на каждом ребре записано произведение чисел, стоящих в концах этого ребра. Обозначим через S сумму чисел на всех ребрах. Докажите, что $\sqrt{n-1}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) \geqslant 2S$.

(*В.Дольников*)

676. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T. Известно, что любое подмножество X' множества X, состоящее из не более 9 точек, можно покрыть двумя параллельными переносами треугольника T. Докажите, что все множество X можно покрыть двумя параллельными переносами T. (*В.Дольников, Р.Карасёв*)

677. См. задачу 669.

678. Последовательность натуральных чисел a_n строится следующим образом: a_0 — некоторое натуральное число; $a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$, если a_n делится на 5; $a_{n+1} = [\sqrt{5}a_n]$, если a_n не делится на 5 (через $[x]$ обозначена целая часть от x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x). Докажите, что начиная с некоторого члена последовательность a_n возрастает.

(*А.Храбров*)

679. В треугольнике ABC через O, I обозначены центры соответственно описанной и вписанной окружностей. Вневписанная окружность ω_a касается продолжений сторон AB и AC соответственно в точках K и M, а стороны BC — в точке N. Известно, что середина P отрезка KM лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки O, N и I лежат на одной прямой. (*П.Кожевников*)

680. Найдите наибольшее натуральное число N такое, что для произвольной расстановки различных натуральных чисел от 1 до 400 в клетках квадратной таблицы 20×20 найдутся два числа, стоящих в одной строке или одном столбце, разность которых будет не меньше N. (*Д.Храмцов*)

11 класс

681. Пусть α, β, γ, τ — такие положительные числа, что при всех x

$$\sin\alpha x + \sin\beta x = \sin\gamma x + \sin\tau x.$$

Докажите, что $\alpha = \gamma$ или $\alpha = \tau$. (*Н.Агаханов, А.Голованов, В.Сендеров*)

682. См. задачу 674.

683. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, m — наибольший коэффициент многочлена f. Известно, что для некоторых натуральных чисел $a < b$ имеют место равенства $f(a) = g(a)$ и $f(b) = g(b)$. Докажите, что если $b > m$, то многочлены f и g совпадают. (*А.Храбров*)

684. У Ани и Бори было по длинной полосе бумаги. На одной из них была написана буква А, на другой — Б. Каждую минуту один из них (не обязательно по очереди) приписывает справа или слева к слову на своей полосе слово с полосы другого. Докажите, что через сутки слово с Аниной полосы можно будет разрезать на 2 части и переставить их местами так, что получится то же слово, записанное в обратном порядке. (*Е.Черепанов*)

685. Длины сторон треугольника являются корнями кубического уравнения с рациональными коэффициентами. Докажите, что длины высот треугольника являются корнями уравнения шестой степени с рациональными коэффициентами. (*Н.Агаханов*)

686. См. задачу 671.

687. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Для любых четырех городов существуют хотя бы две дороги между ними. Известно, что не существует маршрута, проходящего по каждому городу ровно один раз. Докажите, что можно выбрать два города таким образом, чтобы любой из оставшихся городов был соединен дорогой хотя бы с одним из двух выбранных городов. (*И.Иванов*)

688. Вписанная в тетраэдр $ABCD$ сфера касается его граней ABC, ABD, ACD и BCD в точках D_1, C_1, B_1 и A_1 соответственно. Рассмотрим плоскость, равноудаленную от точки A и плоскости $B_1C_1D_1$ и три другие аналогично построенные плоскости. Докажите, что тетраэдр, образованный этими четырьмя плоскостями, имеет тот же центр описанной сферы, что и тетраэдр $ABCD$. (*Ф.Бахарев*)

2003–2004 г.

9 класс

689. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов. (*С.Берлов*)

690. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Биссектрисы внешних углов A и B пересекаются в точке K, внешних углов B и C — в точке L, внешних углов C и D — в точке M, внешних углов D и A — в точке N. Пусть K_1, L_1, M_1, N_1 — точки пересечения высот треугольников ABK, BCL, CDM, DAN соответственно. Докажите, что четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ — параллелограмм. (*Л.Емельянов*)

691. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарику. Известно, что некоторые из шариков — белые, и их количество четно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какие-нибудь две коробочки, в которых лежат белые шарики? (*Жюри*)

692. Даны натуральное число $n > 3$ и положительные числа x_1, x_2, $\ldots$ x_n, произведение которых равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1.$$ (*С.Берлов*)

693. Существуют ли такие попарно различные натуральные числа m, n, p, q, что $m+n=p+q$ и $\sqrt{m}+\sqrt[3]{n}=\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}>2004$? (*И.Богданов*)

694. В кабинете президента стоят 2004 телефона, любые два из которых соединены проводом одного из четырех цветов. Известно, что провода всех четырех цветов присутствуют. Всегда ли можно выбрать несколько телефонов так, чтобы среди соединяющих их проводов встречались провода ровно трех цветов? (*О.Подлипский*)

695. Натуральные числа от 1 до 100 расставлены по кругу в таком порядке, что каждое число либо больше обоих соседей, либо меньше обоих соседей. Пара соседних чисел называется *хорошей*, если при выкидывании этой пары вышеописанное свойство сохраняется. Какое минимальное количество хороших пар может быть? (*С.Берлов*)

696. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, T — центр описанной окружности треугольника AOC, M — середина AC. На сторонах AB и BC выбраны точки D и E соответственно так, что $\angle BDM=\angle BEM=\angle ABC$. Докажите, что $BT\perp DE$. (*А.Смирнов*)

10 класс

697. См. задачу 689.

698. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарику. Известно, что некоторые из шариков — белые, и их количество четно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какую-нибудь коробочку, в которой лежит белый шарик? (*Жюри*)

699. Четырехугольник $ABCD$ является одновременно и вписанным, и описанным, причем вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M, N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырехугольника пересекаются в точке K', внешних углов B и C — в точке L', внешних углов C и D — в точке M', внешних углов D и A — в точке N'. Докажите, что прямые KK', LL', MM' и NN' проходят через одну точку. (*С.Берлов, Л.Емельянов, А.Смирнов*)

700. См. задачу 692.

701. Последовательность неотрицательных рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет соотношению $a_m+a_n=a_{mn}$ при любых натуральных m, n. Докажите, что не все ее члены различны. (*А.Протопопов*)

702. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно доехать до любого другого ее города, не выезжая за пределы республики. *(Д.Карпов, А.Смирнов)*

703. Треугольник T содержится внутри выпуклого центрально-симметричного многоугольника M. Треугольник T' получается из треугольника T центральной симметрией относительно некоторой точки P, лежащей внутри треугольника T. Докажите, что хотя бы одна из вершин треугольника T' лежит внутри или на границе многоугольника M. *(В.Дольников)*

704. Существует ли такое натуральное число $n > 10^{1000}$, не делящееся на 10, что в его десятичной записи можно переставить две различные ненулевые цифры так, чтобы множество его простых делителей не изменилось? *(Е.Чернышов, И.Богданов)*

11 класс

705. См. задачу 689.

706. Пусть I_A и I_B — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и CA треугольника ABC соответственно, а P — точка на окружности Ω, описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников I_ACP и I_BCP, совпадает с центром окружности Ω. *(А.Акопян, Л.Емельянов)*

707. Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x, y)$ выполняется равенство $P(x) - P(y) = R(x, y)(Q(x) - Q(y))$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$. *(А.Быстриков)*

708. В прямоугольной таблице 9 строк и 2004 столбца. В ее клетках расставлены числа от 1 до 2004, каждое — по 9 раз. При этом в любом столбце числа различаются не более, чем на 3. Найдите минимальную возможную сумму чисел в первой строке. *(И.Богданов, Г.Челноков)*

709. Пусть $M = \{x_1, \ldots, x_{30}\}$ — множество, состоящее из 30 различных положительных чисел; A_n $(1 \leqslant n \leqslant 30)$ — сумма всевозможных произведений различных n элементов множества M. Докажите, что если $A_{15} > A_{10}$, то $A_1 > 1$. *(В.Сендеров)*

710. Докажите, что не существует конечного множества, содержащего более $2N$ $(N > 3)$ попарно неколлинеарных векторов на плоскости, обладающего следующими двумя свойствами:

1) для любых N векторов этого множества найдется еще такой $N - 1$ вектор из этого множества, что сумма всех $2N - 1$ векторов равна нулю;

2) для любых N векторов этого множества найдутся еще такие N векторов из этого множества, что сумма всех $2N$ векторов равна нулю.

(О.Подлипский)

711. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k+2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.

(В.Дольников)

712. В прямоугольном параллелепипеде проведено сечение, являющееся шестиугольником. Известно, что этот шестиугольник можно поместить в некоторый прямоугольник П. Докажите, что в прямоугольник П можно поместить одну из граней параллелепипеда. *(С.Волчёнков)*

2004–2005 г.

9 класс

713. Дан параллелограмм $ABCD$ ($AB < BC$). Докажите, что окружности, описанные около треугольников APQ, для всевозможных точек P и Q, выбранных на сторонах BC и CD соответственно так, что $CP = CQ$, имеют общую точку, отличную от A. *(Т.Емельянова)*

714. Леша поставил в клетки таблицы 22×22 натуральные числа от 1 до 22^2. Верно ли, что Олег может выбрать такие две клетки, соседние по стороне или вершине, что сумма чисел, стоящих в этих клетках, делится на 4? *(О.Подлипский)*

715. Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причем $\dfrac{a_i^2}{a_i - 1} > S$ для любого $i = 1, 2, 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \frac{1}{a_3+a_1} > 1.$$

(С.Берлов)

716. На столе лежат 365 карточек, на обратной стороне которых написаны различные числа. За один рубль Вася может выбрать три карточки и попросить Петю положить их слева направо так, чтобы числа на карточках располагались в порядке возрастания. Может ли Вася, потратив 2000 рублей, с гарантией выложить все 365 карточек на стол слева направо так, чтобы числа на них располагались в порядке возрастания? *(М.Гарбер)*

717. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для любых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны. *(О.Подлипский)*

718. Сколькими способами числа $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{2005}$ можно разбить на два непустых множества A и B так, чтобы уравнение $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$, где $S(M)$ — сумма чисел множества M, имело целый корень? *(Н.Агаханов, И.Богданов)*

719. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. На дуге ACB описанной окружности треугольника ABC выбрана точка D. Пусть прямые AA' и BD пересекаются в точке P, а прямые BB' и AD пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая $A'B'$ проходит через середину отрезка PQ. *(А.Акопян)*

720. За круглым столом сидят 100 представителей 50 стран, по двое от каждой страны. Докажите, что их можно разбить на две группы таким образом, что в каждой группе будет по одному представителю от каждой страны, и каждый человек находился в одной группе не более чем с одним своим соседом. *(С.Берлов)*

10 класс

721. Найдите наименьшее натуральное число, не представимое в виде $\dfrac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$, где a, b, c, d — натуральные числа. *(В.Сендеров)*

722. В таблице $2 \times n$ расставлены положительные числа так, что в каждом из n столбцов сумма двух чисел равна 1. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждом столбце так, чтобы в каждой строке сумма оставшихся чисел не превосходила $\dfrac{n+1}{4}$. *(Е.Куликов)*

723. На оборотных сторонах 2005 карточек написаны различные числа (на каждой по одному). За один вопрос разрешается указать на любые три карточки и узнать множество чисел, написанных на них. За какое наименьшее число вопросов можно узнать, какие числа записаны на каждой карточке? *(И.Богданов)*

724. Окружности ω_B, ω_C — вневписанные для треугольника ABC (т. е. ω_B и ω_C касаются соответственно сторон AC и AB и продолжений двух других сторон). Окружность ω'_B симметрична ω_B относительно середины стороны AC, окружность ω'_C симметрична ω_C относительно середины стороны AB. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей ω'_B и ω'_C, делит периметр треугольника ABC пополам. *(П.Кожевников)*

725. В некоторые 16 клеток доски 8×8 поставили по ладье. Какое наименьшее количество пар бьющих друг друга ладей могло при этом оказаться? *(Е.Куликов)*

726. См. задачу 719.

727. Натуральные числа x и y таковы, что $2x^2 - 1 = y^{15}$. Докажите, что если $x > 1$, то x делится на 5. *(В.Сендеров)*

728. На бесконечном белом листе клетчатой бумаги конечное число клеток окрашено в черный цвет так, что у каждой черной клетки четное число (0, 2 или 4) белых клеток, соседних с ней по стороне. Докажите, что каждую белую клетку можно покрасить в красный или зеленый цвет так, чтобы у каждой черной клетки стало поровну красных и зеленых клеток, соседних с ней по стороне. *(А.Глебов, Д.Фон-дер-Флаас)*

11 класс

729. Какое наибольшее конечное число корней может иметь уравнение

$$|x-a_1|+\ldots+|x-a_{50}|=|x-b_1|+\ldots+|x-b_{50}|,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{50}, b_1, b_2, \ldots, b_{50}$ — различные числа? *(И.Рубанов)*

730. См. задачу 723.

731. Пусть A', B' и C' — точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников $A'B'C$, $AB'C'$ и $A'BC'$ пересекают второй раз описанную окружность треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами. *(Л.Емельянов)*

732. Натуральные числа x, y, z ($x>2$, $y>1$) таковы, что $x^y+1=z^2$. Обозначим через p количество различных простых делителей числа x, через q — количество различных простых делителей числа y. Докажите, что $p \geqslant q+2$. *(В.Сендеров)*

733. Существует ли ограниченная функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что $f(1)>0$ и $f(x)$ удовлетворяет при всех $x, y \in \mathbb{R}$ неравенству

$$f^2(x+y) \geqslant f^2(x)+2f(xy)+f^2(y)?$$

(Н.Агаханов)

734. Можно ли расположить в пространстве 12 прямоугольных параллелепипедов P_1, P_2, $\ldots$, P_{12}, ребра которых параллельны координатным осям Ox, Oy, Oz так, чтобы P_2 пересекался (т. е. имел хотя бы одну общую точку) с каждым из оставшихся, кроме P_1 и P_3, P_3 пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_2 и P_4, и т. д., P_{12} пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_{11} и P_1, P_1 пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_{12} и P_2? (Поверхность параллелепипеда принадлежит ему.) *(А.Акопян)*

735. Четырехугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами описан около окружности с центром O. Докажите, что точка O совпадает с точкой пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда $OA\cdot OC=OB\cdot OD$. *(А.Заславский, М.Исаев, Д.Цветов)*

736. За круглым столом сидят 100 представителей 25 стран, по 4 представителя от каждой. Докажите, что их можно разбить на 4 группы таким образом, что в каждой группе будет по одному представителю от каждой страны, и никакие двое из одной группы не сидят за столом рядом.

(*С.Берлов*)

2005–2006 г.

9 класс

737. Дана доска 15×15. Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200. (*С.Берлов, И.Богданов*)

738. Докажите, что найдутся 4 таких целых числа a, b, c, d, по модулю больших 1 000 000, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}.$$

(*С.Берлов*)

739. Петя раскрашивает 2006 точек, расположенных на окружности, в 17 цветов. Затем Коля проводит хорды с концами в отмеченных точках так, чтобы концы любой хорды были одноцветны и хорды не имели общих точек (в том числе и общих концов). При этом Коля хочет провести как можно больше хорд, а Петя старается ему помешать. Какое наибольшее количество хорд заведомо сможет провести Коля? (*С.Берлов*)

740. Дан треугольник ABC. Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC в точке A, пересекает сторону AB в точке K, а также пересекает сторону BC. Касательная CL к окружности ω такова, что отрезок KL пересекает сторону BC в точке T. Докажите, что отрезок BT равен по длине касательной из точки B к ω. (*Д.Скробот*)

741. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — натуральные числа, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Пусть b_k — наибольший делитель a_k такой, что $b_k < a_k$. Оказалось, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$. (*М.Мурашкин*)

742. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $AP = CQ$ и четырехугольник $RPBQ$ — вписанный. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекают прямые RP и RQ в точках X и Y соответственно. Докажите, что $RX = RY$. (*С.Берлов*)

743. Клетчатый квадрат 100×100 разрезан на доминошки: прямоугольники 1×2. Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседних по стороне клетки, между которыми был проведен разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т. е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник? (*И.Богданов*)

744. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1. Докажите, что $b \leqslant -\frac{1}{4}$. (*С.Берлов*)

10 класс

745. См. задачу 737.

746. Сумма кубов трех последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трех чисел делится на 4. (*В.Сендеров*)

747. См. задачу 739.

748. Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L. Отрезок AK пересекает ω второй раз в точке M. Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PMQ касается окружности ω. (*В.Филимонов*)

749. См. задачу 741.

750. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC. (*С.Берлов*)

751. См. задачу 744.

752. Квадрат $3\,000 \times 3\,000$ произвольным образом разбит на доминошки (т. е. прямоугольники 1×2 клетки). Докажите, что доминошки можно раскрасить в три цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и у каждой доминошки было не более двух соседей ее цвета (доминошки считаются соседними, если они содержат клетки, соседние по стороне). (*А.Пастор*)

11 класс

753. Докажите, что $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. (*В.Сендеров*)

754. Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей — чисто периодические дроби с периодом T. Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше T. (*А.Голованов*)

755. В клетчатом прямоугольнике 49×69 отмечены все $50 \cdot 70$ вершин клеток. Двое играют в следующую игру: каждым своим ходом каждый игрок соединяет две точки отрезком, при этом одна точка не может являться концом двух проведенных отрезков. Отрезки могут содержать общие точки. Отрезки проводятся до тех пор, пока точки не кончатся. Если после этого первый может выбрать на всех проведенных отрезках направления так, что сумма всех полученных векторов равна нулевому вектору, то он выигрывает, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре? *(О.Подлипский)*

756. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках M и N. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника MIN вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника ABC. *(Л.Емельянов)*

757. Последовательности положительных чисел (x_n) и (y_n) удовлетворяют условиям $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}^2$, $y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1}$ при всех натуральных n. Докажите, что если все числа x_1, x_2, y_1, y_2 больше 1, то $x_n > y_n$ при каком-нибудь натуральном n. *(А.Голованов)*

758. Окружность с центром I, вписанная в грань ABC треугольной пирамиды $SABC$, касается отрезков AB, BC, CA в точках D, E, F соответственно. На отрезках SA, SB, SC отмечены соответственно точки A', B', C' так, что $AA' = AD$, $BB' = BE$, $CC' = CF$; S' — точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке S. Известно, что SI является высотой пирамиды. Докажите, что точка S' равноудалена от точек A', B', C'. *(Ф.Бахарев)*

759. Известно, что многочлен $(x+1)^n - 1$ делится на некоторый многочлен $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \ldots + c_1x + c_0$ четной степени k, у которого все коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ — целые нечетные числа. Докажите, что n делится на $k+1$. *(А.Гарбер)*

760. В лагерь приехало несколько пионеров, каждый из них имеет от 50 до 100 знакомых среди остальных. Докажите, что пионерам можно выдать пилотки, покрашенные в 1331 цвет так, чтобы у знакомых каждого пионера были пилотки хотя бы 20 различных цветов. *(Д.Карпов)*

Решения задач

Окружной этап олимпиады

1992–1993 г.

9 класс

1. Рассмотрим выражение

$$a^2+ab+b^2-3(a+b-1)=a^2+(b-3)a+(b^2-3b+3)$$

как квадратный трехчлен относительно a. Его дискриминант равен $-3(b-1)^2$ и, следовательно, неположителен. Так как коэффициент при a^2 больше нуля, то трехчлен принимает только неотрицательные значения, значит, $a^2+ab+b^2 \geqslant 3(a+b-1)$ при любых a и b. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b=1$.

Замечание. Возможны и другие решения, например, решение, использующее одно из тождеств $a^2+ab+b^2-3(a+b-1)=(a-1)^2+(b-1)^2+(a-1)(b-1)$ или $a^2+ab+b^2-3(a+b-1)=\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{2}(a+b-2)^2$. Еще одно решение можно получить, заметив, что $ab=\dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}$, и воспользовавшись неравенством $a^2+b^2 \geqslant \dfrac{(a+b)^2}{2}$.

2. Ответ. 987654321.

Если в десятичной записи числа есть цифра 0 или две одинаковые цифры, то, вычеркнув остальные цифры, мы получим число, делящееся на 11. Значит, искомое число не более чем девятизначное, и все его цифры различны. Наибольшее из таких чисел — 987654321. Докажем, что оно удовлетворяет условию задачи.

Пусть после вычеркивания $n \geqslant 0$ цифр из числа 987654321 получилось число $\overline{a_{2k}a_{2k-1}\ldots a_2a_1}$, в котором $a_{2k} > a_{2k-1} > \ldots > a_2 > a_1$ (если число цифр в получившемся числе нечетно, то припишем в конце нуль, что не изменит делимости на 11). Тогда

$$(a_{2k}-a_{2k-1})+(a_{2k-2}-a_{2k-3})+\ldots+(a_2-a_1)>0 \text{ и}$$

$$a_{2k}-(a_{2k-1}-a_{2k-2})-(a_{2k-3}-a_{2k-4})-\ldots-a_1 \leqslant a_{2k} \leqslant 9.$$

Поэтому число

$$a_{2k}+a_{2k-2}+\ldots+a_2-a_{2k-1}-a_{2k-3}-\ldots-a_1$$

не делится на 11, а, значит, не делится на 11 и число

$$\overline{a_{2k}a_{2k-1}\ldots a_2a_1}.$$

3. а) **Ответ.** Не обязательно.

На рис. 20 приведен пример неравнобедренного треугольника ABC, удовлетворяющего условию задачи. Способ построения ясен из рисунка.

Возьмем равнобедренный $\triangle AOC$ ($AO = OC$) и проведем произвольную прямую CB_1 так, чтобы угол ACB_1 был больше угла ACO. Прямая AO пересечет CB_1 в точке N. Эти построения нетрудно выполнить так, чтобы $\angle ANC$ оказался острым.

Отразив точки N и C симметрично относительно B_1O, получим точки K и A соответственно. Ясно, что прямая AK пройдет через точку B_1. На отрезке CK есть точка M такая, что $AK = AM = CN$ (так как $\angle AKC = \angle ANC$ — острый).

Ясно, что $\triangle ABC$ не является равнобедренным, так как $\triangle AB_1C$ равнобедренный.

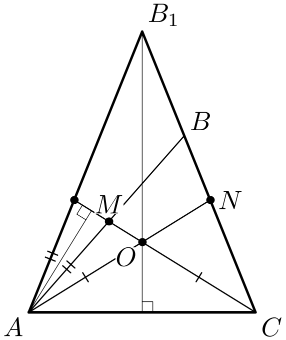


Рис. 20

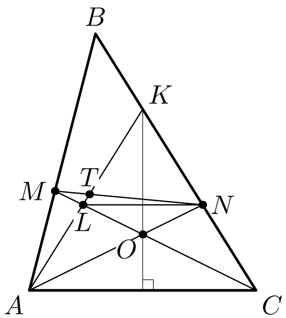


Рис. 21

б) **Ответ.** Обязательно.

Допустим, что $\angle A > \angle C$. Построим на стороне BC точку K так, что $AK = CK$. Пусть L и T — точки пересечения прямой AK с CM и MN соответственно (см. рис. 21). Так как треугольник AKC равнобедренный и $AO = OC$, то прямая KO — его ось симметрии. Точки L и N симметричны относительно прямой KO, следовательно, $\angle KLN = \angle KNL$.

Далее, $\angle KNT < \angle KNL = \angle KLN < \angle KTN = \angle ATM < \angle BMN$. Но $\angle KNT = \angle BMN$, так как $BM = BN$. Полученное противоречие показывает, что неравенство $\angle A > \angle C$ невозможно. Аналогично получаем, что невозможно неравенство $\angle A < \angle C$. Следовательно, $\angle A = \angle C$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный.

4. Ответ. За n ходов.

Докажем сначала, что не более чем за n ходов всегда можно положить все карты рубашками вниз. Если изначально все карты лежат рубашками вниз, то утверждение доказано. В противном случае разобьем колоду на группы подряд идущих карт, лежащих одинаково (т. е. в каждой группе все карты лежат либо рубашками вверх, либо рубашками вниз). Перевернем самую верхнюю группу. Тогда число групп уменьшится на единицу. Будем далее повторять эту процедуру до тех пор, пока не останется одна группа, т. е. все карты в колоде будут лежать одинаково. Так как изначально было не более n групп, то для этого потребуется не более $n-1$ ходов. Полученную в результате группу можно, если это необходимо, за один ход перевернуть, добившись, чтобы все карты лежали рубашками вниз.

Покажем теперь, что существует расположение карт, при котором нельзя получить требуемое расположение карт в колоде менее, чем за n ходов. Так как каждый ход, как легко проверить, уменьшает число групп не более, чем на единицу, то колода, содержащая n групп, может быть приведена к одной группе минимум за $n-1$ ходов. Рассмотрим колоду, в которой нижняя карта лежит рубашкой вверх, вторая снизу — рубашкой вниз, и так далее. Если каждый раз делается ход, уменьшающий число групп, то вся колода целиком не переворачивалась, поэтому через $n-1$ ходов такая колода будет приведена к одной группе, в которой все карты лежат рубашками вверх (т. е. так, как первоначально лежала нижняя карта). Следовательно, понадобится n-й ход, чтобы перевернуть все карты и положить их, как требуется в условии задачи. Если же, кроме $n-1$ ходов, уменьшающих число групп, будут сделаны какие-то ходы, не уменьшающие число групп, то, очевидно, всего будет сделано не менее n ходов. Таким образом, указанную колоду нельзя привести к одной группе менее, чем за n ходов.

5. Перепишем уравнение в виде

$$(x+y)^3 = 7(x^2y + xy^2) + 4.$$

Так как куб целого числа не может давать остаток 4 при делении на 7, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Замечание. Другие решения задачи можно получить, рассматривая остатки, которые могут давать числа x и y при делении на 4, или заметив, что из уравнения следует, что $x+y$ — делитель числа 4.

6. На рис. 22 отрезки, отмеченные двумя штрихами, равны по условию, а отрезки отмеченные одним штрихом, также равны, так как $l_1 \parallel l$.

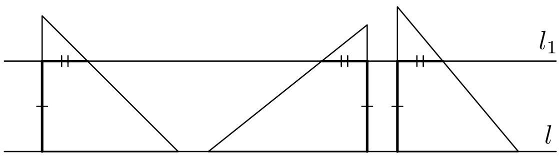


Рис. 22

Расположим теперь треугольники так, как показано на рис. 23. Очевидно, что прямая l_2, содержащая отрезки, отмеченные одним штрихом, является искомой.

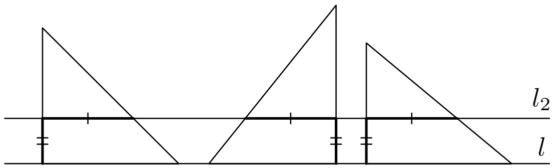


Рис. 23

7. Рассмотрим случай, когда точки N и M лежат на сторонах ромба (см. рис. 24). Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Опишем около треугольников ANE и CME окружности и обозначим через K_1 точку их пересечения, отличную от точки E. Покажем, что точки K и K_1 совпадают.

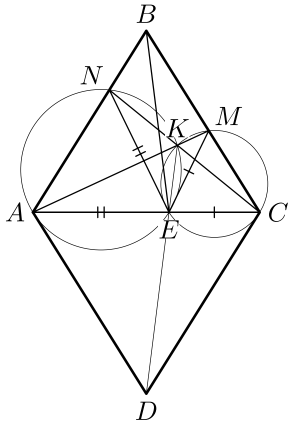


Рис. 24

Действительно, $\angle AK_1E = \angle ANE$ (как вписанные, опирающиеся на дугу AE) и $\angle EK_1M = \pi - \angle ECM$ (так как четырехугольник EK_1MC вписан в окружность). Но $\angle ECM = \angle ANE$, следовательно, $\angle AK_1E + \angle EK_1M = \pi$, т. е. точка K_1 лежит на отрезке AM. Аналогично получаем, что K_1 лежит на отрезке NC, т. е. совпадает с точкой K пересечения прямых AM и CN. Далее, так как $\angle NEA = \angle NBC$, то $\angle NBC + \angle NEC = \angle NBC + (\pi - \angle NEA) = \pi$, т. е. около четырехугольника $NBCE$ можно описать окружность.

Следовательно, $\angle NEB = \angle NCB$ как вписанные, опирающиеся на дугу NB. Но $\angle NCB = \angle KEM$, так как они опираются на одну и ту же дугу KM. Итак, $\angle NEB = \angle KEM$, а, значит, в силу равенства $\angle AEN = \angle CEM$, равны и углы AEB и CEK. Осталось заметить, что точка D симметрична точке B относительно прямой AC, поэтому $\angle AED = \angle AEB = \angle KEC$ и, следовательно, точки K, E и D лежат на одной прямой.

8. **Ответ.** 1993.

Пусть первый игрок действует следующим образом: своим первым ходом он ставит знак, противоположный знаку числа, являющегося значением выражения на доске, если это число не равно нулю, и любой знак в противном случае. Тогда после каждого (в том числе и последнего) хода игрока модуль алгебраической суммы, написанной на доске, будет не больше 1993. Значит, второй игрок не может гарантировать себе выигрыш, больший 1993.

Покажем, что он может добиться выигрыша, равного 1993. Составим две последовательности по 996 чисел с равными суммами:

$$1,\ 4,\ 5,\ 8,\ \ldots,\ 4k-3,\ 4k,\ \ldots,\ 1989,\ 1992$$

и

$$2,\ 3,\ 6,\ 7,\ \ldots,\ 4k-2,\ 4k-1,\ \ldots,\ 1990,\ 1991.$$

Второй игрок может считать отдельно количество плюсов и минусов, поставленных первым. Стратегия второго игрока заключается в том, чтобы писать на доске очередное число из первой последовательности после каждого плюса с номером не более 996 и из второй последовательности после каждого минуса с номером не более 996. Как только один из знаков появится на доске в 997-й раз, второму следует написать после него число 1993. Тогда сумма всех чисел на доске, перед которыми стоит этот знак, по модулю превысит сумму всех остальных чисел от 1 до 1992 по крайней мере на 1993. Поэтому далее второй игрок может выписывать еще не использованные числа от 1 до 1992 в любом порядке.

Итак, второй игрок может гарантировать себе выигрыш, равный 1993.

10 класс

9. Проведем $KE \perp AB$ (см. рис. 25). Тогда, во-первых, $KE \parallel CH$, а во-вторых, $AE = EB$, так как $AK = KB$. Следовательно, EM — средняя линия треугольника ABC. Поэтому $EM \parallel AC$ и $EM = \frac{1}{2}AC$. Утверждение задачи следует из подобия треугольников MEK и ACN.

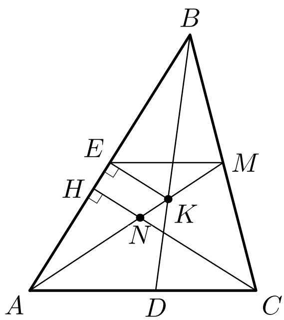


Рис. 25

10. См. решение задачи 2.

11. Ответ. $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}, \ldots, x_{99} = 2, x_{100} = \frac{1}{2}$.

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для любых положительных чисел x и y имеем: $x + \frac{1}{y} \geqslant 2\sqrt{\frac{x}{y}}$. Поэтому

$$\begin{gathered} x_1 + \frac{1}{x_2} \geqslant 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}, \\ x_2 + \frac{1}{x_3} \geqslant 2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{100} + \frac{1}{x_1} \geqslant 2\sqrt{\frac{x_{100}}{x_1}}. \end{gathered} \tag{1}$$

Перемножая эти неравенства, получаем неравенство

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_{100} + \frac{1}{x_1}\right) \geqslant 2^{100} = 4^{50};$$

перемножая уравнения системы, видим, что это неравенство обращается в равенство. Следовательно, каждое из неравенств (1) должно обращаться в равенство, т. е.

$$x_1 = \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = \frac{1}{x_3}, \quad \ldots, \quad x_{100} = \frac{1}{x_1}.$$

Подставляя полученные выражения для $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ в данную систему уравнений, находим ответ.

12. ***Первое решение*** основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть S — произвольное непустое множество жителей. Тогда в городе N найдется житель, знакомый не менее чем с 30% жителей из S.*

Доказательство. Обозначим через $|X|$ количество жителей в множестве X. Оценим общее количество (упорядоченных) пар знакомых (t, s), где t — произвольный человек, а s — человек из S. Для каждого $s_0 \in S$ количество пар вида (t, s_0) не меньше $0{,}3|N|$, поэтому общее количество пар не меньше $0{,}3|S||N|$. Поэтому для какого-то человека t_0 количество пар вида (t_0, s) не меньше $0{,}3|S|$, что и требовалось.

Выдвинем в качестве первого кандидата произвольного жителя A. Рассмотрим множество S не знакомых с A жителей. Если множество S пусто, то в качестве второго кандидата можно взять любого жителя города N, отличного от A. Если множество S непусто, то, применив лемму, найдем жителя B, знакомого не менее чем с 30% жителей, входящих в S. Покажем, что выборы из двух кандидатов A и B удовлетворяют решению задачи.

Пусть житель A имеет k знакомых, а общее число жителей в N равно n. Тогда на выборы из двух кандидатов A и B придет не менее $k + 0{,}3 \cdot (n - k) = 0{,}3n + 0{,}7k$ жителей, и так как $k \geqslant 0{,}3n$, то в выборах примет участие не менее $0{,}3n + 0{,}7 \cdot 0{,}3n = 0{,}51n$, т. е. более половины жителей N.

Второе решение. Обозначим через n число жителей в городе N. Для любых двух жителей города подсчитаем число жителей, знакомых хотя бы с одним из них, и обозначим сумму всех полученных чисел через σ. Мы должны доказать, что в городе N найдутся два таких жителя A и B, что число жителей, знакомых или с A, или с B, не меньше $0{,}5n$. Так как число пар жителей равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$, то для этого достаточно показать, что $\sigma \geqslant 0{,}5n \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{(0{,}5n^2 - 0{,}5n)}{2}\,n$.

Для каждого жителя M оценим число $\sigma(M)$ пар жителей, в которых хотя бы один человек знаком с M. Для этого оценим количество всех остальных пар: в каждой из них оба человека не знакомы с M, поэтому количество таких пар не превосходит $\dfrac{(n-0{,}3n)(n-0{,}3n-1)}{2} \leqslant \dfrac{0{,}49n^2-0{,}7n}{2}$; поскольку общее количество пар жителей равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$, получаем, что $\sigma(M) \geqslant \dfrac{0{,}51n^2-0{,}3n}{2} > > \dfrac{0{,}5n^2-0{,}5n}{2}$, поэтому $\sigma > n\dfrac{0{,}5n^2-0{,}5n}{2}$, что и требовалось.

13. См. решение задачи 5.

14. Докажем по индукции неравенство $2^{n-1} \geqslant n+1$ для $n \geqslant 3$. Действительно, при $n=3$ имеем: $2^{3-1}=3+1$, а из $2^{k-1} \geqslant k+1$ вытекает, что $2^k \geqslant 2(k+1) > k+2$. Из доказанного неравенства следует, что

$$\sqrt[n-1]{n+1} \leqslant 2 \text{ при } n \geqslant 3. \qquad (1)$$

Заметим, что $2^{1993} > 1993$, откуда следует, что $\sqrt[1993]{1993} < 2$. Используя это неравенство и неравенство (1), последовательно получаем:

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots\sqrt[1992]{1992+\sqrt[1993]{1993}}}} < \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots\sqrt[1992]{1992+2}}} \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots\sqrt[k]{k+2}}} \leqslant \ldots \leqslant \sqrt{2+\sqrt[3]{3+2}} \leqslant \sqrt{2+2} = 2.$$

Замечание. Для доказательства неравенства $2^{n-1} \geqslant n+1$ можно было также воспользоваться неравенством Бернулли: $(1+x)^n > 1+nx$ для $x > -1$, $x \neq 0$, $1 < n \in \mathbb{N}$.

15. Соединим точку K с точками A, B и D и обозначим через O, L и P точки пересечения KA и BD, KB и AM, KD и AN соответственно (см. рис. 26). Покажем, что $S_{AEF} = S_{EMKNF}$. Так как $FK \parallel CD$, то $S_{FPD} = S_{KPN}$.

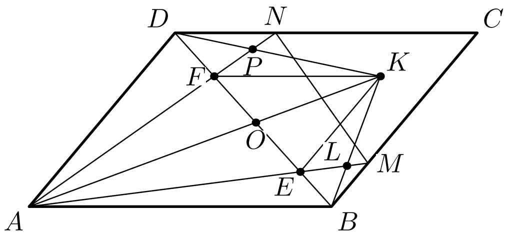


Рис. 26

Аналогично, так как $KE \parallel CB$, то $S_{BLE} = S_{MLK}$. Из этих равенств получаем, что $S_{BKD} = S_{EMKNF}$. Далее, из равенств $S_{AOF} = S_{BOK}$ (так как $FK \parallel AB$) и $S_{AOE} = S_{KOD}$ (так как $EK \parallel AD$) получаем, что $S_{AEF} = S_{EMKNF}$. Теперь ясно, что $S_{AEF} = S_{EMNF}$ тогда и только тогда, когда точка K лежит на отрезке MN.

16. **Ответ.** Выигрывает второй игрок.

Рассмотрим правый нижний фрагмент доски (см. рис. 27). Очевидно, что через несколько ходов кентавр окажется в клетке $a3$. Игрок, делающий ход с $a3$, либо выигрывает, либо проигрывает. В первом случае второй игрок может добиться того, чтобы делать ход с этой клетки ($a1 \to {}^{\mathrm{I}}a2 \to {}^{\mathrm{II}}b3 \to {}^{\mathrm{I}}a3 \to {}^{\mathrm{II}} \ldots$ или $a1 \to {}^{\mathrm{I}}b2 \to {}^{\mathrm{II}}b3 \to {}^{\mathrm{I}}a3 \to {}^{\mathrm{II}} \ldots$), а во втором случае он может заставить своего противника ходить с $a3$ ($a1 \to {}^{\mathrm{I}}a2 \to {}^{\mathrm{II}}a3 \to {}^{\mathrm{I}} \ldots$ или $a1 \to {}^{\mathrm{I}}b2 \to {}^{\mathrm{II}}c3 \to {}^{\mathrm{I}}b2 \to {}^{\mathrm{II}}a3 \to {}^{\mathrm{I}} \ldots$). Поэтому при правильной игре второй игрок выигрывает.

11 класс

17. Ответ. $n = 3$.

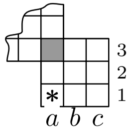


Рис. 27

Проверка показывает, что из чисел $n = 1, 2, 3, 4, 5$ подходит только $n = 3$.

Докажем, что при $n \geqslant 6$ сумма цифр числа 5^n меньше, чем 2^n (т. е. другие значения n не подходят). Действительно, число 5^n не более, чем n-значное, поэтому сумма его цифр не больше, чем $9n$.

С другой стороны, при $n \geqslant 6$ справедливо неравенство $2^n \geqslant 9n$. В самом деле, при $n = 6$ оно верно, а при увеличении n на единицу правая часть этого неравенства увеличивается на 9, а левая — не менее, чем на 64, следовательно, неравенство верно и при каждом следующем значении n.

18. Утверждение будет доказано, если мы покажем, что при $n \geqslant 3$ справедливо равенство
$$\left[\left(\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2}\right)^3\right] + 1 = 8n + 8.$$
Для этого достаточно показать, что при $n \geqslant 3$ справедливы неравенства
$$8n + 7 < \left(\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2}\right)^3 < 8n + 8,$$
т. е.
$$6n + 5 < 3\left(\sqrt[3]{n^2(n+2)} + \sqrt[3]{n(n+2)^2}\right) < 6n + 6.$$
Правое неравенство следует из того, что $n^2(n+2) < \left(n + \frac{2}{3}\right)^3$ и $n(n + 2)^2 < \left(n + \frac{4}{3}\right)^3$. Левое неравенство следует из того, что
$$\sqrt[3]{n^2(n+2)} + \sqrt[3]{n(n+2)^2} \geqslant 2\sqrt{\sqrt[3]{n^2(n+2)}\cdot\sqrt[3]{n(n+2)^2}} = 2\sqrt{n(n+2)}$$
и $n(n+2) > \left(n + \frac{5}{6}\right)^2$ при $n > \frac{25}{12}$, т. е. при $n \geqslant 3$.

Замечание 1. Правое неравенство можно было доказать, воспользовавшись неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для трех чисел: $3\sqrt[3]{n^2(n+2)} = 3\sqrt[3]{n \cdot n \cdot (n+2)} < n + n +$

$+(n+2)$ и $3\sqrt[3]{n(n+2)^2} < n+(n+2)+(n+2)$ (неравенства строгие, так как $n \neq n+2$).

Замечание 2. Утверждение задачи справедливо и при $n = 2$, что можно проверить непосредственно.

19. Пусть K, L, M и N — точки касания сферы с гранями пирамиды (см. рис. 28). Эти точки лежат в одной плоскости. Действительно, отрезки SK, SL, SM и SN равны как отрезки касательных, проведенных к сфере из точки S (S — вершина пирамиды). Значит, точки K, L, M и N лежат еще и на сфере с центром в точке S и радиусом SK, а следовательно, и на одной окружности, являющейся линией пересечения этой сферы с данной. Плоскость этой окружности перпендикулярна прямой SO — линии центров сфер, т. е. параллельна плоскости основания пирамиды, а поэтому пересекает ее боковые ребра.

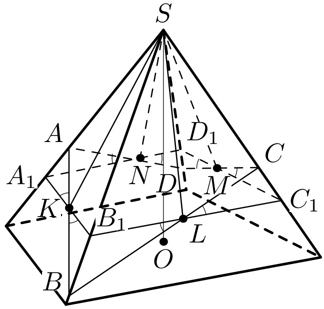


Рис. 28

Обозначим эти точки пересечения через A_1, B_1, C_1 и D_1 (см. рис. 28). Соединим точку N с точками A и D.

Треугольник AA_1N равен треугольнику AA_1K, так как $A_1K = A_1N$, $AK = AN$ (отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны), а сторона AA_1 у них общая. Следовательно, $\angle ANA_1 = \angle AKA_1$.

Аналогично $\angle BKB_1 = \angle BLB_1$, $\angle CLC_1 = \angle CMC_1$ и $\angle DMD_1 = \angle DND_1$. Кроме того, $\angle AKA_1 = \angle BKB_1$, $\angle BLB_1 = \angle CLC_1$ и $\angle CMC_1 = \angle DMD_1$ как вертикальные. Поэтому $\angle ANA_1 = \angle DND_1$, следовательно, точка N лежит на отрезке AD.

20. ***Первое решение.*** Будем называть диагональ правильного многоугольника *главной*, если она проходит через его центр. Для каждой неглавной диагонали существует симметричная ей относительно центра неглавная диагональ. Таким образом, все неглавные диагонали разбиваются на пары. Поставив в каждой такой паре стрелки в противоположных направлениях, мы получим векторы, дающие в сумме $\vec{0}$ (см. рис. 29).

Осталось расставить стрелки на сторонах и главных диагоналях.

Случай $n = 2k+1$ (см. рис. 30).

Расставим стрелки на сторонах по циклу, полученные векторы в сумме дадут $\vec{0}$. Поставим стрелки на главных диагоналях к 1-й, 3-й, ..., $(2n-1)$-й вершинам. Тогда на каждой диагонали окажется ровно одна стрелка. Полученная система векторов переходит в себя при повороте вокруг

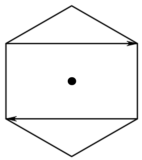


Рис. 29

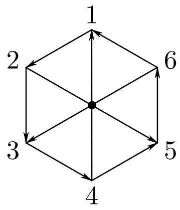


Рис. 30

центра на угол $2\,\frac{\pi}{2k+1}$, следовательно, при таком повороте переходит в себя и вектор, являющийся их суммой, значит, он равен $\vec{0}$.

Случай $n = 2k$ (см. рис. 31).

Выделим в многоугольнике циклы, состоящие из пар соседних главных диагоналей и соединяющих их сторон. В каждом цикле поставим стрелки так, чтобы сумма получившихся векторов была равна $\vec{0}$. Осталось поставить стрелки на сторонах, взятых через одну. Расставим их по циклу и получим $\vec{0}$, так как они переходят в себя при повороте на угол $\frac{\pi}{k}$ вокруг центра.

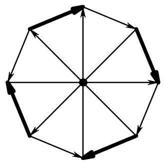


Рис. 31

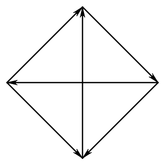


Рис. 32

Второе решение. Требуемая расстановка стрелок для квадрата изображена на рис. 32. Взяв вершины $2n$-угольника ($n \geqslant 3$) через одну, получим два правильных n-угольника M_1 и M_2. Предположим, что мы умеем решать задачу для правильного n-угольника. Для того чтобы решить ее для $2n$-угольника, достаточно из каждой вершины M_1 провести векторы во все вершины M_2 (см. рис. 33); так как их сумма не изменится при повороте на угол $2\,\frac{\pi}{n}$ вокруг центра, следовательно, она равна $\vec{0}$.

Если n — нечетное число, то проведем из каждой вершины векторы в следующие за ней $\frac{n-1}{2}$ вершин (см. рис. 33), тогда их сумма равна $\vec{0}$, так как она не изменится при повороте на угол $\frac{\pi}{n}$ вокруг центра.

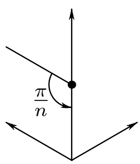


Рис. 33

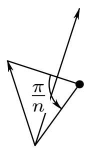


Рис. 34

Итак, мы можем, начав с квадрата или нечетноугольника, удвоением числа сторон получить требуемую расстановку стрелок для любого правильного $2n$-угольника.

Замечание. Справедлива следующая теорема (Л.Эйлер, 1736 год): если в многоугольнике из каждой вершины выходит четное число отрезков, соединяющих ее с другими вершинами, то все эти отрезки можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя никакой отрезок дважды. Ясно, что отсюда вытекает решение нашей задачи для нечетноугольника (не обязательно правильного).

21. Ответ. Не сможет.

Начинающий может добиться наличия ровно одного корня независимо от игры соперника. Для этого ему достаточно своим первым ходом задать коэффициент при x^2 равным нулю. После этого второй игрок задает либо свободный член, либо коэффициент при x. Рассмотрим оба этих случая.

В первом случае начинающему достаточно вторым ходом обнулить коэффициент при x. Действительно, полученное уравнение имеет вид $x^3 + c = 0$ и имеет ровно один корень, так как функция $y = x^3 + c$ возрастает на всей действительной оси.

Во втором случае начинающему нужно подходящим образом выбрать коэффициент c у функции $y = x^3 + bx + c$. Если $b \geqslant 0$, то $y' = 3x^2 + b \geqslant 0$ и $y(x)$ возрастает, следовательно, уравнение $y(x) = 0$ имеет ровно один корень при любом значении c. Если же второй игрок задал отрицательное значение b, то, как нетрудно проверить, функция $y_1(x) = x^3 + bx$ имеет локальный минимум $-m$ в точке $x_0 = \sqrt{-\frac{b}{3}}$ и возрастает при $x \leqslant -x_0$ и $x \geqslant x_0$. Поэтому начинающему достаточно выбрать $c > m$ для того, чтобы уравнение $x^3 + bx + c = 0$ имело ровно один корень.

22. Для каждой пирамиды с площадью основания S_i и высотой H_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$, рассмотрим функцию $S_i(x)$, выражающую зависимость площади сечения пирамиды горизонтальной плоскостью, расположенной на расстоянии x от поверхности стола. Имеем:

$$S_i(x) = S_i \left(1 - \frac{x}{H_i}\right)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant H_i.$$

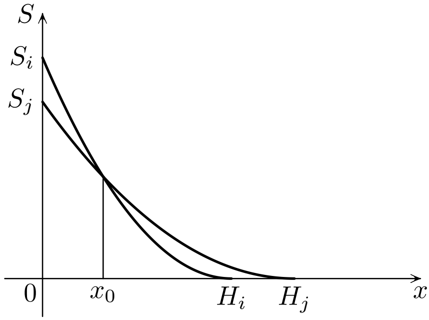


Рис. 35

Графики любых двух таких функций (см. рис. 35) могут либо иметь одну общую точку, либо совпадать, так как уравнение

$$S_i\left(1-\frac{x}{H_i}\right)^2 = S_j\left(1-\frac{x}{H_j}\right)^2$$

по условию задачи при $H_i < H_j$ имеет корень на отрезке $[0, H_i]$, а второй корень принадлежит отрезку $[H_i, H_j]$ (поскольку при $x = H_i$ левая часть меньше правой, а при $x = H_j$ — наоборот) и не попадает в область определения функции $S_i(x)$ (в случае $H_i = H_j$ они имеют либо один корень $x = H_i = H_j$, либо совпадают).

Рассмотрим два графика, которые имеют ровно одну общую точку с абсциссой x_0 (если таких не найдется, то все семь графиков совпадают, и можно выбрать любую горизонтальную секущую плоскость). Тогда из условия задачи следует, что любой другой график также проходит через эту точку. Поэтому плоскость, проходящая на расстоянии x_0 от стола, удовлетворяет требованию задачи.

23. Ответ. Окружность с центром в точке B и радиусом, равным высоте треугольника ABC.

Возможно несколько случаев расположения прямой l (см. рис. 36–38). Рассмотрим случай. изображенный на рис. 36, остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть точка N — середина стороны AC.

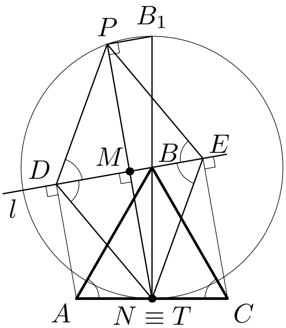


Рис. 36

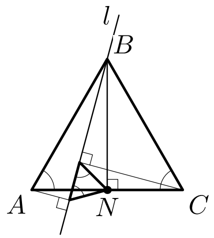


Рис. 37

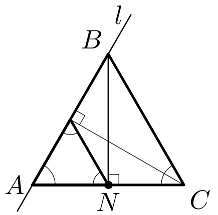


Рис. 38

Так как углы ADB, BNA, BNC и BEC прямые, то четырехугольники $ADBN$ и $BECN$ можно вписать в окружности. Следовательно, $\angle BDN = \angle BAN = 60°$, $\angle BEN = \angle BCN = 60°$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Поэтому треугольник DNE правильный, какова бы ни была прямая l, не пересекающая отрезок AC. Итак, вершина T одного из рассматриваемых треугольников находится в середине отрезка AC. Вершина P другого правильного треугольника симметрична фиксированной точке $T = N$ относительно прямой l; поэтому $BP = BN$, и P лежит на нашей окружности.

Покажем теперь, что любая точка P этой окружности, отличная от N, будет вершиной правильного треугольника DEP при некотором выборе прямой l. Для этого соединим точки P и N и через середину M отрезка NP проведем прямую, перпендикулярную NP. Она пройдет через точку B, так как серединный перпендикуляр к хорде является диаметром окружности (см. рис. 39).

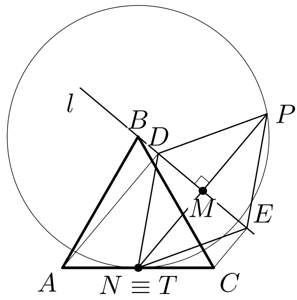


Рис. 39

24. Докажем утверждение задачи от противного. Пусть найдутся два города A и B такие, что из A в B нельзя проехать, сделав меньше 63 пересадок. Разобьем все города страны на группы следующим образом: нулевая группа состоит из города A, первая — из всех городов, в которые можно проехать из A без пересадок, и так далее (k-я группа состоит из всех городов, в которые можно проехать из A с $(k-1)$ пересадками, но нельзя с меньшим их числом). Получим не менее 65 групп. Заметим, что при каждом $k = 0, 1, \ldots, 21$ в группах с номерами $3k$, $3k+1$ и $3k+2$ (или $3k$, $3k+1$, если $(3k+2)$-й группы не существует) содержится в общей сложности не менее 94 городов, так как из какого-нибудь города $(3k+1)$-й группы выходит не менее 93 дорог, соединяющих его с городами указанных групп. Следовательно, всего городов в стране не менее, чем $94 \cdot 22 = 2068$, что противоречит условию задачи.

1993–1994 г.

9 класс

25. **Ответ.** 30 минут.

Ясно, что Пух и Пятачок должны закончить есть одновременно, иначе один из них сможет помочь другому, уменьшив тем самым общее время, затраченное на еду. Пусть Пух съел x_1 горшков меда и y_1 банок сгущенного молока, а Пятачок — x_2 горшков меда и y_2 банок молока (x_1, x_2, y_1 и y_2 — не обязательно целые числа). Тогда для времени T, которое затрачено каждым из них на еду, получаем

$$T = 2x_1 + y_1 = 5x_2 + 3y_2,$$

причем $x_2 = 10 - x_1$, а $y_2 = 22 - y_1$. Следовательно,

$$2x_1 + y_1 = 50 - 5x_1 + 66 - 3y_1,$$

откуда
$$y_1 = \frac{116 - 7x_1}{4}, \quad T = \frac{x_1}{4} + 29.$$

Заметим, что $y_1 \leqslant 22$, поэтому $116 - 7x_1 \leqslant 88$, т. е. $x_1 \geqslant 4$. Значит. наименьшее время T получается при $x_1 = 4$ и равно 30 минутам. При этом Пух должен съесть 4 горшка меда и всю сгущенку, а Пятачок — 6 горшков меда.

26. Построим серединный перпендикуляр l к отрезку CD (см. рис. 40 и 41) (см. рис. 40). Так как по условию $CA < DA$ и $CB < DB$, то города A, B и C лежат по одну сторону от l. Следовательно, для всякой точки M отрезка AB справедливо неравенство $CM < DM$.

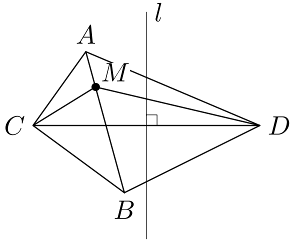


Рис. 40

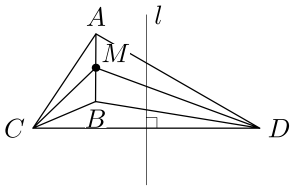


Рис. 41

27. Ответ. Существует.

Рассмотрим квадратный трехчлен $P(x) = x(9x + 2)$. Если $n = \underbrace{11\ldots11}_{k}$, то $9n + 2 = 1\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1$. Следовательно, $P(n) = \underbrace{11\ldots11}_{k}\cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1 = \underbrace{11\ldots11}_{2k}$. Значит, этот квадратный трехчлен удовлетворяет условию.

28. Ответ. При восьми лжецах.

Разобьем все места в президиуме на восемь групп так, как показано на рис. 42. Если лжецов меньше восьми, то в какой-то из этих групп сидят одни правдолюбы, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что лжецов не меньше восьми.

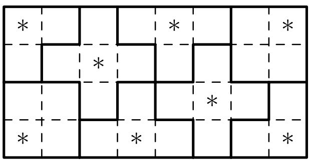


Рис. 42

	Л				Л		
			Л				Л
Л				Л			
		Л				Л	

Рис. 43

На рис. 43 показано, как можно рассадить в президиуме восемь лжецов так, чтобы выполнялось условие задачи.

29. Число $x = 0$ не может быть корнем уравнения $ax^5 + bx^4 + c = 0$, так как иначе $c = 0$, и уравнение имеет не более двух различных корней, что противоречит условию. Разделив обе части этого уравнения на $x^5 \neq \neq 0$, получаем, что $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^5} = 0$. Следовательно, если x_1, x_2 и x_3 — различные корни уравнения $ax^5 + bx^4 + c = 0$, то $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ и $\frac{1}{x_3}$ — различные корни уравнения $cx^5 + bx + a = 0$.

30. Соединим точку O_1 с точкой D, а точку O_2 — с точкой B (см. рис. 44). Радиусы O_1D и O_2B, перпендикулярные прямой LP, равны и параллельны, поэтому четырехугольник O_1DO_2B — параллелограмм. Значит, $\angle LDC = \angle DBO_1$. Пусть O_2E — радиус, перпендикулярный прямой LM. Тогда четырехугольник $CLEO_2$ — прямоугольник, следовательно, $CL = O_2E = O_2B = O_1D$. Из этого вытекает, что треугольники DCL и BDO_1 равны по катету и противолежащему острому углу, откуда $CD = = DB$ и, значит, углы DCB и DBC равны. Утверждение задачи следует теперь из равенства углов DCB и CBA ($CD \parallel AB$).

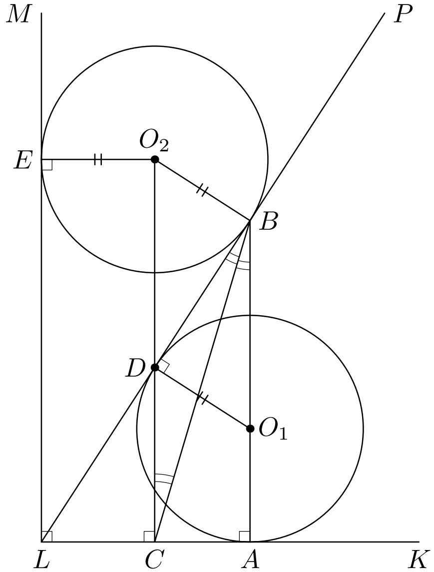


Рис. 44

31. **Ответ.** $p = 2$, $q = 7$, $r = 3$, $s = 11$ или $p = 2$, $q = 7$, $r = 11$, $s = 3$.

Сумма четырех нечетных простых чисел — четное число, большее двух, значит, одно из этих простых чисел есть 2. Пусть $p \neq 2$, тогда одно из оставшихся чисел — 2, а остальные нечетны. Следовательно, одно из выражений $p^2 + qs$ или $p^2 + qr$ имеет вид $(2k+1)^2 + 2(2l+1) = 4(k^2 + k +$

$+l)+3$, что невозможно, так как квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1. Итак, $p = 2$. Пусть $4+qs = a^2$, тогда $qs = (a-2)(a+2)$.

Если $a - 2 = 1$, то $qs = 5$, что невозможно. Следовательно. $q = a - 2$, $s = a + 2$, или наоборот, т. е. числа q и s отличаются на 4. Аналогично получаем, что числа q и r отличаются на 4. Значит, либо $s = q - 4$, $r = q + 4$, либо $r = q - 4$, $s = q + 4$. Одно из чисел $q - 4$, q, $q + 4$ делится на 3, поэтому $q - 4 = 3$, т. е. $q = 7$, а $q + 4 = 11$.

32. Ответ. 4 месяца.

На рис. 45 показано, как нужно разбивать класс на две группы так, чтобы любые два ученика в какой-то из четырех месяцев оказались в разных группах. Каждому ученику соответствует столбец таблицы, а каждому месяцу — ее строка. Нуль, стоящий в клетке таблицы, означает, что данный ученик входит в первую группу, а единица означает, что данный ученик входит во вторую группу. (Таблица устроена так, что в ее i-м столбце находится двоичная запись числа $i - 1$.)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Рис. 45

Теперь докажем, что за три месяца выполнить требуемое условие нельзя. Составим таблицу, аналогичную приведенной выше. В ней будет 16 столбцов и 3 строки. Так как в столбце из трех клеток можно расставить нули и единицы восемью различными способами, то в таблице найдутся два одинаковых столбца. Ученики, которым соответствуют эти столбцы, в течение трех месяцев будут попадать в одну и ту же группу.

10 класс

33. Ответ. а) да; б) нет.

а) Если вместимость стакана считать равной 1, то в первых трех стаканах в сумме $1\frac{1}{12}$ воды. Перельем в первый стакан всю воду из второго, а затем из третьего, пока первый не заполнится. После этого в третьем стакане окажется $\frac{1}{12}$.

б) Докажем индукцией по количеству переливаний, что количество воды в непустом стакане после переливаний есть либо 1, либо дробная часть суммы некоторых из чисел $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, при этом в разных стаканах в суммах участвуют неповторяющиеся числа. База индукции верна. Пусть в стаканах A и B количество воды равно a и b соответственно. Если из стакана A в стакан B переливается вся вода, то новые количества составляют 0 и $a+b$, а если стакан B наполняется из A доверху, то $a+b-1$ и 1. Теперь ясно, что утверждение осталось истинным.

Пусть $\frac{1}{6} = \{a_1 + \ldots + a_k\}$, где a_i — некоторые из чисел $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$. Покажем, что в этой сумме нет чисел $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$. Действительно, легко проверить, что если там присутствует хотя бы одно из чисел $\frac{1}{5}$ или $\frac{1}{10}$, одно из чисел $\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{8}$, или число $\frac{1}{9}$, то знаменатель получившейся дроби делится на 5, 4 или 9 соответственно. В то же время число 6 не делится ни на одно из этих чисел. Из чисел же $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ невозможно сложением получить число с дробной частью $\frac{1}{6}$.

34. Пусть x_1 и x_2 — различные корни уравнения $x^2+ax+b=0$. Нетрудно проверить, что $x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=(x^2-x_1x-1)(x^2-x_2x-1)$, поскольку по теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=b$. Остается показать, что корни уравнений $x^2-x_1x-1=0$ и $x^2-x_2x-1=0$ действительны и попарно различны. Дискриминанты обоих уравнений положительны. Если же x — общий корень этих уравнений, то $(x^2-x_1x-1)-(x^2-x_2x-1)=x(x_2-x_1)=0$, откуда $x=0$. Но $x=0$ не является корнем.

35. Пусть данная окружность касается стороны AB в точке P (см. рис. 46). Проведем отрезки OE, OP и PE. Углы AOP и FEP равны, так как оба они измеряются половиной дуги FP. Из этого следует, что $\angle POK + \angle KEP = 180°$, поэтому точки K, O, P и E лежат на одной окружности. Так как $\angle OPB = \angle OEB = 90°$, то точки O, P и E лежат на окружности с диаметром OB, на этой же окружности должна лежать и точка K. Следовательно, $\angle BKO = 90°$. Аналогично доказывается, что $\angle CND = 90°$, откуда и вытекает утверждение задачи.

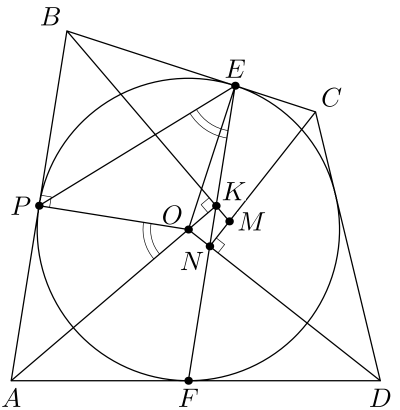


Рис. 46

36. Ясно, что если прямоугольник $m \times n$ разрезан на уголки, то $m \cdot n$ делится на 3. Расставим в клетках прямоугольника числа так, как показано на рис. 47.

Сумма всех этих чисел равна $m \cdot n\,\frac{m+n}{2}$ и, значит, делится на 3. Сумма чисел, стоящих в уголке вида a, дает при делении на 3 остаток 2; сумма чисел, стоящих в уголке вида b — остаток 1; суммы чисел, стоящих в уголках вида c и d, делятся на 3. Если n_a и n_b — количества уголков вида a

1	2	3	4	…	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
2	3	4	5	…	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$m-1$	m	$m+1$	$m+2$	…	$m+n-5$	$m+n-4$	$m+n-3$	$m+n-2$
m	$m+1$	$m+2$	$m+3$	…	$m+n-4$	$m+n-3$	$m+n-2$	$m+n-1$

Рис. 47

и вида b соответственно, то сумма всех чисел в прямоугольнике имеет вид $3N+2n_a+n_b=3(N+n_b)+2(n_a-n_b)$, где N — некоторое целое число. Поэтому $2(n_a-n_b)$ и, следовательно, n_a-n_b делится на 3.

37. **Ответ.** 5.

Обозначим искомое простое число через p. Так как p — сумма двух простых чисел, то $p>2$, следовательно, p нечетно. Значит, одно из слагаемых в представлении числа p в виде суммы двух простых чисел четно, т. е. равно двум. Итак, $p=q+2$ и $p=r-2$, где q и r — простые числа, следовательно, числа $p-2$, p и $p+2$ — простые. Из трех последовательных нечетных чисел по крайней мере одно делится на 3. Значит, одно из чисел $p-2$, p, $p+2$ равно трем. Ясно, что этим числом может быть только $p-2$.

38. **Ответ.** 208.

Пусть a_0 — свободный член многочлена $P(x)$. Тогда $P(x)=x\cdot Q(x)+a_0$, где $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Поэтому $P(19)=19n+a_0$, а $P(94)=94m+a_0$, где m и n — целые числа. Из условия вытекает, что $19n=94m$, следовательно, $n=94k$, $m=19k$. Итак, $19\cdot 94k+a_0=1994$, откуда $a_0=1994-1786k$. Из условия $|a_0|<1000$ следует, что $k=1$, и $a_0=208$.

39. Продолжим стороны AB и CD, BC и ED до пересечения в точках K и M соответственно (см. рис. 48). (Покажем, что в точке M пересекаются лучи BC и ED. Действительно, в противном случае в ней пересекаются лучи CB и DE, точка B лежит на катете прямоугольного треугольника CDM, и прямая AB, перпендикулярная CD, пересекает отрезок CD, что невозможно.)

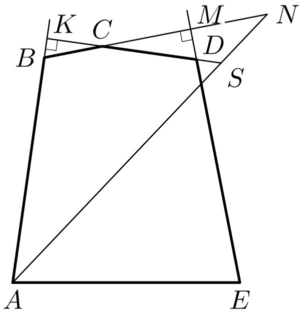


Рис. 48

Пусть $\angle BAE=\alpha$, $\angle DEA=\beta$. В четырехугольнике $ABME$ $\angle B>90^\circ$, $\angle M=90^\circ$. Поэтому $\alpha+\beta<180^\circ$, и хотя бы один из этих углов меньше 90°. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что $\alpha<90^\circ$. Отложим на луче BC отрезок BN единичной длины. В равнобедренном треугольнике ABN имеем:

$$\angle BAN = \frac{180^\circ - \angle ABN}{2} = \frac{180^\circ - (360^\circ - 90^\circ - \alpha - \beta)}{2} = \frac{\alpha + \beta - 90^\circ}{2}.$$

В равнобедренном треугольнике AED $\angle DAE = \frac{180^\circ - \beta}{2}$. Следовательно, $\angle BAN + \angle DAE = \frac{90^\circ + \alpha}{2} > \alpha$, и точка D лежит внутри треугольника ABN. Продолжим теперь отрезок CD до пересечения с прямой AN в точке S. В треугольнике CSN угол CNS острый, а угол NSC тупой. Значит, $CS < CN$, откуда получаем, что $BC + CD < BC + CS < BC + CN = BN = 1$.

40. Заметим, что существует всего 2^m способов присвоения названий улицам (для краткости будем называть их раскрасками).

Оценим количество K раскрасок, которые можно получить с помощью переименований из раскраски, для которой все улицы красные. Раскраска, полученная после серии переименований, не зависит от порядка, в котором эти переименования были произведены. Кроме того, можно считать, что одна площадь не выбирается более одного раза, так как если площадь выбирается дважды, то все улицы сохранят свои прежние названия. Поэтому $K \leqslant 2^n$, так как раскраска определяется подмножеством выбираемых площадей. Заметим еще, что если провести n переименований, по одному для каждой площади, то каждая улица будет переименована два раза и поэтому сохранит свое название. Следовательно, $K \leqslant 2^n - 1$.

Аналогично, если все улицы были синими, то с помощью переименований можно получить не более $2^n - 1$ раскрасок. В сумме получается не более $2(2^n - 1) < 2^{n+1} \leqslant 2^m$ раскрасок, следовательно, какую-то раскраску нельзя получить с помощью переименований из раскраски, для которой все улицы названы одинаково.

11 класс

41. ***Первое решение.*** Используя тождества $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, $\sin 2x = 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x$, приводим неравенство к виду $2\cos x > \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Полученное неравенство справедливо в силу того, что $2\cos x > 2\cos \frac{\pi}{3} = 1$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} < 1$.

Второе решение. Заметим, что функции $\sin 2x$ и $\cos x$ выпуклы вверх на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Значит, их сумма $f(x) = \sin 2x + \cos x$ также выпукла, поэтому график функции $f(x)$ на этом отрезке лежит не ниже прямой, соединяющей точки $(0; f(0))$ и $\left(\frac{\pi}{3}; f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Требуемое неравенство теперь следует из соотношений $f(0) = 1$ и $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 1$.

42. Докажем утверждение задачи индукцией по n — числу жителей города. При $n \leqslant 2$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 3$, а m — общее количество звонков в этот день. По условию $m \leqslant n$, поэтому найдется житель N города, разговаривавший не более, чем с двумя жителями (в противном случае $m \geqslant \frac{3n}{2} > n$). По предположению индукции, всех жителей города, кроме N, можно разбить на три группы так, чтобы выполнялось условие задачи. Житель N не разговаривал с жителями, входящими в одну из групп, поэтому его можно добавить к этой группе, сохранив в силе требуемое утверждение.

43. Проведем отрезки OD, OF и FD (см. рис. 49).

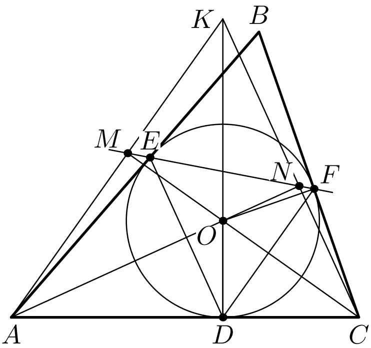


Рис. 49

Углы AOD и EFD измеряются половиной дуги ED, поэтому они равны. Отсюда $\angle NOD + \angle NFD = 180°$, и точки O, N, F, D лежат на одной окружности. С другой стороны, поскольку $\angle ODC = \angle OFC = 90°$, точки O, F, D лежат на окружности с диаметром OC. Следовательно, и точка N лежит на этой окружности, откуда $\angle ONC = 90°$. Аналогично доказывается, что $\angle AMC = 90°$. (Если точка M лежит вне отрезка EF, то из равенства углов DOC и DEF следует, что $\angle MOD = \angle MED$, т. е. и точки M, E, O, D лежат на одной окружности).

Продолжим AM и CN до пересечения в точке K. Мы показали, что AN и CM — высоты треугольника AKC, поэтому прямая OK перпендикулярна AC, так как высоты треугольника пересекаются в одной точке. Значит, точка D лежит на OK. Требуемое утверждение следует из того, что отрезок OK является диаметром окружности, описанной вокруг четырехугольника $OMKN$.

44. Занумеруем вершины n-угольника по часовой стрелке. Пусть из i-й вершины было сделано a_i ходов. Из условия следует, что

$$a_1 = \frac{a_2 + a_n}{2}, \quad a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_1}{2}.$$

Пусть a_1 — наибольшее из чисел a_i. Тогда равенство $a_1 = \frac{a_2 + a_n}{2}$ возможно лишь тогда, когда $a_2 = a_n = a_1$. Теперь из равенства $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ следует, что $a_1 = a_2 = a_3$, и т. д. Таким образом, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, и число сделанных ходов равно $n \cdot a_1$.

45. См. решение задачи 37.

46. Подставив в данном уравнении вместо x дробь $\frac{x+1}{x-1}$, получаем:

$$\frac{2}{x-1}\, f(x) - f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) вместе с данным в условии уравнением задает систему из двух уравнений с неизвестными $f(x)$ и $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. Решив ее, находим, что $f(x) = 1 + 2x$. Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет уравнению.

47. Спроектируем точку O на плоскость SBC. Полученная точка O_1 — центр окружности, описанной около треугольника SBC_1. Пусть SS_1 — ее диаметр. Докажем, что прямые SO_1 и B_1C перпендикулярны.

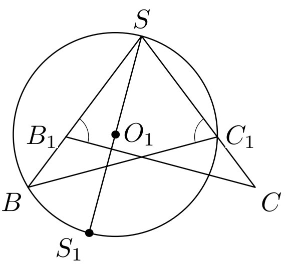


Рис. 50

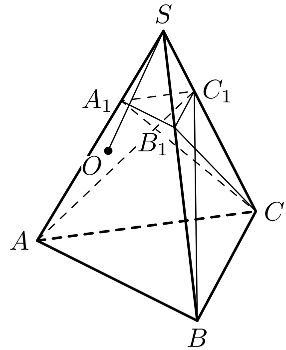


Рис. 51

Действительно (см. рис. 50),

$$\angle SB_1C + \angle B_1SS_1 = \angle SC_1B + \angle BSS_1 = \frac{1}{2}\overset{\smile}{SB} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{BS_1} = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Аналогично, прямая A_1C перпендикулярна проекции прямой SO на плоскость SAC (см. рис. 51). По теореме о трех перпендикулярах $SO \perp A_1C$ и $SO \perp B_1C$, следовательно, $SO \perp A_1B_1C$, что и требовалось доказать.

48. Будем решать задачу индукцией по n. При $n \leqslant 2$ утверждение задачи очевидно. Пусть теперь $n \geqslant 3$.

Без ограничения общности можно считать, что многоугольник M с вершинами A_1, $A_2, \ldots, A_k$ есть выпуклая оболочка множества точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

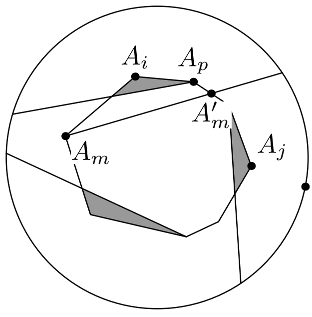


Рис. 52

Рассмотрим отрезки вида A_mB_m $(1 \leqslant m \leqslant k)$, пересекающие M более чем в одной точке. Обозначим через A'_m вторую точку пересечения отрезка A_mB_m с контуром M. Тогда отрезки $A_mA'_m$ не пересекаются. Рассмотрим один из них и одну из частей M, на которые его делит $A_mA'_m$. Тогда в ней найдется такой отрезок $A_pA'_p$, что на части контура от A_p до A'_p нет других точек A'_q. Тогда там есть еще одна точка A_i, причем

A_iB_i не пересекает контур M. Аналогично, в другой части найдется точка A_j такая, что отрезок A_jB_j не пересекает контур M (см. рис. 52).

Таким образом, отрезки A_iB_i и A_jB_j не пересекают отрезков A_pA_q при $p, q \neq i$.

Применив предположение индукции к $(n-1)$ отрезку
$$A_1B_1,\quad A_2B_2,\quad \ldots,\quad A_{i-1}B_{i-1},\quad A_{i+1}B_{i+1},\quad \ldots,\quad A_nB_n,$$
получаем, что точки A_1, A_2, …, A_{i-1}, A_{i+1}, …, A_n можно соединить прыжками кузнечика. То же верно и в отношении точек $A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n$. Наконец, и точки A_i и A_j также связаны прыжками кузнечика: из точки A_i можно добраться до точки A_s, $s \neq i, j$, а из точки A_s — до точки A_j.

1994–1995 г.

9 класс

49. Заметим, что $x^4 + y^2 \geqslant 2x^2y$ и $y^4 + x^2 \geqslant 2y^2x$. Поэтому
$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leqslant \frac{x}{2x^2y} + \frac{y}{2y^2x} = \frac{1}{xy}.$$

50. **Ответ.** Нельзя.

Допустим, что нашлись числа $a_1, a_2, \ldots, a_{1995}$, которые можно расставить требуемым образом. Пусть число a_k ($k = 1, 2, \ldots, 1995$) представляется в виде произведения $n(k)$ простых сомножителей (не обязательно различных). Так как любые два соседние числа отличаются друг от друга одним простым множителем, то для любого $k = 1, 2, \ldots, 1994$ числа $n(k)$ и $n(k+1)$ отличаются на единицу, т. е. имеют разную четность. Значит, числа $n(1), n(3), \ldots, n(1995)$ должны быть одной четности. С другой стороны, числа a_{1995} и a_1 также соседние, поэтому $n(1995)$ и $n(1)$ должны иметь разную четность. Получили противоречие. Следовательно, требуемая расстановка невозможна.

51. Пусть ρ — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$ (см. рис. 53). Тогда $BC = 2\rho\sin\angle CAB$. Угол CBA, как угол между хордой и касательной, равен углу, вписанному в окружность радиуса r и опирающемуся на дугу BDC. Поэтому $BC = 2r\sin\angle CBA$. Аналогично, $AC = 2\rho\sin\angle CBA = 2R\sin\angle CAB$. Перемножая равенства $\rho\sin\angle CAB = r\sin\angle CBA$ и $\rho\sin\angle CBA = R\sin\angle CAB$, получаем $\rho^2 = Rr$, т. е. ρ не зависит от длины AB.

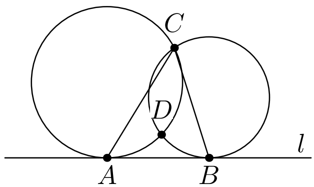


Рис. 53

52. **Ответ.** Не существует.

Допустим, такая раскраска возможна. Рассмотрим отрезки какого-либо одного цвета, например, красного. Общее число треугольников, одна из сторон которого красная, не меньше числа пар из 11 остальных цветов, т. е. $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$. Так как каждый красный отрезок служит стороной для десяти треугольников, то число красных отрезков не меньше шести. Но тогда и число отрезков любого другого цвета не меньше шести, а общее число отрезков должно быть, следовательно, не меньше $12 \cdot 6 = 72$. Однако число всех сторон и диагоналей в 12-угольнике равно $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66 < 72$. Полученное противоречие показывает, что требуемая раскраска невозможна.

53. **Ответ.** $p = 3$.

Заметим, что $p^2 + 11 = p^2 - 1 + 12 = (p-1)(p+1) + 12$. Если $p \geqslant 5$ и простое, то числа $p-1$ и $p+1$ оба четные, и одно из них кратно трем. Поэтому произведение $(p-1)(p+1)$ делится на 12, следовательно, p^2+11 также делится на 12, а значит, имеет не менее семи делителей (6 делителей числа 12 и само число $p^2 + 11 > 12$). Осталось проверить $p = 2$ и $p = 3$. Имеем:

а) $p = 2$. Тогда $p^2 + 11 = 2^2 + 11 = 15$ имеет 4 делителя (1, 3, 5, 15);

б) $p = 3$. Тогда $p^2 + 11 = 3^2 + 11 = 20$ имеет 6 делителей (1, 2, 4, 5, 10, 20).

54. Отрезки AO_1 и O_1D равны как радиусы окружности S_1 (см. рис. 54). Поэтому равны стягиваемые хордами AO_1 и O_1D дуги AO_1 и O_1D окружности, проходящей через точки O_1, O_2 и A. Значит, углы ACO_1 и DCO_1 равны как вписанные, опирающиеся на равные дуги. Следовательно, лучи CA и CD, как и окружность S_1, симметричны относительно прямой CO_1. Поэтому точки B и D (ближайшие к C точки пересечения лучей CA и CD с окружностью S_1) также симметричны относительно CO_1, т. е. $CB = CD$. Аналогично, $CE = CB$.

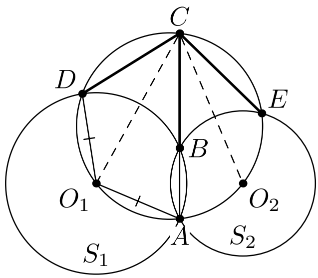


Рис. 54

55. Общее количество узлов равно 91. Каждый узел, за исключением центрального, принадлежит одной из одиннадцати концентрических окружностей с центром в центре шестиугольника (см. рис. 55).

Предположим, что не существует пяти отмеченных узлов, лежащих на одной окружности. Тогда каждая из одиннадцати рассматриваемых окружностей содержит не более четырех отмеченных узлов, а общее количество отмеченных узлов не больше $11 \cdot 4 + 1 = 45$, т. е. не более половины. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно.

56. Ответ. Нельзя.

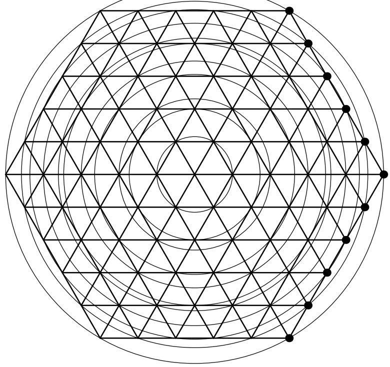


Рис. 55

Допустим, что такая расстановка возможна. Заметим, что столбец точных квадратов не может быть ни первым, ни последним, так как у точных квадратов 20 «соседних» чисел, а в одном соседнем столбце можно уместить только 11 чисел. Таким образом, после удаления столбца точных квадратов, таблица распадается на две непустые части, в каждой из которых число клеток кратно 11. Группа чисел между двумя последовательными квадратами попадает в одну из этих частей, при этом числа $m^2 - 1$ и $m^2 + 1$ попадают в разные части, поэтому такие группы чисел попеременно попадают то в одну часть таблицы, то в другую. Между m^2 и $(m+1)^2$ имеется $2m$ чисел. Следовательно, в одну из частей попадет $2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50$ чисел. Так как 50 не кратно 11, то требуемая расстановка невозможна.

10 класс

57. Ответ. $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{19^3}}$.

Пусть x — произвольное число, отличное от 0 и 1. Тогда

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (f(x))^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}}.$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (f(f(x)))^3}} = x.$$

Далее значения $f(\ldots f(f(x))\ldots)$ будут повторяться с периодом 3.

Так как 95 при делении на 3 дает остаток 2, то

$$\underbrace{f(\ldots f(f(19))\ldots)}_{95\ \text{раз}} = f(f(19)) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{19^3}}.$$

58. ***Первое решение.*** Положим $m = kd$, $n = ld$, где $d = \text{НОД}(m, n)$. Тогда $\text{НОК}(m, n) = kld$ и, значит, $kld + d = kd + ld$. Отсюда получаем, что $(k-1)(l-1) = 0$, т. е. $k = 1$ или $l = 1$. Это означает, что либо m, либо n равно $\text{НОД}(m, n)$. Следовательно, либо n делится на m, либо m делится на n.

Второе решение. Заметим, что НОК(a,b) НОД$(a,b) = ab$ для произвольных натуральных a, b. Поэтому из теоремы Виета следует, что пары (m,n) и (НОД(m,n), НОК(m,n)) являются парами решений квадратного уравнения $x^2-(m+n)x+mn = 0$, т. е. совпадают. Утверждение задачи теперь следует из того, что НОК$(m,n) \vdots$ НОД(m,n).

59. Достаточно доказать аналогичное утверждение для произвольной окружности, гомотетичной S с центром гомотетии B. Рассмотрим окружность S' с диаметром BH, где H — ортоцентр треугольника ABC. Пусть она пересекает стороны AB и BC в точках L и M (см. рис. 56). Тогда CL и AM — высоты треугольника ABC, поскольку $\angle BLH$ и $\angle BMH$ опираются на диаметр. Пусть N — середина AC. Так как точка N — середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника ALC, то $LN = CN$ и, значит, $\angle CLN = \angle LCN = 90^\circ - \angle A = \angle LBH$, поэтому NL — касательная к окружности S'. Аналогично доказывается, что MN также является касательной к окружности S'.

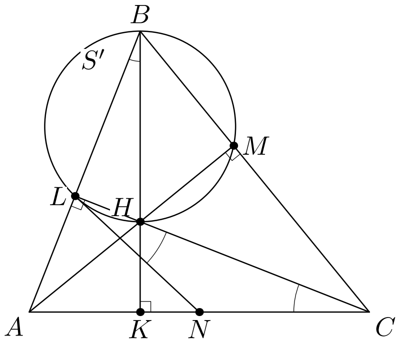


Рис. 56

60. Рассмотрим в плоскости стола различные системы координат, у которых оси параллельны краям стола, а за единицу длины принята длина стороны бумажного квадрата. Выберем какую-нибудь одну из них так, чтобы у вершин каждого из данных квадратов ни одна из координат не была бы целым числом. Отметим теперь точки с целыми координатами, накрытые хотя бы одним из листов. Очевидно, что каждый лист накрывает ровно одну такую точку. Следовательно, достаточно воткнуть булавки во все отмеченные точки.

61. Ответ. 3.

Из условия следует, что $a > 0$ и $b^2 - 4ac \leqslant 0$, т. е. $c \geqslant \frac{b^2}{4a}$. Обозначим $A = \frac{a+b+c}{b-a}$. Тогда, поскольку $t = b - a > 0$, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим имеем:

$$A \geqslant \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a} = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)} = \frac{9a^2+6at+t^2}{4at} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{9a^2+t^2}{4at} \geqslant \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9a^2\cdot t^2}}{2at} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

причем равенство $A = 3$ достигается, если $c = \dfrac{b^2}{4a}$ и $t = 3a$, т. е. при $b = c = 4a$.

Следовательно, данное выражение принимает свое наименьшее значение, равное 3, когда $f(x) = ax^2 + 4ax + 4a = a(x+2)^2$, где a — произвольное положительное число.

Замечание. Пусть $g(t) = \dfrac{(t+2)^2}{4(t-1)}$. Нетрудно проверить, что $g\left(\dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}$. Следовательно, наименьшее значение A можно найти, исследовав функцию $g(t)$ на экстремум при $t > 1$.

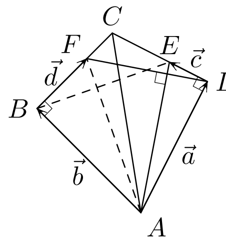


Рис. 57

62. ***Первое решение.*** Обозначим $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{BF} = \vec{d}$ (см. рис. 57). Тогда $\overrightarrow{DF} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b} + \vec{d}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$. По условию $DF \perp AE$ и $AD \perp DE$, поэтому $(\vec{b}+\vec{d}-\vec{a})(\vec{a}+\vec{c}) = (\vec{b}+\vec{d})(\vec{a}+\vec{c}) - |\vec{a}|^2 = 0$. Так как $AB \perp BF$, то

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = (\vec{b}+\vec{d}) \cdot (\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}) = (\vec{b}+\vec{d}) \cdot (\vec{a}+\vec{c}) - |\vec{b}|^2.$$

Отсюда в силу условия $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ следует, что $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$, т. е. $AF \perp BE$.

Второе решение. Воспользуемся тем, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны. Тогда условия задачи можно переформулировать так: если $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, то из равенства $FE^2 + AD^2 = ED^2 + FA^2$ следует равенство $FE^2 + AB^2 = BF^2 + AE^2$. Левые части этих равенств равны, поэтому нам достаточно проверить, что $ED^2 + FA^2 = BF^2 + AE^2$ или $FA^2 - BF^2 = AE^2 - ED^2$. Последнее следует из равенства катетов AB и AD прямоугольных треугольников FBA и EDA.

63. Ответ. При четных N.

Выберем в ожерелье какой-нибудь кубик и отметим его номером 1. Затем занумеруем остальные кубики по порядку, двигаясь вдоль нити в одном из двух возможных направлений. В кубике с номером n обозначим через n_1 ту вершину, которая примыкает к предыдущему кубику, а через n_2 — вершину, примыкающую к следующему кубику (см. рис. 58). Так как ожерелье замкнутое, то первый кубик следует за N^3-м.

а) Докажем, что при четном N требуемая упаковка возможна. Выберем систему координат, направив оси вдоль ребер коробки и взяв в качестве единицы длины длину ребра кубика (см. рис. 59). Составим столбец высоты N из кубиков с номерами $1, N^3, N^3-1, \ldots, N^3-N+2$, поместив

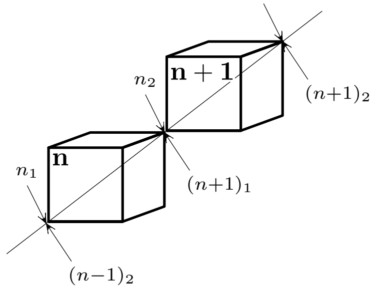


Рис. 58

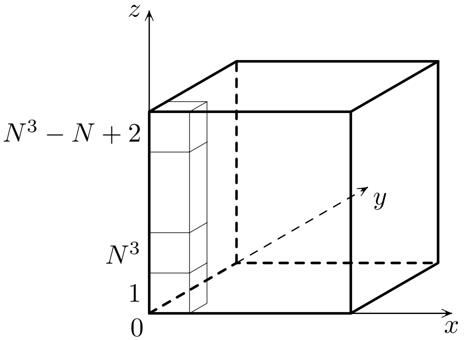


Рис. 59

вершину 1_1 в точку с координатами $(1, 0, 1)$, а вершину 1_2 в точку с координатами $(0, 1, 0)$. Заметим, что последняя вершина этого столбца, т. е. $(N^3 - N + 2)_1$ имеет координаты $(0, 1, N)$. Оставшиеся $N^3 - N$ кубиков будем укладывать послойно в виде «змеек»:

Первый (нижний) слой (см. рис. 60). В клетках проставлены номера кубиков. Укладывать слой начинаем с кубика 2. Вершина $(N^2)_2$ имеет координаты $(1, 0, 1)$, т. е. $(N^2)_2 = 1_1$.

N	$N+1$	$\rightarrow$	$2N-1$
	$3N-2$	$\leftarrow$	$2N$
	$3N-1$	$\rightarrow$	$\cdots$
	$\cdots$	..	$\cdots$
2	$\cdots$	..	N^2-N+1
1	N^2	$\leftarrow$	N^2-N+2

Рис. 60

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	N^2+2N-1	N^2+2N-2
$\downarrow$	$\vdots$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$2N^2-1$	$\vdots$	$\vdots$	N^2+3N-3	N^2+N
N^3	N^2+1	$\rightarrow$		N^2+N-1

Рис. 61

Второй слой (см. рис. 61). Здесь вершины $(2N^2 - 1)_2$ и $(N^3)_1$ имеют координаты $(0, 1, 2)$, т. е. $(2N^2 - 1)_2 = (N^3)_1$.

В третьем слое расположение кубиков с номерами $2N^2, \ldots, 3N^2 - 2$ повторяет расположение кубиков с номерами $2, \ldots, N^2$ в первом слое, и т. д.

Заметим, что в каждом слое координаты вершины «1» кубика из столбца совпадают с координатами вершины «2» последнего кубика из змейки. Следовательно, в N-м слое координаты вершин $(N^3 - N + 2)_1$ и $(N^3 - N + 1)_2$ совпадают. Что и требовалось доказать.

Приведем другое обоснование возможности упаковки при четном N. В каждом кубике проведем диагональ, связывающую вершину вида (ч,ч,н) (т. е. вершину, у которой первые две координаты четны, а третья — нечетна) с вершиной вида (н,н,ч). Рассмотрим граф, образовавшийся на вершинах такого вида. Нетрудно понять, что он связен. Кроме того, любая вершина внутри куба соединена с 8 вершинами, на грани — с четырьмя, а на ребре — с двумя вершинами. Следовательно, по известному критерию, в этом графе существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Уложим кубики в порядке обхода этого цикла так, что просверленная диагональ каждого попадет на соответствующее ребро. Мы получим требуемую укладку нашего ожерелья.

б) Если ожерелье упаковано в коробку, то вершины «1» и «2» любого кубика имеют различные по четности абсциссы. Значит, сумма этих двух координат для каждого кубика — нечетное число. Следовательно, в случае $N = 2k+1$ сумма всех абсцисс отмеченных вершин — также нечетное число. Но каждая абсцисса повторяется дважды: для n_2 и для $(n+1)_1$. Значит, указанная сумма должна быть четной. Таким образом, при нечетном N упаковать ожерелье в коробку невозможно.

64. ***Первое решение.*** Заменим каждую белую улицу города на две — синюю и красную, соединив синим цветом концы синих улиц, соседних с белой, а красным цветом — концы соседних с ней красных улиц (см. рис. 62*а*—рис. 62*г*). В соответствии с рисунками рис. 62*а*—рис. 62*г* будем называть белые улицы улицами типов *а*), *б*), *в*) и *г*), а их количества обозначим соответственно $n_а$, $n_б$, $n_в$ и $n_г$. В случаях, изображенных на рис. рис. 62*б* и рис. 62*в*, будем считать, что красная и синяя улицы, которыми мы заменили белую, пересекаются в точке, отличной от вершин ломаных, которыми являются эти улицы.

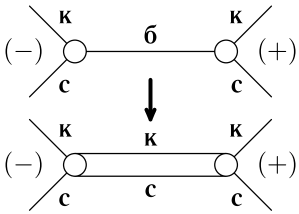


Рис. 62*а*

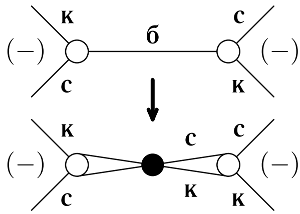


Рис. 62*б*

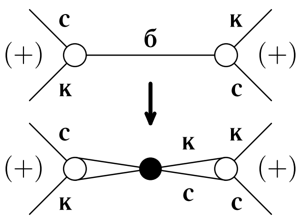


Рис. 62*в*

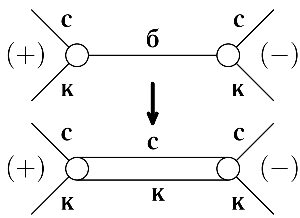


Рис. 62*г*

Теперь все синие улицы образуют несколько многоугольников. Назовем их синими. Аналогично, красные улицы образуют несколько красных многоугольников. Ясно, что границы двух многоугольников разного цвета либо не пересекаются, либо пересекаются в четном числе точек (если границы пересекаются, то граница одного из многоугольников входит внутрь второго столько же раз, сколько и выходит из него). Но число точек пересечения границ многоугольников разного цвета равно числу белых улиц типов *б*) и *в*), т. е. $n_б + n_в$. Значит, число $n_б + n_в$ — четное.

Остается заметить, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков равна $2(n_б - n_в) = 2(n_б + n_в) - 4n_в$ и, следовательно, кратна четырем.

Второе решение. Рассмотрим произвольную (например, белую) улицу, соединяющую перекрестки A и B различной ориентации (т. е. положительный и отрицательный перекрестки), если такая улица в городе есть. Удалим эти перекрестки и все улицы, ведущие из A в B. Оставшиеся улицы одного цвета соединим между собой тем же цветом (рис. 63*а*—рис. 63*в*; $\varnothing$ — обозначение пустого множества). При этом справедливость условий задачи не нарушается, а разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков сохраняется. Будем продолжать эту процедуру до тех пор, пока в городе не останется ни одной пары соединенных перекрестков различной ориентации. Без ограничения общности будем считать, что в городе остались только положительные перекрестки.

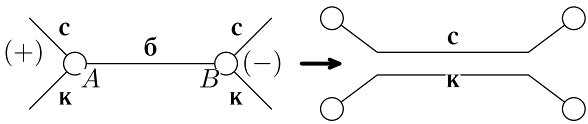


Рис. 63*а*

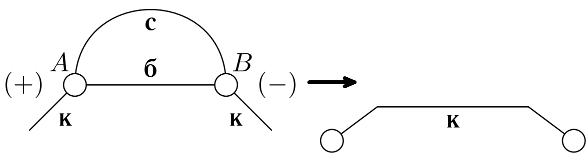
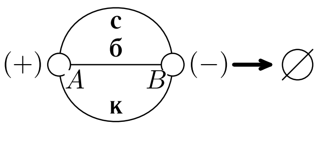


Рис. 63*б*



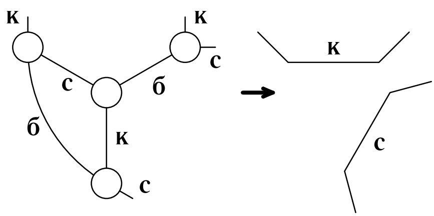


Рис. 63*в*

Рис. 63*г*

(Вообще говоря, город теперь состоит из нескольких не связанных между собой частей, в каждой из которых все перекрестки либо положительные, либо отрицательные. Отрицательные перекрестки, если они есть, мы будем выбрасывать по той же самой схеме, которая описана ниже для положительных перекрестков.)

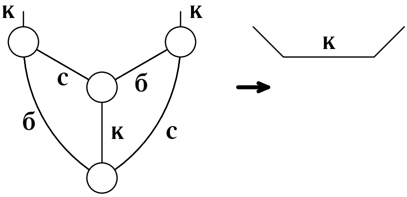


Рис. 64*а*

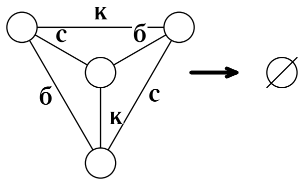


Рис. 64*б*

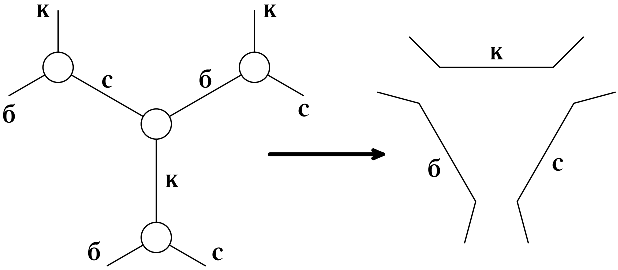


Рис. 64*в*

Рассмотрим произвольный такой перекресток и три перекрестка, соединенные с ним (очевидно, что в любом удовлетворяющем условию задачи городе, в котором все перекрестки положительны, можно найти такие четыре перекрестка; эти перекрестки не обязательно должны быть различными, случай различных показан на рис. 64*в*). Удалим эти четыре перекрестка и все соединяющие их улицы. Оставшиеся улицы одного цвета соединим между собой тем же цветом (см. рис. 63*г*—рис. 64*в*). При этом снова не нарушается справедливость условий задачи, а число положительных перекрестков уменьшается на 4. Эту операцию можно продолжать до тех пор, пока улиц в городе не останется вовсе. Но тогда разность между числом положительных и отрицательных перекрестков станет равна нулю. В таком случае первоначально (для исходного города) эта разность кратна четырем.

11 класс

65. См. решение задачи 57.

66. Достроим шестиугольник до правильного треугольника (см. рис. 65).

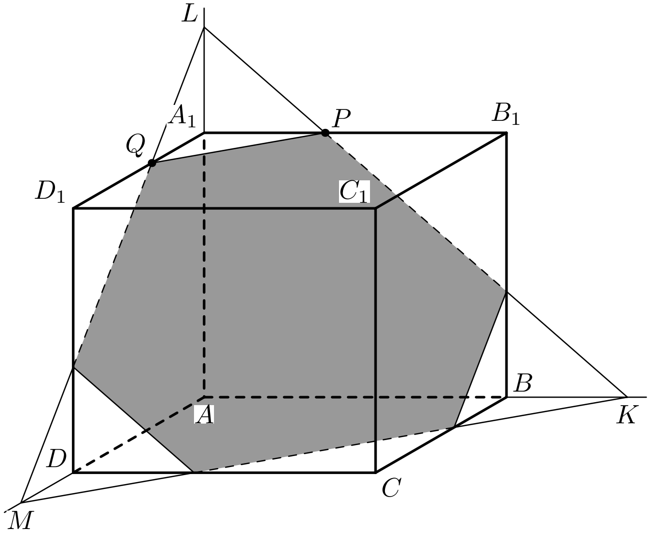


Рис. 65

Вершины K, L и M этого треугольника лежат на продолжениях ребер AB, AA_1 и AD параллелепипеда. Из равенства прямоугольных треугольников KLA и MLA ($KL = LM$, AL — общий катет) следует, что $KA = MA$. Аналогично, $KA = LA$. Так как $PQ = \frac{1}{3}KM$, то из подобия треугольников LPQ и LKM, LPA_1 и LKA следует, что $AA_1 = \frac{2}{3}AL$. Аналогично, $AB = \frac{2}{3}AK$ и $AD = \frac{2}{3}AM$. Итак, $AB = AA_1 = AD$ и, значит, параллелепипед — куб.

Замечание. Если параллелепипед не прямоугольный, то он может и не быть кубом. Например, можно рассмотреть параллелепипед, получаемый «вытягиванием» куба вдоль его большой диагонали, и перпендикулярное этой диагонали сечение.

67. См. решение задачи 52.

68. Доказательство проведем по индукции. Пусть $k = 1$. Тогда $2k - 1 = 1$, т. е. нужно доказать, что каждые два квадрата имеют общую точку. Проведем самую правую и самую левую вертикальные прямые, а также самую верхнюю и самую нижнюю горизонтальные прямые, содержащие стороны квадратов. Эти четыре прямые образуют прямоугольник со сторонами длины не более $2a$, где a — длина стороны квадрата (если бы длина какой-то стороны была больше $2a$, то квадраты, примыкающие к смежным с ней сторонам прямоугольника, не пересекались бы). Следовательно, все квадраты содержат центр прямоугольника, т. е. имеют общую точку.

Предположим, что утверждение доказано для $k = n-1$. Выберем самый левый квадрат K_0 (или один из них, если их несколько) и разобьем все множество квадратов на два подмножества M_1 и M_2. В M_1 содержатся квадраты, пересекающиеся с квадратом K_0, в M_2 — не пересекающиеся с ним. Множество M_1, в свою очередь, разобьем на два подмножества: первое составляют квадраты, содержащие правую верхнюю вершину K_0, второе — квадраты, содержащие правую нижнюю вершину K_0.

Множество M_2 содержит не более $n-1$ попарно непересекающихся квадратов (так как K_0 не пересекается с квадратами из M_2), поэтому, по предположению индукции, M_2 можно разбить не более чем на $2(n-1)-1$ подмножеств, в каждом из которых квадраты имеют общую точку. Так как множество M_1 разбито на 2 требуемых подмножества, то исходное множество разбивается не более чем на $2+2(n-1)-1 = 2n-1$ искомых подмножеств.

69. Предположим противное: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > \sqrt{5}$. Тогда для векторов $\vec{a} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$, $\vec{b} = (\sin\beta, \cos\beta)$ и $\vec{c} = (\sin\gamma, \cos\gamma)$ имеем: $3 < \sqrt{(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 + (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2} = |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| = 3$. Получили противоречие.

Замечание. Сумму

$$A = (\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 + (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2$$

легко оценить сверху:

$$A = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + \\ +2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) + 2(\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma) + \\ +2(\sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma) \leqslant 3 + 3\cdot 2 = 9.$$

Отсюда

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2 = A - (\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 \leqslant 9 - 4 = 5.$$

70. Ответ. 1995^2.

Полагая $m = n$, находим $a_0 = 0$. Полагая $n = 0$, получим $a_m + a_m = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_0)$. Отсюда

$$a_{2m} = 4a_m. \qquad (1)$$

Пусть $m = n+2$. Тогда $a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}(a_{2n+4} + a_{2n})$, и так как в силу (1) $a_{2n+4} = 4a_{n+2}$ и $a_{2n} = 4a_n$, то окончательно получаем:

$$a_{2n+2} + a_2 = 2(a_{n+2} + a_n). \qquad (2)$$

С другой стороны, в силу (1) и условия $a_1 = 1$, имеем:

$$a_{2n+2} + a_2 = 4(a_{n+1} + a_1) = 4(a_{n+1} + 1). \qquad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), заключаем, что последовательность (a_n) удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$$

и начальным условиям $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Вычислив несколько первых членов последовательности: $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, приходим к предположению, что при всех $n \geqslant 0$ $a_n = n^2$. Доказательство проведем по индукции. При $n = 0$ и $n = 1$ утверждение верно. Пусть оно верно при $n = k - 1$ и $n = k$ ($k \geqslant 1$). Тогда

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2 = 2k^2 - (k-1)^2 + 2 = (k+1)^2,$$

т. е. утверждение верно и при $n = k + 1$.

Следовательно, $a_{1995} = 1995^2$.

71. Заметим, что $\triangle O_1BE$ и $\triangle O_2BF$ — подобные равнобедренные треугольники ($\angle EBO_1 = \angle FBO_2$ как вертикальные). Следовательно, точки E, F, O_1 и O_2 лежат на одной окружности S. Поскольку $\angle O_1AO_2 + \angle O_1EB = \angle O_1BO_2 + \angle O_1BE = 180°$, на той же окружности лежит и точка A (см. рис. 66).

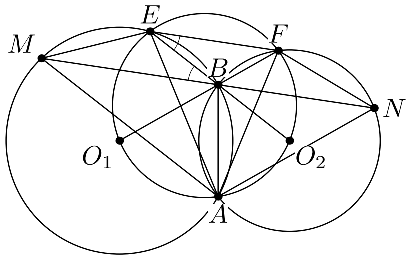


Рис. 66

Углы FEB и BEA равны как вписанные в окружность S и опирающиеся на равные дуги O_2F и O_2A. Из параллельности прямых EF и MN вытекает, что $\angle MBE = \angle FEB$. Следовательно, $\angle MBE = \angle BEA$, и $MEBA$ — равнобедренная трапеция. Отсюда $AE = MB$. Аналогично доказывается, что $ABFN$ — равнобедренная трапеция, поэтому $AF = BN$.

Складывая два полученных равенства, получаем, что $AE + AF = MB + BN = MN$,

72. См. решение задачи 64.

1995–1996 г.

8 класс

73. **Ответ.** Не хватит.

Пусть $n = 400$. Тогда

$$n^5 - (n-1)^2(n^3 + 2n^2 + 3n + 4) = \\ = n^5 - (n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n - 4) = \\ = n^5 - (n^5 - 5n + 4) = 5n - 4.$$

Но $5 \cdot 400 - 4 = 1996 < 2000$.

74. Ответ. $10^6 - 10 \cdot 9^5$.

Посчитаем число *неотличных* билетов.

Пусть $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ — номер *неотличного* билета. В качестве a_1 можно выбрать любую из 10 цифр. Цифры, разность между которыми равна 5, разбиваются на пары: 0–5, 1–6, 2–7, 3–8, 4–9, поэтому когда выбрана цифра a_1, в качестве цифры a_2 в *неотличном* билете можно взять любую из 9 цифр (исключается входящая в пару с a_1). Аналогично, после выбора a_2, в качестве a_3 можно взять любую из 9 цифр, и т. д. Поэтому число *неотличных* билетов равно $10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 10 \cdot 9^5$.

75. Ответ. Не существует.

Пусть, для определенности, AC — наименьшая диагональ пятиугольника. Так как $AC \leqslant AD$, то в $\triangle ACD$ $\angle CDA \leqslant \angle DCA$. Но тогда в этом треугольнике два тупых угла, что невозможно.

76. Ответ. $n \neq 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Если n нечетно, то первый выигрывает, взяв первым ходом одну спичку: дальше оба игрока обязаны брать по одной спичке, и последний ход за первым игроком. Если n четно, то тот, кто взял очередным ходом нечетное число спичек, проиграл, ибо оставил партнеру нечетное число спичек при его ходе. Поэтому, чтобы сохранить шансы на выигрыш, игроки в этом случае должны каждым ходом брать четное число спичек. Но это значит, что мы можем мысленно соединить спички в пары и считать, что игроки каждым ходом берут некоторое количество пар. При этом возможны такие варианты:

1) Получилась одна пара, т. е. $n = 2$. Тогда первый проиграл, потому что взять две спички сразу он не может.

2) Получилось нечетное число пар, большее 1, т. е. $n = 4m + 2$. Тогда первый выиграет, взяв первым ходом одну пару.

3) Получилось четное число пар, т. е. $n = 4m$. Здесь, чтобы сохранить шансы на выигрыш, игроки должны каждым ходом брать четное число пар. Но тогда можно объединить пары в четверки и считать, что каждым ходом берется некоторое количество четверок. Проводя теперь для четверок те же рассуждения 1)–3), что и для пар, получаем, что при $n = 4$ первый проигрывает, при $n = 8m + 4$ — выигрывает, а при $n = 8m$ надо переходить к восьмеркам. Повторяя далее эти рассуждения, получаем, что при $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$ первый проигрывает, а при других n — выигрывает.

77. Ответ. Можно. См. рис. 67.

78. Ответ. $\alpha = 30^\circ$.

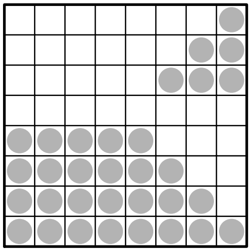


Рис. 67

Пусть $\alpha < 30^\circ$. Расположим прожектор так, чтобы один из крайних лучей BK был перпендикулярен AC (см. рис. 68). Второй луч пересекает основание в точке M. Но $AK = KC = KM + MC$. Значит, из этих отрезков сложить треугольник нельзя.

Пусть $\alpha > 30^\circ$, Возьмем на основании AC точки K и L так, чтобы $\angle KBC = \angle LBA = \alpha$; T — середина отрезка AC (см. рис. 69). На основании возьмем точку R так, чтобы $KT = RC$. Пусть M лежит в пересечении отрезков RC и LC. Возьмем точку N так, что $\angle NBM = \alpha$. Заметим, что N принадлежит отрезку AK.

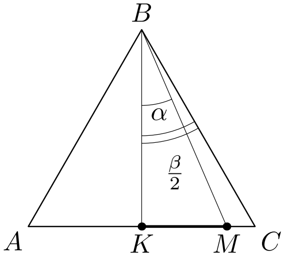


Рис. 68

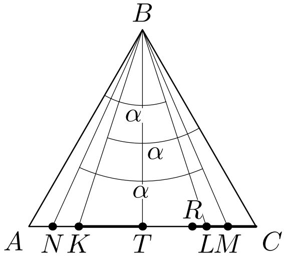


Рис. 69

Имеем

$$NM > KM = KT + TM = CR + TM > CM + TM = TC = \frac{1}{2}AC,$$

откуда

$$AN + MC < MN.$$

Следовательно, из этих отрезков нельзя построить треугольник.

Осталась одна возможность $\alpha = 30^\circ$.

Пусть MN — освещаемый прожектором отрезок, $\angle MBN = \alpha = 30^\circ$ (см. рис. 70). Ясно, что $BN \not\perp AC$. (Иначе точка M совпадет с A и, значит, луч не внутри треугольника.)

Отразив точку C относительно прямой BN, получим точку D, которая не лежит на AC (иначе $BN \perp AC$) (см. рис. 71).

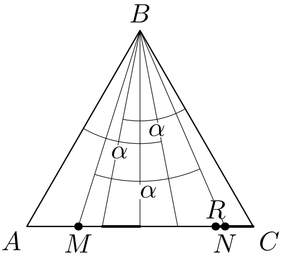


Рис. 70

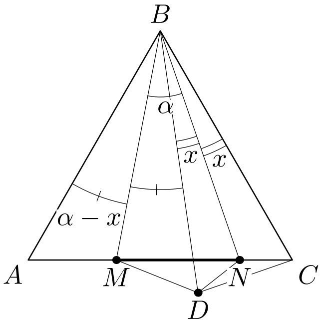


Рис. 71

Треугольник BDC — равнобедренный и, значит, $\angle DBN = \angle CBN = x$ и $NC = DN$. Ясно, что $\angle MBD = \angle NBM - \angle NBD = 30^\circ - x$,

$$\angle ABM = \angle ABC - \angle MBN - \angle NBC = 60^\circ - 30^\circ - x = 30^\circ - x.$$

Значит ABD — равнобедренный треугольник, BM — его биссектриса и, значит, $AM = MD$. В $\triangle DMN$ стороны равны отрезкам AM, MN и NC, т. е. из них можно составить треугольник.

79. Ответ. 4.

Пусть a — стертое число, S — сумма оставшихся, Π — произведение оставшихся. Тогда

$$3 \cdot \frac{a+S}{a\Pi} = \frac{S}{\Pi} \iff \frac{1}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{S}.$$

Так как $a < S$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{6}$, т. е. $a = 4$ или $a = 5$. Случай $a = 5$ невозможен, так как при этом $S = 7,5$. Случай $a = 4$ возможен: $S = 12$ и написанными Незнайкой числами могли быть 4, 5 и 7.

80. Заметим, что если монеты разложены по чашкам поровну, то та чашка, где лежит фальшивая монета, всегда либо перевешивает (если фальшивая монета тяжелее настоящих), либо нет (если легче). Поэтому если одна и та же монета при двух взвешиваниях однажды оказалась внизу, а однажды вверху, то она — настоящая.

Разложим монеты на чашки весов по две. Монеты с перевесившей чашки обозначим 1 и 2, а с другой — 3 и 4. Вторым взвешиванием сравним 1 и 3 с 2 и 4. Если перевесит чашка с 1 и 3, то монеты 3 и 2 — заведомо настоящие, если другая — то заведомо настоящими являются монеты 1 и 4. Последним взвешиванием мы сравниваем две заведомо настоящие монеты с двумя другими. Пусть настоящими являются монеты 2 и 3. Тогда если чашка с ними перевесит, то фальшивая монета легче и, значит, это монета 4; если же наоборот, то фальшивая монета тяжелее и это монета 1.

Случай, когда настоящими оказываются после второго взвешивания монеты 2 и 4, разбирается аналогично.

9 класс

81. Ответ. $x^2 + ax$, $x^2 - ax$, a — любое число; $x^2 + x - 2$, $x^2 + x - 2$.

По теореме Виета $a = -(c+d)$, $b = cd$, $c = -(a+b)$, $d = ab$. Получили систему уравнений

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ a+c+d=0, \\ b=cd, \\ d=ab, \end{cases}$$

которая равносильная системе

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ b=d, \\ b=bc, \\ b=ab, \end{cases}$$

Если $b = 0$, то $d = 0$, $c = -a$, a — любое. Если же $b \neq 0$, то $a = c = 1$, $b = d = -2$.

82. ***Первое решение.*** Имеем: $\angle DAC = \angle CDM$, так как оба измеряются половиной дуги DC окружности S_1. Далее, $\angle CBM = \angle CDM$ как вписанные и опирающиеся на одну дугу. Но $\angle DAC = \angle BCA$, откуда $\angle BCA = \angle CBM$, т. е. $BM \parallel AC$.

Второе решение. Пусть биссектриса угла B треугольника ABC вторично пересекает S_2 в точке O. Тогда $OD = OC$ как хорды окружности S_2, стягивающие равные дуги. Ясно также, что $OA = OC$, а следовательно, O — центр окружности S_1. Теперь $\angle OBM = \angle ODM = 90°$, откуда BO перпендикулярна BM и AC, а, значит, $BM \parallel AC$.

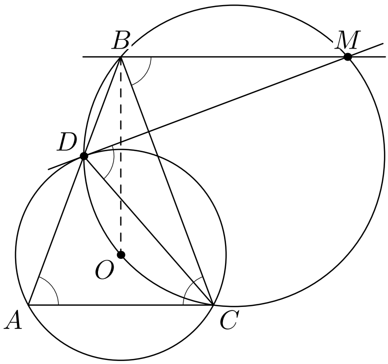


Рис. 72

83. Ответ. 8, 9, 10.

Пусть $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = n$ — целое число, тогда

$$(a+b)(b+c)(c+a) = n \cdot abc. \qquad (1)$$

Если среди чисел a, b и c есть равные, то можно считать, ввиду симметричности выражения (1), что $a = b$. Тогда $(a,\ b) = a = 1$ и выражение (1) принимает вид $(1+c)(1+c)2 = nc$. Откуда следует, что $2 \vdots c$ и, значит, $c = 1$ или $c = 2$. В первом случае $n = 8$, а во втором $n = 9$. Если числа

a, b и c попарно различны, то можно считать, что $a < b < c$. Если два числа взаимно просты, то сумма этих чисел взаимно проста с каждым из них, поэтому из (1) следует, что

$$a + b = mc \tag{2}$$

и

$$a + c = kb, \tag{3}$$

m и k — натуральные числа.

Так как $a + b < 2c$, то $mc < 2c$ и, значит, $m < 2$, т. е. $m = 1$ и, следовательно,

$$a + b = c. \tag{4}$$

Выразив из (3) c и подставив в (4), получим $a + b = kb - a$ или $2a = b(k - 1)$.

Так как a и b взаимно просты, то $2 \vdots b$. Учитывая, что $1 \leqslant a < b$ получаем, что $b > 1$ и, значит, $b = 2$. Тогда $a = 1$ и $c = 3$. Легко убедиться, что эти значения удовлетворяют условиям задачи и дают значение $n = 10$.

84. Ответ. Выигрывает второй.

Разобьем все узлы решетки, кроме того, который фишка занимает в начале игры, на пары соседних. Тогда после каждого хода первого игрока второй может передвинуть фишку в узел, находящийся в паре с только что занятым. Рано или поздно первый игрок окажется в ситуации, когда он не сможет сделать ход. Разбиение на пары приведено на рис. 73.

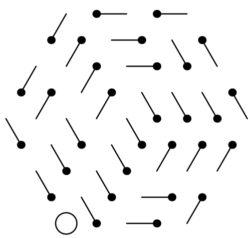


Рис. 73

Сначала мы разбиваем на пары все узлы, находящиеся на границе решетки, за исключением одного, соседнего с исходной позицией фишки. Оставшийся узел соединяем с узлом, лежащим на отрезке между исходной позицией и центром решетки. После этого узлы, не вошедшие в пары, образуют шестиугольную решетку с выброшенным угловым узлом и стороной, на единицу меньше, чем исходная решетка, и мы повторяем ту же операцию.

Решетка со стороной 1 разбивается на 3 пары (см. рис. 74).

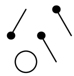


Рис. 74

85. Ответ. $n = 1996$.

Если у числа n шесть делителей, то $n = p^5$ (p — простое) или $n = p^2q$, где p и q — различные простые числа.

В первом случае $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$. $p(1 + p + p^2 + p^3 + p^4) = 3500 - 1 = 3499$. Число 3499 не делится на 2, 3, 5 и 7, поэтому $p > 10$, но в этом случае $p + (1 + p + p^2 + p^3 + p^4) > 10^5 > 3499$. Поэтому это уравнение решений в простых числах не имеет. Во втором случае $1 + p + p^2 + q + pq + p^2q = 3500$, т. е. $(1 + p + p^2)(1 + q) = 5^3 \cdot 7 \cdot 4$.

Первый множитель нечетен и не кратен 5. (Чтобы убедиться в этом, достаточно это утверждение проверить для соответствующих остатков). Отсюда, учитывая, что $1+p+p^2 > 1$, имеем $1+p+p^2 = 7$. Значит, $p = 2$ ($p = -3$ — не подходит), и $q = 499$.

Числа 2 и 499 — простые. Искомое число $n = 2^2 \cdot 499 = 1996$.

86. См. решение задачи 78.

87. Пусть $ab = u^2$; $a + b = v$. Учитывая, что $v \geqslant 2u$ (так как $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$), получаем:

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} = \frac{u^2(1-v+u^2)}{(1-u^2)^2} \leqslant \frac{u^2(1-2u+u^2)}{(1-u^2)^2} = \frac{u^2}{(1+u)^2} < \frac{1}{4},$$

так как $\frac{u}{1+u} < \frac{1}{2} \iff u < 1$.

88. Обозначим монеты и их массы буквами A, B, C, D, E, F, G и H. Ясно, что если на чашки весов положены по 4 монеты, то весы не могут оказаться в равновесии. Заметим также, что если монеты разложены по чашкам поровну, то та чашка, где лежит фальшивая монета, всегда либо перевешивает (если фальшивая монета тяжелее настоящих), либо нет (если легче). Поэтому если одна и та же монета при двух взвешиваниях, когда монеты были разложены по чашкам поровну, однажды оказалась внизу, а однажды вверху, то она — настоящая.

Положим при первом взвешивании на левую чашку монеты A, B, C и D, на правую — остальные, при втором взвешивании на левой чашке пусть будут A, B, E и F, а на правой — остальные монеты. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$A + B + C + D > E + F + G + H$$

и

$$A + B + E + F > C + D + G + H.$$

В этом случае монеты C, D, E и F — настоящие и, если фальшивая монета тяжелее их, то это A или B, а если легче — то G или H. Третьим взвешиванием сравним массы $A + G$ и $B + H$. Пусть, скажем, $A + G > B + H$ (другой случай разбирается аналогично). Тогда монеты B и G — настоящие и четвертым взвешиванием следует сравнить $A + H$ с $B + G$. Если $A + H > B + G$, то фальшивой и более тяжелой, чем настоящие, является монета A, а если $A + H < B + G$, то фальшивой и более легкой является монета H.

10 класс

89. Имеем:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) =$

$$= \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} + 2(ab+bc+ca) \geqslant$$

$$\geqslant ab+bc+ca+2(ab+bc+ca) = 3(ab+bc+ca) > 3(a+b+c).$$

Так как $a+b+c>0$, получаем $a+b+c>3$.

90. Разобьем треугольник прямыми, параллельными его сторонам, на 25 одинаковых треугольников, и вырежем из него три фигуры так, как показано на рис. 75. Площадь каждой фигуры равна $7/25 > 1/4$ площади треугольника, и фигуры равны, поскольку совмещаются параллельными переносами.

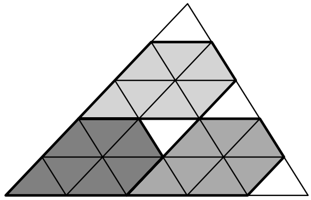


Рис. 75

91. Ответ. Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла B (т. е. биссектриса внешнего угла) без самой точки B.

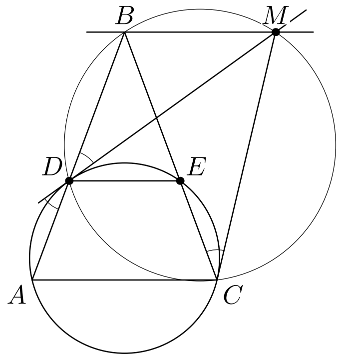


Рис. 76

Пусть $ADEC$ — равнобедренная трапеция, DM и CM — касательные к окружности, описанной вокруг $ADEC$ (т. е. M — некоторая точка искомого ГМТ). Очевидно, что $\triangle ABC$ — равнобедренный, и AC перпендикулярна биссектрисе угла B.

$\angle BDM = \angle BCM$, так как они измеряются половинами дуг, стягиваемых равными хордами AD и CE. Следовательно, точки B, M, C, D лежат на одной окружности. Тогда $BM \parallel AC$ (см. решение задачи 82), и, значит, точка M лежит на перпендикуляре l к биссектрисе угла B.

Покажем теперь, что любая точка M прямой l, отличная от B, принадлежит искомому ГМТ. Понятно, что для этого достаточно построить вспомогательную окружность ω, проходящую через B и M и пересекающую вторично каждую из сторон угла B.

92. Заметим, что если все числа в одном столбце умножить на -1, то свойство таблицы сохранится. То же верно для перестановки двух столбцов.

Поэтому можно добиться того, что в первой строке стоят 1, и, по свойству таблицы для первой и второй строк, $n = 2m$. Переставляя столбцы, можно добиться, что во второй строке будут стоять первые m единиц и следующие m «-1».

Возьмем третью строку таблицы, обозначим через x_1 количество единиц в первых m столбцах, x_2 — количество «-1» в первых m столбцах, x_3 — количество единиц в в последних m столбцах, и x_4 — количество «-1» в последних m столбцах. Тогда из свойства таблицы для первой и третьей строк, а также для второй и третьей строк получаем:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \qquad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Также имеем

$$x_1 + x_2 = m,$$

$$x_3 + x_4 = m.$$

Складывая первое и второе равенство, получаем

$$2(x_1 - x_2) = 0.$$

Следовательно, $x_1 = x_2 \Rightarrow x_3 = x_4$. Отсюда

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{m}{2}\text{, т. е. } n \text{ делится на 4.}$$

93. См. решение задачи 85.

94. Обозначим точки пересечения отрезков A_iC_{i+1} и C_iA_{i+1} через D_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) (см. рис. 77).

Проведем через точку D_1 прямые $D_1F \parallel A_0B_0$ и $D_1G \parallel B_0C_0$. Тогда $A_0A_1D_1F$ — параллелограмм, равновеликий параллелограмму $D_0A_1D_1C_1$, так как он имеет общее с ним основание A_1D_1 и равную высоту. Аналогично, равновелики параллелограммы $C_0GD_1C_1$ и $D_0A_1D_1C_1$. Таким образом

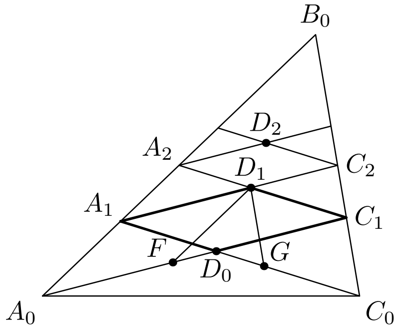


Рис. 77

$$S_{D_0A_1D_1C_1} = \frac{1}{2}\left(S_{A_0A_1D_1F} + S_{C_0GD_1C_1}\right) < \frac{1}{2}\, S_{A_0A_1D_1C_1C_0D_0}$$

Аналогично, $S_{D_1A_2D_2C_2} < \frac{1}{2} S_{A_1A_2D_2C_2C_1D_1}$, и т. д. Поэтому сумма площадей всех $n-1$ параллелограммов меньше

$$\frac{1}{2}\left(S_{A_0B_0C_0} - S_{A_0D_0C_0}\right) < \frac{1}{2}\, S_{A_0B_0C_0}.$$

95. См. решение задачи 88.

96. Докажем, что Вася достигнет максимума, если поступит следующим образом: в первой паре — первая слева красная точка и первая справа синяя, во второй паре — вторая слева красная и вторая справа синяя, и т. д.

Для этого соединим точки в каждой паре отрезком и сосчитаем, сколько из этих отрезков покрывают отрезок A_kA_{k+1} (см. рис. 78). Пусть

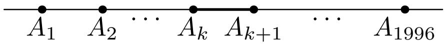


Рис. 78

$k \leqslant 998$, и среди точек $A_1, \ldots, A_k$ l красных. Тогда справа от точки A_k не менее l синих точек (если меньше, то среди $A_1, \ldots, A_k$ больше, чем $998 - l$ синих, и $k > 998$). Следовательно, все отрезки, красные концы которых находятся среди точек $A_1, \ldots, A_k$, покрывают отрезок A_kA_{k+1}. То же верно с заменой красных концов на синие. То есть отрезок A_kA_{k+1} покрыт k отрезками, а большим числом он и не может быть покрыт. Аналогично, при $k > 998$ отрезок A_kA_{k+1} покрыт $1996 - k$ отрезками, и не может быть покрыт бóльшим числом отрезков. Следовательно, сумма, достигнутая Васей, равна $1 + 2 + \ldots + 997 + 998 + 997 + \ldots + 2 + 1 = 998^2$ и не зависит от раскраски.

11 класс

97. См. решение задачи 89.

98. **Ответ.** n.

Через каждую точку A системы проходит медиана. Действительно, пусть слева от прямой l, проходящей через точку A, меньше точек системы, чем справа. При вращении прямой вокруг точки A обязательно в некоторый момент слева и справа окажется поровну точек системы, так как при повороте на 180° слева от прямой будет больше точек системы, чем справа.

На каждой медиане лежит ровно две точки из данной системы, поэтому медиан не может быть меньше n. Пример системы, где медиан ровно n, дают вершины выпуклого $2n$-угольника.

99. Предположим противное, что точка O треугольника не покрыта кругами. Тогда $OA > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $OB > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $OC > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и один из углов $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle AOC$ не меньше 120°. Пусть это угол $\angle AOC$. Тогда, по теореме косинусов, имеем

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos\alpha.$$

Но $-\cos\alpha \geqslant \cos 60^\circ$, так как $\alpha \geqslant 120^\circ$ и, следовательно,

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos\alpha \geqslant$$
$$\geqslant OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC > \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Следовательно $AC > 1$, и полученное противоречие доказывает утверждение.

100. **Ответ.** $\frac{n}{2}$ при четном n, $\dfrac{n+1}{2}$ при нечетном n.

Между любыми двумя корнями дифференцируемой функции есть корень ее производной. Поэтому производная $P'(x)$ имеет по крайней мере

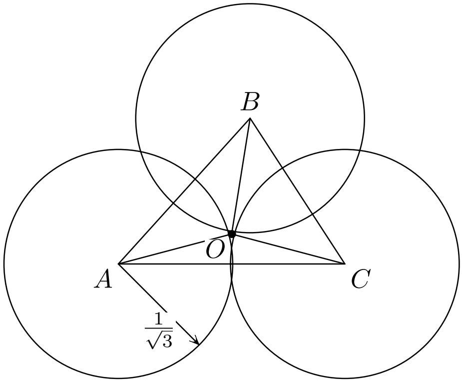


Рис. 79

$n-1$ различных действительных корней. Поскольку $P'(x)$ — многочлен степени $n-1$, отсюда следует, что все его действительные корни различны. По индукции тем же свойством обладают и все производные $P^{(k)}(x)$ ($k = 2, \ldots, n-1$). Из этого следует, что *из любых двух идущих подряд коэффициентов многочлена $P(x)$ хотя бы один не равен* 0. В самом деле, пусть у $P(x)$ равны нулю коэффициенты при x^k и x^{k+1}. Тогда у $P^{(k)}(x)$ равны нулю свободный член и коэффициент при x. Но это означает, что 0 — кратный корень многочлена $P^{(k)}(x)$, все корни которого должны быть различными.

Разобьем коэффициенты многочлена $P(x)$ на пары стоящих рядом (оставив при четном n старший коэффициент без пары). Поскольку старший коэффициент многочлена не равен 0, число нулевых коэффициентов не превышает числа полных пар, т. е. $\frac{n}{2}$ при четном n и $\frac{n+1}{2}$ при нечетном. С другой стороны, многочлены $(x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-k^2)$ и $x(x^2-1)\ldots(x^2-k^2)$ дают примеры, когда число нулевых коэффициентов равно $\frac{n}{2}$ при $n = 2k$ и $\frac{n+1}{2}$ при $n = 2k+1$.

101. Ответ. 16.

Пусть x_0 — решение уравнения $f(f(x)) = x$, а $y_0 = f(x_0)$. Тогда и $x_0 = f(y_0)$, а потому точка с координатами (x_0, y_0) лежит на каждом из графиков $y = f(x)$ и $x = f(y)$. Наоборот, если точка (x_0, y_0) лежит на пересечении этих графиков, то $y_0 = f(x_0)$ и $x_0 = f(x_0)$, откуда $f(f(x_0)) = x_0$. Тем самым показано, что число решений уравнения $f(f(x)) = x$ совпадает с числом точек пересечения графиков $y = f(x)$ и $x = f(y)$, а их 16 (см. рис. 80).

102. Ответ. $n = 2$.

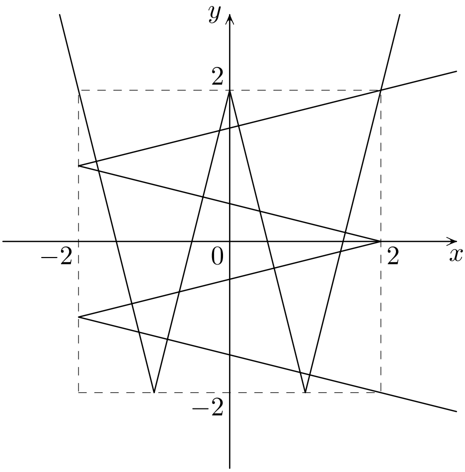


Рис. 80

Пусть $k = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$. Тогда $\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)} = \frac{1}{k}$, $\frac{(a-b)(d-c)}{(a-d)(b-c)} = \frac{ad-ac-bd+bc}{(b-c)(a-d)} = \frac{(b-c)(a-d)-(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)} = 1-k$, $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} = -\frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)} \cdot \frac{(a-d)(b-c)}{(a-b)(d-c)} = -\frac{k}{1-k}$. Пусть два из этих чисел совпадают. Заметим, что при натуральном k равенства $k = 1-k$, $\frac{1}{k} = 1-k$, $\frac{1}{k} = -\frac{k}{1-k}$, $1-k = -\frac{k}{1-k}$ невозможны; следовательно, $n = k$, и либо $n = \frac{1}{n}$, либо $n = -\frac{n}{1-n}$.

Если $n = \frac{1}{n}$, то $n = 1$, значит, $(a-c)(b-d) = (b-c)(a-d) \iff bd - ad - bc + ac = 0 \iff (b-a)(d-c) = 0$, и тогда среди чисел a, b, c и d были бы равные. Остается $n = -\frac{n}{1-n}$, т. е. $n = 2$. Значение $n = 2$ принимается, например, при $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 7$.

103. Пусть D — точка пересечения продолжения CO с окружностью, описанной около треугольника ABC. Тогда $\angle BDO = \angle A \Rightarrow \angle OBD = \angle COB - \angle BDO = 60°$. Аналогично, $\angle OAD = 60°$.

По теореме синусов для $\triangle OBD$
$$\frac{BO}{\sin A} = \frac{OD}{\sin 60°}$$
По теореме синусов для $\triangle OAD$
$$\frac{AO}{\sin B} = \frac{OD}{\sin 60°}$$
Поэтому

$$\frac{BO}{\sin A} = \frac{AO}{\sin B}, \quad \frac{BO}{\frac{h_b}{c}} = \frac{AO}{\frac{h_a}{c}}, \quad \frac{BO}{h_b} = \frac{AO}{h_a}.$$

Аналогично, последнее отношение равно $\frac{CO}{h_c}$, что и доказывает подобие треугольников.

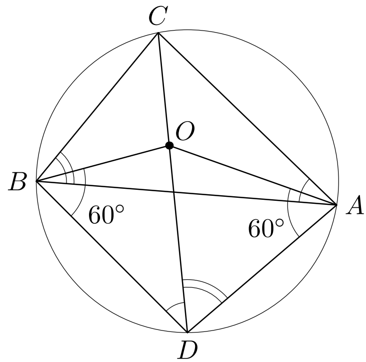


Рис. 81

104. **Ответ.** Не существует.

Натуральное число n назовем периодом периодической последовательности $x_1x_2\ldots$, если $x_i = x_{i+n}$ для всех $i = 1, 2, \ldots$ Легко доказать, что

1) любой период кратен наименьшему;

2) для любого k наименьшие периоды последовательностей $x_1x_2\ldots$ и $x_{k+1}x_{k+2}\ldots$ совпадают.

Пусть $x_1x_2\ldots$ — последовательность, удовлетворяющая условиям задачи и n — ее наименьший период.

Рассмотрим три случая: $n = 3m$, $n = 3m+1$, $n = 3m-1$.

Пусть $n = 3m$. Число m не является периодом последовательности ($m < n$), поэтому найдется пара x_i, x_{i+m} такая, что $x_i \neq x_{i+m}$. Заменив все буквы $x_i, \ldots, x_{i+m}$ по правилу $a \to aba$, $b \to bba$, мы получим фрагмент последовательности:

$$x_iba\underbrace{**\ldots*}_{3m-3}x_{i+m}ba \tag{1}$$

Но, согласно сделанным замечаниям, из того, что $n = 3m$, следует, что начальная тройка букв этого фрагмента совпадает с конечной. Получили противоречие.

Пусть $n = 3m+1$. Тогда, как и выше, найдется пара $x_i \neq x_{i+m}$. Но тогда вторая буква фрагмента (1) должна совпадать с последней, что не так. Аналогично, если $n = 3m-1$, то третья буква фрагмента (1) должна совпадать с предпоследней. Противоречие.

1996–1997 г.

8 класс

105. Если рядом с 16 стоит число x, то $16+1 \leqslant 16+x = a^2 \leqslant 16+15$, откуда $a^2 = 25$ и $x = 9$. Поэтому у 16 не может быть более одного соседа, и удовлетворяющее условию расположение чисел по кругу невозможно. Пример расположения в строку: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

106. Занумеруем яблоки в порядке неубывания весов и положим в k-й пакет яблоки с номерами k и $301 - k$. Для любых двух пакетов получаем, что в одном из них — яблоки с весами a и d, в другом — с весами b и c, где $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Имеем: $a + d \leqslant b + 2b \leqslant 1{,}5c + 1{,}5b$ и $b + c \leqslant 2a + d \leqslant 1{,}5a + 1{,}5d$, что и требовалось.

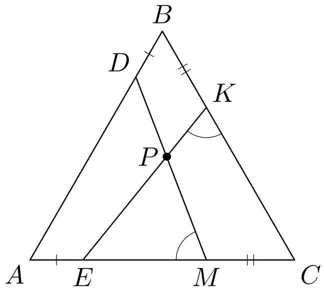


Рис. 82

107. Из условия следует, что $CE = AC - AE = AD$ и, аналогично, $CK = AM$. Отсюда следует, что $\triangle MAD = \triangle KCE$ и, значит, $\angle MPE = 180^\circ - \angle PME - \angle PEM = 180^\circ - \angle PKC - \angle PEC = \angle C = 60^\circ$. Если отрезки DM и EK не пересекаются, то проводятся аналогичные рассуждения с использованием вертикальных углов при вершинах M и E.

108. Если на предприятии k «верховных» начальников, то каждый работник должен увидеть хотя бы один из k приказов этих начальников. В понедельник их увидели не более $7k$ работников, во вторник — не более $7k \cdot 6$, в среду — не более $7k \cdot 36$ работников. Все, кто увидел эти приказы в четверг, не имеют подчиненных: значит, они все имеют по 7 начальников и количество всех их начальников не более $7k \cdot 36$, причем у каждого из этих начальников не более 6 подчиненных. Таким образом, в четверг приказы увидели не более $(7k \cdot 36) \cdot 6/7 = 6k \cdot 36$ работников. Отсюда получаем $50\,000 \leqslant k + 7k + 42k + 252k + 216k = 518k$ и $k \geqslant 97$.

109. Пусть O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Тогда $\angle OAB < 45^\circ$, $\angle OBA < 45^\circ$, поэтому точка O находится внутри K_1, значит, треугольник OAB покрывается квадратом K_1. Аналогично, OBC и OCA покрываются соответственно K_2 и K_3.

110. **Ответ.** 2.

Пусть на последнем месте в строке стоит число x. Сумма всех чисел в строке, кроме x, делится на x; но тогда и сумма всех чисел в строке, равная $1 + 2 + \ldots + 37 = 37 \cdot 19$, делится на x. Отсюда $x = 19$, так как 37 уже поставлено на первое место. На третьем месте стоит делитель числа $37 + 1 = 38 = 19 \cdot 2$, отличный от 1 и 19, которые стоят на других местах.

111. **Ответ.** $p = 7$, $q = 3$.

Пусть сначала ни одно из чисел p, q не делится на 3. Если остатки от деления p и q на 3 совпадают, то левая часть делится на 3, а правая — нет; если эти остатки не совпадают, то правая часть делится на 3, а левая — нет. Пусть теперь p делится на 3, тогда $p = 3$. Из равенства $p^3 - q^5 = (p + q)^2 > 0$ следует $p^3 > q^5$ и $q^5 < 27$, что невозможно. Пусть, наконец, q делится на 3, тогда $q = 3$ и $p^3 - 243 = (p+3)^2$, $p(p^2 - p - 6) = 252$, откуда p — простой делитель 252, т. е. 2, 3 или 7. Проверка оставляет только $p = 7$, $(p, q) = (7, 3)$.

112. Ответ. 14.

Обозначим число автомобилей в семье через n. Сумма количеств запрещенных дней по всем машинам, равная $2n$, не превосходит $7(n - 10)$, так как в каждый из 7 дней недели снимаются с поездок не более $n - 10$ машин. Итак, $2n \leqslant 7(n - 10)$ и $n \geqslant 14$. Четырнадцати машин достаточно: запретим четырем машинам понедельник и вторник, четырем — среду и четверг, двум — пятницу и субботу, двум — субботу и воскресенье, двум — пятницу и воскресенье.

9 класс

113. Для любого треугольника данного разбиения окружность, описанная около правильного 1997-угольника, является описанной. Так как центр окружности, описанной около правильного 1997-угольника, не лежит на диагонали, то он попадет внутрь какого-то одного треугольника. Треугольник остроугольный, если центр описанной окружности лежит внутри, и тупоугольный, если центр описанной окружности лежит вне. Следовательно, треугольник, в который попал центр описанной окружности — остроугольный, все остальные — тупоугольные.

114. Ответ. Выигрывает партнер игрока, делающего первый ход.

Укажем, как партнер начинающего может гарантировать себе выигрыш. В начале партии он должен стирать числа, кратные 3 до тех пор, пока таковых не останется. Поскольку количество чисел, не превосходящих 1000 и кратных 3, равно 333, то партнеру начинающего понадобится не более 333 ходов для того, чтобы ни одно из оставшихся на доске чисел не делилось на 3 (некоторые из чисел, кратных 3, могут быть стерты и начинающим). После этого партнер начинающего делает свои ходы произвольно вплоть до того момента, когда на доске останутся три числа. Каждое из них будет давать остаток 1 и 2 при делении на 3, поэтому среди трех остающихся на доске чисел обязательно найдутся два, дающие одинаковые остатки. Именно их должен оставить партнер начинающего (сумма не будет делиться на 3).

115. Занумеруем яблоки в порядке возрастания веса и разобьем их на пары: в k-ю пару k-е и $(301 - k)$-е яблоки. Докажем, что веса пар различаются не более, чем в 2 раза. Пусть веса яблок a, b, c, d. Имеем: $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant 3a$. Тогда $a + d \leqslant 4a \leqslant 2b + 2c$, $b + c \leqslant 3a + d \leqslant 2a + 2d$. Проведем с парами яблок ту же процедуру. Аналогично доказывается, что веса четверок яблок различаются не более, чем в $3/2$ раза. что и требовалось.

116. Запрещенных «сочетаний цифр» конечное число, следовательно есть число N такое, что все запрещенные «сочетания цифр» не длиннее N символов. В бесконечной десятичной дроби можно найти два одинаковых куска длины N. Пусть у разрешенной дроби $a_0, a_1 a_2 \ldots$, куски $a_k \ldots a_{k+N-1}$ и $a_l \ldots a_{l+N-1}$ совпали. Докажем, что дробь $0,(a_k \ldots a_{l-1})$ удовлетворяет условию. Предположим противное: в этой дроби есть запрещенные «сочетания цифр». Возьмем то, которое встретится самым первым. Очевидно, что хотя бы один символ из данного запрещенного «сочетания цифр» попадет в первый период. Но тогда конец этого «сочетания цифр» и имеет номер не более $l - 1 - k + N$, т. е. оно будет содержаться в куске $a_k \ldots a_{l+N-1}$ исходной дроби. Противоречие.

117. Пусть сумма чисел в наборе равна M, тогда число a из набора заменяется на число $b = M - a$. Просуммируем эти равенства для всех a: $b_1 + \ldots + b_{1997} = 1997M - (a_1 + \ldots + a_{1997})$, откуда $M = 0$, так как $b_1 + \ldots + b_{1997} = a_1 + \ldots + a_{1997} = M$. Значит, для любого a число $b = -a$ также входит в набор и все числа разбиваются на пары $(a, -a)$. Из нечетности их количества следует, что в набор входит число $a = -a$, т. е. $a = 0$.

118. См. решение задачи 110.

119. Пусть, для определенности, $AB \geqslant AC$. Отложим на продолжении стороны AB отрезок $AC' = AC$ (см. рис. 83). Тогда в равнобедренном треугольнике ACC' $\angle ACC' = \angle CAB/2$, т. е. CC' параллельна биссектрисе $\angle CAB$. Заметим, что A_1 — середина BC', поэтому прямая l_A является средней линией в $\triangle BCC'$ и проходит через середину A_2 стороны BC.

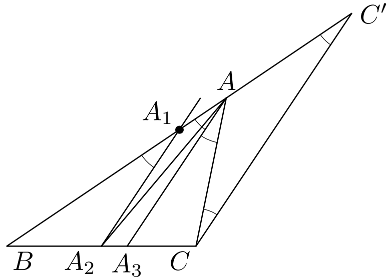


Рис. 83

Аналогично получаем, что прямые l_B и l_C соответственно проходят через середины B_2 и C_2 сторон AC и AB и параллельны биссектрисам углов B и C треугольника ABC. Следовательно, прямые l_A, l_B и l_C являются биссектрисами в треугольнике $A_2B_2C_2$, составленном из средних линий $\triangle ABC$, т. е. пересекаются в одной точке.

120. См. решение задачи 112.

10 класс

121. В памяти есть число x. Сложением его с самим собой получаем $2x$. Сравниваем эти числа (x и $2x$). Если они равны, то $x = 0$, иначе $x \neq 0$. Тогда найдем корни уравнения

$$y^2 + 2xy + x = 0, \qquad y_{1,2} = -x \pm \sqrt{x^2 - x}.$$

Если $y_1 \neq y_2$ или корней нет, то $x \neq 1$, в противном случае $x = 1$.

122. Пусть O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Проведем через M и O прямую до следующего пересечения с S_1 и S_2 в точках N_1 и N_2 соответственно. Так как точка O лежит внутри обеих окружностей, то N_1 и N_2 лежат по одну сторону от O. При этом $MO \cdot ON_1 = AO \cdot OC = BO \cdot OD = MO \cdot ON_2$, так как $AO = OC = OB = OD$, а значит $ON_1 = ON_2$, и $N_1 = N_2 = N$.

Замечание. Наоборот, проведя через любую точку O на интервале MN хорды AC и BD в окружностях S_1 и S_2 так, что $AO = OC$, $BO = OD$, получим из теоремы о хордах $AO^2 = MO \cdot ON = BO^2 \Rightarrow AO = OC = BO = OD \Rightarrow ABCD$ — прямоугольник.

123. Из равенства

$$2^{kn} - 1 = (2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 1)$$

следует, что $2^{kn} - 1$ делится на $2^n - 1$, поэтому

$$2^{kn+d} - 1 = 2^{kn+d} - 2^d + 2^d - 1 = 2^d(2^{kn} - 1) + 2^d - 1 \equiv 2^d - 1 \pmod{2^n - 1}.$$

Таким образом $2^n - 1$ делится на $2^m - 1$ тогда и только тогда, когда n делится на m. Если $n = km$, то

$$\frac{2^{km} - 1}{2^m - 1} = 1 + 2^m + \ldots + 2^{m(k-1)}.$$

Каждое слагаемое дает остаток 1 при делении на $2^m - 1$, поэтому

$$\frac{2^{km} - 1}{2^m - 1} \equiv k \pmod{2^m - 1},$$

Поэтому $2^{km} - 1$ делится на $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда $k = \frac{n}{m}$ делится на $2^m - 1$, что равносильно тому, что n делится на $m(2^m - 1)$.

124. **Ответ.** Нельзя.

Закрасим 27 квадратиков указанных граней так, как показано на рис. 84. Тогда любая полоска 3×1 закрывает четное число закрашенных квадратиков. Поэтому заклеить данные три грани полосками так, как требуется в условии, не удастся.

125. Как и в задаче 117 получаем, что числа в наборе разбиваются на пары $a, -a$. Числа различны, поэтому нуль не входит в набор. Значит, среди этих чисел 50 положительных и 50 отрицательных, следовательно, их произведение положительно.

126. Ответ. 12.

Докажем, что $n < 12$ машин не хватит. Если куплено n машин, то в сумме «невыездных» дней будет n штук, значит, в какой-то день не смогут выехать не менее $\left[\frac{n}{7}\right]$ машин. В этот день доступно не более $n - \frac{n}{7} = \frac{6}{7}\,n$ машин. Если $n < 12$, то $\frac{6}{7}\,n < 10$, следовательно, требование задачи не выполняется. Итак, $n \geqslant 12$.

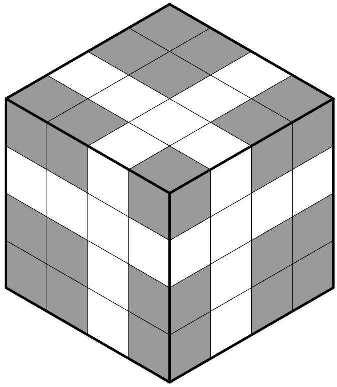


Рис. 84

Покажем, что 12 машин хватит. Будем подавать в полицию на очередную машину ту пару дней, в которые на данный момент есть запрет не более, чем на одну машину. Так можно продолжать делать, пока не появятся 6 дней с двумя запретами, т. е. так можно поступить для каждой из 12 машин. После этого мы получаем, что в каждый день у нас не более двух «невыездных» машин. Значит, каждый день свободно не менее 10 машин.

127. Возможны два случая расположения точек O_1 и O_2: O_1 между O_2 и B (см. рис. 85) и O_2 между O_1 и B. Предлагаемое решение не зависит от этих случаев.

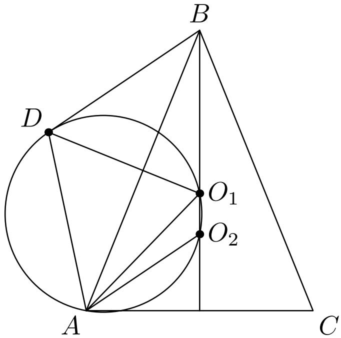


Рис. 85

Поскольку четырехугольник O_1O_2AD или (O_2O_1AD) — вписанный,
$$\angle BO_1D = \angle O_2AD. \qquad (1)$$
Но $\angle O_2AD = \angle O_2AB + \angle BAD = \frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle BO_1D$, откуда с учетом (1) получаем: $\angle BO_1D = \angle CAB$. Так как треугольник BO_1D — равнобедренный, то $\angle O_1DB = \frac{\pi - \angle BO_1D}{2} = \frac{\pi - \angle CAB}{2} = \frac{1}{2}(\angle CBA + \angle BCA)$. С другой стороны $\angle O_1AD = \angle O_1AB + \angle BAD = \angle O_1BA + \frac{1}{2}\angle BO_1D = \frac{1}{2}(\angle CBA + \angle CAB)$. Итак, $\angle O_1DB = \angle O_1AD$, откуда и следует требуемое.

128. Без ограничения общности можем считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Пусть не все числа x, y, z равны. Тогда среди них есть либо строго наибольшее, либо строго наименьшее — скажем, x. Заметим, что если $\beta > \alpha$, то функция $\varphi(t) = \sqrt{t+\beta} - \sqrt{t+\alpha} = \dfrac{\beta-\alpha}{\sqrt{t+\beta}+\sqrt{t+\alpha}}$ — монотонно убывает.

Перепишем первое из данных в условии равенств так:

$$(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}) + (\sqrt{x+b} - \sqrt{x+c}) = \\ = (\sqrt{y+a} - \sqrt{y+b}) + (\sqrt{z+b} - \sqrt{z+c}).$$

Если x — строго наибольшее, то каждая скобка слева не больше соответствующей скобки справа, причем равенства одновременно достигаются только при $a = b = c$. Аналогично, если x — строго наименьшее, то оба неравенства меняют знак, причем оба становятся равенствами опять же только при $a = b = c$.

Замечание. Заметим, что мы доказали требуемое, воспользовавшись только одним из данных равенств. Правда, то, каким равенством из данных мы пользуемся, зависит от соотношения между переменными.

11 класс

129. См. решение задачи 121.

130. Пусть $M(x_0, y_0)$ — точка пересечения медиан. Прямая $x = x_0$ делит квадрат на две части. В одной из частей находится ровно одна вершина треугольника. Пусть ее координаты $A(x_1, y_1)$, а координаты двух других $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Тогда $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ и, значит, $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2| + |x_0 - x_3|$. Поэтому после отражения относительно точки M точки B и C перейдут в полосу, ограниченную прямыми $x = x_0$ и $x = x_1$. Проведя аналогичные рассуждения для y, получим, что какие-то две точки перешли в полосу, ограниченную прямыми $y = y_0$ и $y = y^*$ (где y^* — ордината одной из вершин треугольника). Одна из этих точек будет B или C, после отражения относительно M она, как мы доказали, останется внутри квадрата.

131. Пусть таких чисел конечное число, тогда для всех n, начиная с некоторого N, $S(3^n) < S(3^{n+1})$. Но 3^n, 3^{n+1} делятся на 9, поэтому $S(3^n)$ и $S(3^{n+1})$ делятся на 9, значит, $S(3^n) \leqslant S(3^{n+1}) - 9$. Тогда $S(3^{N+k}) \geqslant S(3^N) + 9k > 9k$, значит, число имеет более k знаков: $3^{N+k} > 10^k$. Отсюда, при $k = N$ получаем $3^{2N} > 10^N$ — противоречие.

132. См. решение задачи 124.

133. Пусть A и B — фракции. Тогда $\overline{A \cup A} = \overline{A}$ — тоже фракция и, значит, $\overline{\overline{A \cup B}} = A \cup B$ — также является фракцией.

134. Поскольку $\log_a b > 1$, то $\log_a \log_a b > \log_b \log_a b$, а так как $\log_c a < 1$, то $\log_c \log_c a > \log_b \log_c a$. Отсюда $\log_a \log_a b + \log_b \log_b c + \log_c \log_c a > \log_b \log_a b + \log_b \log_b c + \log_b \log_c a = \log_b(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = \log_b 1 = 0$.

135. **Ответ.** Не существуют.

Предположим, что $ABCD$ и $SA_1A_2\ldots A_n$ — такие треугольная и n-угольная пирамиды, что четыре трехгранных угла с вершинами A_i, A_j, A_k, A_l n-угольной пирамиды равны трехгранным углам с вершинами A, B, C и D — треугольной. Тогда сумма всех плоских углов трехгранных углов с вершинами A_i, A_j, A_k, A_l равна $4\cdot 180^\circ = 720^\circ$. С другой стороны, по свойству трехгранных углов, $\angle A_{m-1}A_mA_{m+1} < \angle A_{m-1}A_mS + \angle A_{m+1}A_mS$, поэтому $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} + \angle A_{j-1}A_jA_{j+1} + \angle A_{k-1}A_kA_{k+1} + \angle A_{l-1}A_lA_{l+1} < \frac{1}{2}\cdot 720^\circ = 360^\circ$. Но сумма всех углов многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ равна $180^\circ\cdot(n-2)$, поэтому сумма остальных $n-4$ углов многоугольника (без углов A_i, A_j, A_k, A_l) больше $180^\circ(n-2) - 360^\circ = 180^\circ(n-4)$, что невозможно, так как многоугольник — выпуклый.

136. **Ответ.** $\alpha = 1$.

Для $\alpha = 1$ — существует: $f(x) = x$. Для $\alpha \neq 1$ для любого x существует y такое, что $y = \alpha(x+y)$: достаточно положить $y = \frac{\alpha x}{1-\alpha}$. Но тогда из данного уравнения получаем $f(y) = f(x) + f(y)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x.

1997–1998 г.

8 класс

137. **Ответ.** Не существуют.

Пусть $M = \overline{a_1\ldots a_n}$ и $N = \overline{b_1\ldots b_n}$ — числа, удовлетворяющие условию. Тогда $M = dN$, где $d = 2, 4, 6$ или 8 (так как M четно, а N нечетно). Пусть $b_k = 9$, и $S = \overline{b_k\ldots b_n}$. Тогда из неравенств

$$180\ldots0 < 2S < 199\ldots9,$$

$$360\ldots0 < 4S < 399\ldots9,$$

$$540\ldots0 < 6S < 399\ldots9,$$

$$720\ldots0 < 8S < 799\ldots9$$

следует, что в $(k-1)$-й разряд переносится нечетная цифра p, значит, цифра a_{k-1} — последняя цифра суммы $db_{k-1} + p$ — нечетна.

Противоречие, поэтому таких M и N не существует.

138. **Ответ.** Не могут.

От противного. Предположим, что могут. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма (см. рис. 86). В треугольнике ABC BO и AM — медианы. K — точка их пересечения, следовательно $\frac{BK}{KO} = \frac{2}{1}$, откуда $KO = \frac{BK}{2}$. Аналогичные рассуждения для треугольника ADC показывают, что $LO = \frac{DL}{2}$. Из того, что $BO = OD$, следует, что

$BK = LD$, откуда $BK = KL = LD$. Значит, в треугольнике BAL отрезок AK является медианой и биссектрисой. Следовательно, он является и высотой, т. е. $AK \perp BD$. Аналогично, $AL \perp BD$. Но два различных перпендикуляра из одной точки A на прямую BD опустить нельзя.

139. Назовем характеристикой колоды количество имеющихся в ней карт той масти, которой в колоде осталось больше всего. При каждом ходе характеристика либо не меняется, либо уменьшается на 1. В последнем случае, очевидно, берется карта загаданной масти. Осталось заметить, что в начале игры характеристика колоды равнялась 13, а в конце — 0, так что по ходу игры она уменьшалась 13 раз.

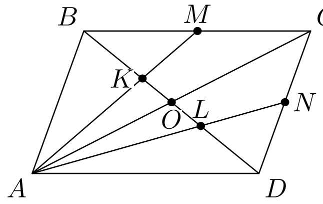


Рис. 86

140. Так как любые 9 точек лежат на двух окружностях, то найдется окружность O, на которой лежит не менее 5 точек. Рассмотрим все точки множества, не лежащие на O. Если таких точек четыре или меньше, то утверждение задачи верно. Действительно, дополнив их точками окружности O до девяти, получим, что они лежат на двух окружностях, на одной из которых лежат три дополняющих точки, поэтому это O. Значит, все наши точки лежат на другой окружности.

Пусть вне окружности O лежит не менее пяти точек. Возьмем пять точек $A_1, \ldots, A_5$ на O и три точки B_1, B_2, B_3 вне O. Через точки B_1, B_2, B_3 проходит единственная окружность O_1. Возьмем точку B, отличную от точек $A_1, \ldots, A_5$, B_1, B_2, B_3. По условию существуют две окружности O' и O'_1, содержащие все точки A_1, $A_2, \ldots, A_5$, B_1, B_2, B_3, B. Тогда опять одна из окружностей O' и O'_1 совпадает с O. Поскольку точки B_1, B_2, B_3 не лежат на окружности O, все они оказываются на той из окружностей O' или O'_1, которая не совпадает с O, и эта вторая окружность тем самым совпадает с O_1. Получается, что точка B лежит либо на O, либо на O_1, что завершает доказательство.

141. Пример приведен на рис. 87.

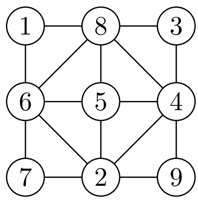


Рис. 87

Обозначим через x число из центрального кружочка, а через S — сумму четырех чисел в вершинах квадрата. Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2S = 45, \\ 4S = 45 + S + 3x. \end{cases}$$

На рисунках 88, 89 показано, как составлялись уравнения системы.

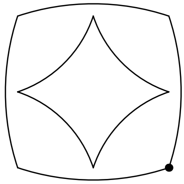


Рис. 88

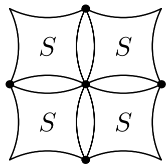


Рис. 89

Решая систему, находим $x = 5$, $S = 20$. Далее короткий подбор дает указанное выше решение. Нетрудно убедиться также, что оно единственно.

142. После первого раскулачивания у всех, кроме раскулаченного, число овец делится на 2, общее число овец тоже делится на 2, значит и остаток у раскулаченного тоже делится на 2. Аналогично, после второго раскулачивания у каждого число овец делится на 4, …, после седьмого — на $2^7 = 128$. Это значит, что у одного из крестьян 128 овец, а у остальных — по 0 овец, что и требовалось доказать.

143. Пусть B_1 — точка касания окружностью S_B стороны AC, BB_2 и BB_3 — касательные к S_B, проведенные из точки B (см. рис. 90). Точка O — центр описанной окружности $\triangle ABC$, поэтому $AO = BO$. Кроме того, $OB_1 = OB_2 = R_B$, $\angle OB_1A = \angle OB_2B = 90°$. Значит, $\triangle OB_1A = \triangle OB_2B$. Отсюда $\angle OBB_2 = \angle OAB_1$. Аналогично, $\angle OBB_3 = \angle OCB_1$. Так же доказывается, что угол между касательными к S_A из точки A равен сумме $\angle OBC + \angle OCB$, а к S_C из точки C — сумме $\angle OAB + \angle OBA$. Складывая эти равенства, получаем утверждение задачи.

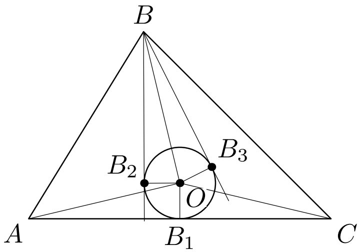


Рис. 90

144. Прогноз, в котором нет нулей, окажется *нехорошим*, если все избиратели не явятся на выборы. Поэтому в каждом *хорошем* прогнозе должны быть нули. Пусть в прогнозе П у кандидата A и некоторых из его друзей $A_1, \ldots, A_k$ 0 голосов. Тогда при явке A на выборы прогноз по $A, A_1, \ldots, A_k$ уже ошибочен. Исключим $A, A_1, \ldots, A_k$ из списков кандидатов, и уменьшим на 1 прогноз по остальным друзьям A. Тогда мы вернемся к исходной задаче, но с меньшим числом кандидатов и меньшим на одного человека (A) числом избирателей. Продолжая эту процедуру, мы приходим к несовпадению по каждому кандидату числа поданных голосов с прогнозируемым. Значит, исходный прогноз — *нехороший*.

9 класс

145. Ответ. Все треугольники, длины сторон которых пропорциональны 3, 4 и 5 («Египетский треугольник»).

В любом треугольнике $2r < h_b \leqslant a$, т. е. диаметр вписанной в треугольник окружности меньше всех его сторон. Пусть $2r$, a, b и c образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью $d > 0$. Ясно, что $a = 2r + d$, $b = 2r + 2d$, $c = 2r + 3d$ и $p = \frac{a+b+c}{2} = 3r + 3d$. Поскольку в любом треугольнике $S = pr$ и $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, то $pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ или $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$. Выразив в данном равенстве все величины через r и d получим

$$(3r + 3d)r^2 = (r + 2d)(r + d)r,$$

откуда $3r = r + 2d$, т. е. $r = d$, так как $r > 0$, $r + d > 0$. Следовательно, стороны равны $3r$, $4r$, $5r$.

146. По теореме о вписанном угле (см. рис. 91) имеем равенства: $\angle PAC = \angle PQC$, $\angle PBD = \angle PQD$. А так как $\angle PBD$ — внешний для треугольника ABP, то $\angle PBD = \angle PAB + \angle APB$. Отсюда $\angle APB = \angle PBD - \angle PAB = \angle PBD - \angle PAC = \angle PQD - \angle PQC = \angle CQD$, что и требовалось.

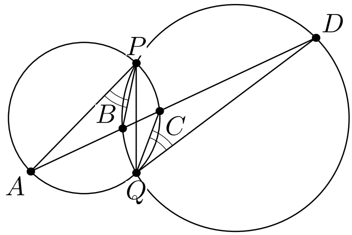


Рис. 91

147. Ответ. 3456.

Если все цифры десятизначного числа различны, то их сумма равна 45, и потому это число делится на 9. Значит, если оно делится на 11111, то оно делится и на 99999.

Рассмотрим десятизначное число $X = \overline{a_9 \ldots a_0}$ и заметим, что $X = 10^5 \cdot \overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_4 \ldots a_0} = 99999 \cdot \overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_4 \ldots a_0}$. Таким образом, число X делится на 99999 тогда и только тогда, когда делится на 99999 сумма $\overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_4 \ldots a_0}$. Заметим, что эта сумма меньше, чем $2 \cdot 99999$. Поэтому она делится на 99999 тогда и только тогда, когда она равна 99999. А это равносильно тому, что $a_0 + a_5 = 9$, $a_1 + a_6 = 9$, $a_2 + a_7 = 9$, $a_3 + a_8 = 9$ и $a_4 + a_9 = 9$. Таким образом, последние пять цифр интересного числа полностью определяются пятью его первыми цифрами, а первые пять цифр можно выбирать произвольно, следя только, чтобы никакие две из них не давали в сумме 9 и a_9 не равнялось нулю.

Учитывая сказанное, цифру a_9 можно выбрать девятью способами, цифру a_8, если a_9 уже выбрано, — восемью (нельзя выбирать a_9 и $9 - a_9$), после этого a_7 — шестью способами, a_6 — четырьмя и a_5 — двумя. Отсюда получаем $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$ возможностей.

148. Ответ. 4.

Лемма. *Всякую связную фигуру, составленную из* 101 *клетки, можно заключить в прямоугольник с такими сторонами a и b, что* $a + b = 102$.

Доказательство. Возьмем две клетки нашей фигуры, имеющие общую сторону. Они образуют прямоугольник 1×2, сумма сторон которого равна 3. В силу связности данной нам фигуры в ней найдется клетка, примыкающая к этому прямоугольнику по стороне. Присоединим к нему эту клетку. Получившуюся конфигурацию из трех клеток можно заключить в прямоугольник с суммой сторон 4, если удлинить на 1 одну из сторон прямоугольника 1×2. Будем повторять описанную процедуру, пока в конфигурацию не войдут все клетки фигуры. Всего процедура будет совершена не более, чем 99 раз, поэтому сумма сторон прямоугольника, в который в итоге окажется заключена фигура, окажется не больше 102.

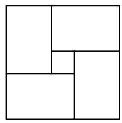


Рис. 92

Из леммы сразу следует, что четыре фигуры, равные данной, удастся вырезать всегда: для этого достаточно заключить ее в прямоугольник с суммой сторон 102, а затем вырезать из данного квадрата четыре таких прямоугольника так, как показано на рис. 92. Теперь рассмотрим фигуру в форме креста, каждый «луч» которого состоит из 25 клеток. В ней $4 \times 25 + 1 = 101$ клетка. Если такой крест вырезан из квадрата, то его центр должен лежать вне каемки шириной в 25 клеток, примыкающей к границе квадрата. Это означает, что этот центр должен лежать в квадрате со стороной 52, получающемся после удаления каемки. Разделим этот квадрат на четыре равных квадрата со стороной 26. Нетрудно видеть, что если из листа бумаги вырезано несколько непересекающихся крестов, то в каждом из этих четырех квадратов может находиться центр только одного креста (иначе два креста будут пересекаться). Поэтому больше четырех крестов из листа вырезать не удастся, что завершает доказательство.

149. Ответ. Не могут.

Пусть x_1 — общий корень рассматриваемых трехчленов, а x_2 и x_3 — два других (различных) корня. Тогда по теореме Виета один из трехчленов равен $(x - x_1)(x - x_2)$, а другой — $(x - x_1)(x - x_3)$.

Допустим, при каком-то целом положительном n выполнены равенства $(n - x_1)(n - x_2) = 19$ и $(n - x_1)(n - x_3) = 98$. Тогда целое число $n - x_1$ должно быть общим делителем взаимно простых чисел 19 и 98 и, значит, должно равняться 1 или -1. Но в обоих случаях $x_1 \geqslant n - 1 \geqslant 0$, что противоречит условию задачи.

150. Ответ. Выигрывает первый.

Сначала ему надо делать ходы длиной в 4 клетки, пока он не встанет на 45-ю клетку. Теперь очередь хода за вторым. Если он тоже все время делает ходы длины 4, очередной ход приведет его на клетку 57. Тогда первый следующим ходом должен пойти на клетку 48 и после ответа второго сходить так, чтобы между ним и вторым оказалось 3 клетки (легко видеть, что это всегда возможно). После этого второй будет вынужден пойти на 1, 2 или 3 клетки и окажется в итоге правее 49-й клетки. Значит, до финиша ему останется больше 48 клеток, и, чтобы добраться туда, он должен будет сделать не меньше 13 ходов. Первый же находится не левее 49-й клетки, и ему до финиша остается не более 52 клеток, которые он сумеет преодолеть за 13 ходов.

Рассмотрим теперь случай, когда среди 11 первых ходов второго был ход менее, чем на 4 клетки. Тогда он после 11-го хода окажется более, чем в 56 клетках от цели, и для ее достижения ему понадобится минимум 15 ходов, а первому до цели остается 56 клеток, и он сможет добраться до нее за 15 ходов, даже если второй при встрече вынудит его сделать ход длины 3 вместо хода длины 4.

151. Обозначим траекторию шара $B_1B_2\ldots B_{1998}B_1$, где B_1 — середина A_1A_2. Также обозначим $\angle B_2B_1A_2 = \alpha$ (угол, под которым пустили шар), $\varphi = \angle B_1A_2B_2 = \frac{1996\pi}{1998}$ — угол правильного 1998-угольника, $\angle B_1B_2A_2 = \beta = \pi - \alpha - \varphi$ (см. рис. 93). По закону отражения $\angle B_3B_2A_3 = \beta$. Из треугольника $B_2A_3B_3$: $\angle B_2B_3A_3 = \pi - \beta - \varphi = \alpha$, снова по закону отражения $\angle B_4B_3A_4 = \alpha$, и т. д., наконец $\angle B_{1998}B_1A_1 = \alpha$. В результате получаем, что все треугольники $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3, \ldots, B_{1998}A_1B_1$ имеют углы α, β, φ и, следовательно, подобны друг другу.

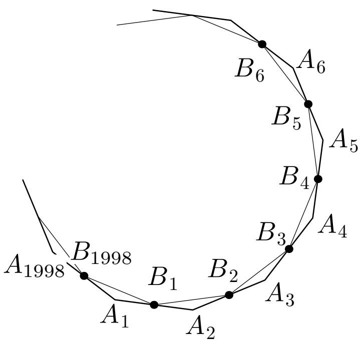


Рис. 93

Пусть $k = \frac{B_1A_2}{B_2A_2} = \frac{B_3A_3}{B_2A_3} = \ldots = \frac{B_1A_1}{B_{1998}A_1}$ — отношение соответствующих сторон в этих подобных треугольниках. Имеем: $k \cdot B_2A_2 = B_1A_2$, $k \cdot B_2A_3 = B_3A_3$, …, $k \cdot B_{1998}A_1 = B_1A_1$. Легко видеть, что, сложив эти равенства, получим: $k(A_2A_3 + A_4A_5 + \ldots + A_{1998}A_1) = A_1A_2 + A_3A_4 + \ldots + A_{1997}A_{1998}$, откуда $k = 1$ в силу правильности многоугольника $A_1A_2\ldots A_{1998}$. Значит, все треугольники $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$, …, $B_{1998}A_1B_1$ — равнобедренные, и точки B_2, …, B_{1998} — середины соответствующих сторон многоугольника $A_1A_2\ldots A_{1998}$. Это доказывает правильность многоугольника $B_1B_2\ldots B_{1998}$.

152. Ответ. Нельзя.

Введем на листе прямоугольную систему координат с осями, параллельными линиям сетки, и началом координат в одном из узлов. Назовем *четностью узла* четность суммы его координат. Будем считать одну из ножек циркуля «первой», а другую — «второй» и посмотрим, как меняется четность узлов, в которые попадает вторая ножка при выполнении шагов. Обозначим вектор, соединяющий первую ножку со второй после i-го шага, через $v_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, тогда $x_i^2 + y_i^2 = d^2$ — квадрату раствора циркуля — целому числу. Рассмотрим три возможных случая.

а) Пусть d^2 — нечетно, тогда во всех парах (x_i, y_i) одно из чисел четно, другое нечетно, поэтому $x_i + y_i$ нечетно, и на i-м шаге четность основания передвигаемой ножки изменяется на $x_i + y_i - x_{i-1} - y_{i-1} = 2k_i$, т. е. сохраняется. Четность неподвижной ножки, очевидно, тоже сохраняется. Поскольку изначально четности ножек были различны (в силу нечетности числа $d \equiv x_0 + y_0 \pmod 2$), поменяться местами ножки не смогут.

б) Пусть $d^2 = 4c + 2$. Тогда все числа x_i, y_i нечетны, и координаты оснований ножек изменяются на i-м шаге на $x_i - x_{i-1} = 2k_i$ или $y_i - y_{i-1} = 2l_i$, сохраняя свою четность. И снова, поскольку изначально четности разных ножек по каждой из координат были различны (в силу нечетности x_0 и y_0), ножки циркуля не смогут поменяться местами.

в) Пусть $d^2 = 4c$. В этом случае все числа x_i, y_i четны. Рассмотрим вместо исходной новую сетку, у которой ячейки — квадраты со стороной в два раза больше, причем ножки циркуля исходно располагаются в ее узлах. Тогда шаги циркуля будут выполняться по узлам новой сетки, а для нее выполнен один из случаев а), б) или в). При этом квадрат длины в «новой» сетке уменьшился в 4 раза (из-за выбора новой единицы измерения), поэтому случай в) не может продолжаться до бесконечности.

Все доказано.

Замечание. Можно было бы ограничиться рассмотрением случаев нечетного и четного значения d^2, заметив, что во втором случае ножки циркуля бегают по узлам сетки, стороной клетки в которой является диагональ исходной сетки.

10 класс

153. Ответ. $b = 0$, $0 \leqslant a < 4$.

Пусть x_0 — общий корень, тогда $f(x_0) = 0$ и $f(f(x_0)) = 0$. Подставив первое равенство во второе, получаем $f(0) = 0$, т. е. $b = 0$. Итак, $f(x) = x^2 + ax$, и уравнение $f(x) = 0$ имеет корни 0 и $-a$. Далее, $f(f(x)) =$

$= 0 \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ f(x) = -a \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -a, \\ f(x) = -a. \end{array} \right.$ Условие задачи выполнено, если каждый корень уравнения $f(x) = -a$ равен 0 или $-a$. Поэтому случаи $a \in (0, 4)$, $a = 0$ подходят, так как уравнение $f(x) = -a$ либо не имеет корней, либо имеет корень 0. При остальных значениях a уравнение $f(x) = -a$ имеет хотя бы один корень, не совпадающий с 0 и $-a$.

154. По условию $OA = OB = OC$ (см. рис. 94). Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle OBC = \frac{1}{2}(\angle OBC + \angle OCB) = \frac{1}{2}(\pi - \angle BOC) = \frac{1}{2}(\pi - 2\angle BAC) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Поэтому $\angle KEA = \pi - \angle KEC = \pi - \frac{1}{2}\overset{\smile}{KC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{KBC} = \frac{1}{2}(\pi + \overset{\smile}{CO}) = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - \alpha$. Отсюда следует, что $KE \parallel AD$. Аналогично, $KD || AE$, значит, $ADKE$ — параллелограмм.

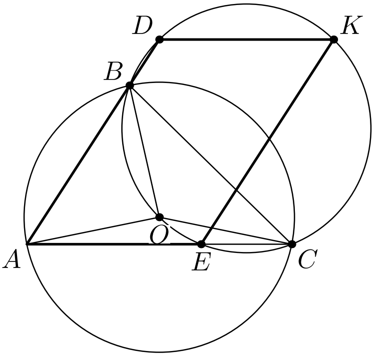


Рис. 94

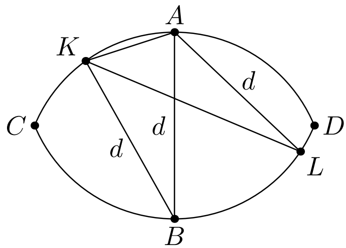


Рис. 95

155. Пусть A и B — любые две точки данного множества M, расстояние между которыми равно диаметру d этого множества. Тогда из определения диаметра следует, что если $P \in M$, то P лежит внутри или на границе «линзы», образованной пересечением кругов радиуса d с центрами A и B (см. рис. 95). Докажем, что на одной из дуг AKC и BLD нет точек множества M, т. е. что если $K \neq A$, $L \neq B$, то $KL > d$.

Действительно, если $\angle BAK = \alpha$, $\angle LAK = \beta$, то $\beta > \alpha$, и из теоремы косинусов получаем

$$KL^2 = AK^2 + d^2 - 2AKd\cos\beta > d^2,$$

так как $AK = 2d\cos\alpha > 2d\cos\beta$.

Пусть, например, на дуге AC нет точек множества M за исключением точки A. Тогда, выбросив точку A и разделив оставшееся множество точек на части по прямой AB, получим искомое разбиение, добавив точки прямой AB к левой части, так как в каждой половине «линзы» только расстояния от границ до точек A или B могут равняться d.

156. **Ответ.** Начинающий.

Первым ходом начинающий уменьшает на единицу числа в первой и четырех последних ячейках. В дальнейшем на каждый ход второго он уменьшает на единицу числа в тех же ячейках, что и второй. Все числа в ячейках с первой по 1995-ю четные после ответных ходов первого, и поэтому ни одно из них первый не может сделать отрицательным.

Первый программист может сломать компьютер лишь в том случае, если он сделает отрицательным одно из чисел в четырех последних ячейках. Для этого должно быть сделано более 2^{1995} ходов, не ломающих компьютер. С другой стороны, на каждом ходу уменьшается пять чисел, т. е. хотя бы одно из чисел в ячейках с 1 по 1995. Первоначальная сумма чисел в этих ячейках $1+2+\ldots+2^{1994} = 2^{1995}-1$. Поэтому могло быть сделано не более $2^{1995}-1$ ходов, не ломающих компьютер.

Значит, компьютер испортит второй программист.

157. **Ответ.** $x = \dfrac{-3+\sqrt{9+12n}}{6}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Из определения дробной части следует, что $0 \leqslant x^3 < 1$, т. е. $0 \leqslant x < 1$. Кроме того, равенство $\{a+b\} = a$ выполняется тогда и только тогда, когда b — целое число. Поэтому из равенства

$$\{x^3+3x^2+3x+1\} = x^3$$

следует, что $3x^2+3x$ — целое, т. е. $3x^2+3x = n$.

Функция $y = 3x^3+3x$ возрастает на $[0,1]$, $y(0) = 0$, $y(1) = 6$, поэтому $0 \leqslant n < 6$ и из корней уравнения $3x^2+3x-n = 0$ выбирается лежащий на промежутке $[0,1)$.

158. **Ответ.** Нет.

Предположим, что пятиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5$ — выпуклый. Возьмем точку X внутри $B_1B_2B_3B_4B_5$. Опустим из X на прямые A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_5A_1 перпендикуляры XH_1, XH_2, $\ldots$, XH_5 соответственно (см. рис. 96). Из расположения X относительно биссектрис углов A_i следует, что $XH_1 < XH_2 < XH_3 < XH_4 < XH_5 < XH_1$, — противоречие. Значит пятиугольник невыпуклый.

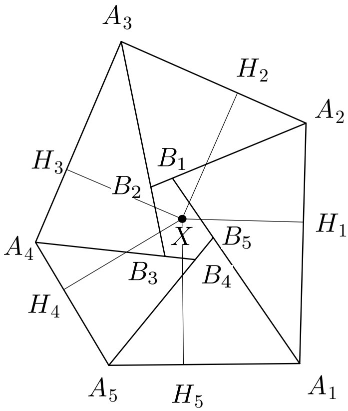


Рис. 96

159. **Ответ.** $(n-2)^3$.

Покажем, что меньшего числа удаленных перегородок недостаточно.

Удалим все граничные кубики. Останется куб $(n-2)\times(n-2)\times(n-2)$, разбитый перегородками на $(n-2)^3$ кубиков. Теперь пространство разделено перегородками на $(n-2)^3+1$ областей, считая внешнюю. Удаление одной перегородки уменьшает число областей не более, чем на 1. В конце число областей должно стать равным 1, поэтому придется удалить не менее $(n-2)^3$ перегородок.

Этого количества хватает: достаточно из каждого неграничного кубика убрать нижнюю грань.

160. **Ответ.** 11 рублей.

Пусть $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ для $i \geqslant 3$. Тогда $a_{10} = 144$. Докажем по индукции, что среди не менее, чем a_i чисел, загаданное число нельзя угадать, заплатив менее, чем $i+1$ рубль.

Для $i = 1$ и $i = 2$ это верно.

Пусть чисел не менее, чем a_i. Тогда либо множество M чисел, выделенных в первом вопросе, содержит не менее a_{i-2} чисел (первый случай), либо множество чисел, не попавших в M, содержит не менее a_{i-1} чисел (второй случай), В первом случае, если загаданное число попало в M, то за ответ нужно заплатить 2 рубля, и, по предположению индукции, еще не менее $(i-2)+1$ рублей для того, чтобы угадать число, т. е. всего не менее $i+1$ рублей. Во втором случае, если загаданное число не попало в M, то нужно заплатить 1 рубль за ответ и не менее чем $(i-1)+1$ рубль за угадывание числа, т. е. вновь всего не менее чем $i+1$ рублей.

Алгоритм отгадывания числа ясен из предыдущих рассуждений: на каждом шаге множество M из a_i чисел, содержащее загаданное число, нужно разбивать на множества M_1 из a_{i-2} чисел и M_2 из a_{i-1} чисел, и задавать вопрос о принадлежности числа множеству M_1.

11 класс

161. **Ответ.** 1260.

Занумеруем карты сверху вниз по порядку. В верхней колоде номера от 1 до 36, в нижней — от 37 до 72. Обозначим K_i $(i = 1, 2, \ldots, 36)$ номер карты нижней колоды такой же, как i-я верхняя. Между i и K_i лежит $K_i - i - 1$ карта, поэтому искомая сумма $S = (K_1 - 1 - 1) + (K_2 - 2 - 1) + \ldots + (K_{36} - 36 - 1)$. Переставим слагаемые $K_1, K_2, \ldots, K_{36}$ по возрастанию — сумма не изменится. Получим $S = (37 - 1 - 1) + (38 - 2 - 1) + \ldots + (72 - 36 - 1) = 36 \cdot 35 = 1260$.

Замечание. Сравните с решением задачи 96.

162. Проведем касательную к S в точке C, обозначим ее l (см. рис. 97). Угол между l и AE равен углу ABC (как угол между касательной и хордой), а угол ABC равен углу AED (опираются на одну дугу). Значит, $l||DE$, и $OC \perp DE$.

163. См. решение задачи 155.

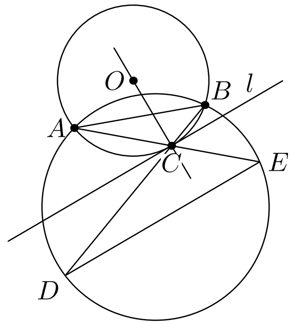


Рис. 97

164. Ответ. Нельзя.

1) Докажем, что в исходной таблице найдется подтаблица 2×2, в которой стоит одна единица и три нуля. По принципу Дирихле найдется строка, в которой стоят одни нули (так как строк n, а единиц $n-1$). Очевидно, что в таблице найдутся две соседние строки, в одной из которых стоят все нули, а в другой по крайней мере одна единица. Действительно, если бы такого не было, рядом с найденной строкой со всеми нулями стояли бы строки тоже со всеми нулями, и т. д., т. е. в таблице были бы одни нули — противоречие. Аналогично предыдущему получаем, что в ненулевой строке найдутся две соседние клетки, в одной из которых стоит единица, а в другой — ноль. Эти две клетки и две соседние клетки из нулевой строки образуют искомую подтаблицу.

2) Выберем в нашей таблице произвольную подтаблицу 2×2: пусть в ее левом верхнем углу стоит число a, в правом верхнем — b, в левом нижнем — c и в правом нижнем — d, а после проведения операции — a_1, b_1, c_1, d_1 соответственно.

Рассмотрим выражения $D = (a+d) - (b+c)$ и $D_1 = (a_1+d_1) - (b_1 + c_1)$. Возможны три случая:

а) Выбранная клетка находится вне нашей подтаблицы, и при этом она лежит в строке или столбце, пересекающем нашу подтаблицу. Пусть для определенности она лежит в одной строке с a и b, тогда $a_1 = a+1$, $b_1 = b+1$, $c_1 = c$, $d_1 = d$ и $D_1 = (a+1+d)-(b+1+c) = a+d-b-c+1-1 = D$.

б) Выбранная клетка находится вне нашей подтаблицы, и при этом она не лежит ни в строке, ни в столбце, пересекающем нашу таблицу. Тогда $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $d_1 = d$ и $D_1 = (a+d) - (b+c) = a+d-b-c = D$.

в) Выбранная клетка находится внутри нашей подтаблицы. Пусть для определенности она — верхняя левая клетка подтаблицы, тогда $a_1 = a-1$, $b_1 = b+1$, $c_1 = c+1$, $d_1 = d$ и $D_1 = (a-1+d) - (b+1+c+1) = a+d-b-c-1-1-1 = D-3$. (Если правая нижняя, то опять $D_1 = D-3$, в противном случае $D_1 = D+3$.) Таким образом, мы показали, что $D_1 \equiv D \pmod 3$ (для любого количества операций). Однако в исходной таблице мы нашли подтаблицу 2×2, в которой D равно либо 1, либо -1, т. е. $D \equiv 1$

(mod 3) или $D \equiv 2 \pmod 3$, а мы должны получить таблицу, в которой все числа равны, т. е. с $D \equiv 0 \pmod 3$.

Из полученного противоречия следует ответ: нельзя.

165. **Ответ.** Нет.

Посмотрим, как изменяется при этой операции остаток от деления числа на 7. Пусть b — последняя цифра числа. Тогда оно имеет вид $10a + b$, а в результате применения операции получается $a + 5b$. Поскольку $5(10a + b) - (a + 5b) = 49a$ — делится на 7, то остаток умножается на 5, т. е. если исходное число делилось на 7, то все числа, появляющиеся на доске, тоже будут делиться на 7. Следовательно, 1998^7 никогда не будет получено.

166. Посчитаем стороны всех клеток, составляющих многоугольник, следующим образом: из количества сторон черных клеток вычтем количество сторон белых клеток. Эта величина равна $4(a - b)$, так как у каждой клетки четыре стороны, в то же время каждый отрезок, лежащий внутри многоугольника, был посчитан один раз со знаком «+» и один раз — со знаком «−». То есть полученная величина равна сумме отрезков периметра с соответствующими знаками: «+» для черных и «−» для белых, откуда и получаем требуемое равенство.

Замечание. Задачу можно решать по индукции, при доказательстве индуктивного перехода отбрасывая от многоугольника одну граничную клетку. При этом многоугольник может развалиться на несколько, и удобнее доказывать формулу не для одного многоугольника, а для совокупности. Число вариантов расположения отбрасываемой клетки может быть доведено до двух: ,  (с тремя сторонами, выходящими на периметр, и с двумя).

167. **Ответ.** $\frac{5}{6}$.

Пусть O — центр симметрии, $KLMN$ и $K_1L_1M_1N_1$ — данные тетраэдры (K и K_1, L и L_1, M и M_1, N и N_1 — пары симметричных относительно точки O вершин). Параллельный перенос первого тетраэдра на вектор $\vec{u}$, а второго — на вектор $-\vec{u}$ не изменяет Φ. Действительно, пусть P и Q — две произвольные точки тетраэдров, X — середина отрезка PQ, $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{QQ'} = -\vec{u}$, тогда $\overrightarrow{P'X} + \overrightarrow{Q'X} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{Q'Q} + \overrightarrow{QX} = -\vec{u} + (\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{QX}) + \vec{u} = \vec{0}$, значит, X — середина отрезка $P'Q'$.

Отрезок, соединяющий середины скрещивающихся ребер правильного тетраэдра с ребром $\sqrt{2}$, перпендикулярен им и имеет длину 1. Поэтому можно выбрать куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 и центром O и параллельный перенос $\vec{u}$, переводящий первый тетраэдр в тетраэдр $T_1 =$

$= ACB_1D_1$. Параллельный перенос на вектор $-\vec{u}$ переведет второй тетраэдр в симметричный T_1 тетраэдр $T_2 = C_1A_1DB$.

Итак, фигура Φ состоит из середин отрезков, концы которых лежат в тетраэдрах ACB_1D_1 и C_1A_1DB.

Пусть U — многогранник, изображенный на рис. 98 тонкими линиями, его вершины — середины ребер куба. Покажем, что $\Phi = U$.

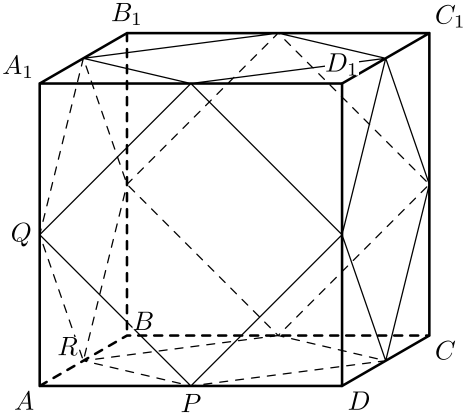


Рис. 98

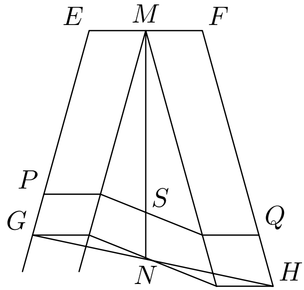


Рис. 99

Лемма. *Множество Φ середин отрезков, концы которых принадлежат выпуклым фигурам Φ_1 и Φ_2 выпукло.*

Доказательство. Пусть M и N — середины отрезков EF и GH, где $E, G \in \Phi_1$, $F, H \in \Phi_2$, $S \in [MN]$. Проведем через M прямые, параллельные EG и FH (см. рис. 99). Теперь из рисунка видно, как найти точки $P \in [EG]$ и $Q \in [FH]$ такие, что S — середина $[PQ]$. Итак, если $M, N \in \Phi$ и $S \in [MN]$, то $S \in \Phi$, т. е. множество Φ выпукло.

Из леммы следует, что искомая фигура Φ выпукла. Но все вершины многогранника U лежат в Φ (например, Q — середина AA_1), поэтому $U \subseteq \subseteq \Phi$. Теперь заметим, что множество середин отрезков $[GH]$, где $H \in T_2$ — тетраэдр T_2', гомотетичный T_2 с коэффициентом $b = \frac{1}{2}$ и центром G. Но при такой гомотетии T_2' и точка A лежат по разные стороны от плоскости PQR. Значит, Φ не содержит точек, входящих в пирамидку $APQR$, кроме ее основания.

Аналогично, исключив остальные пирамидки, получаем, что $\Phi = U$.

Таким образом, $V(\Phi) = 1 - 8V(APQR) = 1 - \frac{8}{48} = \frac{5}{6}$.

168. Из неравенства $\frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} > \frac{1}{1998}$ следует, что все члены последовательности попарно различны.

Лемма. *Если $i > n$ и $a_i < a_n$, то* $i - n < 2000000$.

Доказательство. Пусть $i > n$ и $a_i < a_n$. Интервал $[1, a_n]$ содержит лишь конечное число членов последовательности, значит все a_k с достаточно большими k будут больше a_n. При возрастании индекса от i до бесконечности найдется такое j, что $a_j < a_n < a_{j+1}$. Расстояние между a_j и a_{j+1}, ввиду неравенства $\frac{|a_n - a_m|}{|n-m|} < 1998$, меньше 1998, поэтому либо $a_n - a_j < 999$, либо $a_{j+1} - a_n < 999$. В первом из этих случаев, по условию

$$\frac{j-n}{1998} < a_n - a_j < 999,$$

значит $i \leqslant j < n + 1998 \cdot 999 < n + 2 \cdot 10^6$, во втором, аналогично, $i \leqslant j < n - 1 + 1998 \cdot 999 < n + 2 \cdot 10^6$. Лемма доказана.

По условию в последовательности встречаются все натуральные числа, значит, a_n равно числу членов последовательности, лежащих в интервале $[1, a_n]$. Член последовательности, лежащий в $[1, a_n]$, имеет индекс не больше n или больше n, количество первых не более n, количество вторых, по доказанному, меньше $2 \cdot 10^6$. Тогда $a_n < n + 2 \cdot 10^6$. С другой стороны, также по доказанному, если $i < n - 2 \cdot 10^6$, то $a_i < a_n$, значит в $[1, a_n]$ содержится больше $n - 2 \cdot 10^6$ членов последовательности. Таким образом, $n - 2 \cdot 10^6 < a_n < n + 2 \cdot 10^6$, откуда $|a_n - n| < 2 \cdot 10^6$, что и требовалось доказать.

1998–1999 г.

8 класс

169. Пусть отец проехал с первым из сыновей x км. На это ушло $\frac{x}{20}$ часа, и они опередили второго на $\frac{x}{20} \cdot 15 = \frac{3}{4}x$ км. Отец едет за вторым из сыновей и встречается с ним через $\frac{3}{4}x : 30 = \frac{x}{40}$ ч. До встречи с отцом второй сын прошел $\left(\frac{x}{20} + \frac{x}{40}\right) \cdot 5 = \frac{3x}{8}$ км, и до конца пути ему осталось $\left(33 - \frac{3x}{8}\right)$ км. Ясно, что все трое одновременно прибудут к бабушке, если отец подвезет сыновей на равные расстояния, т. е. $x = 33 - \frac{3x}{8}$ км, откуда $x = 24$ км. Значит, на дорогу будет затрачено $\frac{x}{20} + \frac{33-x}{5} = \frac{24}{20} + \frac{9}{5} = 3$ часа.

170. **Ответ.** 1999.

Пусть приписанные цифры образуют число B, $0 \leqslant B \leqslant 999$. Тогда получившееся число равно, с одной стороны, $1000A + B$, а с другой — $1 + 2 + \ldots + A = \frac{1}{2}A(A+1)$. Равенство $1000A + B = \frac{1}{2}A(A+1)$ преобразуется к виду $A(A - 1999) = 2B$, откуда $0 \leqslant A(A-1999) \leqslant 1998$.

Поскольку левое неравенство здесь возможно только при $A \geqslant 1999$, а правое — при $A < 2000$, то $A = 1999$.

171. Ответ. $CA_1 : A_1B = BC_1 : C_1A = AB_1 : B_1C = 2 : 1$.

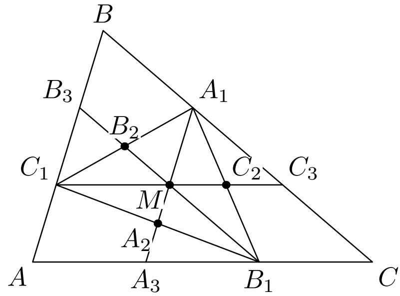


Рис. 100

Пусть M — точка пересечения медиан $\triangle A_1B_1C_1$ и A_3, B_3, C_3 — точки, в которых продолжения медиан пересекают стороны $\triangle ABC$ (см. рис. 100). Из условия следует, что MC_3CB_1 — параллелограмм, поэтому $MC_3 = CB_1$.

Далее, прямая C_1C_3 проходит через середину отрезка A_1B_1 и параллельна AC, поэтому MC_3 — средняя линия $\triangle A_3A_1C \Rightarrow A_3C = 2MC_3 \Rightarrow A_3B_1 = B_1C$. Но A_2A_3 — средняя линия $\triangle AB_1C_1 \Rightarrow AA_3 = A_3B_1$, значит, $AA_3 = A_3B_1 = B_1C$, и точка B_1 делит сторону AC в отношении $2 : 1$, считая от вершины A. Аналогично, $CA_1 : A_1B = BC_1 : C_1A = 2 : 1$.

172. Ответ. 5.

При $k = 5$ годится следующий способ уравнивания давлений. Разделив баллоны на 8 групп по 5 баллонов, уравняем давления в баллонах каждой из этих групп. Затем образуем 5 новых групп так, чтобы каждая из них состояла из 8 баллонов, входивших ранее в разные группы. Равенства давлений в баллонах каждой из новых групп (а значит, и во всех 40 баллонах) достигнем, соединив сначала баллоны по четыре, а затем — по два, беря в каждую пару баллоны из разных четверок.

Покажем, что при $k \leqslant 4$ нужного способа не существует.

Пусть значение давления в одном из баллонов равно 2, а в каждом из остальных — 1; тогда после уравнивания значение давления в каждом баллоне должно оказаться равным $(2 + 39 \cdot 1) : 40 = \frac{41}{40}$.

Но после каждого соединения все значения будут выражаться несократимыми дробями, знаменатели которых не делятся на 5. В самом деле, если перед каким-либо соединением ни один из знаменателей на 5 не делился, то и знаменатель среднего арифметического соответствующих двух, трех или четырех дробей, являясь удвоенным, утроенным или учетверенным наименьшим общим кратным их знаменателей, не может оказаться кратным 5. А так как 40 кратно 5, то уравнять давление при указанных первоначальных их значениях мы не сможем.

173. Пусть такое разбиение возможно и в A вошли числа x и y, $x < y$. Тогда сумма чисел в B равна $1 + 2 + \ldots + 15 - x - y = 120 - x - y$, т. е.

$xy = 120 - x - y$. Переписав это равенство в виде $(x+1)(y+1) = 121$, получаем, что либо $x+1 = 1$, $y+1 = 121$, либо $x+1 = y+1 = 11$, что невозможно.

174. По условию BC — серединный перпендикуляр к отрезку AA_1, т. е. $AB = BA_1$ и $\angle A_1BC = \angle ABC$. Аналогично, $C_1B = BC$ и $\angle C_1BA = \angle ABC$. Итак, $3\angle ABC = 180°$, т. е. $\angle ABC = 60°$. Рассмотрим $\triangle CBA_1$. В нем $\angle CBA_1 = 60°$, $CB = C_1B = 2BA_1$. Проведем $CA_2 \perp BA_1$. В прямоугольном треугольнике CA_2B $\angle BCA_2 = 30°$, поэтому $BA_2 = \frac{1}{2}BC$, т. е. $BA_2 = BA_1$. Точки A_2 и A_1 совпали, значит, $\angle CA_1B = 90°$.

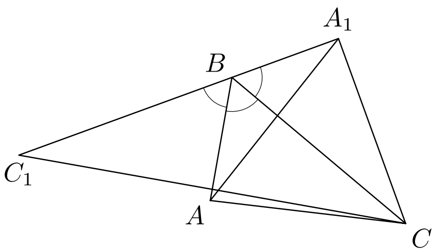


Рис. 101

175. **Ответ.** Выигрывает первый игрок.

Опишем выигрышную стратегию I игрока. Вначале он выкладывает на стол $0 : 0$, II отвечает $0 : a$, тогда I выкладывает кость $a : a$. Теперь II делает ход либо $0 : n$, либо $a : n$. В первом случае I выкладывает кость $n : a$ к концу, содержащему n, во втором — $n : 0$ к тому же концу. Тогда после хода I игрока на концах цепочки будут 0 или a. Это же произойдет после того, как на ход II игрока $0 : m$ ($a : m$) I ответит $m : a$ ($m : 0$). Кости вида $0 : n$ и $a : n$ ($n \neq 0, a$) разбиваются на пары, поэтому последний ход останется за первым игроком.

176. **Ответ.** Нельзя.

Предположим противное: закрыть удалось. Тогда, очевидно, каждая грань разобьется на 9 единичных квадратов. Проведем в каждом квадрате цепочки по диагонали из вершины с шарниром. Получится ломаная из диагоналей на поверхности куба (возможно, пересекающая себя в вершинах звеньев). Из двух вершин ломаной (начала и конца) будет выходить нечетное число звеньев-диагоналей, а из остальных вершин — четное. Если же начало и конец ломаной совпадают, то из каждой ее вершины выходит четное число звеньев. Если раскрасить вершины квадратов 1×1 в два цвета так, чтобы концы каждой стороны квадрата 1×1 были разного цвета, то все вершины ломаной совпадут с множеством вершин одного цвета (скажем, черного), поэтому множество ее звеньев — это множество всех диагоналей с черными концами. Но среди черных вершин окажутся 4 вершины куба, а из каждой такой вершины выходит 3 диагонали, т. е. нечетных узлов окажется 4. Противоречие.

9 класс

177. Ответ. 29.

Поскольку однозначные числа не имеют общих цифр, то $N > 9$. А так как числа, соседние с числом 9, должны содержать девятку в своей записи, то меньшее из них не может быть меньше, чем 19, а большее — меньше, чем 29. Следовательно, $N \geqslant 29$.

Равенство $N = 29$ возможно, поскольку условиям задачи удовлетворяет, например, такой порядок расстановки чисел от 1 до 29 по кругу: 1, 11, 10, 20, 21, 12, 2, 22, 23, 3, 13, 14, 4, 24, 25, 5, 15, 16, 6, 26, 27, 7, 17, 18, 8, 28, 29, 9, 19.

178. Обозначим $\angle BDA$ через α. Тогда (см. рис. 102) $\angle BAD = 180° - 2\alpha$, ($AB = AD$), $\angle CBF = \frac{1}{2}\overset{\frown}{FC} = \frac{1}{4}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\angle CAB = 90° - \alpha$. Точки E и F равноудалены от точек B и C, поэтому FE — серединный перпендикуляр к отрезку BC, следовательно, $\angle BFE = 90° - \angle CBF = \alpha$. Итак, $\angle BDE = \alpha = \angle BFE$, т. е. точки B, F, D, E на одной окружности.

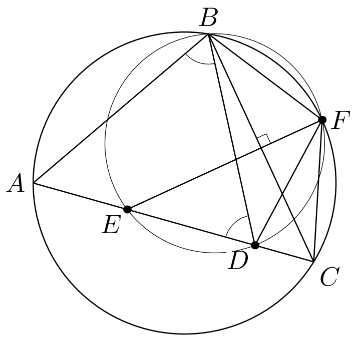


Рис. 102

179. Так как $xyz = 1$, то неравенства $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant x+y+z$ и $(x-1)(y-1)(z-1) \leqslant 0$ равносильны. Действительно, из того, что $\frac{1}{x} = yz$, $\frac{1}{y} = xz$, $\frac{1}{z} = xy$ и $xyz - 1 = 0$ следует, что они оба равносильны неравенству

$$yz + xz + xy \geqslant x + y + z.$$

Кроме того, числа $t-1$ и t^k-1 имеют при $k > 0$ одинаковый знак. Поэтому $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant x+y+z \Leftrightarrow (x-1)(y-1)(z-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x^k-1)(y^k-1)(z^k-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k} \geqslant x^k+y^k+z^k$.

180. Предположим, что фишка никогда не выйдет из лабиринта. Тогда на клетку с номером 1 (см. рис. 103) фишка попадет конечное число раз (менее 4), так как в противном случае, когда стрелка покажет на выход, фишка из лабиринта уйдет. Аналогично получаем, что после того, как фишка в последний раз побывает на поле «1», она конечное число раз побывает на полях с номером «2». Продолжая рассуждения получаем, что после того, как фишка в последний раз побывала на полях с номерами k, $1 \leqslant k \leqslant 14$, она конечное число раз побывает на любом поле с номером $k + 1$. Значит, на каждом поле фишка побывает конечное число раз, что противоречит неограниченности числа ходов. Следовательно, фишка должна выйти из лабиринта.

8	7	6	5	4	3	2	1
9	8	7	6	5	4	3	2
10	9	8	7	6	5	4	3
11	10	9	8	7	6	5	4
12	11	10	9	8	7	6	5
13	12	11	10	9	8	7	6
14	13	12	11	10	9	8	7
15	14	13	12	11	10	9	8

Рис. 103

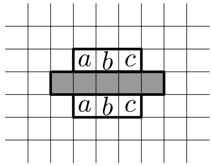


Рис. 104

181. Предположим, что в некоторой фигуре 1×5 отсутствует некоторый цвет, например, синий (на рис. 104 эта фигура закрашена). Тогда в каждой паре клеток, обозначенных одинаковыми буквами, присутствует синий цвет (в противном случае его не будет в одной из крестообразных фигур, включающих эти пары клеток). Но тогда одна из двух крестообразных фигур, включающих клетки, обозначенные буквами a и c, содержит 2 клетки синего цвета. Противоречие.

182. См. решение задачи 175.

183. Если данное число n четно, т. е. $n = 2m$, то искомыми числами будут $k = 4m$ и $l = 2m$.

Пусть n нечетно, $p_1, \ldots, p_s$ — его простые делители и p — наименьшее нечетное простое число, не входящее во множество $\{p_1, \ldots, p_s\}$. Тогда искомыми будут числа $k = pn$ и $l = (p-1)n$, так как, в силу выбора p, число $p - 1$ имеет своими делителями число 2, и, возможно, какие-то из чисел $p_1, \ldots, p_s$.

184. Опустим перпендикуляр OR на прямую AC. Пусть перпендикуляр к прямой KM, восставленный в точке P, пересекает прямую OR в точке Q' (см. рис. 105). Достаточно доказать, что $MQ' \| BO$, так как это будет означать, что точки Q и Q' совпадают. Так как $KM \| BC$, то $\angle MPC = \angle BCP = \frac{\angle C}{2}$. Тогда в $\triangle MPC$: $\angle MPC = \angle PCM = \frac{\angle C}{2}$, откуда $MP = MC = MA$, поэтому точка P лежит на окружности с диаметром AC и $\angle APC = 90°$.

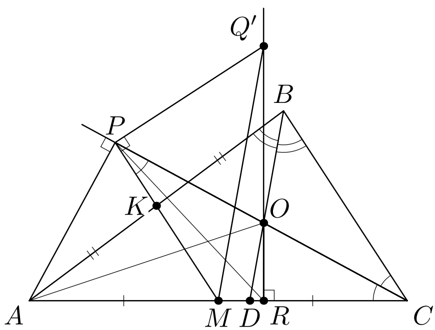


Рис. 105

В четырехугольнике $APOR$ $\angle APO = \angle ARO = 90°$, следовательно он вписанный, отсюда $\angle RPO = \angle RAO = \frac{\angle A}{2}$ ($\angle RPO = \angle RAO$ опираются на одну дугу).

В четырехугольнике $MPQ'R$ $\angle MPQ' = \angle MRQ' = 90°$, следовательно, он вписанный, отсюда $\angle Q'MR = \angle RPQ' = \angle RPO + \angle OPQ' = \frac{\angle A}{2} + (90° - \angle OPM) = \frac{\angle A}{2} + \left(90° - \frac{\angle C}{2}\right)$. Если BO пересекает AC в точке D, то из $\triangle BCD$: $\angle BDC = 180° - \angle C - \frac{\angle B}{2} = 90° + \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle C}{2} = \angle Q'MC$. Отсюда $MQ' || BO$.

10 класс

185. См. решение задачи 170.

186. По теореме о произведении отрезков хорд произведение $XA \cdot AY$ не зависит от положения хорды XY и равно некоторой постоянной величине d. На прямой AB выберем точку C такую, что $AC = \frac{d}{AB}$, причем A лежит между B и C.

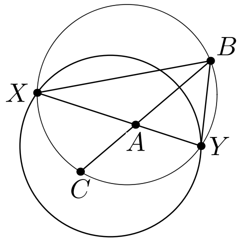


Рис. 106

Тогда $AB \cdot AC = XA \cdot AY = d$, следовательно точки X, B, Y и C лежат на одной окружности. Это означает, что окружности, описанные около треугольников BXY, проходят через фиксированные точки B и C, следовательно их центры лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BC.

187. Обозначим через M исходное множество из n точек. Пусть A — произвольное подмножество из $n - 3$ точек. Возьмем точку x из множества M, не принадлежащую A. Через x и остальные точки множества M проведем $n-1$ прямую и возьмем прямую, не пересекающую A. Через эту прямую и оставшиеся $n-2$ точки множества M проведем $n-2$ плоскости. Одна из плоскостей не пересекает A, так как плоскостей $n - 2$, а множество A состоит из $n - 3$ элементов. Эта плоскость и является искомой.

188. См. решение задачи 180.

189. **Ответ.** Да.

Обозначим искомые числа и их сумму соответственно через $x_1, \ldots, x_{10}$ и S. Тогда

$$S - x_1 = n_1^2,$$
$$S - x_2 = n_2^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S - x_{10} = n_{10}^2, \quad \text{где} \quad n_i \in \mathbb{N}$$

Следовательно, $S = \dfrac{n_1^2 + \ldots + n_{10}^2}{9}$. Пусть $n_k = 3k$ $(k = 1, \ldots, 10)$. Тогда сумма квадратов делится на 9. Ясно, что числа $x_i = S - n_i^2$ удовлетворяют требованиям задачи.

190. Пусть D_1 — такая точка на прямой B_1C_1, что $CD_1 \parallel AB$. Тогда $\triangle CD_1B_1$ и $\triangle AC_1B_1$ подобны, поэтому $CD_1 = CB_1$. Покажем, что D_1 лежит на A_1K, т. е. $D = D_1$.

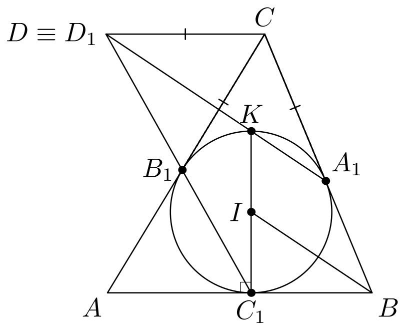


Рис. 107

В равнобедренном $\triangle CD_1A_1$ $\angle CA_1D_1 = \frac{1}{2}(\pi - \angle D_1CA_1) = \frac{\angle B}{2}$. С другой стороны, $A_1K \perp A_1C_1$ (так как C_1K — диаметр) и $A_1C_1 \perp$ $\perp BI$, где I — центр вписанной окружности. Поэтому $\angle CA_1K =$ $= \angle CBI = \frac{\angle B}{2}$, что и требовалось.

191. Возьмем произвольный бюллетень из $(n+1)$-й урны. Пронумеруем кандидатов, фамилии которых встречаются в этом бюллетене. Предположим, что требуемое в задаче не выполнено. Тогда в k-й урне ($k = 1, \ldots, n$) найдется бюллетень, не содержащий фамилии k-го кандидата. Набор этих бюллетеней вместе со взятым вначале бюллетенем из $(n+1)$-й урны противоречит условию задачи.

192. Рассмотрим отрезки натурального ряда длины 1999. Все они отличаются сдвигом. Назовем точки, или позиции, на двух таких отрезках *соответствующими*, если они совмещаются при сдвиге одного отрезка на другой.

Предположим, что условие задачи не выполняется, т. е. ни одно из отмеченных чисел не делится на другое. Рассмотрим отрезок $[1, 1999]$. По условию задачи, в нем есть отмеченное число, скажем x_1.

Теперь сдвигаем отрезок на x_1. На позиции, соответствующей числу x_1, не может стоять отмеченное число (так как оно делится на x_1), а вместе с тем в этом отрезке есть какое-то другое отмеченное число x_2. Теперь сдвинем новый отрезок на x_1x_2. Тогда на позициях, соответствующих отмеченным числам x_1 и x_2 не могут стоять отмеченные числа (так как эти числа делятся на x_1 и x_2 соответственно), а вместе с тем на этом отрезке есть некоторое отмеченное число x_3.

Теперь будем сдвигать новый отрезок на $x_1x_2x_3$ и найдем новое число x_4. На шаге с номером t мы осуществляем сдвиг на $x_1 \ldots x_t$ и получаем отрезок с t запретами.

На шаге с номером 1999 мы получим, что все позиции запрещены, что противоречит условию.

11 класс

193. Мы воспользуемся следующими свойствами непрерывных функций:
(i) сумма и разность непрерывных функций — непрерывные функции;
(ii) если $g(x)$ — непрерывная функция, функция $g(ax)$ также непрерывна.

Теперь заметим, что по условию непрерывны функции $f(x) + f(2x)$ и $f(x) + f(4x)$, а в силу свойства (ii) вместе с функцией $f(x) + f(2x)$ непрерывна и функция $f(2x) + f(4x)$. Далее, по свойству (i) непрерывна функция

$$(f(x) + f(2x)) + (f(x) + f(4x)) - (f(2x) + f(4x)) = 2f(x),$$

а, значит, и функция $f(x)$.

194. См. решение задачи 179.

195. Докажем утверждение индукцией по числу n учеников в классе. Для $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно при $n \leqslant N$. Пусть $n = N + 1$. Утверждение верно, если в классе ровно один молчун. Пусть их не менее двух. Выделим молчуна A и его друзей — болтунов $B_1, \ldots, B_k$. Для оставшихся $n - 1 - k$ учеников утверждение верно, т. е. можно выделить группу M, в которой каждый болтун дружит с нечетным числом молчунов и в M входит не менее $\frac{n-1-k}{2}$ учеников. Предположим, что болтуны $B_1, \ldots, B_m$ дружат с нечетным числом молчунов из M, а $B_{m+1}, \ldots, B_k$ — с четным числом. Тогда, если $m \geqslant \frac{k+1}{2}$, то добавим к группе M болтунов $B_1, \ldots, B_m$, а если $m < \frac{k+1}{2}$, то добавим к группе M болтунов $B_{m+1}, \ldots, B_k$ и молчуна A. В обоих случаях мы получим группу учеников, удовлетворяющую условию задачи.

196. ***Первое решение.*** Если две большие грани не параллельны, то двугранный угол, содержащий эти грани, не может быть тупым (на рис. 108 приведены проекции сферы и этих двух граней на плоскость, перпендикулярную линии их пересечения, проекции больших граней выделены). Поэтому, если восставить перпендикуляр к каждой большой грани, идущий наружу от многогранника, то угол между любыми двумя такими перпендикулярами (α на рис. 108) будет неострым.

Предположим, что утверждение задачи неверно и больших граней не менее 7. Тогда мы получаем 7 векторов $\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_7$, углы между которыми не меньше $90°$ (для параллельных граней такой угол равен $180°$). Отложим все векторы от одной точки P и проведем плоскость β, проходящую через P и не содержащую ни один из 7 векторов. Тогда по одну сторону от нее будут отложены по крайней мере 4 вектора (например, $\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_4$).

Разложим каждый из них в сумму двух: $\vec{n}_i = \vec{a}_i + \vec{b}_i$, где $\vec{a}_i \in \beta$, $\vec{b}_i \perp \beta$ (см. рис. 109)). При этом можно считать, что $\vec{b}_1 = \vec{b}_2 = \vec{b}_3 = \vec{b}_4 = \vec{b}$, где $|\vec{b}| = 1$. По нашему предположению $(\vec{n}_i, \vec{n}_j) \leqslant 0$, так как углы между векторами не острые.

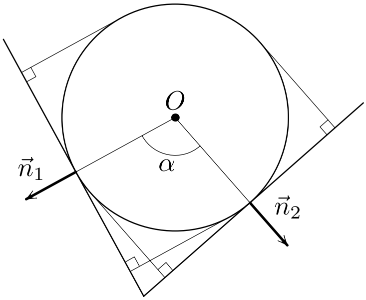


Рис. 108

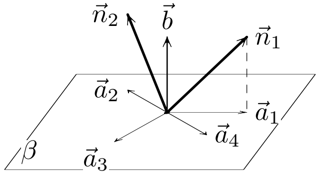


Рис. 109

С другой стороны, $(\vec{n}_i, \vec{n}_j) = (\vec{a}_i + \vec{b}_i, \vec{a}_j + \vec{b}_j) = (\vec{a}_i, \vec{a}_j) + 1$, так как $(\vec{a}_i, \vec{b}_j) = (\vec{a}_j, \vec{b}_i) = 0$, $(\vec{b}_i, \vec{b}_j) = \vec{b}^2 = 1$. Итак, для четырех векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_4$, лежащих в плоскости β, $(\vec{a}_i, \vec{a}_j) < 0$, что невозможно, так как угол хотя бы между двумя из них не тупой. Противоречие, значит, наше предположение о наличии у многогранника 7 больших граней неверно. 6 больших граней есть у куба.

Второе решение. Пусть R — радиус шара. Сопоставим каждой большой грани часть граничной сферы шара, расположенную в конусе, вершиной которого служит центр шара, а основанием — проекция шара на эту грань. Указанная часть сферы является «сферической шапочкой» (т. е. частью сферы, лежащей по одну сторону от секущей сферу плоскости) высоты $h = R(1 - \sqrt{2}/2)$. По известной формуле площадь такой «шапочки» равна $2\pi Rh = \pi R^2(2 - \sqrt{2})$. Так как указанные «шапочки» не перекрываются, сумма их площадей не превосходит площади сферы. Обозначив количество больших граней через n, получим $n(2 - \sqrt{2}) \leqslant 4$, т. е. $n \leqslant \dfrac{4}{2 - \sqrt{2}}$. Решение заканчивается проверкой того, что $\dfrac{4}{2 - \sqrt{2}} < 7$.

197. **Ответ.** Нет.

Предположим, что такие числа a, b и c существуют. Выберем $x > 0$ и $y > 0$ такие, что $x + a \geqslant 0$, $x + y + b \geqslant 0$, $y + c \geqslant 0$. Тогда разность между левой и правой частями равна $a + b + c$. А если взять $x < 0$ и $y < 0$ такие, что $x+a < 0$, $x+y+b < 0$, $y+c < 0$, то эта разность будет равна $-a-b-c$. Таким образом, с одной стороны, $a + b + c > 0$, с другой $a + b + c < 0$. Противоречие.

198. Предположим, что клетки квадрата $n \times n$ удалось раскрасить таким образом, что для любой клетки с какой-то стороны от нее нет клетки одного с ней цвета. Рассмотрим тогда все клетки одного цвета и в каждой из них нарисуем стрелочку в том из четырех направлений, в котором клетки того же цвета нет. Тогда на каждую клетку «каемки» нашего квадрата, кроме угловых, будет указывать не более одной стрелки, а на угловую — не более двух. Так как клеток каемки всего $4n-4$, то клеток каждого цвета не более $4n$. С другой стороны, каждая из n^2 клеток нашего квадрата раскрашена в один из четырех цветов, т. е.

$$n^2 \leqslant 4 \cdot 4n.$$

Для решения задачи теперь достаточно заметить, что последнее неравенство неверно при $n = 50$. Несложно убедиться, что оно неверно при всех $n \geqslant 17$, и, следовательно, утверждение задачи верно уже в квадрате $17 \times \times 17$ — а заодно и в любом большем квадрате.

Замечание. Уточнив немного рассуждение, можно показать, что клеток каждого цвета не более, чем $4n-4$, поэтому утверждение неверно уже в квадрате 15×15.

199. См. решение задачи 184.

200. Из условия следует, что многочлен имеет ненулевую степень. Докажем, что данный многочлен $P(x)$ имеет четную степень, а его график имеет вертикальную ось симметрии. Не умаляя общности, мы можем считать старший коэффициент многочлена $P(x)$ положительным (иначе многочлен можно заменить на $-P(x)$). Если $P(x)$ имеет нечетную степень, то при всех достаточно больших по модулю x он возрастает, и, следовательно, только конечное число значений может принимать более чем в одной целой точке. Поэтому степень $P(x)$ четна.

Тогда при больших положительных x многочлен возрастает, а при больших по модулю отрицательных x — убывает, и, следовательно, все достаточно большие значения, которые он принимает более чем в одной целой точке, он принимает ровно дважды. Упорядочим эти значения: $a_1 < < a_2 < \ldots$ и обозначим x_k — больший, а y_k — меньший прообраз a_k. Таким образом, $P(x_k) = P(y_k) = a_k$.

Мы докажем, что при достаточно больших k сумма $x_k + y_k$ постоянна. Для этого рассмотрим два старших коэффициента $P(x)$:

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$$

Тогда

$$P(c-x) = a(c-x)^n + b(c-x)^{n-1} + \ldots =$$
$$= ax^n - ancx^{n-1} - bx^{n-1} + \ldots = ax^n + (-anc-b)x^{n-1} + \ldots$$

(многоточия скрывают члены не выше $(n-2)$-й степени; мы воспользовались четностью n). Заметим, что коэффициенты при x^n у многочленов $P(x)$ и $P(c-x)$ совпадают; а для коэффициентов при x^{n-1} существует единственное значение c: $c_0 = -\frac{2b}{an}$, при котором они совпадают. Если $c > c_0$, то $P(x) - P(c-x)$ — многочлен степени $n-1$ с положительным старшим коэффициентом, следовательно, при достаточно больших x его значения положительны. Поэтому при достаточно больших k $x_k + y_k < c_0 + 0.1$ (иначе будет $P(y_k) > P(c_0 + 0.1 - x_k) > P(x_k)$). Если, наоборот, $c < c_0$, то $P(x) - P(c-x)$ — многочлен степени $n-1$ с отрицательным старшим коэффициентом, значения которого при достаточно больших x отрицательны. Поэтому при достаточно больших k $x_k + y_k > c_0 - 0{,}1$. Но $x_k + y_k$ — целые числа, поэтому, начиная с некоторого k, все они равны: $x_k + y_k = c$, где c — целое.

Но тогда многочлены $P(x)$ и $P(c-x)$ совпадают почленно (если не все их коэффициенты совпадают, то при больших x знак $P(x) - P(c-x)$ должен совпадать со знаком первого ненулевого коэффициента этой разности; с другой стороны, среди x_k есть сколь угодно большие числа, и для них $P(c - x_k) = P(y_k) = P(x_k)$.)

Итак, $P(x) = P(c-x)$ при всех действительных x. Тогда любое значение, принимаемое в целой точке $x \neq c/2$, принимается и в точке $c - x \neq x$. Поэтому единственное значение, которое может приниматься ровно в одной целой точке, — это $P(c/2)$, да и то, если только $c/2$ — целое.

1999–2000 г.

8 класс

201. Переписав данное равенство в виде

$$(a^4 - 2b^2)(b^4 - 2a^2) = 0$$

получаем, что либо $2 = \left(\frac{a^2}{b}\right)^2$, либо $2 = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$, откуда и следует утверждение задачи.

202. Разобьем каждую улицу на две полуулицы и сосчитаем их число. Если n — число перекрестков в городе, а c_i — число внешних дорог цвета i, то числа полуулиц каждого цвета будут $n+c_1$, $n+c_2$, $n+c_3$. Все эти числа четные, следовательно, четность чисел c_1, c_2, c_3 одинакова. По условию, $c_1 + c_2 + c_3 = 3$. Значит, $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.

203. **Ответ.** 7.

Пример для $n = 7$ приведен на рис. 110.

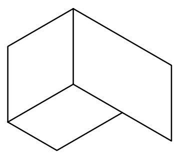


Рис. 110

Докажем, что не существует пятиугольника, который можно разрезать на параллелограммы. Рассмотрим параллелограммы, примыкающие к некоторой стороне. Противоположная сторона каждого из них параллельна стороне пятиугольника. Двигаясь по параллелограммам со стороной, параллельной этой стороне пятиугольника, мы дойдем до другой стороны пятиугольника, т. е. для каждой стороны есть параллельная ей. Значит, стороны пятиугольника можно разбить на группы параллельных сторон, причем в каждой группе не менее 2-х представителей. 5 можно представить в таком виде единственным способом $3 + 2$. Следовательно, есть 3 параллельных стороны, это в свою очередь означает, что из одной вершины выходит 2 параллельные стороны, значит это одна сторона, и мы получаем четырехугольник. По той же причине нельзя на параллелограммы разрезать треугольник. (Впрочем, у треугольника вообще нет параллельных сторон.)

204. Ответ. Если количество монет в мешках различается не более, чем на 1, то алмаз достанется второму пирату, в противном случае — первому.

Рассмотрим первый случай, пусть второй пират на каждом шагу берет столько же монет, что и первый, но из другого мешка. Нетрудно убедиться, что в этом случае второй всегда может сделать ответный ход. Каждый раз после хода второго пирата разность числа монет в мешках будет той же, что в начале, значит, после некоторого его хода в одном мешке монет вообще не будет, а в другом будет не более одного, значит, первый пират не сможет сделать ход и проиграет.

Во втором случае, если разность больше 1, то первый пират своим ходом забирает из большего мешка m монет, если разность имеет вид $3m$ или $3m \pm 1$, чем приводит количество монет в мешках к первому случаю и дальше использует описанную выше стратегию.

205. Ответ. Не обманывает.

Заметим, что сумма весов пяти гирек не менее $1г + 2г + 3г + 4г + 5г = 15г$, а сумма весов двух гирек не более $7г + 8г = 15г$, причем только в случае этих наборов две гирьки уравновесят пять. Следовательно, если барон положит на одну чашку весов две гирьки, а на другую пять, и весы установятся в равновесии, то он сможет утверждать, что осталась гирька весом 6г.

206. Ответ. 48.

Поскольку между двумя последовательными обгонами часовой стрелки минутной проходит более часа, то за указанное время движения электропоезда произошло не более одного обгона. Обозначим O — центр циферблата, T_A и T_B — точки, в которых находился конец часовой стрелки в моменты прохождения электропоездом платформ A и B соответственно, а M_A и M_B — точки, где в эти моменты находился конец минутной стрелки. Заметим также, что за X минут часовая стрелка повернулась на $\frac{X}{2}$ градусов, а минутная — на $6X$ градусов.

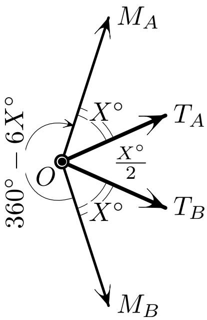


Рис. 111

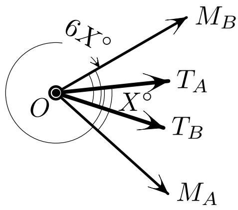


Рис. 112

Тогда, если минутная стрелка обогнала часовую, то точки T_A, T_B, M_A и M_B располагаются друг относительно друга так, как на рис. 111. При этом должно выполняться равенство $6X = X + X + \frac{X}{2}$, откуда $X = 0$, что противоречит условию задачи.

Если же обгона не было, то T_A, T_B, M_A и M_B располагаются так, как на рис. 112, и должно выполняться равенство $360 - 6X = X + X - \frac{X}{2}$, откуда $X = 48$.

207. Пусть прямые KE и KD пересекают прямую AC в точках M и N соответственно. Из условия следует симметричность треугольников CBE и CME относительно CE, значит, $\angle KMC = \angle B$. Аналогично, $\angle KNA = \angle B$, т. е. треугольник MKN — равнобедренный. Кроме того, $BE = ME$ и EC — биссектриса угла MEB. Значит, EC — серединный перпендикуляр к отрезку BM, следовательно, O — центр окружности, описанной около $\triangle MBN$. Но тогда O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN. Отсюда следует утверждение задачи.

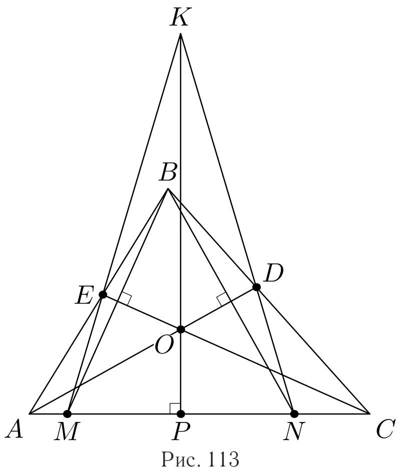


Рис. 113

208. Назовем беспосадочный перелет из одного города в другой «коротким маршрутом», а перелет из одного города в другой с одной пересадкой в пути «длинным маршрутом». Перенумеруем города и обозначим через 2^{n_i} ($i = 1, \ldots, 2000$) число рейсов, выходящих из i-го города. Будем учитывать короткие маршруты в их конечных пунктах, а длинные — в пунктах пересадки. Тогда, если из города выходит x авиалиний, то в нем будет учтено x коротких маршрутов и $x(x-1)$ длинных (так как из каждого смежного города через данный проходит $x-1$ длинных маршрутов), а всего — $x+x(x-1)=x^2$ маршрутов. Таким образом, общее число маршрутов равно $2^{2n_1}+\ldots+2^{2n_{2000}}=4^{n_1}+\ldots+4^{n_{2000}}$. Поскольку четверка в любой степени при делении на 3 дает остаток 1, то остаток от деления на 3 у общего числа маршрутов такой же, как у числа 2000, т. е. 2, а у числа 100 000 этот остаток равен 1.

9 класс

209. **Ответ.** Сможет.

Предположим, что найдутся два различных уравнения $x^2+ax+b=0$ с корнями c, d и $x^2+a_1x+b_1=0$ с корнями c_1, d_1, для которых совпадают наборы, указанные в условии. Тогда

$$a+b+c+d=a_1+b_1+c_1+d_1. \qquad (1)$$

По теореме Виета $c+d=-a$ и $c_1+d_1=-a_1$, поэтому из равенства (1) следует, что $b=b_1$. Так как рассматриваемые уравнения различны, $a\neq a_1$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $a\neq\neq a_1=c$. Тогда либо $a=c_1$ и $d=d_1$, либо $a=d_1$ и $d=c_1$, т. е. d — общий корень наших уравнений. Итак, $d^2+ad+b=0$ и $d^2+cd+b==0$. Вычитая второе уравнение из первого, получаем $(a-c)d=0$. Так как $a\neq c$, то $d=0$. Значит, $b=0$, а это противоречит тому, что все числа набора различны.

Замечание. Если числа в наборе могут совпадать, то утверждение перестает быть верным: у уравнений $x^2+2x=0$ и $x^2-2x=0$ одинаковые наборы из корней и коэффициентов.

210. **Ответ.** Существуют.

Очевидно, что числа a, b и c нечетны. Пусть $a=3$. Тогда в соответствии с условиями задачи мы вынуждены взять $b=9$, $c=19$. Нетрудно проверить, что эти числа подходят: так как c нечетно, то $2^c+1\,\vdots\,3$.

211. Пронумеруем все правые концы отрезков слева направо, а затем также слева направо — все левые концы. Рассмотрим все отрезки, у которых правый конец имеет номер больше n. Из всех таких отрезков выберем тот, у которого левый конец имеет наименьший номер. Полученный отрезок и будет искомым. Действительно, если есть отрезок правее его, то он не пересекается с отрезками, имеющими правые концы с номерами $1,2,\ldots,n+1$, а если есть левее — то с отрезками, имеющими правые концы с номерами $n+1,n+2,\ldots,2n+1$.

212. **Лемма** (теорема Н.И.Фусса). *Пусть окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Через точку M проведена прямая, пе-*

ресекающая S_1 в точке E, S_2 — в точке D, а через N — прямая, пересекающая S_1 в точке A, S_2 — в точке C. Тогда $AE \parallel CD$.

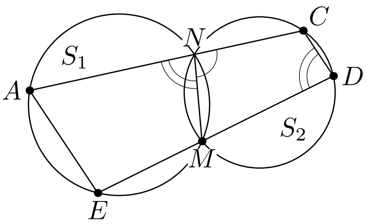


Рис. 114

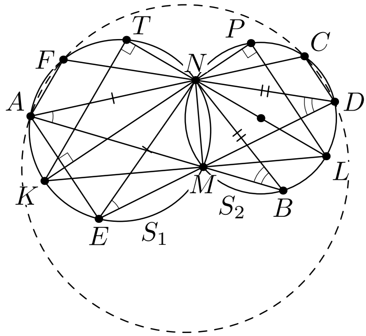


Рис. 115

Доказательство. Мы рассмотрим случай, изображенный на рис. 114, который соответствует условию решаемой нами задачи. В остальных случаях доказательство проводится аналогично. Из вписанных четырехугольников $ANME$ и $NCDM$ получаем, что $\angle AEM = 180^\circ - \angle ANM = \angle MNC = 180^\circ - \angle MDC$, т. е. $\angle AEM + \angle MDC = 180^\circ$, следовательно, $AE \parallel CD$.

Перейдем к решению задачи, обратившись к рис. 115.

Рассмотрим треугольники ANB и END. Они равны, так как $AB = ED$, $\angle NAB = \angle NED$, $\angle NBA = \angle NDE$. Откуда $AN = NE$ и $BN = ND$.

Пусть NK и NL — диаметры S_1 и S_2 соответственно. Тогда $\angle KMN = \angle LMN = 90^\circ$, т. е. точки K, M, L лежат на прямой, перпендикулярной NM. Кроме того, $\overset{\smile}{AK} = \overset{\smile}{KE}$, $\overset{\smile}{BL} = \overset{\smile}{LD}$, следовательно, $\angle AMK = \angle DML$, $\angle AMN = \angle DMN$. Теперь из вписанных четырехугольников $AFNM$ и $DCNM$ получаем, что $\angle AFN = \angle DCN$, т. е.точки A, F, C, D лежат на одной окружности.

Покажем, что центр этой окружности — середина отрезка KL. Пусть прямая KN пересекает S_2 в точке P, а прямая LN пересекает S_1 в точке T. Из того, что $KP \perp AE$ ($AN = NE$) и $AE \parallel CD$ (лемма) следует, что $KP \perp CD$. Но $NP \perp PL$, откуда $PL \parallel CD$. Поэтому серединные перпендикуляры к CD и PL совпадают. Аналогично доказывается, что совпадают серединные перпендикуляры к AF и KT. Осталось заметить, что эти перпендикуляры проходят через середину KL, так как треугольники KPL и KTL прямоугольные.

Замечание. Утверждение задачи остается справедливым, даже если в условии отказаться от уточнения взаимного расположения точек A, E, F, D, B, C.

213. Рассмотрим ту же таблицу, но записанную в обратном порядке. В левом верхнем углу этой таблицы стоит число 199^3. Сложим эту таблицу с исходной. В получившейся таблице в каждой клетке стоит сумма двух кубов $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, но $a + b = 200$ для каждого числа новой таблицы. Значит, удвоенная сумма делится на 200. Вынесем общий множитель 200. В оставшейся таблице все числа встречаются дважды, кроме чисел, стоящих на 100-ой диагонали, но там стоят четные числа, значит, сумма чисел в оставшейся таблице делится на 2.

214. Ответ. Одним взвешиванием.

Сравним массу каких-либо 667 шариков с массой других 667 шариков. Если массы этих двух кучек не равны, то требуемое достигнуто.

Предположим, что указанные массы равны. Тогда масса 666 шариков, не участвовавших во взвешивании, не равна массе любых других 666 шариков.

В самом деле, если в каждой из взвешенных кучек имеется ровно k дюралевых шариков, то среди любых 666 шариков любой из этих кучек число дюралевых равно k или $k-1$. При этом среди 666 шариков, не участвовавших во взвешивании, имеется ровно $1000 - 2k$ дюралевых. Остается заметить, что ни равенство $k = 1000 - 2k$, ни равенство $k - 1 = 1000 - 2k$ не может выполняться ни при каком целом k.

215. ***Первое решение.*** Углы ADC и BDC смежные, поэтому хотя бы один из них не является острым. Пусть $\angle ADC \geqslant 90^\circ$. Из условия задачи следует, что четырехугольник $ACND$ вписанный, причем точки N и D лежат по одну сторону от прямой AC, поэтому $\angle ANC = \angle ADC$. Итак, в треугольнике ACN $\angle ANC \geqslant 90^\circ$, значит, угол C в этом треугольнике острый. Из этого вытекает, что точки O и C лежат по одну сторону от прямой MN, следовательно, $\angle MON = 2\angle C$ как вписанный и центральный в окружности, описанной около $\triangle CMN$ (см. рис. 116; на нем изображен случай, когда точка O лежит вне $\triangle CMN$, в случае $O \in \triangle CMN$ наши рассуждения проходят дословно).

Из вписанных четырехугольников $ADNC$ и $BDMC$ находим, что $\angle ADM = \angle BDN = \angle C$, откуда $\angle MDN = 180^\circ - 2\angle C = 180^\circ - \angle MON$, т. е. четырехугольник $DMON$ — вписанный, и $\angle MDO = \angle MNO$. Из равнобедренного треугольника MON ($MO = ON$ как радиусы) получаем, что $\angle MNO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MON) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle C) = 90^\circ - \angle C$. Итак, $\angle ADO = \angle ADM + \angle MDO = \angle C + (90^\circ - \angle C) = 90^\circ$, т. е. прямая OD перпендикулярна стороне AB.

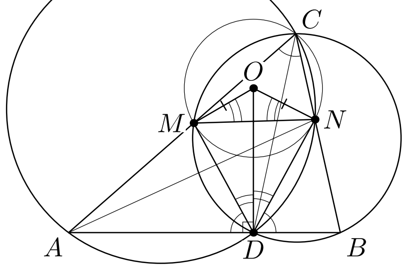


Рис. 116

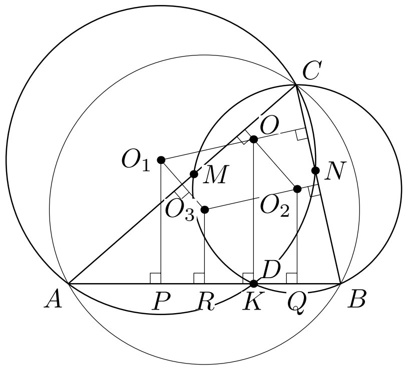


Рис. 117

Второе решение. Пусть m_1, m_2, l_1, l_2 — серединные перпендикуляры к отрезкам CN, CB, CM и CA соответственно, $O = m_1 \cap l_1$, $O_1 = m_1 \cap l_2$, $O_2 = m_2 \cap l_1$, $O_3 = m_2 \cap l_2$ — центры окружностей, описанных около треугольников CMN, ANC (и ADC), BMC (и BDC), ABC (см. рис. 117). Спроектируем точки O, O_1, O_2 и O_3 на AB. Пусть K, P, Q и R — их проекции. Поскольку $OO_1O_3O_2$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{RP}$. Но $\overrightarrow{RP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{QD}$. Отсюда $\overrightarrow{QD} = \overrightarrow{QK}$ и $K = D$, что и требовалось.

Замечание. Из второго решения видно, что аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда данные окружности пересекают не *отрезки* AC и BC, а *прямые* AC и BC.

216. Предположим, что указанного квадрата не существует. Тогда в любом квадрате 2×2 четное число белых клеток, т. е. если верхние клетки квадрата окрашены одинаково, то и нижние клетки окрашены одинаково, а если верхние клетки окрашены по-разному, то и нижние окрашены по-разному.

Рассмотрим верхнюю строку таблицы и строку, стоящую под ней. Из сказанного следует, что эти строки либо окрашены одинаково (если их первые клетки окрашены одинаково), либо окрашены так, что под белой клеткой находится черная, а под черной — белая (если их первые клетки окрашены по-разному). Аналогичное утверждение справедливо для любых двух подряд идущих строк.

Заметим, что если мы перекрасим клетки какой-нибудь строки в противоположный цвет, а затем к полученной строке применим ту же операцию, то мы в результате получим исходную строку. Следовательно, в нашей таблице есть только два типа строк: первая строка и строка, полученная из нее перекрашиванием клеток в противоположный цвет.

Пусть в первой строке a черных клеток, и строк такого типа в нашей таблице b. Тогда число черных клеток в таблице равно

$$ab + (200 - a)(200 - b),$$

а белых клеток —

$$a(200 - b) + b(200 - a).$$

Их разность по условию равна 404, т. е.

$$4ab - 2 \cdot 200(a + b) + 200^2 = 404, \quad \text{откуда}$$
$$(a - 100)(b - 100) = 101.$$

Так как $|a - 100| \leqslant 100$, $|b - 100| \leqslant 100$, а 101 — простое число, то последнее уравнение не имеет решений в натуральных числах.

Получили противоречие.

10 класс

217. Если p — нечетный простой делитель числа n, то $10^n + 1 = (10^{n/p})^p + 1$ делится на $10^{n/p} + 1$. Значит, число $10^n + 1$ может оказаться простым лишь при $n = 2^k$. Но чисел вида $10^{2^k} + 1$ среди рассматриваемых лишь 11: $11, 101, \ldots, 10^{2^{10}} + 1$. Утверждение задачи доказано: $11 < \frac{1}{100} \cdot 2000$.

Замечание. «Подозрительные» числа могут оказаться и составными: $10^4 + 1 = 73 \cdot 137$, $10^8 + 1 = 17 \cdot 5\,882\,353$.

218. За одно взвешивание найти настоящую не удастся, если возникнет неравенство (это легко проверить как в случае, когда на чашках по одной монете, так и в случае, когда их по две).

Укажем, как найти настоящую монету за 2 взвешивания.

Взвесим ① и ②, а потом ③ и ④. Если оба взвешивания дали равенство, то ⑤ — настоящая. Если оба взвешивания дали неравенство, то монета ⑤ тоже настоящая. Если же в одном взвешивании было равенство, а в другом неравенство, то настоящая — каждая из двух равных монет.

219. Ответ. 1 : 2.

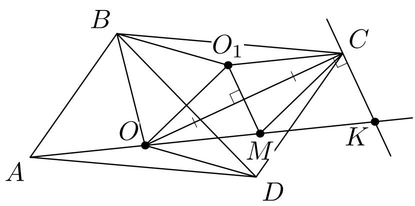


Рис. 118

Для окружности, описанной около $\triangle ABD$, $\angle BOD$ — центральный, поэтому $\angle BOD = 2\angle BAD = 120^\circ \Rightarrow \angle BOD + \angle BCD = 180^\circ$ (см. рис. 118). Следовательно, точки B, C, D, O лежат на одной окружности, и тогда $\angle OCK = \angle OCD + \angle DCK = \angle OBD + \angle DCK = 90^\circ$. Рассмотрим O_1 — центр описанной окружности $\triangle BCD$. Заметим, что треугольник BOO_1 равносторонний, так как $BO = BO_1$ и $\angle O_1BO = 60^\circ$. Пусть M — точка пересечения серединного перпендикуляра к OC с прямой AK.

Тогда $AO = OO_1 = O_1C$, $OM = MC = MK$ (так как треугольник BOO_1 — равносторонний, а OCK — прямоугольный). Точки O и O_1 — центры описанных окружностей симметричных треугольников ABD и CDB, поэтому четырехугольник $AOCO_1$ центральносимметричен. Следовательно, $AOCO_1$ — параллелограмм, тогда $O_1C \parallel OM$, и значит, OO_1CM — ромб, откуда $AO = OM = MK$.

220. Ответ. $n = 2000$.

Во-первых, заметим, что при $n = 2000 = 40 \times 49 + 40$ требуемое разрезание существует (см. рис. 119). Допустим, что найдется квадрат $n \times \times n$, где $n < 2000$, удовлетворяющий условию. Тогда в нем можно выбрать столбец (строку), пересекающий как квадрат 40×40, так и квадрат $49 \times \times 49$; таковым, например, окажется один из выделенных на рис. 120 трех рядов.

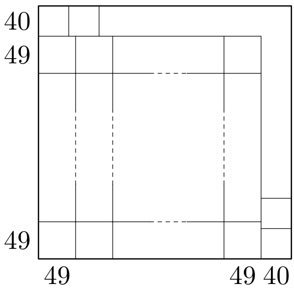


Рис. 119

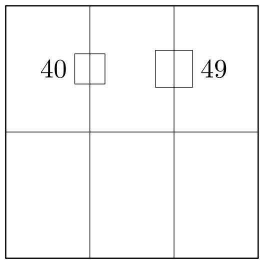


Рис. 120

Пусть в выбранном ряду a квадратов 40×40, и b квадратов 49×49. Тогда получаем $40a + 49b = n$, где $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 1$. Пусть i-ый столбец ($1 \leqslant i \leqslant n$) квадрата $n \times n$ пересекается с a_i квадратами 40×40 и b_i квадратами 49×49. Тогда из равенства $40(a_i - a) + 49(b_i - b) = 0$ следует, что $a_i - a$ делится на 49, $b_i - b$ делится на 40, и если $a_i \neq a$, то $b_i \neq b$. В этом случае, если $b < 40$, то $b_i \geqslant 41$ и $n \geqslant 2009$, а если $b \geqslant 40$, то $n \geqslant 49 \cdot 40 + 40 = 2000$, так как $a \geqslant 1$. Значит, если $n < 2000$, то для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_i = a$, $b_i = b$. Тогда первый столбец пересекается с a квадратами 40×40 и первые 40 столбцов с другими квадратами 40×40 не пересекаются. Аналогично, следующие a квадратов 40×40 целиком содержатся в столбцах 41–80. Тогда следующие квадраты 49×49 располагаются в столбцах 50–98, и т. д. до столбца с номером $40 \cdot 49$. Далее можно отрезать первые $40 \cdot 49$ столбцов и повторить рассуждение с оставшимися. В итоге получаем, что n делится на $40 \cdot 49$, т. е. $n = k \cdot 40 \times 49$, k — целое. Но уравнение $40a + 49b = 40 \cdot 49$ при $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ целых корней не имеет. Значит, $n \geqslant 2 \cdot 40 \cdot 49 > 2000$. Следовательно, наименьшее возможное значение n равно 2000.

221. **Ответ.** Не существует.

Пусть такая функция $f(x)$ существует.

Положив в данном неравенстве $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$, получаем $|f(\pi)+2| < 2$, т. е. $f(\pi) < 0$. В то же время для $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$ получаем $|f(\pi)-2| < 2$, т. е. $f(\pi) > 0$. Противоречие.

222. Докажем, что в рассматриваемой последовательности каждое нечетное число будет больше предыдущего нечетного числа. Пусть число a_n нечетно, т. е. $a_n = 2k+1$. Тогда $a_{n+1} = (2k+1)^2 - 5 = 4k^2 + 4k - 4$, откуда $a_{n+2} = 2k^2 + 2k - 2$ и $a_{n+3} = k^2 + k - 1$. При этом число a_{n+3} нечетно и, поскольку $k > 2$, то $a_{n+3} = k^2 + k - 1 > 2k + 1 = a_n$. Таким образом, мы доказали, что $a_0 < a_3 < a_6 < \ldots < a_{3m}$, поэтому при любом n имеем $a_{3n} \geqslant n$.

223. Обозначим через O точку пересечения перпендикуляров из K на AB, из L на BC, из M на CD. Обозначим также $\angle BAK = \angle DAN = \alpha$, $\angle CBL = \angle ABK = \beta$, $\angle DCM = \angle BCL = \gamma$, $\angle ADN = \angle CDM = \delta$. Очевидно, что $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 2\pi$ как сумма внешних углов $ABCD$.

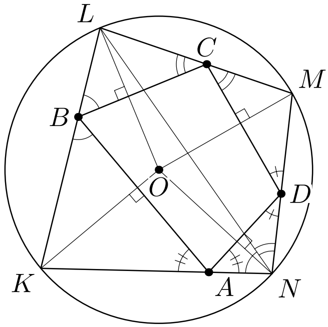


Рис. 121

Из треугольников AKB и CMD получаем тогда, что $\angle AKB + \angle CMD = \pi$, т. е. четырехугольник $KLMN$ вписанный. Далее, так как $LO \perp CB$, то $\angle CLO = \frac{\pi}{2} - \gamma$б и аналогично $\angle CMO = \frac{\pi}{2} - \gamma$. Поэтому $\triangle OLM$ равнобедренный, $LO = OM$, и так же $LO = OK$. Следовательно, O — центр описанной около четырехугольника $KLMN$ окружности.

Углы LOM и LOK — центральные и равны 2γ и 2β соответственно. По теореме о вписанном угле получаем, что $\angle LNM = \gamma$ и $\angle LNK = \beta$. Пусть X — точка пересечения прямых AB и CD (не умаляя общности, считаем, что X лежит на луче BA). Точка L равноудалена от AB, BC и CD и лежит по ту же сторону от AB и CD, что и $ABCD$; аналогично, N равноудалена от AB, AD и CD. Значит, прямая LN — биссектриса угла, образованного CD и AB или параллельна CD и AB в случае $CD \parallel AB$. В любом случае LN образует равные углы с AB и CD. Следовательно, $\angle LNM - \angle CDM = \angle LNK - \angle BAK$, т. е. $\gamma - \delta = \beta - \alpha$, откуда $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \frac{\pi}{2}$. Наконец, $\angle BAD + \angle BCD = 2\pi - 2(a + \gamma) = \pi$. Следовательно, $ABCD$ — вписанный, что и требовалось доказать.

224. Построим граф G с вершинами в городах, ребра которого соответствуют дорогам. Докажем, что вершины этого графа можно покрасить в

$2N + 2$ цвета правильным образом (т. е. так, чтобы никакие две вершины одинакового цвета не были соединены ребром). Это равносильно утверждению задачи.

Выберем по одному ребру в каждом нечетном цикле графа G. Назовем эти ребра плохими, а остальные — хорошими. Удалив из графа G плохие ребра, мы получим граф, в котором нет циклов нечетной длины.

Лемма. *Вершины графа без нечетных циклов можно раскрасить правильным образом в два цвета.*

Доказательство. Достаточно доказать лемму для связного графа. Выберем вершину A и припишем каждой вершине число, равное минимальной длине пути до нее из A. Тогда два одинаковых числа не стоят рядом (иначе есть нечетный цикл). Раскрасив все четные вершины в один цвет, а нечетные — в другой, получим требуемое.

Таким образом, вершины графа G можно покрасить в два цвета (пусть это цвета a и b) так, что никакие две вершины одного цвета не были соединены хорошим ребром.

Поскольку через каждую вершину графа G проходит не более N нечетных циклов, а в каждом из них мы отметили одно ребро, то из каждой вершины выходит не более N плохих ребер. Следовательно, мы можем раскрасить вершины графа G в $N + 1$ цвет так, чтобы никакие две из них не были соединены в графе G плохим ребром. (Будем красить вершины по очереди. Добавляя очередную вершину A, заметим, что среди покрашенных ранее она соединена плохими ребрами не более, чем с N вершинами, следовательно, мы можем покрасить вершину A в цвет, отличный от цветов ранее покрашенных вершин, соединенных с A плохими ребрами.)

Итак, покрасим вершины графа G в цвета $1, 2, 3, \ldots, (N+1)$ так, чтобы никакие две из них не были соединены плохим ребром. После этого у всех вершин изменим оттенок на светлый, если в первой раскраске она была покрашена в цвет a, и на темный, если она была покрашена в цвет b. В полученной раскраске используется $2N + 2$ цвета (с учетом оттенков) и никакие две вершины одного цвета не соединены ребром.

11 класс

225. Идея построения искомого примера видна из приведенного рисунка: в случае $a_1 = -7$, $a_2 = -6$, $\ldots$, $a_{10} = 2$ графики функций $y = (x - a_1)\ldots(x - a_{10})$ и $y = (x + a_1)\ldots(x + a_{10})$ пересекаются ровно в 5 точках: $x = 0, \pm1, \pm2$. Ясно, что на промежутке $[-2; 2]$ других корней нет. Вне этого отрезка получаем:

$$(x + 7)(x + 6)\ldots(x + 3) = (x - 7)(x - 6)\ldots(x - 3),$$

т. е.

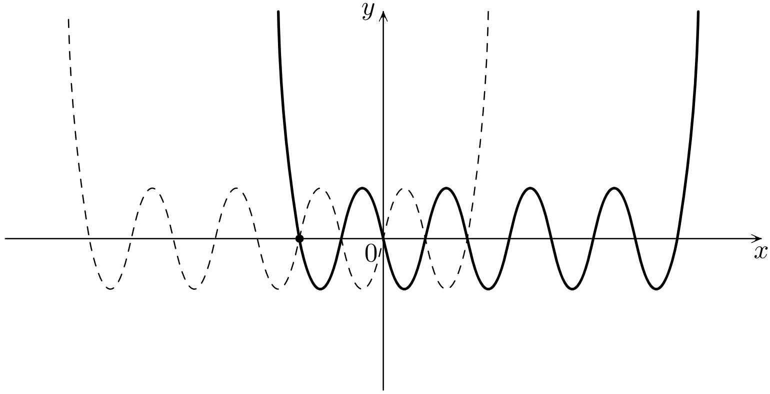


Рис. 122

$$2\Big[(7+6+5+4+3)x^4+(7\cdot 6\cdot 5+7\cdot 6\cdot 4+\ldots+5\cdot 4\cdot 3)x^2+ \\ +7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\Big]=0$$

— биквадратное уравнение, не имеющее корней.

226. Ответ. Тремя.

Впишем в цилиндр правильный треугольник с вершинами в серединах образующих и рассмотрим три единичных шара с центрами в серединах его сторон. Возьмем основание цилиндра. С ним наши шары пересекаются по трем кругам радиуса $\sqrt{3}/2$ с центрами в серединах сторон вписанного правильного треугольника. Легко проверить, что эти три круга целиком покрывают основание. Значит, цилиндр целиком покрыт тремя цилиндрами высоты 1, построенными на этих кругах, а, следовательно, и нашими шарами, содержащими эти цилиндры.

Чтобы показать, что двумя шарами покрыть цилиндр не удастся, достаточно заметить, что если центр шара не совпадает с центром основания, то круг, по которому шар пересекается с плоскостью основания, пересекается с границей основания по дуге, меньшей 180°, а двумя такими дугами окружность не покрыть. Если же центры двух шаров совпадают с центрами оснований, то непокрытой остается боковая поверхность цилиндра.

227. Докажем индукцией по n, что при любом n сумма $S_n=a_1+\ldots+a_n$ представима в виде $\frac{1}{2}\,b_n(b_n+1)$, где b_n — целое.

База индукции: $a_1^3=a_1^2 \Rightarrow S_1=a_1=0$ или 1, т. е. $S_1=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1$ или $S_1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$.

Индуктивный переход: $S_{n+1}^2 = (a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1})^2 = (S_n + a_{n+1})^2 = S_n^2 + 2S_n a_{n+1} + a_{n+1}^2$, с другой стороны $(a_1 + \ldots + a_{n+1})^2 = a_1^3 + \ldots + a_n^3 + a_{n+1}^3 = (a_1 + \ldots + a_n)^2 + a_{n+1}^3 = S_n^2 + a_{n+1}^3$. Отсюда $2S_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = a_{n+1}^3$, т. е. либо $a_{n+1} = 0$ и тогда $S_{n+1} = S_n = \frac{1}{2}\, b_n(b_n + 1)$, либо $2S_n + a_{n+1} = a_{n+1}^2 \Rightarrow b_n(b_n + 1) + a_{n+1} - a_{n+1}^2 = 0$, т. е. $a_{n+1} = b_n + 1$ или $a_{n+1} = -b_n$. В этих случаях $S_{n+1} = \frac{1}{2}\, b_n(b_n + 1) + b_n + 1 = \frac{1}{2}\,(b_n + 1)(b_n + 2)$ или $S_{n+1} = \frac{1}{2}\, b_n(b_n + 1) - b_n = \frac{1}{2}\,(b_n - 1)b_n$.

Итак, при каждом n сумма S_n — целая, что равносильно условию задачи.

228. См. решение задачи 220.

229. Возведем доказываемое неравенство в квадрат, получим

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{1+y^2} \leqslant \frac{4}{1+xy}\,.$$

Сначала покажем, что

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leqslant \frac{2}{1+xy}\,.$$

Действительно, после приведения к общему знаменателю и раскрытия скобок имеем

$$2(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2) - (1 + y^2 + xy + xy^3) - (1 + x^2 + xy + x^3y) = \\ = (1 - xy)(x - y)^2 \geqslant 0.$$

Далее по неравенству о средних для двух чисел получим

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leqslant \frac{2}{1+xy}\,.$$

Для завершения доказательства осталось сложить полученные неравенства.

230. Пусть L и M — точки, в которых вписанная окружность касается сторон AB и BC (см. рис. 123). Тогда $AK = AL$, $BL = BM$, $CM = CK$ и из равенства треугольников OKB_1, OKB_2, OLE, OMF следует $B_1K = B_2K = EL = FM$, поэтому $BE = BF$, $AE = AB_2$, $CF = CB_1$. Пусть P_1 и P_2 соответственно точки, в которых отрезки B_1F и B_2E пересекают BK. Тогда по теореме Менелая:

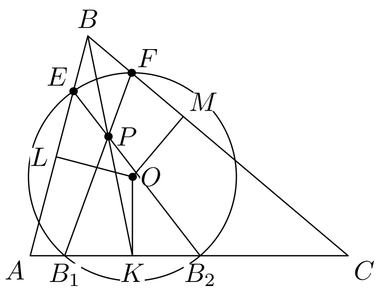


Рис. 123

$\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BP_2}{KP_2}\times\frac{KB_2}{AB_2} = 1$ и $\frac{CF}{BF}\cdot\frac{BP_1}{KP_1}\cdot\frac{KB_1}{CB_1} = 1$, следовательно $\frac{BP_2}{KP_2} = \frac{BE\cdot AB_2}{AE\cdot KB_2} = \frac{BE}{KB_2}$ и $\frac{BP_1}{KP_1} = \frac{BF\cdot CB_1}{CF\cdot KB_1} = \frac{BF}{KB_1}$.

Отсюда $\frac{BP_2}{KP_2} = \frac{BP_1}{KP_1}$, т. е. $P_1 = P_2 = P$. Утверждение доказано.

231. Ответ. При $N \geqslant 8$.

Если $k \geqslant 3$ — наибольшее черное число, то можно перекрасить тройку чисел $(k-2, k-1, k)$ и далее действовать аналогично до тех пор, пока все числа, кроме, быть может, 1 и 2, не станут белыми.

Если число 2 после этого будет черным, то при $N \geqslant 8$ перекрашиванием троек $(2, 5, 8)$, $(5, 6, 7)$ и $(6, 7, 8)$ его можно сделать белым (цвет остальных чисел не изменится); затем, если нужно, можно изменить и цвет числа 1 (перекрасив тройки $(1, 4, 7)$, $(4, 5, 6)$ и $(5, 6, 7)$).

Случаи $N = 1$ и $N = 2$ очевидны, а для случаев $3 \leqslant N \leqslant 7$ заметим, что четность числа черных чисел, принадлежащих множеству $\{2, 3, 5, 6\}$, при перекрашиваниях не изменяется. Поэтому, если первоначально число 2 — черное, а остальные — белые, то все числа белыми сделать нельзя.

232. Рассмотрим граф с вершинами в городах, ребра которого соответствуют дорогам. Из условия следует, что в этом графе через каждую вершину проходит не более N нечетных циклов.

Докажем индукцией по количеству вершин, что вершины такого графа можно покрасить в $N+2$ цвета так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром. База индукции для графа из одной вершины очевидна, докажем индуктивный переход. Пусть утверждение верно для графа, в котором менее k вершин. Рассмотрим граф G с k вершинами, в котором через каждую вершину проходит не более N нечетных циклов. Удалив из этого графа любую вершину A и все выходящие из нее ребра, мы получим граф G' с $k-1$ вершиной. Очевидно, через каждую вершину графа G' проходит не более N циклов нечетной длины. Тогда покрасим вершины графа G' в $N+2$ цвета таким образом, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром (это можно сделать по индуктивному предположению).

Для цвета k (где $2 \leqslant k \leqslant (N+2)$) рассмотрим граф G'_{1k} из всех вершин графа G', покрашенных в цвета 1 и k, и всех проведенных между ними ребер графа G. Поскольку никакие две вершины одинакового цвета в графе G'_{1k} не соединены ребром, то в этом графе нет циклов нечетной длины. Построим граф G_{1k}, добавив к графу G'_{1k} вершину A и все выходящие из нее к вершинам G'_{1k} ребра.

Если для некоторого k в графе G_{1k} через вершину A не проходит ни один цикл нечетной длины, то циклов нечетной длины в этом графе нет. В этом случае несложно доказать (см. лемму к задаче 224), что мы можем так перекрасить вершины графа G_{1k} (используя лишь цвета 1 и k), что все ребра в этом графе будут соединять пары вершин разных цветов. Так как все остальные вершины графа G покрашены в цвета, отличные от 1 и k, то и во всем графе G никакие две вершины одинакового цвета не соединены ребром.

Остается рассмотреть случай, когда для каждого k (где $2 \leqslant k \leqslant N+2$) в графе G_{1k} через вершину A проходит хотя бы один цикл нечетной длины. Заметим, что такой нечетный цикл проходит только по вершинам цветов 1 и k, причем среди них есть хотя бы одна вершина цвета k. Следовательно, через вершину A проходит хотя бы $N+1$ цикл нечетной длины, что противоречит условию. Следовательно, этот случай невозможен, и требуемая раскраска получена.

2000–2001 г.

8 класс

233. Ответ. Нельзя.

Пусть число l получается из числа n изменением на k процентов (n, l — натуральные, k — целое). Тогда

$$l = n + \frac{n \cdot k}{100} = \frac{100n + nk}{100} = \frac{n(100+k)}{100}.$$

Отсюда следует, что если n и 100 взаимно просты, то l делится на n. Поэтому если $n = 7$, то следующее число l должно делиться на 7, но больше среди чисел $1, 2, \ldots, 10$ таких нет. Значит 7 может быть только последним. Аналогично, 9 может быть только последним. Но на последнем месте может быть только одно число, поэтому требуемая расстановка невозможна. Противоречие.

234. Ответ. 14.

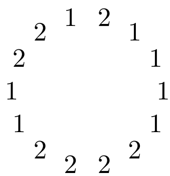


Рис. 124

Заметим, что изображения чисел 1111, 2112 и 2122 не могут иметь общих единиц, а изображения чисел 2222, 1221 и 1211 — общих двоек. Следовательно, если все эти числа встречаются среди изображенных, то по кругу должны располагаться не менее 14 цифр — 7 единиц и 7 двоек. Равенство $N = 14$ возможно, и соответствующий пример расположения цифр показан на рис. 124.

235. Предположим противное. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$, удовлетворяющий условиям задачи. Не умаляя общности, можно считать, что угол A — наибольший, а угол D — наименьший (любую пару несмежных вершин можно перевести в эту переобозначениями).

Заметим, что $\angle EAC = \angle A - \angle BAC = \angle A - \angle ACB > \angle C - \angle BCA = \angle ACD$.

Предположим, что лучи AE и CD пересекаются в точке X. Тогда в треугольнике ACX сторона CX больше стороны AX, так как против нее лежит больший угол. Тогда $DX = CX - CD = CX - AE > AX - AE = EX$, поэтому $180^\circ - \angle E > 180^\circ - \angle D$, что противоречит минимальности угла D.

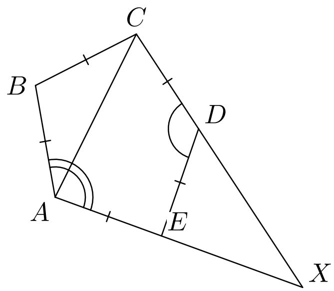


Рис. 125

Случай, когда прямые AE и CD пересекаются с другой стороны от ED, аналогичен. В случае $AE \parallel CD$ легко прийти к противоречию следующим образом. Заметим, что $ACDE$ — ромб, $\triangle ABC$ — равносторонний, и тогда $\angle D < \angle E \Rightarrow \angle A = 60^\circ + D < \angle C = 60^\circ + \angle E$.

236. Ответ. При любых n и m победит первый игрок.

Укажем выигрышную стратегию для первого игрока. Можно считать, что $m \leqslant n$. Если $m = 2$, то первый своим ходом красит всю бо́льшую сторону уголка, оставляя второму одну клетку, и выигрывает. Далее считаем $n \geqslant m \geqslant 3$. В этом случае первый красит на большей стороне $n - m + 1$ клетку, начиная с угловой, после чего остается две одинаковых полоски по $m - 1$ клетке. Далее первый игрок симметрично повторяет в другой полоске ходы второго, сделанные в одной из полосок, до тех пор, пока после хода второго не останется единственного незакрашенного прямоугольника из более чем одной клетки. Затем, если число незакрашенных одноклеточных прямоугольников к этому моменту нечетно, то первый красит неодноклеточный прямоугольник целиком, а если четно, то оставляет в нем одну незакрашенную клетку. Таким образом, после его хода останется нечетное количество некрашенных прямоугольников, каждый из которых одноклеточный, поэтому последний ход вынужден будет сделать второй игрок, в результате чего и проиграет.

237. Пусть $x_0 = -\frac{f}{e}$. Тогда

$$|ex_0 + f| = \left|e \cdot \left(-\frac{f}{e}\right) + f\right| = |-f + f| = 0.$$

Модуль любого числа неотрицателен, поэтому

$$0 = |ex_0 + f| = |ax_0 + b| + |cx_0 + d| \geqslant 0.$$

Значит $|ax_0 + b| = |cx_0 + d| = 0$. Откуда $ax_0 + b = 0$ и $cx_0 + d = 0$, следовательно $x_0 = -\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$, поэтому $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ или $ad = bc$.

238. Ответ. Обязательно.

Допустим, что нашлось хорошее число $n = \overline{c_1 \ldots c_k 8}$, где $c_1, \ldots, c_k$ — цифры, причем $c_k \neq 9$. Тогда $n + 1 = \overline{c_1 \ldots c_k 9}$, $n + 3 = \overline{c_1 \ldots c_k' 1}$, где $c_k' = c_k + 1$.

Числа $n+1$ и $n+3$ нечетны, а суммы их цифр равны $c_1+c_2+\ldots+c_k+$ $+9$ и $c_1+c_2+\ldots+c_k+2$ соответственно. Эти суммы отличаются на 7, и потому одна из них четна. Но четное число не может быть делителем нечетного. Противоречие.

239. Ответ. Нельзя.

Предположим, что существует раскраска таблицы 5×5, удовлетворяющая условию. Рассмотрим эту таблицу (см. рис. 126). По принципу Дирихле в каждом столбце найдется цвет, в который покрашены по крайней мере две клетки этого столбца. Назовем такой цвет *преобладающим* для данного столбца (возможно, у какого-то столбца будет два преобладающих цвета). Аналогично, какой то цвет (назовем его «**1**») будет преобладающим для двух столбцов. Поскольку от перестановки строк и столбцов ничего не зависит, будем считать, что это столбцы a и b. Также можем считать, что в первом столбце цветом **1** покрашены клетки $a4$ и $a5$. Тогда клетки $b4$ и $b5$ должны быть покрашены какими-то двумя различными цветами, отличными от цвета **1**. Пусть они покрашены цветами **2** и **3**, а поскольку цвет **1** — преобладающий для столбца b, можем считать, что клетки $b2$ и $b3$ покрашены цветом **1**. Рассмотрим клетку $a3$. Выбрав 3 и 4 строку и столбцы a и b, мы получим, что клетка $a3$ не может быть покрашенной цветами **1** и **3**. Выбрав 3 и 5 строку и столбцы a и b, мы получим, что клетка $a3$ не может быть покрашенной цветами **1** и **2**. То есть клетка $a3$ покрашена цветом **4**. Но из аналогичных рассуждений мы получаем, что и клетка $a2$ покрашена цветом **4**. То есть квадрат, состоящий из клеток $a3$, $a2$, $b3$ и $b2$, покрашен в два цвета — противоречие.

5	**1**	**2**			
4	**1**	**3**			
3	**4**	**1**			
2	**4**	**1**			
1					
	a	b	c	d	e

Рис. 126

240. Пусть AC — бóльшая сторона $\triangle ABC$, A_1C_1 — средняя линия, параллельная AC, а M — середина A_1C_1. Так как $\angle A$ и $\angle C$ — острые, то M проектируется внутрь отрезка AC, пусть B_1 — эта проекция (см. рис. 127).

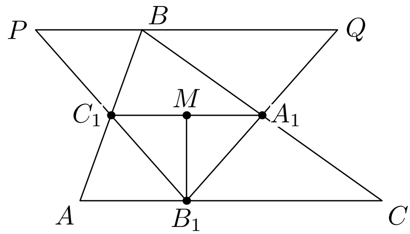


Рис. 127

Проведем 2 разреза B_1C_1 и B_1A_1. Так как B_1M — медиана и высота $\triangle A_1B_1C_1$, то $C_1B_1 = A_1B_1$. Пусть точка Q симметрична B_1 относительно A_1, точка P симметрична B_1 относительно C_1. Тогда $\triangle BQA_1 =$ $=\triangle CB_1A_1$, $\triangle AC_1B_1 = \triangle BC_1P$. Равные отрезки B_1C_1 и B_1A_1 — половины сторон $\triangle PB_1Q$, значит, он равнобедренный.

9 класс

241. См. решение задачи 233.

242. Ответ. Верно.

Первое решение. Вначале Коля будет изменять коэффициент b до тех пор, пока b не попадет в промежуток $[-2, 0]$. Петя изменениями коэффициентов на 1 не сможет помешать ему сделать это.

Теперь если

1) $b = 0$, то Коля выиграл (трехчлен $f = x^2 + ax$ имеет целые корни);

2) $b = -1$, то Петя, чтобы не проиграть, должен получить $b = -2$, так как если он оставит $b = -1$, то следующим ходом Коля сделает $b = 0$. Мы перешли к следующему случаю.

3) Итак, получен коэффициент $b = -2$, и Петя не может изменять его, так как коэффициент $b = -1$ или $b = -3$ Коля своим ходом сразу превратит в 0.

Далее Коля будет изменять на 3 коэффициент a до тех пор, пока тот не попадет в промежуток $[-1, 1]$.

Если $a = \pm 1$, то он выиграл: трехчлен $f = x^2 \pm x - 2$ имеет целые корни. Если же $a = 0$, то следующим ходом уже Петя получит такой трехчлен.

Второе решение. Покажем, что Коля всегда может получить трехчлен, один из корней которого равен 2. Тогда из теоремы Виета ($x_1 + x_2 = -a$) будет следовать, что и второй корень — целый. Для этого ему нужно добиться равенства: $f(2) = 4 + 2a + b = 0$, т. е. $2a + b = -4$. Но Петя может изменять выражение $A = 2a + b$ на ± 2 (изменив a), либо на ± 1, изменив b, а Коля — на ± 2, ± 6, ± 1, ± 3. Изменяя b на ± 3, Коля может получить $A \in [-3, -5]$. Из $A = -3$ Петя получит $A = -5$, -1 , -4 (проигрыш), -2 и следующим ходом Коля получит $A = -4$. Из $A = -5$ Петя получит $A = -3$, -7, -4 (проигрыш), -6 и Коля получает $A = -4$.

243. Пусть P — точка пересечения прямых AN и DC (см. рис. 128). Тогда утверждение задачи равносильно следующему равенству: $\frac{PQ}{QA} = \frac{PD}{DA}$. Пусть $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $AM = CN = c$ и $CP = x$. Тогда из подобия треугольников NCP и ADP следует $\frac{x}{x+a} = \frac{c}{b}$, откуда $x = \frac{ac}{b-c}$ и $PD = x + a = \frac{ab}{b-c}$. Далее, из подобия треугольников AMQ и PCQ следует $\frac{PQ}{QA} = \frac{PC}{AM} = \frac{x}{c}$. Утверждение задачи следует из равенства

$$\frac{PQ}{QA} = \frac{x}{c} = \frac{a}{b-c} = \left(\frac{ab}{b-c}\right) : b = \frac{PD}{DA}\,.$$

244. Ответ. 25.

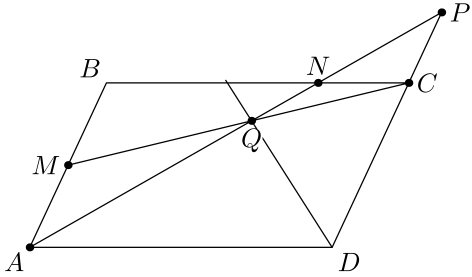


Рис. 128

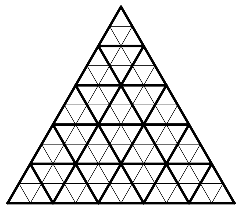


Рис. 129

Покажем, что стреляющий может добиться 25 «призовых» мишеней. Рассмотрим разбиение мишени на 25 треугольных кусков 2×2, т. е. состоящие из четырех треугольников (см. рис. 129). Тогда, стреляя в центр каждого из них до тех пор, пока в одном из четырех треугольников куска не накопится пять попаданий, он получит ровно 25 «призовых» мишеней.

Покажем, что стрелок не может гарантировать себе большего количества. Действительно, при стрельбе в произвольный треугольничек какого-то куска стрелок может всегда попадать в центральный треугольничек этого куска. Тогда *призовых* мишеней будет не больше 25, так как в остальные он не попадет ни разу.

245. ***Первое решение.*** Рассмотрим в нашем пятиугольнике $ABCDE$ 5 треугольников: ABC, BCD, CDE, DEA, EAB (см. рис. 130). Тогда любая точка лежит не более, чем в двух треугольниках, следовательно есть треугольник, в котором нет наших точек. Отрезаем его и получаем разрез, удовлетворяющий условию.

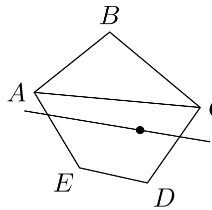


Рис. 130

Второе решение. Проведем прямую через эти точки. В одной из полуплоскостей лежит три вершины пятиугольника (из которых хотя бы две не лежат на этой прямой). Отрезаем этот треугольник и получаем нужное разбиение.

246. **Ответ.** Существует. Например, $5 \cdot 2^{2000}$ или $2 \cdot 5^{2000}$.

Покажем, что первое число подходит. Для этого выпишем все его делители, кратные пяти:

$$5,\ 5 \cdot 2,\ 5 \cdot 2^2,\ 5 \cdot 2^3,\ \ldots\ 5 \cdot 2^{2000}.$$

Их произведение будет делиться на 5 в 2001-й степени и не будет делиться на 5 в 2002 степени. Следовательно, произведение всех делителей числа $5 \cdot 2^{2000}$ будет кратно 10 в 2001-й степени и не кратно $5 \cdot 10^{2001}$. Поэтому оно оканчивается ровно на 2001 ноль.

247. Пусть $\angle OAK = \alpha$. Из параллельности $LK \parallel OA$ следует: $\angle LKM = \angle OAK = \alpha$. По теореме об угле между касательной и хордой: $\angle KBA = \angle OAK = \alpha$. Так как углы LKM и LBM вписаны в окружность ω и опираются на одну дугу, то $\angle LBM = \angle LKM = \alpha$.

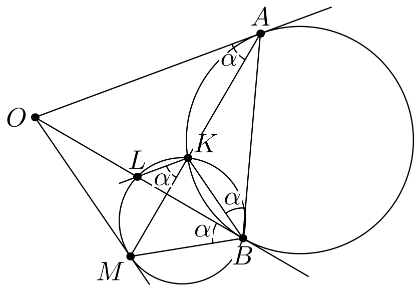


Рис. 131

Из равенства углов $\angle OAM = \angle OBM = \alpha$ следует, что четырехугольник $OABM$ — вписанный. Отсюда $\angle OMA = \angle OBA$. Но $\angle OBA = \angle KBM$, так как $\angle KBA = \angle OBM = \alpha$. Значит, $\angle OMA = \angle KBM$, откуда по обратной теореме о касательной и хорде получаем, что OM касается окружности ω в точке M.

248. Рассмотрим отдельно числа из нечетного и из четного числа знаков. Пусть $x_1^2, x_2^2, \ldots$ — встретившиеся на доске квадраты из четного количества знаков, и в их записи содержится соответственно $2n_1, 2n_2, \ldots$ ($n_1 < n_2 < \ldots$) цифр. Аналогично, пусть $y_1^2, y_2^2, \ldots$ — встретившиеся на доске квадраты из нечетного количества знаков, и в их записи содержится соответственно $2m_1 - 1, 2m_2 - 1, \ldots$ ($m_1 < m_2 < \ldots$) цифр.

Число x_k^2 содержит n_k цифр и не оканчивается на 0, поэтому $x_k^2 > 10^{2n_k - 1}$, откуда $x_k > 10^{n_k - 1}$. Число x_{k+1}^2 получается из x_k приписыванием некоторого четного количества — обозначим его $2a$ — ненулевых цифр. Поэтому $10^{2a}x_k^2 < x_{k+1}^2 < 10^{2a}x_k^2 + 10^{2a}$. Из левого неравенства получаем $10^a x_k + 1 \leqslant x_{k+1}$, следовательно, $10^{2a}x_k^2 + 2\cdot 10^a x_k + 1 \leqslant x_{k+1}^2 < 10^{2a}x_k^2 + 10^{2a}$, откуда $2\cdot 10^a x_k + 1 < 10^{2a}$, т. е. $x_k < 10^a$. Из этого неравенства следует, что x_k содержит не более a цифр, т. е. $n_k \leqslant a$, тогда из неравенства $10^a x_k + 1 \leqslant x_{k+1}$ следует $a + n_k \leqslant n_{k+1}$, откуда $2n_k \leqslant n_{k+1}$.

Аналогичное рассуждение применимо к последовательности $\{y_k\}$: y_{k+1}^2 получается приписыванием к y_k^2 $2a$ цифр, $y_k < 10^a$, и $a \geqslant m_k$, т. е. $m_{k+1} \geqslant 2m_k$. Теперь заметим, что в каждой из последовательностей m_k и n_k меньше 50 членов (так как $m_1, n_1 \geqslant 1$ и m_{50} и n_{50} должны быть не меньше, чем $2^{50} > 1000000$).

Итак, всего квадратов на доске окажется не более 100.

10 класс

249. Из графика квадратного трехчлена видим, что $f(a) = f(b) \Longleftrightarrow a = b$, либо a и b расположены на числовой оси симметрично относительно точки x_0 — абсциссы вершины параболы, т.е при $a + b = 2x_0$. Но для многоугольника $a_1 < a_2 + \ldots + a_n$, поэтому $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2x_0$. Тогда $A + B = 2x_0$, значит, $f(A) = f(B)$.

250. Пусть H — гомотетия с центром в точке K и коэффициентом $k = -\frac{CK}{AK}$. Тогда $H(A) = C$, $H(AD) = l \parallel AD$, так как при гомотетии прямая переходит в параллельную прямую. Отсюда $H(AD) = CB$. Аналогично, $H(AB) = CD$. Следовательно, $H(s_1)$ — окружность, вписанная в угол BCD и проходящая через точку K ($H(K) = K$). Таким образом, $H(s_1) = s_2$ и, значит, s_1 и s_2 касаются в точке K (см. рис. 132). Прямая, проходящая через точку K перпендикулярно линии центров этих окружностей, является их общей касательной.

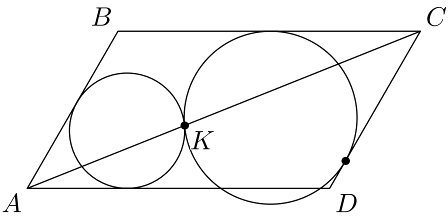


Рис. 132

Пусть другой точке K' диагонали AC соответствует другая пара окружностей — s_1' и s_2'. Окружности s_1 и s_1' вписаны в угол BAD, следовательно, гомотетичны с центром в точке A, а, значит, их касательные, проведенные в точках K и K' соответственно, параллельны. Отсюда следует утверждение задачи.

251. **Ответ.** Две раскраски: а) все числа одного цвета; б) числа $3k - 2$, $k \in \mathbb{Z}$ — цвета A, числа $3k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$ — цвета B, числа $3k$, $k \in \mathbb{Z}$ — цвета C.

Положим $c = 2000(2d + 2)$. Тогда из равенства $c = 2000((d + 1) + (d + 1))$, следует, что числа $d + 1$ и c одного цвета ($a = d + 1$, $b = d + 1$, $c = 2000(a + b)$).

С другой стороны, $c = 2000(d + (d + 2))$, значит, числа d, $d + 2$ и $d + 1$ — одного цвета, или трех разных цветов ($a = d$, $b = d + 2$, а $d + 1$ и c — одного цвета). Значит, любые три последовательных числа либо одного цвета, либо трех разных. Если числа 1, 2, 3 — одного цвета, то рассматривая последовательно тройки 2, 3, 4; 3, 4, 5 и т. д., получаем, что все числа — одного цвета. Если 1 — цвета A, 2 — цвета B, 3 — цвета C, то из тройки 2, 3, 4 получаем, что 4 — цвета A; из тройки 3, 4, 5: что 5 — цвета B, и т. д.

Пусть $a = 3k_1 + r_1$, $b = 3k_2 + r_2$, $c = 3k_3 + r_3$ (r_1, r_2, r_3 — остатки чисел a, b, c при делении на 3). Равенство $2000(a + b) = 2000(3k_1 + r_1 + 3k_2 + r_2) = 3M - (r_1 + r_2) = c = 3k_3 + r_3$ возможно только в случае, когда $r_1 + r_2 + r_3$ делится на 3, т. е. либо когда остатки r_1, r_2, r_3 равны, либо когда они попарно различны. Отсюда вытекает, что найденные раскраски удовлетворяют условию.

252. **Ответ.** 150.

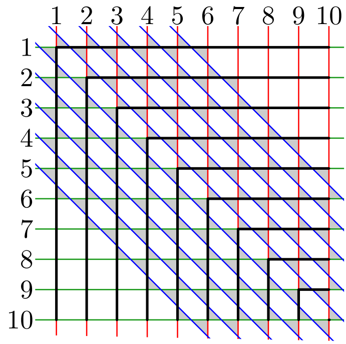


Рис. 133

Рассмотрим 100 узлов — точек пересечения прямых первого и второго направлений. Разобьем их на 10 «уголков»: первый уголок — узлы, лежащие на первых прямых первого и второго направления. Второй — лежащие на вторых прямых (кроме точек, лежащих в первом уголке) и т. д. (на рис. 133 уголки выделены жирными линиями). Треугольники со сторонами, параллельными трем фиксированным направлениям, могут иметь две ориентации, причем каждый из наших 100 узлов может быть вершиной не более одного треугольника каждой ориентации. Поэтому, 10 прямых третьего направления образуют не более $2 \cdot 25$ треугольников с последними пятью «уголками», так как эти пять «уголков» содержат всего 25 узлов. Заметим далее, что каждая из прямых третьего направления образует не более одного треугольника каждой ориентации с узлами, принадлежащими одному «уголку». Поэтому треугольников, имеющих вершины в узлах остальных пяти «уголков», будет не больше $10 \cdot 2 \cdot 5$. Итого, треугольников не более $100 + 50 = 150$. Пример со 150 треугольниками приведен на рис. 133.

253. Вычтем из первого трехчлена второй. Получим, что они оба имеют общий корень с трехчленом

$$ax^2 + bx + c - ((c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)) = (a+b-c)(x^2 + x - 1).$$

Следовательно, либо $a + b - c = 0$, либо их общий корень совпадает с одним из корней трехчлена $x^2 + x - 1$. В первом случае имеем $a + b + 2c = 3c \,\vdots\, 3$. Во втором случае получаем, что если x_0 — общий корень трехчленов $ax^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + x - 1 = 0$, то $ax_0^2 + bx_0 + c + c(x_0^2 + x_0 - 1) = 0$, откуда $((a+c)x_0 + (b+c))x_0 = 0$. Число x_0 — иррационально, поэтому полученное равенство возможно только если $a + c = 0$ и $b + c = 0$. Получаем, что $a = b = -c$ и, следовательно, $a + b + 2c = 0$.

254. Пусть A_1 — основание биссектрисы угла A. Так как точки B и B_1 симметричны относительно AA_1, то $\angle ABA_1 = \angle AB_1A_1 = \angle AQ_1C$, где Q_1 — точка пересечения AA_1 с описанной окружностью (см. рис. 134). Значит, точки B_1, C, A, Q_1 лежат на одной окружности, т. е. $Q = Q_1$.

Отсюда следует, что Q — середина дуги BC, т. е. $QB = QC$, кроме того, точки B и B_1 симметричны относительно AQ, значит, $QB_1 = QB = QC$, т. е. $\triangle CQB_1$ — равнобедренный (см. рис. 135), и касательная к его описанной окружности, проведенная в вершине, параллельна основанию.

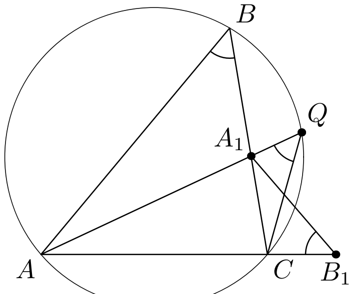


Рис. 134

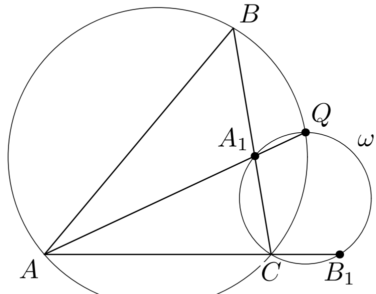


Рис. 135

255. Индукцией по n докажем утверждение задачи для любого ладейно связного множества X, состоящего из $2n$ клеток. База ($n = 1$) очевидна.

Клетками далее называем клетки множества X. Будем называть пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце, «доминошками». Удалим какую-нибудь доминошку, состоящую, для определенности, из клеток A и B, лежащих в одном столбце, получим множество клеток X'. Две клетки назовем связанными в X', если от одной из них до другой можно дойти ладьей по клеткам из X'. Покажем, что X' распадается не более чем на три ладейно связных подмножества M, N, L, первое из которых остается связным при добавлении клетки A, второе — при добавлении клетки B, а третье — при добавлении любой из этих двух клеток (возможно, некоторые из множеств M, N, L пусты). Действительно, в множество M включим все клетки, связанные в X' хотя бы с одной клеткой, лежащей на одной горизонтали с A; в множество N — связанные в X' хотя бы с одной клеткой, лежащей на одной горизонтали с B; в множество L — связанные в X' хотя бы с одной клеткой, лежащей на вертикали AB. Заметим, что если какие-то два из множеств M, N, L пересеклись, то они совпадают; в таком случае будем считать одно из них пустым.

Если все три множества M, N, L состоят из четного числа клеток, удалим доминошку AB и применим предположение индукции к этим множествам. Если, скажем, в множествах M и N количества клеток нечетны, то эти множества непусты и количество клеток в каждом из них не превосходит $2n - 3$, а количество клеток в множестве L четно и не превосходит $2n - 2$. Тогда можно применить предположение индукции к множествам $M \cup \{A\}$, $N \cup \{B\}$ и L. Остальные случаи четности разбираются аналогично.

256. **Ответ.** 2001.

Докажем, что числа на окружности не превосходят 2001.

Лемма 1. *Пусть x и y — натуральные числа. Если $xy = x + y$, то $x = y = 2$, а если $xy < x + y$, то хотя бы одно из чисел x, y равно* 1.

Для доказательства достаточно переписать неравенство $xy \leqslant x + y$ в виде $(x-1)(y-1) \leqslant 1$.

Лемма 2. *Если $xy = c$, где $x > 0$, $y > 0$, $x \leqslant y$, то сумма $x + y$ убывает при возрастании x.*

Утверждение леммы следует из убывания функции $f(x) = x + \frac{c}{x} = \left(\sqrt{\frac{c}{x}} - \sqrt{x}\right)^2 + 2\sqrt{c}$, где $c > 0$, на интервале $(0, \sqrt{c})$.

Поделим сумму чисел каждой пары на произведение чисел следующей (по часовой стрелке) пары и перемножим полученные частные. По условию мы получим целое число. С другой стороны, это произведение есть произведение чисел вида $\dfrac{a+b}{ab}$. Отсюда и из леммы 1 следует, что если хотя бы одна пара отлична от $(2, 2)$, то найдется пара вида $(1, k)$. Начнем с этой пары и будем перемещаться по окружности по часовой стрелке.

Первый случай. Последующие пары имеют вид:

$$(1, k+1), \quad (1, k+2), \quad \ldots, \quad (1, k+999).$$

Значит, $k + 1000 \,\vdots\, k$, откуда $1000 \,\vdots\, k$. Но тогда $k \leqslant 1000 \Rightarrow k + 999 \leqslant 1999$.

Второй случай. Найдется пара вида $(1, l)$ такая, что следующая пара (a, b) отлична от $(1, l+1)$.

По условию ab — делитель числа $s_1 = 1 + l$. Если $ab = l + 1$, то по Лемме 2

$$s_2 = a + b \leqslant 2 + \frac{l+1}{2}\,. \qquad (*)$$

Если же $ab \leqslant \frac{l+1}{2}$, то по лемме 2

$$a + b \leqslant 1 + \frac{l+1}{2}\,.$$

Следовательно, и в этом случае справедливо $(*)$. Для следующей пары c, d лемма 2 дает

$$s_3 = c + d \leqslant cd + 1 \leqslant 3 + \frac{l+1}{2}\,,$$

и т. д. Для суммы s_{1000} чисел пары, предшествующей $(1, l)$, получаем:

$$s_{1000} \leqslant 1000 + \frac{l+1}{2}\,.$$

С другой стороны, $s_{1000} \,\vdots\, l$, значит, $s_{1000} \geqslant l$. Последние два неравенства дают: $l \leqslant 2001$. Тогда из приведенных выше оценок следует, что для любой пары, отличной от $(1, l)$, выполняется неравенство $s \leqslant 2001$. Значит, каждое число в этих парах не превосходит 2000.

Таким образом, оценка 2001 доказана. Из рассуждений легко получить пример: $(1, 2001)$, $(2, 1001)$, $(1, 1003)$, $(1, 1004)$, $(1, 1005)$, $\ldots$, $(1, 2000)$.

11 класс

257. Ответ. $p = 5$, $q = 3$.

Пусть $p - q = n$, тогда $p + q = n^3$. Отсюда
$$q = \frac{n^3 - n}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}.$$

Среди трех последовательных целых чисел одно делится на 3, поэтому q делится на 3. Среди простых чисел только 3 делится на 3. Значит, $q = 3$. Это значение q получается при $n = 2$. При этом
$$p = \frac{n^3 + n}{2} = \frac{2^3 + 2}{2} = 5.$$

258. Ответ. Нет.

Из условия следует, что $f(x) = (x-a)(x-b)$, где $a \neq b$. Пусть искомый многочлен $f(x)$ существует. Тогда, очевидно $f(f(x)) = (x-t_1)^2(x-t_2)(x-t_3)$. Заметим, что t_1, t_2, t_3 — корни уравнений $f(x) = a$ и $f(x) = b$, при этом корни этих уравнений не совпадают, поэтому можно считать, что уравнение $f(x) = a$ имеет один корень $x = t_1$.

Рассмотрим уравнение $f(f(f(x))) = 0$. Его решения, очевидно, являются решениями уравнений $f(f(x)) = a$ и $f(f(x)) = b$. Но уравнение $f(f(x)) = a$ равносильно уравнению $f(x) = t_1$ и имеет не более двух корней, а уравнение $f(f(x)) = b$ — не более четырех корней (как уравнение четвертой степени). То есть уравнение $f(f(f(x))) = 0$ имеет не более 6 корней.

259. ***Первое решение.*** Обозначим центры окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC через O_1 и O_2, а середины отрезков BD, DC, MN, DO_2 и O_1O_2 — через A_1, A_2, K, E и O соответственно (см. рис. 136). Пусть $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$. Тогда $\angle A_1O_1D = \angle A_2O_2D = \alpha$ (так как половина центрального угла равна вписанному, опирающемуся на ту же дугу). Отрезок OK — средняя линия трапеции (или прямоугольника) O_1MNO_2, следовательно, $OK \perp l$, и $OK = \frac{O_1M + O_2N}{2} = \frac{O_1D}{2} + \frac{O_2D}{2} = OE + EA_2$. Заметим, что точки E, O и A_2 лежат на одной прямой, так как $\angle OEO_2 + \angle O_2EA_2 = \angle O_1DO_2 + \angle O_2EA_2 = \angle O_1AO_2 + (180^\circ - \angle DO_2C) = 2\alpha + (180^\circ - 2\alpha) = 180^\circ$, т. е. $OK = OE + EA_2 = OA_2$. Аналогично доказывается, что $OA_1 = OK$. Значит, точки A_1, A_2 и K лежат на окружности с центром O, а так как $OK \perp l$, то эта окружность касается прямой l.

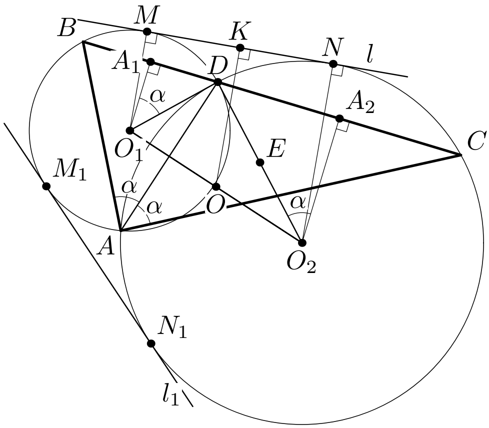


Рис. 136

Случай, когда вместо прямой l рассматривается прямая l_1, разбирается аналогично.

Второе решение. Пусть радиусы окружностей ω_1 и ω_2, описанных около треугольников ADB и ADC, равны R_1 и R_2. Если эти радиусы различны, то прямая l пересекает линию центров O_1O_2 в точке O (см. рис. 137). Пусть OD пересекает окружности в точках B' и C', и OA пересекает ω_1 в точке A'. При гомотетии H с центром O и коэффициентом $k = \frac{R_1}{R_2}$ точки C', D и A переходят в точки D, B' и A' соответственно, следовательно, $\angle DAC' = \angle B'A'D$. С другой стороны, $\angle B'A'D = \angle B'AD$, поэтому $\angle B'AD = \angle C'AD$. А это означает, что точки B' и C' совпадают с точками B и C, так как в противном случае один из углов BAD и CAD был бы меньше α, а другой — больше α ($\alpha = \angle B'AD = \angle C'AD$).

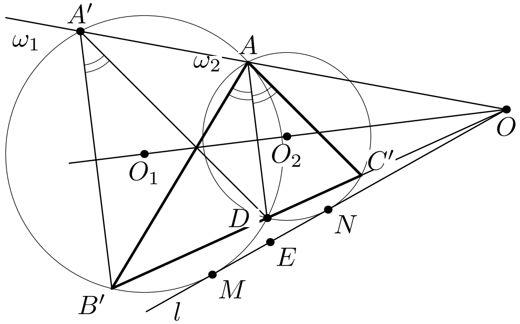


Рис. 137

Рассмотрим гомотетию H_1 с центром O, переводящую ω_2 в окружность ω, проходящую через точку E — середину отрезка MN. Из того, что l проходит через точку O и ω_2 касается l, следует, что ω касается l в точке E. Кроме того, из гомотетичности треугольников ONC и OMD (гомотетия H) следует, что $NC \parallel MD$. Кроме того, $H_1(C) = C_1$, где $EC_1 \parallel NC$. Поэтому EC_1 — средняя линия трапеции $CNMD$, т. е. гомотетия H_1 переводит точку C в середину DC. Аналогично, она переводит D в середину отрезка BD. Значит, ω проходит через середины отрезков BD и DC.

Если же $R_1 = R_2$, то вместо гомотетии следует рассмотреть параллельный перенос на вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{O_2O_1}$.

260. См. решение задачи 252.

261. Предположим, что она периодична и длина периода равна T, тогда $x_{m+T} = x_m$ и $x_{m+T+1} = x_{m+1}$ при $m \geqslant m_0$.

Если при некотором $m \geqslant m_0$ $\sin x_m \neq 0$, то $x_{m+T+1} = (m + T)\sin x_{m+T} + 1 = (m+T)\sin x_m + 1 \neq m \sin x_m + 1 = x_{m+1}$. А если $\sin x_m = 0$, то $x_{m+1} = 1$, и $\sin x_{m+1} = \sin 1 \neq 0$, так что предыдущее рассуждение применимо к x_{m+1}. Таким образом, получаем противоречие.

262. Пусть A_1 — центр вписанной окружности $\triangle SBC$, B_1 — центр вписанной окружности $\triangle SAC$, AA_1 пересекается с BB_1 $\Rightarrow A$, A_1, B_1, B лежат в одной плоскости, значит прямые AB_1 и BA_1 пересекаются на ребре SC. Пусть точка пересечения этих прямых — P. Так как AP и BP — биссектрисы углов A и B, то $\frac{CP}{PS} = \frac{AC}{AS} = \frac{BC}{BS}$. Но тогда $AC \cdot BS = BC \cdot AS$, отсюда $\frac{AC}{BC} = \frac{AS}{BS}$, следовательно, биссектрисы углов S в $\triangle ASB$ и C в $\triangle ACB$ пересекаются на ребре AB, т. е. точки S, C и центры вписанных окружностей $\triangle ASB$ и $\triangle ACB$ лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что отрезки, соединяющие вершины S и C с центрами вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются.

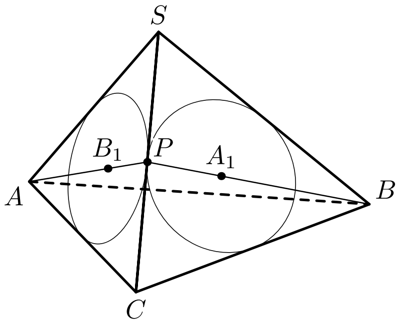


Рис. 138

263. Докажем утверждение задачи от противного. Можно предположить, что для любых двух разных точек A и B из S найдется отличная от них точка X из S такая, что либо $|XA| < 0{,}999|AB|$, либо $|XB| < 0{,}999|AB|$.

Переформулируем вышеприведенное утверждение: для любого отрезка I с концами в S и длиной l найдется отрезок I' с концами в S длины не более $0{,}999l$, один из концов которого совпадает с некоторым концом отрезка I. Или, иначе говоря, I' пересекает I.

Возьмем теперь первый отрезок I_1 длины l и будем брать отрезки I_2, $I_3, \ldots$ так, что I_{k+1} пересекается с I_k и $|I_{k+1}| < 0{,}999|I_k|$. Все эти отрезки имеют концы в S. Ломаная не короче отрезка, соединяющего ее концы, поэтому расстояние от любого конца I_k до любого конца I_1 не превосходит

$$l + 0{,}999l + \ldots + 0{,}999^k l = \frac{1 - 0{,}999^{k+1}}{1 - 0{,}999}\, l < 1000l.$$

Следовательно, в квадрате $2000l \times 2000l$ с центром в любом из концов I_1 лежит бесконечное число точек S. Но из условия следует конечность их числа в любом квадрате.

Полученное противоречие завершает доказательство.

264. ***Первое решение.*** **Лемма.** *Из любых 61 различных трехзначных чисел можно выбрать две непересекающиеся пары чисел, суммы в которых равны.*

Доказательство. Из 61 числа можно образовать $\frac{61 \cdot 60}{2} = 1830$ пар чисел, сумма чисел в каждой паре лежит между 200 и 2000, следовательно, у каких-то двух пар суммы совпадают. Пары, для которых совпадают суммы, очевидно, не могут пересекаться, ибо если $x + y = x + z$, то $y = z$ и пары совпадают. Лемма доказана.

Выберем пару пар чисел с равными суммами 15 раз (каждый раз будем исключать из рассматриваемого набора 4 взятых числа, перед последующим выбором чисел останется как раз 61 число). Если не все 15 сумм были различны, то мы нашли 4 искомых множества — это 4 пары чисел, у которых совпадают суммы.

Если все 15 сумм различны, то составим два множества пар N_1 и N_2 таким образом: из двух пар с равными суммами первую включим в N_1, вторую — в N_2. Рассмотрим первое множество пар. У него есть 2^{15} подмножеств. Сумма всех чисел во всех парах любого подмножества не превосходит 30 000 тысяч (чисел не больше 30, каждое меньше тысячи).

Но $2^{15} > 30\,000$, следовательно, есть два подмножества, для которых суммы чисел, входящих во все их пары, совпадают. Выбросив из этих подмножеств их пересечение, получим непересекающиеся подмножества M_1 и M_2 с тем же условием.

Теперь в N_2 возьмем подмножества пар, соответствовавших парам из множеств M_1 и M_2 — M_3 и M_4. Множества чисел, входящих в пары M_1, M_2, M_3, M_4 — искомые.

Комментарий. Из аналогичных соображений выбирая не только пары, но также тройки и четверки, можно показать, что четыре непересекающиеся подмножества с равными суммами можно выбрать среди любых 97 трехзначных чисел.

Замечание. Давая эту задачу, жюри предполагало, что вышеприведенное решение — наиболее простое. Практика показала, что это не так, ибо существует

Второе решение. Покажем, что среди произвольных 106 чисел существуют даже четыре непересекающихся пары с равными суммами. Доказательство абсолютно аналогично вышеприведенной лемме. Из 106 чисел можно образовать $\frac{106 \cdot 105}{2} = 5460$ пар чисел, сумма чисел в каждой паре лежит между 200 и 2000. Если пар с любой суммой не более трех, то всего пар не более $1800 \cdot 3 = 5400$, что не так. Следовательно, у каких-то четырех пар суммы совпадают. Пары, для которых совпадают суммы, очевидно, не могут пересекаться, ибо если $x + y = x + z$, то $y = z$ и пары совпадают.

2001–2002 г.

8 класс

265. **Ответ.** Нельзя.

Предположим, что мы сумели расставить числа требуемым образом. Заметим, что сумма чисел в любом столбце и в любой строке больше 2. Поэтому все соответствующие суммы нечетны, так как они простые и больше 2. Тогда сумма всех чисел в таблице с одной стороны равна сумме 9 простых нечетных чисел, т. е. нечетна, а с другой стороны, она равна сумме 2002 простых нечетных чисел, т. е. четна. Противоречие.

266.

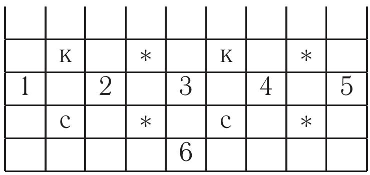


Рис. 139

Предположим противное: ни у какой клетки нет ровно двух одноцветных соседей по углу. Рассмотрим 4 нижних ряда и посмотрим на клетку № 1 — у нее два соседа, следовательно, они разного цвета. Рассмотрим клетку № 2, у нее четыре соседа, два из них разного цвета, следовательно два других — одного цвета. Рассмотрим клетку № 3. Она имеет двух одноцветных соседей, поэтому два других ее соседа — разного цвета (если все соседи клетки № 3 одинакового цвета, то у клетки № 6 — два одноцветных соседа). Продолжая рассуждать таким образом, получим, что оба соседа клетки № 5 — одного цвета. Противоречие.

267. **Ответ.** Выигрывает второй.

Занумеруем коробки: $1, \ldots, 11$ и будем обозначать ход номером той коробки, куда мы не клали монету. Можно считать, что первый игрок начал игру ходом 1. Чтобы победить, второму надо, независимо от игры первого, сделать ходы $2, \ldots, 11$. Этими десятью ходами вместе с ходом первого в каждую коробку будет положено по 10 монет. Кроме того, найдется коробка (назовем ее A), в которую первый каждым своим ходом со 2 по 11 клал по монете. Тем самым, после 11 хода первого в коробке A окажется 20 монет, и ни в какой коробке не окажется больше. Второй игрок своим 11-м ходом должен положить монеты так, чтобы в коробку A попала монета. Тем самым, он выигрывает.

268. Предположим противное, т. е. пусть треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный. Если точка A лежит на отрезке B_1C_1, то из равенства $\angle C_1B_1A_1 = \angle AB_1C = 60^\circ$ следует, что C лежит на B_1A_1. При этом $\angle BAC = 180^\circ - \angle BAC_1 - \angle CAB_1 = 60^\circ$. Аналогично, $\angle ACB = 60^\circ$ и $\triangle ABC$ — правильный. Противоречие. Значит, точка A не лежит на B_1C_1.

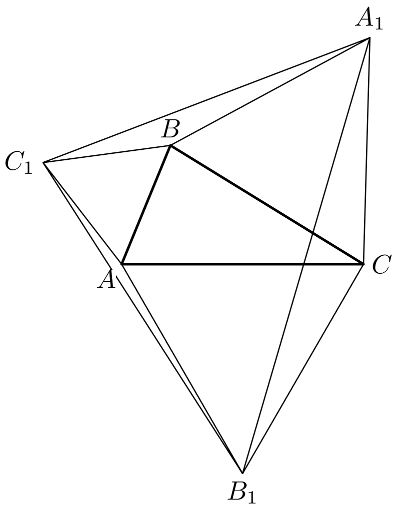


Рис. 140

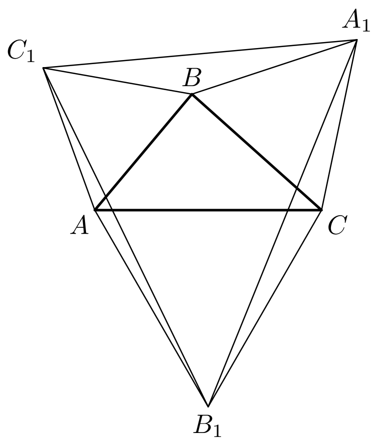


Рис. 141

Рассмотрим треугольники A_1BC_1, B_1CA_1, C_1AB_1. Назовем один из них *внешним*, если он пересекается с $\triangle ABC$ только по соответствующей вершине (так, на рисунке рис. 140 внешними являются треугольники A_1BC_1 и C_1AB_1, а на рис. 141 — $\triangle A_1BC_1$); иначе назовем его *внутренним*. Тогда к одной из вершин A_1, B_1, C_1 прилегают либо два внешних треугольника (см. рис. 140), либо два внутренних (см. рис. 141). В первом случае угол треугольника $A_1B_1C_1$ при этой вершине больше $60°$, во втором — меньше. Противоречие.

269. **Ответ.** Нельзя.

Первое решение. Из последней цифры можно получить 2 только, прибавив к двум последним цифрам a раз по единице и вычтя из них $a+$ $+2$ раза по единице. Эти операции уменьшают цифру, стоящую на третьем месте, на 2. Аналогично, операции, превращающие первую цифру в 2, увеличат вторую цифру на 1. Ясно, что порядок операций можно менять, если рассматривать четырехзначное число как четверку целых чисел (возможно отрицательных, либо превосходящих 9). Выполнив вначале операции, заменяющие 4 на 2 и 1 на 2, мы получим число 2312, которое операциями над двумя средними цифрами нельзя превратить в 2002.

Второе решение. Пусть на доске написано число $\overline{abcd}$. Тогда рассматриваемые операции не изменяют число $M = (d+b) - (a+c)$, так как они увеличивают (уменьшают) на единицу одно число из первой скобки, и одно число — из второй. Для числа 1234 $M_1 = (4+2) - (1+3) = 2$, для числа 2002 $M_2 = (2+0) - (2+0) = 0$. Поэтому требуемое невозможно.

270. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, а

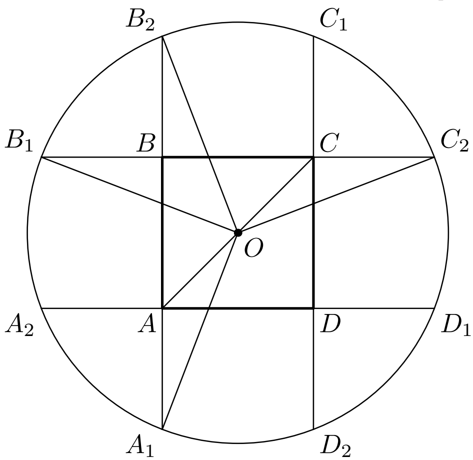


Рис. 142

$A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$ — полученный восьмиугольник, O — центр описанной около него окружности (см. рис. 142). Тогда точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_2, т. е. на серединном перпендикуляре к отрезку AB ($AA_1 = BB_2$). Аналогично, O лежит на серединном перпендикуляре ко всем сторонам четырехугольника $ABCD$, т. е. является центром описанной около него окружности. Тогда $OA_1 = OC_2 = R$, $OA = OC = r$ и, значит, треугольник OAA_1 и

OCC_2 равны по трем сторонам. Отсюда следует, что $\angle OA_1A = \angle OC_2C$. Значит, равнобедренные треугольники OA_1B_2 и OC_2B_1 равны, откуда $A_1B_2 = C_2B_1$, т. е. $AB = CB$. Аналогично получаем $BC = CD = DA$, т. е. $ABCD$ — ромб. Но он вписан в окружность (радиуса r), значит, является квадратом.

271. Пусть наблюдатель находится в точке O, а «Запорожец» и «Нива» в момент проезда «Москвича» мимо наблюдателя — в точках Z_0 и N_0 соответственно. Через Z_1 и M_1 обозначим точки, где находились соответственно «Запорожец» и «Москвич» в тот момент, когда мимо наблюдателя проезжала «Нива», а через M_2 и N_2 — точки, где находились соответственно «Москвич» и «Нива», когда с наблюдателем поравнялся «Запорожец». Докажем равенство $OM_2 = ON_2$, выполнение которого и будет означать справедливость утверждения задачи.

В силу постоянства скоростей имеем $\frac{Z_0Z_1}{Z_0O} = \frac{OM_1}{OM_2}$ и $\frac{Z_0Z_1}{Z_1O} = \frac{ON_0}{ON_2}$, откуда $OM_2 = \frac{Z_0O \cdot OM_1}{Z_0Z_1}$ и $ON_2 = \frac{Z_1O \cdot ON_0}{Z_0Z_1}$.

Равенство $OM_2 = ON_2$ теперь следует из того, что по условию задачи $Z_0O = ON_0$ и $OM_1 = Z_1O$.

272. ***Первое решение.*** Пронумеровав детали слева направо числами $1, 2, \ldots, 18$, взвесим детали с номерами 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15. Возможны четыре случая.

1) Масса всех взвешенных деталей равна 800 г, т. е. среди них нет ни одной 99-граммовой. Для второго взвешивания берем детали с номерами 1, 2, 3, 8, 9. Их масса может быть равна 497 г (и тогда по 99 г весят детали 1, 2, 3), 498 г (если по 99 г весят 8, 9, 10), 499 г (9, 10, 11) и 500 г (16, 17, 18).
2) Масса всех взвешенных деталей — 799 г, т. е. среди них ровно одна 99-граммовая. Взвесим детали 2, 3, 4, 7, 8, 12. Здесь масса может равняться 597 г, 598 г, 599 г и 600 г, а соответствующими тройками 99-граммовых деталей будут (2, 3, 4), (7, 8, 9), (10, 11, 12) и (15, 16, 17).
3) Масса всех взвешенных деталей — 798 г, т. е. среди них ровно две 99-граммовые. Тогда взвесим детали 3, 4, 5, 6, 7, 12, и в случаях, когда весы покажут 597 г, 598 г, 599 г и 600 г, искомыми тройками будут (3, 4, 5), (6, 7, 8), (11, 12, 13) и (14, 15, 16) соответственно.
4) Масса всех взвешенных деталей — 797 г, т. е. все 99-граммовые детали находятся среди них. Вторым взвешиванием узнаем массу деталей 4, 5, 6, 12. В зависимости от того, равна она 397 г, 398 г, 399 г или 400 г, искомой тройкой деталей будет (4, 5, 6), (5, 6, 7), (12, 13, 14) или (13, 14, 15) соответственно.

Второе решение. Назовем детали, весящие по 99 г, фальшивыми. Взвешивание на весах со стрелкой позволяет определить, сколько фальшивых деталей было среди взвешенных. У отрезка из трех деталей есть 16 возможных положений — самая левая из фальшивых может иметь номер от 1 до 16.

Предположим, что у нас есть два конкретных взвешивания. Тогда мы можем нарисовать «таблицу результатов», показывающую для каждого положения левого конца фальшивого отрезка, сколько фальшивых деталей было бы взвешено. Если в таблице каждая пара чисел от 0 до 3 (их всего 16) встречается ровно 1 раз, то по результату взвешиваний можно однозначно определить положение фальшивого отрезка. Приведем такую таблицу.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
0	1	2	3	3	2	1	0	0	1	2	3	3	2	1	0

Рис. 143

Покажем, как найти взвешивания, дающие данную таблицу. Первое взвешивание: из первого отрезка должно попасть ноль деталей, значит, с 1 по 3 — не берем, из второго (со 2 по 4) — тоже ноль, значит, 4 не берем, и так до 5 отрезка (с 5 по 7), из него должна быть взята одна деталь, значит это деталь 7, ибо все до 7 уже не взяты. Из отрезка 6 должна быть взята одна деталь, но уже взята деталь 7, значит 8 не берем. И так далее: каждый следующий отрезок содержит одну новую деталь, поэтому мы можем однозначно определить, брать ее или нет.

Проведя указанный алгоритм, получаем, что требуемые взвешивания существуют: 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18 и 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15.

9 класс

273. См. решение задачи 266.

274. Пусть $f(n-1) = p_1$, $f(n) = p_2$, $f(n+1) = p_3$. Из равенства $f(-a-x) = f(x)$, где $f(x) = x^2 + ax + b$ — данный квадратный трехчлен, следует, что если в целочисленной точке x_0 трехчлен f принимает простое значение, то и в целочисленной точке $-a-x_0$ он также принимает простое значение. Отсюда следует утверждение задачи, если точка $K(n, f(n))$ не является вершиной параболы $y = f(x)$.

Если же $K(n, f(n))$ — вершина параболы, т. е. $f(n \pm c) = f(n) + c^2$, то $f(n-1) = f(n+1) = f(n) + 1$. Из простоты чисел $f(n)$ и $f(n+1)$ следует, что $f(n) = 2$, $f(n+1) = 3$. Но тогда $f(n+3) = f(n) + 3^2 = 11$ — простое.

275. Отразим точку L симметрично относительно прямой BO, получим точку L', лежащую на стороне AB и такую, что $\angle AL'O = \angle BL'M$

(см. рис. 144). Для решения задачи достаточно доказать, что $\angle BKO + \angle BLO = 180°$, что равносильно равенству $\angle CLO = \angle BKO$, или $\angle BL'M = \angle BKO$.

Пусть точка O' симметрична точке O относительно середины D отрезка AB. В четырехугольнике $MOM'O'$ диагонали MM' и OO' делятся точкой D пополам, следовательно, $MOM'O'$ — параллелограмм.

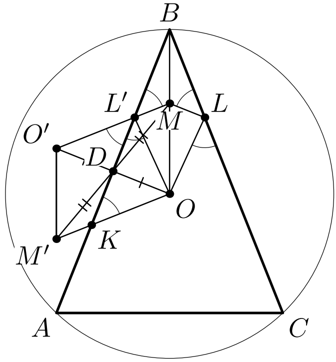


Рис. 144

Так как O — центр описанной окружности треугольника ABC, то $OO' \perp AB$. Точка L' лежит на серединном перпендикуляре к отрезку OO', поэтому треугольники ODL' и $O'DL'$ равны. Следовательно, $\angle O'L'D = \angle OL'D = \angle BL'M$. Это означает, что точка L' лежит на отрезке $O'M$. Поскольку $O'M \parallel M'O$, получаем: $L'M \parallel KO$, откуда $\angle BL'M = \angle BKO$, что и требовалось.

276. Обозначим число прямоугольников через k. Рассмотрим самую нижнюю из верхних границ прямоугольников (назовем прямую, на которой она лежит, d, а сам прямоугольник — P). Есть не более, чем $k - n - 1$ прямоугольников таких, что их нижняя граница лежит выше d, так как все такие прямоугольники не пересекаются с P. Назовем эти прямоугольники *нижнеплохими*. Аналогично определим *верхнеплохие*, *левоплохие* и *правоплохие* прямоугольники. Заметим, что поскольку $k > 4 \times (k - n - 1)$ (это равносильно $3k < 4n + 4$), то существует прямоугольник A, не являющийся нижне-, верхне-, лево- или правоплохим. Но тогда он пересекается со всеми прямоугольниками. В самом деле: пусть с ним не пересекается какой-то прямоугольник B, тогда либо какая-то горизонтальная, либо какая-то вертикальная прямая разделяет B и A. Если, например, она горизонтальна и прямоугольник A лежит выше нее, то верхняя граница B лежит ниже нижней границы A, что невозможно по построению. Остальные три случая аналогичны.

277. **Ответ.** Нельзя.

Пусть нам удалось расставить числа требуемым образом. Возьмем число 7. По условию 8-е, 15-е, 22-е, 29-е, 36-е, 43-е, 50-е, 57-е от него по часовой стрелке числа должны делиться на 7. Мы насчитали уже 9 различных чисел, которые должны делиться на 7. Но среди чисел от 1 до 60 их всего восемь ($7 \cdot 1, \ldots, 7 \cdot 8$). Противоречие.

278. Пусть AD — большее, а BC — меньшее основания трапеции, M — середина ее средней линии PQ. Проведем прямую CM до пересечения с основанием AD в точке C' (см. рис. 145). Так как MQ — средняя линия треугольника $CC'D$, то длина $C'D$ равна длине средней линии трапеции, а, значит, площадь треугольника $CC'D$ равна половине площади трапеции. Это и есть одна из четырех искомых точек, а так как AD — большее основание, то его длина больше длины средней линии, т. е. точка C' находится на основании, а не на его продолжении. Аналогично можно построить точку B', она тоже окажется на основании AD.

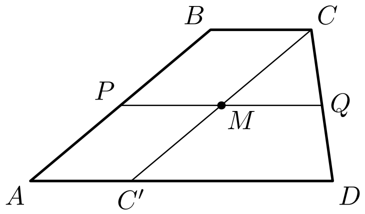


Рис. 145

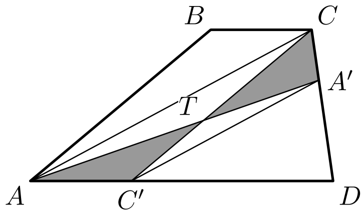


Рис. 146

Проведем через точку C' прямую, параллельную диагонали AC, и обозначим пересечение ее со стороной CD через A' (см. рис. 146). Рассмотрим четырехугольник $ACA'C'$ — это трапеция, пусть ее диагонали AA' и CC' пересекаются в точке T, значит треугольники ATC' и CTA' равновелики. Это, в свою очередь, означает, что треугольники $CC'D$ и $AA'D$ равновелики и имеют площадь, равную половине площади трапеции $ABCD$. Так строятся еще две точки, указанные в условии. Получается, что диагонали четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ попарно параллельны, и поскольку точка M, являясь серединой CC', равноудалена от прямых AC и $A'C'$ (и аналогично от прямых BD и $B'D'$), таким образом, прямые $A'C'$ и $B'D'$ симметричны прямым AC и BD относительно середины средней линии трапеции $ABCD$. Раз диагонали четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ симметричны относительно точки M, то и точки их пересечения симметричны относительно M.

279. **Ответ.** Да, можно.

Будем отмечать точки по правилам до тех пор, пока это возможно. Тогда, в конце концов мы получим ситуацию, когда любая середина отрезка четной длины с концами в отмеченных точках уже отмечена. Покажем, что отмечены все целые точки.

Рассмотрим два соседних отрезочка AB и BC, на которые делят отмеченные точки исходный отрезок. Их длины нечетны, так как иначе один из них можно было бы разделить пополам. Тогда длина отрезка AC четна, и его середина уже отмечена. Но на этом отрезке нет отмеченных точек, кроме B; поэтому $AB = BC$. Отсюда получаем, что длины всех отрезочков разбиения нечетны и равны.

Пусть их длина равна l. Тогда l делит 2002, а так как она нечетна, то делит и 1001. Но координата исходной отмеченной точки кратна l и взаимно проста с 1001; поэтому $l = 1$, т. е. все целые точки отмечены.

280. См. решение задачи 272.

10 класс

281. Ответ. $n = 3$.

Натуральные числа вида $a = 5m \pm 2$ таковы, что $a^2 + 1 \vdots 5$, поэтому не дают простых $p = a^2 + 1$, кроме случая $p = 5$ при $a = 2$. С другой стороны, среди чисел $b, b+2, b+4, \ldots$ не более двух подряд идущих чисел, не имеющих вид $5m \pm 2$. Значит, если в прогрессии не содержится число 2, то $n \leqslant 2$. Если $a_1 = 2$, то $n \leqslant 3$, так как $a_4 = 8 = 5 \cdot 2 - 2$. Числа $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$ дают искомую тройку: 5, 17, 37 — простые числа.

282. По принципу Дирихле среди $m^2 + 1$ точек с целыми координатами найдутся такие две точки (k, l) и (k_1, l_1), что $k \equiv k_1 \pmod m$ и $l \equiv l_1 \pmod m$. Тогда $m + 1$ точек $(k + \frac{k_1 - k}{m} i, l + \frac{l_1 - l}{m} i)$, $0 \leqslant i \leqslant m$, имеют целые координаты и лежат на отрезке, соединяющем точки (k, l) и (k_1, l_1).

Замечание. Утверждение справедливо для выпуклого многогранника в пространстве с заменой $m^2 + 1$ на $m^3 + 1$.

283. Заметим, что $KM \parallel AC$. Продлим KM до пересечения с описанной окружностью ABC в точке $K' \neq K$ (см. рис. 147). Тогда $\angle KBC = \angle K'KA = \angle MKA$, поскольку эти углы опираются на равные дуги. Тогда треугольник MAK подобен треугольнику MKB и переходит в него при поворотной гомотетии с центром M и углом α. Эта поворотная гомотетия переведет центр вписанной окружности треугольника AKM (O_1) в центр вписанной окружности $\triangle KBM$ (O_2). Значит, $\triangle O_1MO_2$ подобен треугольнику KMB и переходит в него при поворотной гомотетии с центром M и углом $\alpha/2$. Но тогда угол между прямыми O_1O_2 и KB равен $\alpha/2$, аналогично, угол между O_1O_2 и KA тоже равен $\alpha/2$, значит, прямая O_1O_2 перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

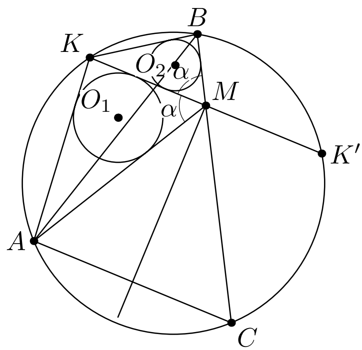


Рис. 147

284. Будем доказывать утверждение по индукции. База $n=1$ очевидна. Предположим, что неравенство доказано для n чисел. Проверим его и для $n+1$ числа. Согласно предположению индукции,

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^3.$$

Таким образом, достаточно проверить, что

$$a_{n+1}^3 \leqslant a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

или, что

$$a_{n+1}^2 - a_{n+1} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Для доказательства последнего утверждения заметим, что

$$a_{k+1} + a_k \geqslant (a_{k+1}+a_k)(a_{k+1}-a_k) = a_{k+1}^2 - a_k^2.$$

Суммируя полученные неравенства по k от 0 до n, придем к неравенству

$$a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}^2 - a_k^2) = a_{n+1}^2,$$

что и требовалось.

285. ***Первое решение.*** По условию $f_1 = (x-x_1)(x-x_2)$, $f_2 = (x-x_1)(x-x_3)$, $\ldots$, $f_{n-1} = (x-x_1)(x-x_n)$, $f_n = (x-x_2)(x-x_3)$, $\ldots$, $f_m = (x-x_{n-1})(x-x_n)$, где x_i — координата точки X_i на оси Ox. Поэтому $f_1+\ldots+f_m = \left[\frac{n(n-1)}{2}x^2 - (n-1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)x + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)\right]$. Найдем дискриминант этого трехчлена: $D = (n-1)^2(x_1+\ldots+x_n)^2 - 2n(n-1)(x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n) = (n-1)[(n-1)(x_1^2+\ldots+x_n^2+2x_1x_2+\ldots+2x_{n-1}x_n) - 2n(x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n)] = (n-1)[(n-1)(x_1^2+\ldots+x_n^2) - 2(x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n)] = (n-1)[(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2] > 0$. Отсюда следует утверждение задачи.

Второе решение. Прибавив к удвоенной сумме $2S = 2(f_1+\ldots+f_m)$ слагаемые $y_1 = (x-x_1)^2, \ldots, y_n = (x-x_n)^2$, получим $2S_1 = (x-x_1)[(x-x_1)+(x-x_2)+\ldots+(x-x_n)] + \ldots + (x-x_n)[(x-x_1)+\ldots+(x-x_n)] = n^2\left(x - \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2$. Мы получили, что S_1 обращается в ноль в точке $x_0 = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$. Но $S < S_1$, так как $y_i \geqslant 0$

и не более одного числа из y_i может равняться нулю. Значит, $S(x_0) < 0$, что доказывает утверждение задачи.

286. См. решение задачи 278.

287. **Ответ.** Да, можно.

Будем отмечать новые точки по правилам до тех пор, пока это возможно. Тогда в конце концов мы получим ситуацию, когда любой отрезок с длиной, делящейся на n, с концами в отмеченных точках уже разделен отмеченными точками на n равных частей. Покажем, что отмечены все целые точки.

Рассмотрим n соседних отрезочков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$, на которые делят отмеченные точки исходный отрезок. Если остатки от деления на n длин отрезков A_1A_k ($2 \leqslant k \leqslant n+1$) различны, то среди них найдется отрезок, длина которого делится на n; в противном случае два остатка, скажем, у A_1A_k и A_1A_l, совпадают, и тогда длина A_kA_l делится на n. В любом случае, длина какого-то отрезка A_iA_j $(i < j)$ делится на n. Тогда он уже поделен на n равных частей при помощи $n-1$ точки. Но на этом отрезке нет отмеченных точек, кроме A_m при $i < m < j$; поэтому такое может быть лишь при $i = 1$, $j = n+1$ и $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_nA_{n+1}$. Отсюда получаем, что длины всех отрезочков разбиения равны.

Пусть их длина равна l. Тогда координаты всех исходно отмеченных точек кратны l; но они взаимно просты в совокупности, поэтому $l = 1$, т. е. все целые точки отмечены.

288. **Ответ.** 41.

Пример раскраски в 41 цвет показан на рис. 148 (неотмеченные клетки окрашены в 41-й цвет). Докажем, что 41 — максимальное число цветов.

1	2	3	4						
	5	6	7	8					
		9	10	11	12				
			13	14	15	16			
				17	18	19	20		
					21	22	23	24	
						25	26	27	28
32							29	30	31
35	36							33	34
38	39	40							37

Рис. 148

Если в каждой строке встречается не более 4 цветов, то всего цветов не более 40. Пусть в строке A встретилось 5 цветов. Если в любой оставшейся строке имеется не более 4 цветов, не встречающихся в A, то всего цветов не более, чем $5 + 4 \cdot 9 = 41$. Иначе найдется строка B, в которой встречается 5 цветов, отличных от цветов строки A. Назовем 10 цветов строк A и B «старыми», а все остальные цвета — «новыми». Теперь в каждом столбце встречается хотя бы 2 старых цвета (в строках A и B), поэтому новых там не более 3. Следовательно, всего в таблице 10 старых и не более 30 новых цветов, итого не более 40.

11 класс

289. Из рациональности x^p+y^q, x^r+y^q, x^s+y^q следует рациональность чисел x^r-x^p, x^s-x^r. Возьмем $p=3$, $r=5$, $s=7$. Тогда $a=x^7-x^5$ и $b=x^5-x^3$ рациональны. Если $b=0$, то $x=0$ или $x=\pm 1$, т. е. x рационально. Если же $b\neq 0$, то $x^2=\frac{a}{b}$ рационально. Но тогда из равенства $b=x^2\cdot(x^2-1)\cdot x$ следует рациональность x. Аналогично, y — рациональное число.

290. Пусть SO — высота пирамиды, тогда прямые, содержащие высоты SO, AA_1 и CC_1 треугольника ASC, проходят через одну точку H_1 (На рис. 149 $\triangle ASC$ — остроугольный. Решение не изменится, если он — тупоугольный. Заметим, что прямоугольным он быть не может). Сечение данной в условиях задачи сферы ω плоскостью ASC — окружность, проходящая через точки S, A_1 и C_1, т. е. окружность с диаметром SH_1, так как углы H_1A_1S и H_1C_1S — прямые. Значит, точка H_1 прямой SO лежит на ω. Аналогично, $H_2\in\omega$, где H_2 — точка пересечения прямых SO, BB_1 и DD_1. Из того, что $H_1\neq S$ и $H_2\neq S$, следует, что $H_1=H_2$.

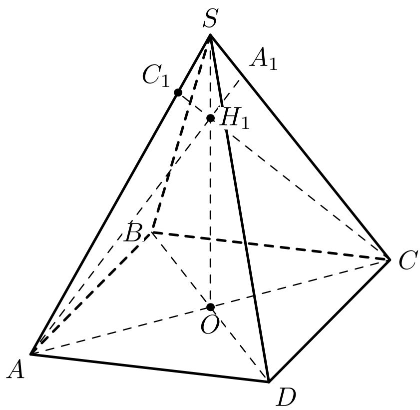


Рис. 149

291. Будем доказывать утверждение по индукции. База $n=1$ очевидна. Предположим, что неравенство доказано для n чисел. Проверим его и для $n+1$ числа. Согласно предположению индукции,

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)^2=a_{n+1}^2+2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n}a_k+\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant a_{n+1}^2+2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_k^3.$$

Таким образом, достаточно проверить, что

$$a_{n+1}^3\geqslant a_{n+1}^2+2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

или, что

$$a_{n+1}^2-a_{n+1}\geqslant 2\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Для доказательства последнего утверждения заметим, что

$$a_{k+1} + a_k \leqslant (a_{k+1} + a_k)(a_{k+1} - a_k) = a_{k+1}^2 - a_k^2.$$

Суммируя полученные неравенства по k от 0 до n, придем к неравенству

$$a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}^2 - a_k^2) = a_{n+1}^2,$$

что и требовалось.

292. Назовем одну из строк, в которой встречаются все цвета, *выделенной*. Назовем множество клеток, отстоящих друг от друга по горизонтали и вертикали на кратное n число клеток, *полным*.

Лемма. *В полном множестве либо каждая строка, либо каждый столбец одноцветны.*

Доказательство. Предположим, что в какой-то строке нашего множества нашлись две клетки разного цвета; тогда найдутся и две клетки разного цвета на расстоянии n. Пусть эти клетки a и b, а клетки полного множества над ними — x и y (см. рис. 150). Из сравнения цветов в квадратах, составленных из клеток множеств $a \cup S_1 \cup D$ и $x \cup S_2 \cup D$ видно, что наборы цветов в множествах $a \cup S_1$ и $x \cup S_2$ одинаковы; аналогично, одинаковы наборы цветов в $S_2 \cup y$ и $S_1 \cup b$. Тогда в множестве S_1 нет клеток цвета b, поэтому и в множестве $x \cup S_2$ нет такого цвета; однако в $S_2 \cup y$ он есть, поэтому цвета y и b совпадают; аналогично совпадают цвета x и a. Повторяя эти рассуждения, получаем, что столбец нашего множества, содержащий a, окрашен одинаково, и то же со столбцом b. Теперь, если найдутся две клетки на расстоянии n в каком-то столбце, покрашенные по-разному, то строки множества, их содержащие, будут одноцветными. Но они будут пересекаться со столбцом цвета b, и поэтому их цвета будут совпадать, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

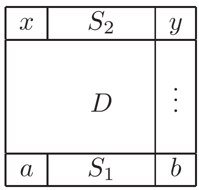


Рис. 150

Назовем полное множество *вертикальным*, если любой его столбец одноцветен, и *горизонтальным* в противном случае. Докажем, что все горизонтальные полные множества пересекаются с выделенной строкой. Пусть это не так. Рассмотрим строку нашего множества, ближайшую к выделенной; пусть она имеет цвет a. Тогда любую клетку выделенной строки можно заключить в квадрат вместе с какой-то клеткой цвета a из нашего горизонтального множества; поэтому в выделенной строке нет цвета a. Противоречие.

Теперь легко завершить доказательство требуемого. Заметим, что если есть столбец, для которого все полные множества, его содержащие, вертикальны, то в этом столбце ровно n цветов, так как его раскраска периодична с периодом n. Пусть любой столбец пересекается с горизонтальным полным множеством. Тогда выделенная строка пересекается с n горизонтальными множествами, строки которых одноцветны; поэтому в выделенной строке только n цветов. Противоречие, доказывающее требуемое.

Замечание 1. Можно доказать даже, что в любом столбце содержится ровно n цветов.

Замечание 2. Утверждение задачи (но не предыдущего замечания!) остается верным, если в какой-то строке содержится хотя бы $n^2 - n + 1$ цвет.

293. Пусть $x_1, \ldots, x_N$ — все различные корни уравнения $P(x) = 0$. Нам необходимо доказать, что уравнение $P(P(x))$ имеет по крайней мере N различных корней.

Рассмотрим N уравнений: $P(x) = x_1$, $P(x) = x_2, \ldots, P(x) = x_N$. Каждое из них имеет решение, так как $P(x)$ — многочлен нечетной степени. Пусть a_1 — корень первого уравнения, a_2 — второго, $\ldots$, a_N — N-го. Тогда для любых i и j ($i \neq j$) числа a_i и a_j различны, так как $P(a_i) = x_i \neq x_j = P(a_j)$. При этом каждое из чисел a_i является корнем уравнения $P(P(x)) = 0$, так как $P(P(a_i)) = P(x_i) = 0$. То есть уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет по крайней мере N различных корней $a_1, \ldots, a_N$.

294. **Ответ.** Выигрывает первый.

Покажем, что первому игроку достаточно каждым ходом проводить вектор с максимальной абсциссой, а из всех векторов, имеющих абсциссу, равную максимальной, вектор с максимальной ординатой.

Действительно, докажем, что тогда сумма всех проведенных векторов будет иметь либо положительную абсциссу, либо нулевую абсциссу и положительную ординату (назовем такой вектор «положительным»). Очевидно, что каждым своим ходом первый игрок проводит положительный вектор, и сумма двух положительных векторов положительна. Также очевидно, что сумма векторов, проведенных за ход первым и вторым, положительна или ноль. Поэтому достаточно доказать, что после первого хода второго игрока эта сумма будет положительна (т. е. не будет нулевой). Пусть она нулевая, первый провел вектор $\overrightarrow{AB}$, а второй — $\overrightarrow{CD}$. Если абсциссы точек A и D не равны, то один из векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ имеет абсциссу, большую, чем у $\overrightarrow{AB}$ (сумма этих абсцисс равна удвоенной абсциссе $\overrightarrow{AC}$), что невозможно. Если абсциссы A и D совпадают, то не совпадают ординаты (иначе $A = D$, $B = C$); тогда абсциссы векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AB}$ равны, но у какого-то из первых двух векторов ордината больше, чем у третьего, что опять-таки невозможно.

295. Пусть P — точка пересечения продолжений сторон BC и AD (случай $AD \parallel BC$ разберем отдельно). Для определенности, пусть точка P лежит на продолжении BC за точку B (см. рис. 151). По условию BK и AK — биссектрисы углов PBA и PAB, поэтому точка их пересечения K является центром вписанной окружности треугольника ABP. Аналогично, точка M является центром вневписанной окружности треугольника CDP, следовательно, K и M лежат на прямой m, являющейся биссектрисой угла CPD.

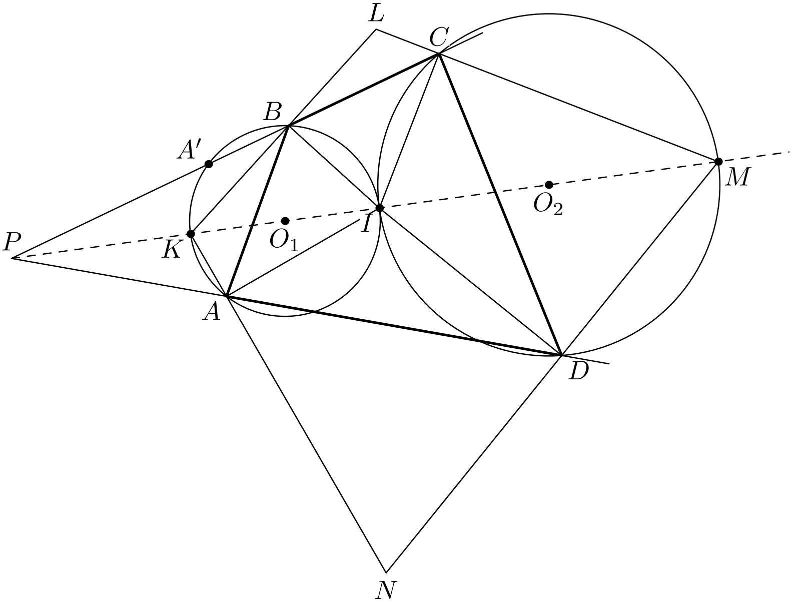


Рис. 151

Пусть точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABK и CDM. Центр K' вневписанной окружности треугольника ABP лежит на биссектрисах углов P, A и B. Тогда углы KAK' и KBK' прямые, поэтому четырехугольник $AKBK'$ вписанный, и O_1 — середина KK', т. е. лежит на m. Аналогично, O_2 лежит на m и является серединой отрезка MK'', где K'' — центр вневписанной окружности треугольника DMC.

(В случае $AD \parallel BC$ легко видеть, что K и M, а также O_1 и O_2 лежат на прямой m, являющейся средней линией трапеции или параллелограмма $ABCD$.)

Пусть окружности, описанные около треугольников ABK и CDM, касаются внешним образом. Их центры O_1 и O_2 лежат на m, поэтому точка I касания лежит на m и совпадает с K' и K''. Значит, I — точка пересечения биссектрис внутренних углов четырехугольника $ABCD$. Тогда $ABCD$ — описанный четырехугольник и I — центр вписанной в него окружности.

Наоборот, если $ABCD$ — описанный четырехугольник и I — центр вписанной в него окружности, то $AI \perp l_A$, $BI \perp l_B$, $CI \perp l_C$ и $DI \perp l_D$. Поэтому точка I лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABK, и диаметрально противоположна точке K, и также I лежит на окружности, описанной вокруг треугольника CDM, и диаметрально противоположна точке M. Таким образом, I лежит на m и является точкой внешнего касания окружностей, описанных около треугольников ABK и CDM.

Итак, внешнее касание окружностей, описанных около треугольников ABK и CDM, равносильно описанности четырехугольника $ABCD$. Но то же самое справедливо и для пары окружностей, описанных около треугольников BCL и DAN, откуда следует утверждение задачи.

296. **Ответ.** Верно.

Пусть M — целая точка на отрезке $[0, N]$. Приведем алгоритм, позволяющий ее отметить. Назовем исходные точки A_1, A_2, A_3, A_4, и будем считать, что мы на шаге алгоритма *заменяем* одну из точек на новую и новую называем так же. При этом на каждом шаге алгоритма отрезки между отмеченными точками будут взаимно просты в совокупности и расстояние от M до заменяемой точки будет уменьшаться. Кроме того, каждая точка будет оставаться по ту же сторону от M, что и изначально (или перемещаться в M). Ясно, что такую процедуру можно проделать лишь конечное число раз, поэтому M в конце концов будет отмечена.

Перенумеруем отмеченные точки в произвольном порядке: B_1, B_2, B_3, B_4. Тогда наше условие взаимной простоты равносильно тому, что длины отрезков B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 взаимно просты в совокупности. Поэтому, если расстояние от заменяемой точки до какой-то из оставшихся уменьшилось в целое число раз, то взаимная простота сохранилась.

Координаты двух из четырех отмеченных точек дают одинаковые остатки при делении на 3; пусть это точки A_i и A_j. Возьмем точки C и D такие, что $A_iC = CD = DA_j$. Если точки C и D уже отмечены, то из взаимной простоты получаем $A_iC = CD = DA_j = 1$, и точка M отмечена, ибо лежит на A_iA_j. Если точка C отмечена, а D нет, то можно одну из точек A_i или A_j (в зависимости от положения M) заменить на D; при этом взаимная простота сохранится, ибо расстояние от замененной точки до C останется неизменным или разделится на 2. Если отмечена только D, шаг аналогичен.

Пусть ни одна из точек C, D не отмечена. Если M и A_i лежат по одну сторону от C (симметричный случай аналогичен), то переместим A_j в C; при этом длина A_iA_j уменьшилась в три раза, и взаимная простота сохранилась. Пусть, наконец, M лежит на CD. Если длина A_iA_j четна, то простые делители длины A_iD являются простыми делителями A_iA_j, поэтому при перемещении A_j в D взаимная простота сохранится. Если же расстояние A_iA_j нечетно, то для любой третьей отмеченной точки A_m одно из расстояний A_iA_m, A_jA_m нечетно. Пусть, для определенности, A_iA_m нечетно. Тогда можно заменить A_j на D; у нового расстояния A_iA_j лишь один новый простой делитель — 2, но НОД расстояний не может делиться на 2, поскольку A_iA_m нечетно.

2002–2003 г.

8 класс

297. Ответ. 7.

Среди чисел от 1 до 10 на 7 делится только сама семерка. Значит, она должна входить в первую группу, и частное не меньше 7. Приведем пример, когда оно равно 7: $\frac{3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot4\cdot9\cdot10}$. Он легко строится, если заметить, что

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 = 2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7,$$

т. е. надо добиться, чтобы произведение пяти чисел второй группы равнялось $2^4\cdot3^2\cdot5$.

298. Из условия следует, что проекции жуков на оси OX и OY движутся по осям с постоянными скоростями. Поскольку проекции жуков на ось OX никогда не совпадают, то это значит, что проекции жуков на ось OX движутся в одном направлении с одинаковой скоростью. Так как прямые не параллельны, их угловые коэффициенты различны. Следовательно, если жуки пройдут пути, имеющие одинаковые проекции на OX, их смещения по оси OY, с учетом знака, будут различными. Из этого следует, что проекции жуков на ось OY движутся с различными скоростями, а так как эти проекции находятся на одной прямой, то они обязательно когда-нибудь совпадут (или совпадали раньше).

299. Ответ. Выигрывает второй.

Заметим, что если какой-то из игроков выпишет на доску число 500 или 999 (назовем такой ход *проигрышным*), то его противник следующим ходом выпишет число 1000 и выиграет. Какие числа могут быть выписаны на доску до появления чисел 500 и 999? Во-первых, это все числа от 1 до 499 (их 499). Во-вторых, это все числа от 502 до 998 (их 497), так как 502 можно получить из числа 251. Заметим также, что число 501 может получиться только из числа 500. То есть перед появлением числа 500 или 999 будет сделано $499+497=996$ непроигрышных ходов. Это означает, что проигрышный ход сделает первый игрок.

300. В неравнобедренном треугольнике ABC проведем высоту из вершины наибольшего угла (BD на рис. 152). Пусть $BC > BA$, тогда $DC > DA$. Прямоугольником, равновеликим треугольнику ABC будет прямоугольник $BDEF$, где $DE = \frac{1}{2}AC$, а точка E лежит на DC, так как $DC > DA$. Построим $\triangle GFE$, равный $\triangle ADB$ ($G \in BF$). Тогда $BG = BF - GF = DE - AD = (AD+EC) - AD = EC$, и из параллельности прямых BG и CE $\angle HBG = \angle HCE$, $\angle BGH = \angle HEC$. Следовательно, $\triangle BGH = \triangle CEH$. Получили три многоугольника: ABD, $BDEH$, CEH (тупоугольный треугольник). Перекладывая $\triangle ABD$ на место $\triangle GEF$ и $\triangle CEH$ на место $\triangle BGH$, получим прямоугольник.

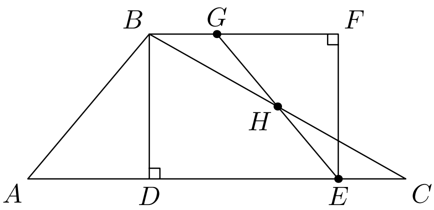


Рис. 152

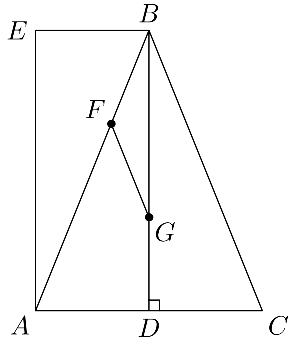


Рис. 153

Если $\triangle ABC$ равнобедренный ($AB = BC$ на рис. 153), то проводим высоту BD, отрезаем тупоугольный треугольник BFG и, перекладывая $\triangle BDC$ на место $\triangle AEB$, получаем прямоугольник.

301. Ответ. 3.

Три числа должны быть непременно: для этого достаточно рассмотреть три ребра кубика, выходящие из вершины, в которой написано число 1 (или 8). Докажем, что найдется расстановка чисел, для которой потребуется ровно три числа. Рассмотрим 2 квадрата. В вершинах первого расположим по часовой стрелке числа 1, 2, 3, 4, в вершинах второго, тоже по часовой стрелке, — числа 5, 6, 7, 8. Пока у нас задействовано два различных числа: 1 и 3. А теперь расположим первый квадрат под вторым: 1 под 5, 2 под 6 и т. д.

302. ***Первое решение.*** Пусть $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1} = \frac{1}{\alpha}$ (т. е. $c = \alpha a$, $b = \alpha d$). Тогда $\frac{ab+1}{\alpha^2 ab+1} = \frac{1}{\alpha}$, или $\alpha ab + \alpha = \alpha^2 ab + 1$. Откуда $(\alpha ab - 1)(\alpha - 1) = 0$. То есть либо $\alpha = 1$ (и тогда $a = c$ и $b = d$), либо $\alpha ab = 1$.

Но $\alpha ab = (\alpha a)b = cb = 1$, т. е. $c = b = 1$; аналогично $a = d = 1$. В обоих случаях мы получили, что $a = c$ и $b = d$.

Второе решение. По свойствам пропорции если $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, то $\frac{A}{B} = \frac{A+C}{B+D} = \frac{A-C}{B-D}$ (если знаменатели не обращаются в ноль). Если $b = d$, то все доказано. Пусть $b \neq d$, тогда $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{ab+1+a+b}{cd+1+c+d} = \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)(d+1)}$, т. е. $a(c+1)(d+1) = c(a+1)(b+1)$. Числа a и $a+1$ взаимно просты, поэтому $c(b+1) \vdots a$. Аналогично, $\frac{a}{c} = \frac{ab+1-a-b}{cd+1-c-d} = \frac{(a-1)(b-1)}{(c-1)(d-1)}$, и из взаимной простоты a и $a-1$ следует, что $c(b-1) \vdots a$. У чисел $b+1$ и $b-1$ общим множителем может быть только число 2, поэтому либо $c \vdots a$, либо $c \vdots \frac{a}{2}$. Записав равенства в виде $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{cd+1}{ab+1}$, получаем, что либо $a \vdots c$, либо $a \vdots \frac{c}{2}$. Это возможно только если $a = c$, $a = 2c$ или $2a = c$. Если $a = 2c$, то $b = 2d$ и $\frac{ab+1}{cd+1} = \frac{4cd+1}{cd+1} \neq 2$. Аналогично не подходит случай $2a = c$.

303. Отложим на продолжении DC за точку C отрезок $CM = CD$ (см. рис. 154). Тогда $BD = BM$ (в треугольнике BDM медиана совпадает с высотой). Имеем $\angle BAK = \angle AKD - \angle ABK = \angle ABC - \angle ABK = \angle KBC = \angle CBM$, так что $\angle BAM = \angle BAK + \angle KAC = \angle CBM + \angle ABC = \angle ABM$. Значит, $\triangle ABM$ — равнобедренный с основанием AB, т. е. $AM = BM$.

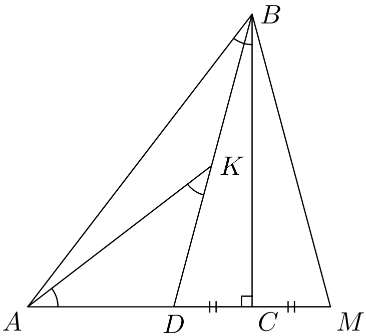


Рис. 154

Значит, $BK = BD - KD = BM - KD = AM - KD = AM - AD = DM = 2DC$, что и требовалось доказать.

304. Занумеруем числа набора в порядке возрастания: $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2003}$. Поскольку суммы $a_{2003} + a_1, \ldots, a_{2003} + a_{2002}$ в набор входить не могут, в него входят разности $a_{2003} - a_1, \ldots, a_{2003} - a_{2002}$. Все эти 2002 разности различны и меньше, чем a_{2003}. Поэтому $a_{2003} - a_1 = a_{2002}$, $a_{2003} - a_2 = a_{2001}, \ldots, a_{2003} - a_{2002} = a_1$. Далее, поскольку $a_{2002} + a_2 > a_{2002} + a_1 = a_{2003}$, в набор входит разность $a_{2002} - a_2$. По тем же причинам в набор входят разности $a_{2002} - a_3, \ldots, a_{2002} - a_{2001}$. Всего таких разностей 2000, все они различны и меньше, чем a_{2001} (ибо $a_{2001} = a_{2003} - a_2 > a_{2002} - a_2$). Поэтому $a_{2002} - a_2 = a_{2000}, \ldots, a_{2002} - a_{2001} = a_1$.

Возьмем произвольное $2 \leqslant k \leqslant 2001$. Тогда $a_{2003} - a_k = a_{2003-k}$ и $a_{2002} - a_k = a_{2002-k}$, откуда $a_{2003-k} - a_{2002-k} = a_{2003} - a_{2002} = a_1$. Таким образом, $a_1 = a_{2003} - a_{2002} = a_{2002} - a_{2001} = a_{2001} - a_{2000} = \ldots = a_2 - a_1$, что и требовалось доказать.

9 класс

305. Пусть $a < b < c$ — длины сторон треугольника. Покажем, что найдется такое число x, что отрезки длин $a + x$, $b + x$, $c + x$ — стороны прямоугольного треугольника. Положим $P(x) = (x+a)^2 + (x+b)^2 - (x+c)^2$. Имеем: $P(c-a-b) = (c-b)^2 + (c-a)^2 - ((c-a)+(c-b))^2 \leqslant 0$. Значит, $P(x)$ имеет корни. Достаточно доказать, что $a + x_1 > 0$, где x_1 — больший корень $P(x)$. Однако это сразу следует из того, что $a + (c - a - b) > 0$. Тогда $x_1 > c - a - b$, значит $a + x_1 > c - b > 0$, поэтому треугольник существует.

306. См. решение задачи 298.

307. Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы угла C (прямой CI) (см. рис. 155). При этом $C \to C$, $A \to A'$, $B \to B'$, $B_0 \to B_0'$, $F \to F'$, следовательно, B_0' — середина отрезка CA', значит, $B_0'F'$ — средняя линия $\triangle A'B'C$, в которую перешла средняя линия $\triangle ABC$, параллельная BC, поэтому F' — точка касания AB с окружностью. При этой симметрии точка M пересечения прямых AB и $A'B'$ перейдет в себя, а значит, лежит на биссектрисе угла C, но эта точка и есть точка пересечения стороны AB с касательной ко вписанной окружности, проведенной в F (прямая $A'B'$).

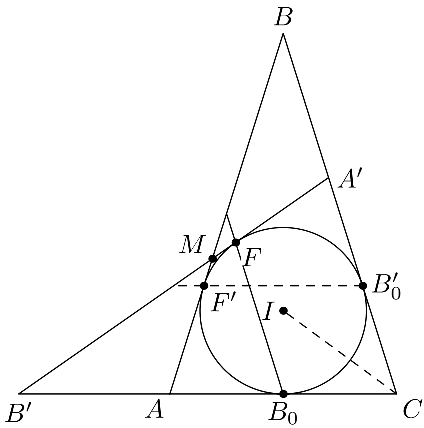


Рис. 155

308. **Ответ.** Победит второй игрок.

Обозначим цифры, выписываемые игроками, последовательно через $a_1, a_2, \ldots$, цифры с нечетными номерами выписывает первый, а с четными — второй. Рассмотрим остатки от деления на 11 знакопеременных сумм $S_0 = 0$, $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 - a_2$, $\ldots$, $S_k = a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + (-1)^{k-1}a_k$. Согласно признаку делимости на 11, после k-го хода на доске возникнет число, делящееся на 11, тогда и только тогда, когда S_k совпадает с одним из $S_0, \ldots, S_{k-1}$. Расположим остатки от деления на 11 по кругу по часовой стрелке от 0 до 10 и изобразим последовательность ходов как процесс перемещения по кругу по неповторяющимся остаткам от деления на 11 сумм $0 = S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$ При этом первый игрок i-м ходом прибавляет к S_{i-1} любое число a_i от 1 до 9, а второй — любое число от -1 до -9. Таким образом, кроме повтора уже встречавшегося остатка, первому игроку запрещен ход против часовой стрелки на 1, а второму — ход по часовой стрелке на 1. После i-го хода свободными останутся $10 - i$ остатков. Игрок гарантированно может сделать ход, если есть хотя бы два свободных остатка, значит, первые восемь ходов игроки сделать смогут, а 11-й ход сделать нельзя никогда.

Рассмотрим ситуацию после седьмого хода (это ход первого), когда свободны 3 остатка.

1) Свободные остатки расположены подряд: $i-1, i, i+1$. Тогда второй выписывает число с остатком i (занимает остаток i), первый — $i+1$, а второй $i-1$ и выигрывает.

2) Остатки расположены так: два рядом — i, $i+1$ и один отдельно — j. Тогда второй занимает один из остатков i, $i+1$, далее либо первый занимает остаток $i+1$, второй j и выигрывает, либо первый занимает j, а второй — один из оставшихся i, $i+1$ и выигрывает.

3) Никакие два остатка не стоят рядом: i, j, k. Тогда второй может занять один из них и после хода первого, второй может занять последний свободный остаток и выиграть.

309. Обозначим через A_1, B_1, C_1 точки касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с его сторонами. Поскольку A', B' и C' симметричны I относительно сторон $\triangle ABC$, то $IA' = IB' = IC' = 2r$, где r — радиус вписанной окружности. Из этого следует, что I — центр описанной окружности $\triangle A'B'C'$, радиус которой $R = 2r = BI$. В прямоугольном треугольнике BA_1I гипотенуза BI в 2 раза больше катета IA_1 тогда и только тогда, когда $\angle IBA_1 = 30°$, $\angle ABC = 2\angle IBA_1 = 60°$.

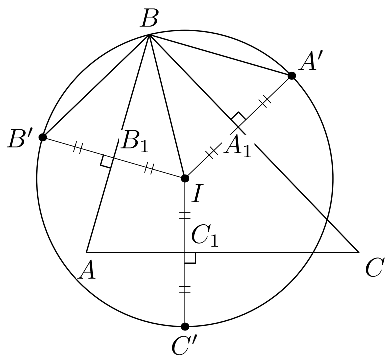


Рис. 156

310. **Ответ.** 98.

Нетрудно проверить, что если все пришедшие, кроме двух человек A и B, были знакомы между собой, то в конце должны были остаться все, кроме A и B, т. е. 98 человек. Докажем, что не могло остаться 99 человек.

Ясно, что человек A, имевший изначально меньше всех знакомых (k), в некоторый момент уйдет. Если больше никто не ушел, то все остальные (кроме A) имели больше k знакомых до ухода A и меньше $k+1$ после его ухода. Но тогда A должен быть знаком со всеми остальными, т. е. $k = 99$, что противоречит строгой минимальности k.

311. Обозначим через $M = \{a_1, \ldots, a_6\}$ множество исходных чисел, через M_i — множество M без a_i, а через A_i — наибольший общий делитель чисел из M_i, $i = 1, \ldots, 6$. Наибольший общий делитель любых чисел A_i и A_j, $i \neq j$, равен наибольшему общему делителю всех чисел $a_1, \ldots, a_6$, т. е. 1, следовательно, $A_1, \ldots, A_6$ попарно взаимно просты. Если все они не равны 1, обозначим через p_i наибольший простой делитель A_i. В силу попарной взаимной простоты чисел A_i, числа p_i попарно различны, и можно считать, что $p_1 < \ldots < p_6$ и $A_1 \geqslant 2$, $A_2 \geqslant 3, \ldots, A_6 \geqslant 13$.

Тогда из $a_1 \in M_2, \ldots, M_6$, следует, что a_1 делится на $A_2 \ldots A_6 \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 15015$. Противоречие с тем, что a_1 четырехзначно. Следовательно, одно из чисел A_i равно 1 и пять чисел в соответствующем множестве M_i взаимно просты в совокупности.

312. Пусть дан выпуклый n-угольник. Утверждение верно при $n = 3$. Пусть $n \geqslant 4$.

Будем называть *триангуляцией* разбиение n-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники; *остроугольной триангуляцией* назовем разбиение n-угольника непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники. Треугольник из триангуляции назовем *крайним*, если две из его сторон являются сторонами n-угольника.

Нам понадобятся следующие утверждения:

(i) *В любой триангуляции найдутся по меньшей мере два крайних треугольника.*

Действительно, сумма углов всех треугольников из триангуляции равна сумме углов n-угольника, т. е. равна $(n-2)\pi$. Поскольку сумма углов треугольника равна π, количество треугольников в триангуляции равно $n-2$. Каждая из n сторон многоугольника является стороной одного из $n-2$ треугольников, причем у одного треугольника не более двух сторон являются сторонами n-угольника. Отсюда легко следует (i).

(ii) *У выпуклого n-угольника не более трех острых углов.*

Действительно, предположив противное, получаем, что у n-угольника найдутся хотя бы 4 тупых внешних угла, сумма которых больше, чем $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$. Но как известно, сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна 2π. Противоречие.

Перейдем к решению задачи.

Предположим, что нашлись две различные остроугольные триангуляции Δ_1, Δ_2 выпуклого n-угольника. Обозначим через A множество всех острых углов n-угольника.

Рассмотрим крайний треугольник T триангуляции Δ_1. Один из его углов является углом n-угольника. А поскольку T остроугольный, этот угол является углом из множества A. Так как найдутся два крайних треугольника в триангуляции Δ_1 (согласно (i)), то два угла из множества A являются углами крайних треугольников триангуляции Δ_1. То же справедливо и для триангуляции Δ_2.

Согласно (ii), в множестве A содержится не более трех углов. Следовательно, хотя бы один угол из множества A одновременно является углом крайнего треугольника T_1 триангуляции Δ_1 и крайнего треугольника T_2 триангуляции Δ_2. Это означает, что треугольники T_1 и T_2 совпадают, т. е. что в Δ_1 и Δ_2 имеется общий крайний треугольник. Отрезав его, перейдем к исходной задаче для выпуклого $(n-1)$-угольника. Продолжая процесс отрезания крайних треугольников, получаем, что Δ_1 и Δ_2 состоят из одинаковых наборов треугольников.

10 класс

313. **Ответ.** $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

Первое решение. Из совпадения наборов следует, что

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x, \text{ т. е.}$$

$$\sin 2x(1 + 2\cos x) = \cos 2x(1 + 2\cos x).$$

а) $1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow \sin 3x = 0$, но $0 \notin \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x\}$.

б) $\sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = 1$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. Наборы совпадают, так как $3x + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow \cos 3x = \sin x$, $\sin 3x = \cos x$.

Второе решение. Сложим 3 единичных вектора, образующих с осью Ox углы α, 2α, 3α соответственно. По условию у получившегося вектора равны координаты по x и по y, так как это суммы одних и тех же трех чисел. Значит, этот вектор, если он не равен нулю, направлен вдоль прямой, образующей угол $\pi/4$ с осью Ox. Но направление суммы трех векторов совпадает с направлением вектора, образующего угол 2α, поскольку два других симметричны относительно него. Итак, $2\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что все углы указанного вида подходят.

Осталось рассмотреть случай, когда сумма трех единичных векторов равна нулю. Нетрудно видеть, что это возможно лишь если углы между ними равны $\frac{2\pi}{3}$, откуда $\alpha = \frac{2\pi}{3} + \pi k$ или $\alpha = \frac{4\pi}{3} + \pi k$. Легко видеть, что тогда $\sin 3\alpha = 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos 2\alpha \neq 0$ и $\cos 3\alpha \neq 0$.

314. См. решение задачи 307.

315. **Ответ.** 870.

Приведем пример. Поскольку $45 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 9$, можно разбить 45 человек на группы по 1, по 2, …, по 9 человек. Пусть люди, принадлежащие одной группе, не знакомы между собой, а люди, принадлежащие разным группам, знакомы. Тогда каждый человек из k-й группы имеет $45 - k$ знакомых. При этом, очевидно, условие задачи выполнено, и общее количество пар знакомых людей равно $\frac{45\cdot 44}{2} - \left(\frac{2\cdot 1}{2} + \frac{3\cdot 2}{2} + \ldots + \frac{9\cdot 8}{2}\right) = 870$.

Докажем, что большего числа знакомств быть не могло. Зафиксируем некоторое k, $0 \leqslant k \leqslant 44$. Пусть имеется некоторый выпускник, который знаком ровно с k людьми. По условию любой его знакомый не может иметь ровно k знакомых. Поэтому количество выпускников, знакомых ровно с k людьми, не превосходит $45 - k$.

Обозначим через A_0, A_1, …, A_{44} количество выпускников, имеющих соответственно 0, 1, …, 44 знакомых. Как показано выше, $A_k \leqslant 45 - k$, кроме того, $A_0 + A_1 + \ldots + A_{44} = 45$.

Оценим общее число знакомств $S = \frac{1}{2}(0\cdot A_0 + 1\cdot A_1 + \ldots + 44\cdot A_{44}) = \frac{1}{2}(A_{44} + (A_{44} + A_{43}) + \ldots + (A_{44} + A_{43} + \ldots + A_{36}) + \ldots + (A_{44} + A_{43} + \ldots + A_0)) \leqslant \frac{1}{2}(1 + (1+2) + \ldots + (1 + 2 + \ldots + 9) + 45 + 45 + \ldots + 45) = \frac{1}{2}(45\cdot 44 - ((9 + 8 + \ldots + 2) + (9 + 8 + \ldots + 3) + \ldots + 9)) = 870$.

316. Назовем $2n$ углов, на которые отмеченные прямые делят полный угол, *элементарными*, а две отмеченные прямые, образующие элементарный угол, — *соседними*. Поскольку внутри элементарных углов отмеченные прямые не проходят, для любых двух соседних прямых отмеченной будет прямая, делящая пополам вторую пару образованных ими углов (смежных с элементарными). Если эту прямую повернуть на 90° вокруг точки O, она будет делить пополам пару элементарных углов. Прямых, делящих пополам элементарные углы, столько же, сколько отмеченных, поэтому *если совокупность всех отмеченных прямых повернуть на* 90° *вокруг точки O, она перейдет в совокупность всех прямых, делящих пополам элементарные углы.*

Пусть α — наибольший из элементарных углов, а β и γ — соседние элементарные углы, биссектрисами которых становятся после поворота на 90° стороны угла α. Очевидно, тогда угол α равен полусумме углов β и γ, откуда, в силу максимальности α, следует, что $\alpha = \beta = \gamma$. Поворачивая теперь на 90° в обратном направлении углы β и γ, получим, что максимальными являются также элементарные углы, граничащие с α. Но если элементарные углы, граничащие с максимальным, также максимальны, то все элементарные углы равны между собой, что и требовалось доказать.

317. **Ответ.** $x = \pm 1$.

Относительно z данное уравнение является квадратным: $z^2 + 2xy \cdot z + x^2 + y^2 - 1 = 0$. Его дискриминант равен $D = 4x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 4 = 4(x^2-1)(y^2-1)$. Если $x^2 - 1 > 0$, то $D < 0$, например, при $y = 0$, если $x^2 - 1 < 0$, то $D < 0$, например, при $y = 2$. При $x = \pm 1$ и любом y имеем $D = 0$, поэтому уравнение имеет решение.

318. ***Первое решение.*** Обозначим через F точку касания ω с описанной окружностью (см. рис. 157). Так как $A_0F \perp BC$, F — середина дуги BC. Если I — центр вписанной окружности $\triangle ABC$, то $FB = FI = FC$, поскольку $\angle FBI = \angle FBC + \angle CBI = \angle FAC + \angle CBI = \frac{\alpha + \beta}{2} = \angle BAI + \angle ABI = \angle BIF$, где α и β — соответственно величины углов A и B треугольника ABC.

Так как $IA' \perp BC$, а $A_0A' = A_0F$, $\angle IA'F = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$. Следовательно, $\angle BA'F = 135^\circ$. Треугольники $BA'F$ и $IA'F$ равны по двум сторонам и тупому углу $\Rightarrow$ $BA' = A'I = r \Rightarrow \angle IBA' = 45^\circ \Rightarrow \angle ABC = 2\angle IBA' = 90^\circ$. Проводя те же рассуждения в обратном порядке, убеждаемся, что окружность, построенная для другого катета, также касается описанной.

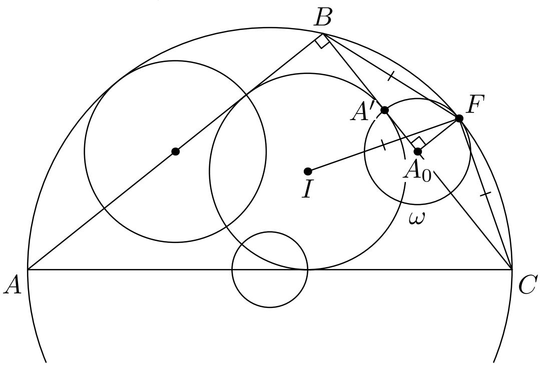


Рис. 157

Второе решение. Используем стандартные обозначения элементов треугольника. Так как F — середина дуги BC, то $\angle FBA_0 = \frac{\alpha}{2}$, $FA_0 = BA_0 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Нетрудно видеть, что $A_0A' = |BA_0 - BA'| = \frac{1}{2}|b - c|$. Пусть вписанная окружность касается стороны AC в точке B'. Тогда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{IB'}{AB'} = \frac{r}{p-a} = \frac{S}{p(p-a)}$. В силу формулы Герона, равенство $FA_0 = A_0A'$ принимает вид $a\,\dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)} = |b-c|$, $a^2\,\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} = (b-c)^2$, $a^2\,\dfrac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)} = (b-c)^2$, $a^2\,\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2} = (b-c)^2$, $a^4-a^2(b-c)^2 = (b-c)^2(b+c)^2-a^2(b-c)^2$, $a^4 = (b^2-c^2)^2$, $a^2 = |b^2-c^2| \iff \left\{\begin{array}{l} a^2 = b^2-c^2, \\ a^2 = c^2-b^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a^2+c^2 = b^2, \\ a^2+b^2 = c^2 \end{array}\right. \iff$ один из углов B, C — прямой. Аналогичные выкладки показывают, что окружность, соответствующая второму катету, касается описанной.

319. Лемма. *Из любого множества, состоящего не менее, чем из пяти трехзначных чисел, взаимно простых в совокупности, можно удалить одно число так, что оставшиеся также будут взаимно просты в совокупности.*

Доказательство. Обозначим через $M = \{a_1, \ldots, a_k\}$ множество исходных чисел, через M_i — множество M без a_i, а через A_i — наибольший общий делитель чисел из M_i, $i = 1, \ldots, k$. Наибольший общий делитель любых чисел A_i и A_j, $i \neq j$, равен наибольшему общему делителю всех чисел $a_1, \ldots, a_k$, т. е. 1, следовательно $A_1, \ldots, A_k$ попарно взаимно просты. Если все они не равны 1, обозначим через p_i наибольший простой делитель A_i. В силу попарной взаимной простоты чисел A_i, числа p_i попарно различны, и можно считать, что $p_1 < \ldots < p_k$ и $A_1 \geqslant 2$, $A_2 \geqslant 3$, $A_3 \geqslant 5$, $A_4 \geqslant 7$, $A_5 \geqslant 11$.

Так как $a_1 \in M_2, M_3, M_4, M_5$, то a_1 делится на $A_2A_3A_4A_5 \geqslant 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11 = 3003$. Противоречие с тем, что a_1 трехзначно. Следовательно, одно из чисел A_i равно 1, и числа в соответствующем множестве M_i взаимно просты в совокупности.

Применяя лемму, из исходного множества можно последовательно удалить все числа, кроме четырех, взаимно простых в совокупности.

320. Ответ. Не всегда.

Пусть разность весов фальшивых монет меньше, чем вес настоящей. Тогда во взвешиваниях имеет смысл сравнивать лишь равные количества монет. Предположим, что требуемый алгоритм существует.

Выпишем для каждой последовательности результатов взвешиваний, которая может получиться в нашем алгоритме, единственную пару фальшивых монет, при которой эта последовательность получается. Заметим, что если в последовательности есть хотя бы одно взвешивание, при котором нет равновесия, то мы можем определить, какая из фальшивых монет тяжелее настоящей. Действительно, если во взвешивании участвует одна фальшивая монета, то это определяется очевидным образом. Если же участвуют обе, то они находятся на разных чашах весов (иначе весы в равновесии), и монета на перевесившей чаше тяжелее.

В таком случае, если в нашей паре монет поменять две фальшивые местами, то получится другая последовательность взвешиваний. Поэтому всем парам, кроме, быть может, одной (при которой весы все время в равновесии) соответствует по 2 последовательности. Всего может быть $\frac{17 \cdot 16}{2} = 136$ пар, поэтому число последовательностей не меньше $2 \cdot 136 - 1 = 271$, но их не больше $3^5 = 243 < 271$. Противоречие.

11 класс

321. Ответ. 2 и 3.

Первое решение. Имеем: $y + 1 = p^\alpha$, $y^2 - y + 1 = p^\beta$, где $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$. Если $\beta = 0$, то $y = 1$, $p = 2$ $(x = 1)$. Пусть $\beta > 0$. Тогда p — общий делитель $y + 1$ и $y^2 - y + 1$, а значит, и чисел $y + 1$ и $(y + 1)^2 - (y^2 - y + 1) = 3y$. Отсюда, поскольку НОД $(y, y + 1) = 1$, $p = 3$. Так бывает: $3^2 = 2^3 + 1$.

Второе решение. $p^x = (p^\alpha - 1)^3 + 1 = p^\alpha(3 + A)$, где A делится на p. Поскольку $3 + A = p^\gamma$ $(\gamma \geqslant 0)$, то либо $p = 3$, либо $\gamma = 0$. В последнем случае $p^x = p$, $x = 1$. Значит, $y = y^3$, откуда $y = 1$, $p = 2$.

Замечание. Во втором решении мы фактически доказали следующее

Утверждение. *Если* $p^x = y^{2n+1} + 1$ $(x, y, n$ *— натуральные) и* $y > 1$, *то* $2n + 1 = p^z$, *где* z *— натуральное число.*

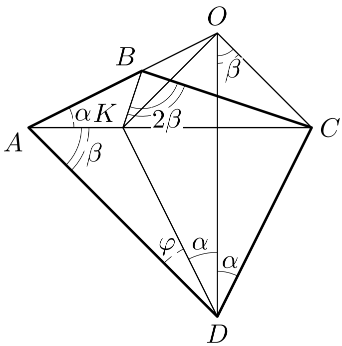


Рис. 158

322. Проведем биссектрису $\angle KDC$ до пересечения с AB в точке O. Возможны 3 случая: 1) точка O лежит на луче AB за точкой B; 2) $O = B$; 3) $O \in [AB]$.

1) Положим $\varphi = \angle ADK$. Четырехугольник $AOCD$ — вписанный, так как $\angle OAC = \angle ODC = \alpha$. Значит, $\angle DOC = \angle DAC = \beta$, $\angle ADO = \angle ACO = \angle OCK = \alpha + \varphi$. Так как DO — биссектриса $\angle KDC$ и $KD = DC$, то DO — серединный перпендикуляр к KC. Отсюда $\angle KOD = \angle COD = \beta$, $\angle OKC = \alpha + \varphi$. Четырехугольник $KBOC$ — вписанный, так как $\angle KBC = \angle KOC = 2\beta$. Отсюда $\angle BCA = \angle KOA = \angle OKC - \angle OAC = (\alpha + \varphi) - \alpha = \varphi$, т. е. $\angle BCA = \angle KDA$.

2) Видим, что $KB = BC$ (см. рис. 159). $\angle CKD = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle KDA = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$; аналогично, $\angle ABK = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$, т. е. $\angle KDA = \angle KBA$.

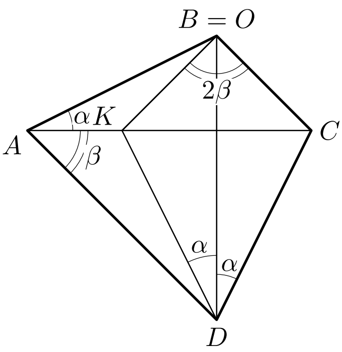


Рис. 159

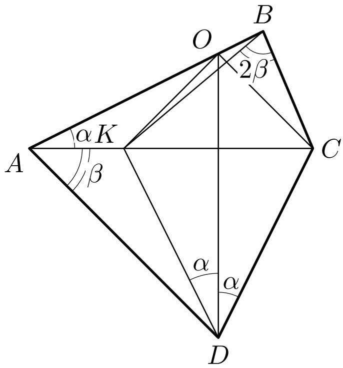


Рис. 160

3) Покажем, что этот случай невозможен. Предположим противное. Как и раньше, $\angle OAC = \angle ODC = \alpha$. Тогда четырехугольник $AOCD$ — вписанный, значит, $\angle COD = \angle CAD = \beta$, $\angle KOC = 2\angle COD = 2\beta = \angle KBC$. Следовательно, четырехугольник $KOBC$ — вписанный, но касательная к описанной окружности $\triangle KOC$ в точке O горизонтальна, а точка B лежит выше нее. Поэтому B не может лежать на той же окружности. Противоречие.

Итак, $\angle KDA = \angle BCA$, или $\angle KDA = \angle KBA$.

323. По условию функция $f(x) - x$ возрастает. Следовательно, $f(x) - x > f(y) - y$ при любых $x > y > 0$. Значит,

$$f(x) - f(y) > x - y. \qquad (*)$$

Аналогично, из возрастания функции $f(x^2) - x^6$ заключаем, что

$$f(x) - f(y) > x^3 - y^3. \qquad (**)$$

Для того чтобы проверить, что функция $f(x^3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,x^6$ возрастает, достаточно установить, что $f(x) - f(y) > \frac{\sqrt{3}}{2}\,(x^2 - y^2)$ при всех $x > y > 0$. Проверим это с помощью неравенств $(*)$ и $(**)$. Для этого докажем неравенство $\max\{1, x^2 + xy + y^2\} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\,(x + y)$.

Действительно,

$$\max\{1, x^2 + xy + y^2\} \geqslant \sqrt{x^2 + xy + y^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\,(x + y),$$

поскольку

$$4(x^2 + xy + y^2) - 3(x + y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0.$$

Следовательно, $\frac{\sqrt{3}}{2}\,(x^2 - y^2)$ не превосходит наибольшего из чисел $x - y$ и $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Значит, $f(x) - f(y) > \max\{x - y, x^3 - y^3\} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\,(x^2 - y^2)$.

324. Выберем на плоскости начало координат O и рассмотрим сумму $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{OA_k} \cdot \overline{OB_k}$. Выберем такую нумерацию точек B_i, что соответствующая сумма S максимальна. Рассмотрим теперь нумерацию точек B, в которой B_i и B_j обозначены B_j и B_i и ее сумму S'. По предположению максимальности $S \geqslant S'$, но

$$S - S' = \overline{OA_i} \cdot \overline{OB_i} + \overline{OA_j} \cdot \overline{OB_j} - \overline{OA_i} \cdot \overline{OB_j} - \overline{OA_j} \cdot \overline{OB_i} \geqslant 0.$$

Преобразуя, получим

$$(\overline{OA_i} - \overline{OA_j}) \cdot (\overline{OB_i} - \overline{OB_j}) = \overline{A_jA_i} \cdot \overline{B_jB_i} \geqslant 0. \qquad (*)$$

Итак, в нумерации с максимальным S неравенство $(*)$ выполняется для любых i и j. А это равносильно условию задачи.

325. Уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ имеет вид

$$(x^2 + cx + d)^2 + a(x^2 + cx + d) + b =$$
$$= (x^2 + ax + b)^2 + c(x^2 + ax + b) + d \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2(c - a)x^3 + lx^2 + mx + n = 0,$$

где l, m и n — коэффициенты, получающиеся после раскрытия скобок и приведения подобных членов. Допустим, что $c - a \neq 0$. Тогда в левой части последнего уравнения — многочлен третьей степени, имеющий хотя бы один корень, что противоречит условию задачи. Поэтому $c = a$. Если при этом еще и $b = d$, то $P(x) = Q(x)$, и равенство $P(Q(x)) = Q(P(x))$ выполняется при всех x. Значит, $b \neq d$.

326. См. решение задачи 310.

327. Обозначим через M, M' точки касания сфер ω, ω' с плоскостью ABD, а через N, N' — точки касания сфер ω, ω' с плоскостью ACD соответственно (см. рис. 161). Пусть D' — некоторая точка на продолжении отрезка AD за точку A.

Из равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки к сфере, получаем: $DM = DN$, $D'M' = D'N'$, $BM = BT$, $CN = CT$, $BM' = BT'$, $CN' = CT'$, $AM = AN = AT$, $AM' = AN' = AT'$. Отсюда следуют равенства треугольников (по трем сторонам): $\triangle DMA = \triangle DNA$, $\triangle D'M'A = \triangle D'N'A$, $\triangle ABM = \triangle ABT$, $\triangle ABM' = \triangle ABT'$, $\triangle ACN = \triangle ACT$, $\triangle ACN' = \triangle ACT'$.

Из выписанных равенств: $\angle BAT + \angle BAT' = \angle BAM + \angle BAM' = \angle MAM' = 180^\circ - \angle DAM - \angle D'AM' = 180^\circ - \angle DAN - \angle D'AN' = \angle NAN' = \angle CAN + \angle CAN' = \angle CAT + \angle CAT'$.

Итак, $\angle BAT - \angle CAT = \angle CAT' - \angle BAT'$, откуда $\angle BAT = \angle CAT'$, что и требовалось.

328. См. решение задачи 320.

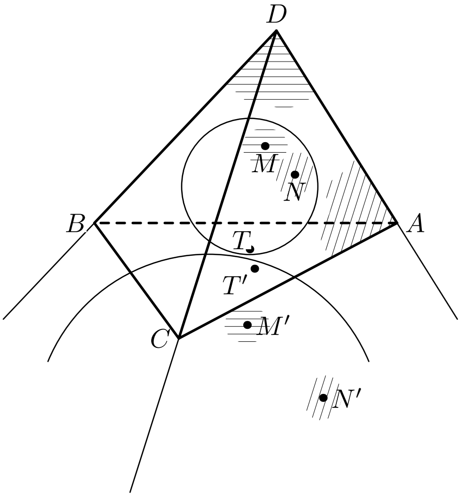


Рис. 161

2003–2004 г.

8 класс

329. Ответ. В 17.15 или в 17.45.

Пусть в 17.00 «Ауди» (А) находился на расстоянии x, а БМВ (Б) — на расстоянии $y = 2x$ от перекрестка (П), z — расстояние, которое проехали автомобили за 1 час. Если бы в 17.00 А и Б уже проехали П, то в 18.00 они были бы на расстоянии $x + z$ и $2x + z$ от П, но $2x + z \neq 2(x + z)$ при $z \neq 0$. Аналогично, невозможен случай, что в 18.00 они двигались в сторону П. Значит, какой-то из автомобилей пересек перекресток между 17.00 и 18.00. Это не мог быть Б, так как если А пересекает П позже, то в 17.00 Б ближе к П, чем А; а если А пересекает П раньше, то в 18.00 А находится дальше от перекрестка, чем Б. Значит, между 17.00 и 18.00 А пересек П, а Б — нет. Тогда в 18.00 А находился на расстоянии $z - x$ от П, а Б — на расстоянии $2x - z$ (если он двигался в 18.00 к перекрестку), либо $2x + z$ от П. В первом случае $2x - z = 2(z - x) \Rightarrow 3z = 4x$. Во втором — $2x + z = 2(z - x) \Rightarrow z = 4x$. Значит, в 18.00 А находился либо на расстоянии $\frac{1}{3}x$, либо на расстоянии $3x$ от П, и поэтому он пересек П либо в 17.45, либо в 17.15.

330. Ответ. 13.

Пусть A — одна из самых легких гирь, а B — одна из гирь, следующих по весу за A. Очевидно, пару гирь $\{A, B\}$ можно уравновесить только такой же парой. Поэтому есть хотя бы по две гири A и B. Пару $\{A, A\}$

также можно уравновесить только такой же парой. Поэтому гирь A — по крайней мере 4. По аналогичным причинам есть хотя бы 4 самых тяжелых гири E и хотя бы две гири предыдущего веса D. Кроме того, по условию есть хотя бы одна гиря C, которая тяжелее A и B и легче D и E. Таким образом, всего гирь в нашем наборе не меньше, чем $4+4+2+$ $+2+1=13$. С другой стороны, легко проверить, что набор из 13 гирь: $\{1,1,1,1,2,2,3,4,4,5,5,5,5\}$ удовлетворяет условию задачи.

331. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC, B_2 и B_3 — проекции точки B_1 на стороны BA и BC (см. рис. 162), AA', BB' и CC' — высоты $\triangle ABC$. Тогда B_1B_2 — средняя линия треугольника ACC', т.е. $B_1B_2=\frac{1}{2}CC'$. Аналогично, $B_1B_3=\frac{1}{2}AA'$ и, значит, $BB_1=\frac{1}{2}(AA'+$ $+CC')$. Аналогично, $CC_1=\frac{1}{2}(AA'+BB')$, $AA_1=\frac{1}{2}(BB'+CC')$, откуда AA_1+BB_1+ $+CC_1=AA'+BB'+CC'$. Но AA_1 — наклонная, AA' — перпендикуляр, т.е. $AA_1 \geqslant AA'$, причем равенство выполняется только если A_1 совпадает с A'. Если хотя бы одно из трех подобных неравенств строгое, то $AA_1+BB_1+CC_1>AA'+BB'+CC'$, что неверно. Тогда A_1 совпадает с A', т.е. медиана является высотой, поэтому $BA=$ $=CA$. Аналогично, $AB=BC$. Утверждение доказано.

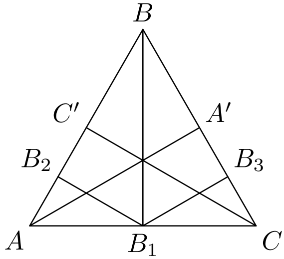


Рис. 162

332. Ответ. Не существует.

Предположим, что существует такая расстановка чисел, что оба червяка доберутся до противоположного углового кубика. Пусть числа, стоящие в начальном и конечном угловых кубиках равны a и b соответственно. Можно считать, что $a<b$. Заметим, что числа a и b отличаются по крайней мере на $10\cdot3\cdot9$, так как второй червяк сделал хотя бы $10\cdot3$ ходов (как минимум по 10 в каждом из трех направлений). Также можно считать, что каждый червяк не заползает в каждый кубик больше одного раза. Тогда первый червяк должен последовательно проползти через кубики с числами $a, a+8, a+16, a+24, \ldots, a+72, \ldots, b$. Второй должен последовательно проползти через кубики с числами $a, a+9, a+18, a+27, \ldots, a+72, \ldots, b$. Рассмотрим теперь шахматную раскраску нашего куба. Можно считать, что кубик с числом a покрашен в черный цвет. Заметим, что соседние по грани кубики должны иметь разные цвета. Это означает, что кубики с числами $a, a+18, a+36, \ldots, a+72$ должны быть покрашены в черный цвет, а кубики $a+8, a+24, a+40, \ldots, a+72$ должны быть покрашены в белый

цвет. То есть кубик с числом $a+72$ должен быть покрашен и в черный, и в белый цвета. Полученное противоречие завершает доказательство.

333. Ответ. Не может.

Пусть среди чисел a, b, c есть различные, и пусть для определенности a — наибольшее из этих чисел (или одно из наибольших). Если $a>b$, то $a^2/b>a$. Иначе $a=b>c$, и тогда $b^2/c>b=a$. Итак, наибольшее из данных шести чисел больше наибольшего из чисел a, b, c. Аналогично, наименьшее из данных шести чисел меньше наименьшего из чисел a, b, c. Итого получаем не менее четырех различных чисел.

Если же числа a, b, c одинаковы, то $a=b=c=a^2/b=b^2/c=c^2/a$.

334. Средняя линия трапеции (параллелограмма) делит его диагональ пополам. Значит, MN проходит через середину O диагонали AC (см. рис. 163). Но центр описанной около треугольника окружности лежит на серединном перпендикуляре к его стороне, т. е. $O_1O\perp AC$ и $O_2O\perp AC$, где O_1 и O_2 — центры описанных окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$. Тогда отрезок O_1O_2 проходит через точку O, лежащую на MN, поэтому именно она делит отрезок O_1O_2 пополам (по условию точки O_1 и O_2 не лежат на прямой MN). Значит, диагонали четырехугольника AO_1CO_2 делятся точкой O пополам и перпендикулярны, следовательно, он — ромб. Отсюда $O_1C\parallel O_2A$ и, значит, $\angle O_1CB=$ $=\angle O_2AD$. Тогда $\triangle BO_1C=\triangle DO_2A$ (равнобедренные с равными боковыми сторонами и углами при основании). Значит, $AD=BC$ и, следовательно, $ABCD$ — параллелограмм. Отметим, что решение не зависит от расположения точек O_1 и O_2 на рисунке.

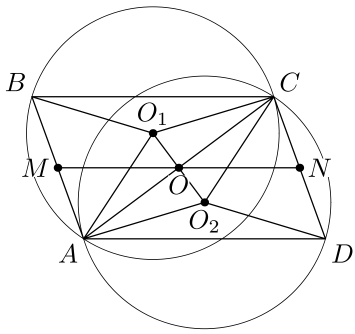


Рис. 163

335. Ответ. 1.

Докажем, что условию удовлетворяет набор из одного числа 13579. В самом деле, пусть $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ — пятизначное число, цифры которого удовлетворяют неравенствам $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$. Тогда, если $a_1\neq 1$, то $2\leqslant a_1<a_2$. Если при этом $a_2\neq 3$, то $4\leqslant a_2<a_3$. Если, кроме того, $a_3\neq$ $\neq 5$, то $6\leqslant a_3<a_4$. Предположив еще, что $a_4\neq 7$, получим $8\leqslant a_4<a_5$, т. е. равенство $a_5=9$, означающее совпадение цифр в разряде единиц.

336. Ответ. Нельзя.

Предположим противное. Рассмотрим некоторую точку A с целыми координатами, пусть в ней записано число a. Пусть a имеет n различных простых делителей. Возьмем на плоскости точку A_1 с целыми координатами

натами. На прямой AA_1 имеется точка B_1 также с целыми координатами (например, точка B_1, симметричная точке A относительно A_1). Поскольку числа, записанные в точках A, A_1 и B_1, имеют общий делитель, бо́льший 1, они (и, в частности, число a) делятся на некоторое простое число p_1. Возьмем на плоскости точку A_2 с целыми координатами, не лежащую на прямой AA_1. На прямой AA_2 имеется точка B_2 с целыми координатами. Числа, записанные в точках A, A_2 и B_2 (в частности, число a) делятся на некоторое простое число p_2. Заметим, что $p_1 \neq p_2$, ибо в противном случае числа, записанные в точках A, A_1 и A_2, имели бы общий делитель $p_1 = p_2$, что невозможно. Продолжая эту процедуру далее, построим прямые AA_3, AA_4, ..., AA_{n+1}, каждой из которых соответствует новый простой делитель числа a. Таким образом, получаем, что число a имеет $n+1$ различных простых делителей. Противоречие.

9 класс

337. См. решение задачи 330.

338. По условию $AM = MA_0$. Поскольку точка пересечения медиан делит медиану в отношении $2:1$, считая от вершины, то $2MA' = AM$. Отсюда $2MA' = MA_0$, и $MA' = A_0A'$. В четырехугольнике $BMCA_0$ диагонали делятся их точкой пересечения A' пополам, поэтому $BMCA_0$ — параллелограмм, следовательно, $\angle A_0CM = \angle A_0BM$.

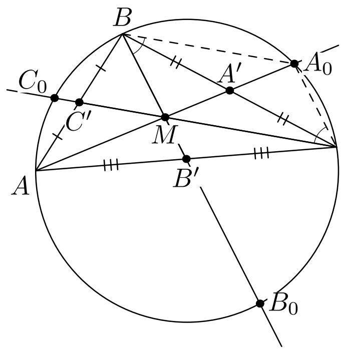


Рис. 164

По теореме о вписанном угле $\overset{\frown}{A_0BC_0} = 2\angle A_0CM = 2\angle A_0BM = \overset{\frown}{A_0CB_0}$. Отсюда получаем равенство хорд A_0B_0 и A_0C_0, так как равны стягиваемые ими дуги.

339. См. решение задачи 332.

340. Обозначим эти числа a, b и c. Положим $x = \text{НОД}(b, c)$, $y = \text{НОД}(c, a)$ и $z = \text{НОД}(a, b)$. Предположим, что числа a, b и c не имеют общего делителя, бо́льшего единицы. Тогда числа x, y и z попарно взаимно просты. Поэтому можно положить $a = kyz$, $b = lxz$ и $c = mxy$, где k, l и m — некоторые натуральные числа. Из определения наибольшего общего делителя следует, что числа ky и lx взаимно просты. По условию $(kyz \cdot lxz) \vdots (kyz + lxz)$, значит, $(ky \cdot lx \cdot z) \vdots (ky + lx)$. Заметим, что $\text{НОД}(ky, ky + lx) = \text{НОД}(ky, lx) = 1$ и, аналогично, $\text{НОД}(lx, ky + lx) = 1$. Таким образом, $z \vdots (ky + lx)$. Стало быть, $z \geqslant ky + lx \geqslant x + y$.

Рассуждая аналогично, получим, что $x \geqslant y + z$ и $y \geqslant x + z$. Но эти три неравенства не могут выполняться одновременно. Противоречие.

341. Ответ. Не могло.

Предположим, что требуемая расстановка цифр возможна. Напомним критерий делимости числа на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр, стоящих на четных местах, имеет тот же остаток при делении на 11, что и сумма цифр, стоящих на нечетных местах. Рассмотрим шахматную раскраску клеток нашей таблицы. Тогда в каждой строке сумма цифр, стоящих на черных клетках, имеет тот же остаток при делении на 11, что и сумма цифр, стоящих на белых клетках. То есть и во всей таблице сумма цифр, стоящих на черных клетках, имеет тот же остаток при делении на 11, что и сумма цифр, стоящих на белых клетках. Рассмотрим теперь 99 столбцов, в которых получились делящиеся на 11 числа. Для клеток этих столбцов аналогично получаем, что сумма цифр, стоящих на черных клетках, имеет тот же остаток при делении на 11, что и сумма цифр, стоящих на белых клетках. Но тогда и в оставшемся столбце получаем, что сумма цифр, стоящих на черных клетках, имеет тот же остаток при делении на 11, что и сумма цифр, стоящих на белых клетках. Но это означает, что это число делится на 11.

342. По условию $|x-y| < 2 \Rightarrow x^2-2xy+y^2 < 4 \Rightarrow x^2+2xy+y^2 < 4(1+ xy) \Rightarrow x + y < 2\sqrt{xy+1}$, так как x и y положительны. Аналогично, $y + z < 2\sqrt{yz+1}$, $z + x < 2\sqrt{zx+1} \Rightarrow 2x + 2y + 2z < 2\sqrt{xy+1} + 2\sqrt{yz+1} + 2\sqrt{zx+1} \Rightarrow x + y + z < \sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1}$.

343. Пусть при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BA}$ точка M перешла в точку M' (см. рис. 165). При этом треугольник BMC перешел в треугольник $AM'D$. Четырехугольник $ANDM'$ вписанный, поскольку $\angle AM'D + \angle AND = \angle BMC + \angle AND = (180^\circ - \angle MBC - \angle MCB) + (360^\circ - \angle MNA - \angle MND) = 180^\circ$. Поэтому $\angle M'ND = \angle M'AD$, и $\angle MND + \angle M'ND = \angle MND + \angle M'AD = \angle MND + \angle MBC = 180^\circ$. Значит, точки M, N и M' лежат на одной прямой, следовательно, $MN \parallel \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BA}$.

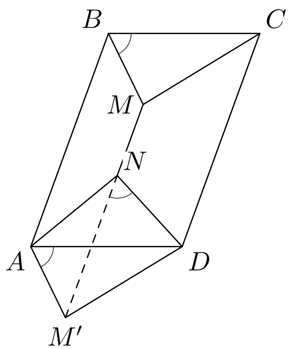


Рис. 165

344. Ответ. $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Занумеруем окошки слева направо числами от 1 до n, а через k_i обозначим номер окошка, в которое делается i-й по счету выстрел ($i = 1, 2, 3, \dots$).

Серия из $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ выстрелов, определенная равенствами $k_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}=n$ и $k_i=2i-1$ для $i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$, гарантирует поражение мишени (легко проверить, что если вначале мишень находится в m-м окошке и $m\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$, то результативным окажется m-й выстрел; если же $m>\left[\frac{n}{2}\right]$, то мишень будет поражена последним выстрелом).

Покажем, что никакая серия из меньшего числа выстрелов требуемым свойством не обладает.

В самом деле, если произведено не более $\left[\frac{n}{2}\right]$ выстрелов, то для $m=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]+1$ условием поражения мишени, находившейся вначале в m-м окошке, является равенство $k_i=m+i-1$ хотя бы для одного из значений i. Но каждый выстрел может обеспечить выполнение только одного из требующихся равенств. Следовательно, найдется такое число $m_0\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$, что $k_i\neq m_0+i-1$ для $i=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$; это и означает, что для произвольной серии из $\left[\frac{n}{2}\right]$ (и, тем более, из меньшего числа) выстрелов существует начальное положение мишени, при котором она останется непораженной.

10 класс

345. По условию $a+b<\frac{\pi}{2}$, поэтому $\cos a>\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\sin b$, так как $\cos x$ убывает на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Аналогично, $\cos b>\sin c$ и $\cos c>\sin a$. Сложив три полученных неравенства, получаем требуемое.

346. См. решение задачи 338.

347. См. решение задачи 340.

348. Пусть A_1, A_2, $\ldots$, A_N — отмеченные точки, и каждое из расстояний A_iA_j ($1\leqslant i<j\leqslant N$) равно одному из n фиксированных чисел r_1, r_2, $\ldots$, r_n. Это означает, что для каждого i ($1\leqslant i\leqslant N$) все отмеченные точки, кроме A_i, лежат на одной из n окружностей $O(A_i,r_1),O(A_i,r_2),\ldots,O(A_i,r_n)$ (через $O(X,r)$ мы обозначаем окружность радиуса r с центром в точке X).

Введем на плоскости систему координат так, что оси координат не параллельны прямым A_iA_j ($1\leqslant i<j\leqslant N$). Рассмотрим отмеченную точку с наименьшей абсциссой, пусть это точка A_1. Среди прямых $A_1A_2,A_1A_3,\ldots,A_1A_N$ найдем прямую (или одну из прямых) с наибольшим угловым коэффициентом, пусть это прямая A_1A_2. Точки $A_3,A_4,\ldots,A_N$ лежат в одной полуплоскости α относительно прямой A_1A_2.

По условию каждая из точек $A_3,A_4,\ldots,A_N$ является точкой пересечения окружностей $O(A_1,r_k)$ и $O(A_2,r_l)$ для некоторых $k,l\in\{1,2,\ldots,n\}$. Каждая из n^2 пар таких окружностей имеет не более одной точки пересечения, принадлежащей полуплоскости α. Следовательно, среди $N-2$ точек $A_3, A_4, \ldots, A_N$ имеется не более n^2 различных. Отсюда $N-2 \leqslant n^2$, и $N \leqslant n^2+2 \leqslant (n+1)^2$.

349. Пусть a_{n-1} и a_n не взаимно просты. Тогда они имеют общий простой делитель p, т. е. $a_{n-1}=pm$, $a_n=pk$, $m, k \in \mathbb{Z}$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения. Из тождества $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ получаем (приравнивая свободные члены и коэффициенты при x):

$$x_1x_2\ldots x_n = \pm a_n = \pm pk;$$

$$x_1x_2\ldots x_{n-1}+x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n+ +x_1x_2\ldots x_{n-3}x_{n-1}x_n+\ldots+x_1x_3x_4\ldots x_{n-1}x_n+ +x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n = \pm a_{n-1} = \pm pm.$$

Из первого равенства вытекает, что один из корней делится на p. Без ограничения общности x_1 делится на p. Тогда во втором равенстве все слагаемые левой части, кроме $x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n$, делятся на p. Значит, $x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n$ также делится на p, т. е. хотя бы один из корней $x_2, x_3, \ldots, x_n$ не взаимно прост с x_1. Противоречие.

350. **Ответ.** 2.

Набор с указанными свойствами не может состоять из одного числа. В самом деле: для каждого $N=\overline{abcde}$ имеется различающееся с N во всех разрядах число $G=\overline{ggggg}$, где g — цифра, отличная от нуля и от a, b, c, d, e. Покажем, что числа $N_1=13579$ и $N_2=12468$ образуют набор, удовлетворяющий условиям задачи. Пусть $A=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ — произвольное число, для цифр которого выполнены неравенства $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$. Тогда, если A не совпадает в разряде единиц ни с N_1, ни с N_2, то $a_5 \leqslant 7$ и, следовательно, $a_4 \leqslant 7$; если при этом нет совпадений и в разряде десятков, то $a_4 \leqslant 5$ и $a_3 \leqslant 5$. Если, кроме того, нет совпадений и в разряде сотен, то $a_3 \leqslant 3$, откуда $a_2 \leqslant 3$; предположив еще, что $a_2 \neq 2$ и $a_2 \neq 3$, придем к равенству $a_1=1$, означающему совпадение A с N_1 (и с N_2) в самом старшем разряде.

351. Совершим гомотетию с центром в точке A и положительным коэффициентом k, переводящую окружность ω_1 в окружность ω_1', равную ω_2. Условимся образы точек и прямых при этой гомотетии обозначать штрихами. Пусть B_1 — вторая (отличная от A) точка пересечения ω_1' и ω_2. Окружности ω_1' и ω_2 симметричны относительно прямой AB_1, причем при этой симметрии T_1' переходит в T_2, t_1' переходит в t_2, и M_1' переходит в M_2. Таким образом, $AM_2=AM_1'=kAM_1$ (k не зависит от положения точек T_1 и T_2). Тогда все треугольники AM_1M_2 гомотетичны с центром A (так как точки M_1 и M_2 лежат на прямых l_1 и l_2, проходящих через A, по разные стороны от прямой AB_1, и отношение $AM_2 : AM_1$ постоянно).

Отсюда следует, что середины отрезков M_1M_2 лежат на фиксированной прямой, проходящей через точку A.

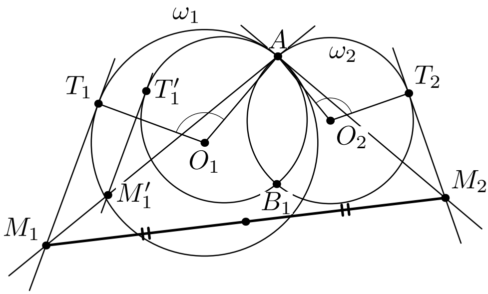


Рис. 166

352. Рассмотрим два прямоугольника: прямоугольник $(k+1)\times n$ и прямоугольник $k\times(n+1)$, у которых совпадает левая нижняя клетка. Назовем часть прямоугольника $(k+1)\times n$, не покрытую прямоугольником $k\times(n+1)$ *черной* (это полоска $1\times n$), а часть прямоугольника $k\times(n+1)$, не покрытую прямоугольником $(k+1)\times n$ *белой* (это вертикальная полоска $k\times 1$). Объединение этих частей назовем *конструкцией*.

Если в каком-то положении конструкции на плоскости в белую часть попало больше отмеченных клеток, чем в черную, то мы нашли прямоугольник $k\times(n+1)$, в котором больше p отмеченных клеток.

Пронумеруем клетки белой полоски сверху вниз. Рассмотрим любую отмеченную клетку и возьмем k конструкций: такую, чтобы наша отмеченная клетка накрывалась первой клеткой белой полоски, такую, чтобы отмеченная клетка накрывалась второй клеткой белой полоски, и т. д. Черные полоски этих конструкций не перекрываются и в объединении дают прямоугольник $k\times n$, т. е. в сумме накрывают не больше p отмеченных клеток. Каждая белая полоска накрывает хотя бы одну отмеченную клетку. Поскольку $k>p$, то среди этих конструкций есть такая, у которой белая часть накрывает больше отмеченных клеток, чем черная, что и требовалось.

11 класс

353. Пусть в алфавите жителей Банановой Республики n букв. Занумеруем их по порядку. Выпишем на доску слово, содержащее первую букву. Затем выпишем на доску слово, содержащее вторую букву. Затем — третью, и т. д. до тех пор, пока не выпишем на доску слово, содержащее n-ю букву. Таким образом мы выпишем на доску n слов, в записи которых используется ровно n различных букв. Сотрем с доски повторяющиеся слова (т. е. если какое-то слово написано m раз, то сотрем $m-1$ такое слово). Вместо стертых слов выпишем на доску новые так, чтобы на доске оказалось написано ровно n различных слов. Это можно сделать, поскольку слов больше n. При этом мы не используем новых букв, так как букв всего n, и каждая из них где-то записана на доске. В записи этих n слов используется ровно n различных букв, что и требовалось.

Замечание. Приведенное решение показывает, что в утверждении задачи можно взять $k = n$ — числу букв в алфавите.

354. Обозначим через O_1, O_2, O_3, O центры окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$ соответственно. Из касания ω_1 и ω следует, что точки O, O_1, T_1 лежат на одной прямой, причем $OO_1 = OT_1 - O_1T_1 = R - r$. Аналогично, $OO_2 = OO_3 = R - r$, поэтому O — центр окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. Поскольку $SO_1 = SO_2 = SO_3 = r$, точка S также является центром окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. Отсюда следует, что точки S и O совпадают.

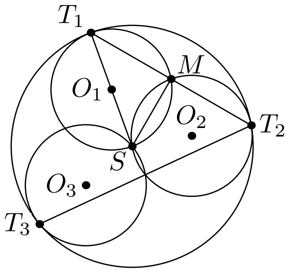


Рис. 167

Пусть M — середина отрезка T_1T_2. OM — медиана и высота равнобедренного треугольника OT_1T_2, следовательно M лежит на окружности, построенной на OT_1 как на диаметре, т. е. M лежит на ω_1. Аналогично, M лежит на ω_2.

355. В решении будем использовать следующие факты.

1) Непрерывная функция (в частности, многочлен), принимающая на концах интервала значения разных знаков, обращается в ноль в некоторой точке этого интервала.

2) При достаточно больших положительных x значения многочлена по знаку совпадают с его старшим коэффициентом. При достаточно больших по модулю отрицательных x значения многочлена по знаку совпадают с его старшим коэффициентом, если степень его четна, и противоположны ему, если степень его нечетна. В частности, ввиду 1), многочлен нечетной степени всегда имеет корень.

Приведем схему вычеркивания одночленов, дающую на каждом шаге многочлены, имеющие корни. Пусть многочлен $P(x) = ax^n + bx^m + \ldots \ldots + c$ $(a, b \neq 0)$ содержит не менее трех членов, x^n и x^m — две старших степени переменной x в $P(x)$ $(c = P(0) \Rightarrow c \neq 0)$. Если n или m нечетно, вычеркивая в $P(x)$ одночлен bx^m или ax^n соответственно, получим многочлен нечетной степени, имеющий хотя бы один корень. Вычеркивая в дальнейшем другие одночлены, мы получим искомую последовательность многочленов. Поэтому далее рассматриваем случай, когда n и m четны. Умножая при необходимости на -1, можем считать $a > 0$. Если $c < 0$, то в $P(x)$ можно вычеркнуть любой одночлен, отличный от старшего и свободного члена, полученный многочлен $P_1(x)$ принимает отрицательное значение c при $x = 0$ и положительное при достаточно большом x, значит, имеет корень. Далее считаем $c > 0$.

Пусть $P(t) = 0$. Если $b > 0$, вычеркнем в $P(x)$ одночлен bx^m. При больших положительных x значение полученного многочлена $P_1(x)$ положительно, но $P_1(t) = P(t) - bt^m < 0$ (так как $t \neq 0$, а m — четно), следовательно $P_1(x)$ имеет корни. Если же $b < 0$, вычеркнем одночлен ax^n, тогда значения $P_1(x)$ отрицательны при больших x, но $P_1(0) = P(0) = c > 0$, значит, он тоже имеет корни. По приведенной схеме мы получим в конце многочлен, имеющий корни и содержащий ровно два одночлена, один из которых — $P(0)$. Утверждение доказано.

356. Ответ. Не сможет ни один из них.

Построим ориентированный граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра — дорогам, причем дорогам с односторонним движением мы поставим в соответствия ориентированные, а дорогам с двусторонним движением — неориентированные ребра.

Докажем, что в любой момент игры любое еще не ориентированное ребро можно ориентировать так, чтобы связность графа сохранилась. Из этого очевидно следует, что при правильной игре обоих игроков игра закончится вничью, и оба министра сохранят свои посты.

Итак, пусть ребро между вершинами u и v еще не ориентированно. Заметим, что если между этими вершинами существует путь (не умаляя общности можно считать, что он ведет от u к v), не проходящий по данному ребру, то ребро (u, v) можно ориентировать в направлении от v к u. Тогда в любом пути, проходившем по данному ребру в противоположном направлении, мы можем заменить это ребро на указанный выше путь от u к v, и связность графа не нарушится.

Таким образом, нам достаточно рассмотреть ситуацию, когда между вершинами u и v не существует пути, не проходящего через ребро (u, v). Рассмотрим множество U всех вершин, до которых можно добраться из вершины u, не проходя по ребру (u, v) (включая и саму вершину u). Поскольку граф связен, для любой вершины множества U должен существовать путь, ведущий от нее до вершины v. Однако, по нашему предположению, этот путь обязан проходить по ребру (u, v). Из этого следует, что из любой вершины множества U можно добраться до вершины u, не проходя по ребру (u, v). Но тогда из любой вершины множества U можно добраться до любой другой вершины этого множества, не проходя по ребру (u, v).

Аналогичное множество для вершины v мы обозначим через V. Легко видеть, что из любой его вершины также можно добраться до любой другой его вершины, не проходя по ребру (u, v).

Поскольку граф связен, любая вершина должна принадлежать ровно одному из множеств U или V. Кроме того, поскольку исходный граф, в котором ребра не были ориентированы, сохранял связность при удалении ребра (u, v), между множествами U и V должно существовать еще хотя бы одно ребро, кроме ребра (u, v). Пусть это ребро ведет из вершины $u_1 \in U$ в вершину $v_1 \in V$ (в данный момент игры это ребро может быть как ориентированным, так и неориентированным, но как минимум в одном из направлений, например, из u_1 в v_1, по нему пройти в любом случае можно). Но тогда из вершины u мы можем добраться до вершины u_1, из u_1 до v_1 и из v_1 до v, не проходя при этом по ребру (u, v), что противоречит сделанному ранее предположению. Полученное противоречие завершает решение задачи.

357. См. решение задачи 341.

358. **Ответ.** 101105.

Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 количество пар последовательно идущих чисел, расстояние между которыми равно 1, 2, 3, 4, 5 соответственно. Так как последних цифр встречается всего 10, то они меняются как минимум 9 раз, следовательно, получаем неравенство:

$$x_5 \geqslant 9.$$

Количество пар двух последних цифр — 100, аналогично имеем

$$x_4 + x_5 \geqslant 100 - 1 = 99,$$

и так далее получаем еще три соотношения:

$$x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 999,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 9999,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 89999,$$

в последнем равенстве и справа, и слева стоит количество всех 5-значных чисел, уменьшенное на 1. Сложив все эти неравенства, получим:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \geqslant 101105.$$

Заметим, что слева в этом неравенстве у нас как раз получилась сумма расстояний между последовательными числами.

Теперь докажем, что оценка точная. Для каждого числа $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ рассмотрим число $n' = \overline{a_5a_4a_3a_2a_1}$ (оно может начинаться с нулей, но не может оканчиваться нулем) и запишем числа n' в порядке возрастания. В соответствующем порядке запишем и исходные числа n. Заметим, что у чисел n' в таком порядке первая цифра (которая последняя у n) меняется 9 раз, первые две цифры — 99 раз и т. д., так как любые первые k цифр чисел n' тоже идут по порядку в данной последовательности. Таким образом, все выписанные выше неравенства обращаются в равенства.

359. **Ответ.** 4.

Для любого треугольника T с углами α, β, γ обозначим $f_n(T) = \sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma$.

Лемма. *Пусть $x + y + z = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$|\sin x| \leqslant |\sin y| + |\sin z|.$$

При $y \neq \pi l$, $z \neq \pi l$, где $l \in \mathbb{Z}$, это неравенство — строгое.

Доказательство.

$$|\sin x| = |\sin(y+z)| = |\sin y \cos z + \sin z \cos y| \leqslant$$
$$\leqslant |\sin y| \cdot |\cos z| + |\sin z| \cdot |\cos y| \leqslant |\sin y| + |\sin z|.$$

При $y \neq \pi l$, $z \neq \pi l$, где $l \in \mathbb{Z}$, последнее неравенство строгое.

Из леммы следует, что знак функции $f_n(T)$ определяется двумя синусами, имеющими одинаковые знаки: если, например, $\sin n\alpha > 0$, $\sin n\beta > 0$, то $f_n(T) \geqslant \sin n\alpha + \sin n\beta - |\sin n\gamma| > 0$.

Очевидно, $f_1(T) > 0$. Для любого (не обязательно остроугольного) треугольника T справедливо и неравенство $f_2(T) > 0$. В самом деле, если $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$, то $\sin 2\alpha > 0$, $\sin 2\beta > 0$.

Пусть $n = 3$. Рассмотрим равнобедренные остроугольные треугольники с углами α и β при основании: при изменении $x = \alpha = \beta$ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ величина $3x$ меняется от $\frac{3\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{2}$. Следовательно, $\sin 3x$ (а вместе с ним и $f(T)$) принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть $n = 4$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Поскольку треугольник остроугольный, $\beta > \frac{\pi}{4}$ (если $\beta \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\gamma \leqslant \frac{\pi}{4}$, то $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2}$). Значит, $\pi < 4\beta \leqslant 4\alpha < 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$, откуда $\sin 4\alpha < 0$, $\sin 4\beta < 0$. Вследствие леммы $f_4(T) < 0$.

Пусть $n > 4$. Рассуждая как в случае $n = 3$, получаем: при изменении $x = \alpha = \beta$ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ величина $y = nx$ пробегает интервал, длина которого больше π. Следовательно, найдутся точки x_1 и x_2 такие, что $\sin nx_1 > 0$, $\sin nx_2 < 0$. Отсюда $f_n(T_1) > 0$, $f_n(T_2) < 0$, где T_1 и T_2 — треугольники, соответствующие x_1 и x_2.

360. Поскольку прямые KL и PQ, лежащие в плоскостях ABD и ABC, параллельны, то они параллельны прямой, по которой эти плоскости пересекаются, т. е. AB. Тогда вписанные четырехугольники $ABLK$ и $ABQP$ являются трапециями, а, значит, равнобокими трапециями. Поэтому $\angle DAB = \angle DBA$, $\angle CAB = \angle CBA$ и треугольники ABD и ABC — равнобедренные. Тогда пирамида $ABCD$ симметрична относительно плоскости α — серединного перпендикуляра к AB, поскольку каждый из треугольников ABD и ABC симметричен относительно α. При этой симметрии точки K и L, а также P и Q переходят друг в друга, а точка M переходит в себя; поэтому углы KMQ и LMP переходят друг в друга.

Пусть β — плоскость, перпендикулярная к CD, проходящая через M; поскольку $C, D \in \alpha$, то $\beta \perp \alpha$; аналогично $\beta \perp CBD$. Поскольку четырехугольники $BLMC$ и $DMQB$ вписанные, имеем $\angle DML = 180° - \angle CML = \angle CBD = 180° - \angle DMQ = \angle CMQ$. Таким образом, лучи ML и MQ симметричны относительно β. Аналогично, MK и MP симметричны относительно β.

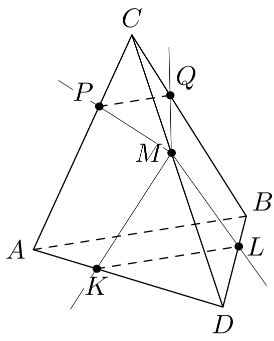


Рис. 168

Отложим на лучах MK, ML, MP, MQ единичные отрезки MK', ML', MP', MQ'. Тогда точки K' и L', а также P' и Q' симметричны относительно α, а точки K' и P', L' и Q' симметричны относительно β; отсюда $K'L' \parallel P'Q'$, $K'P' \parallel L'Q'$, т. е. плоский четырехугольник $K'L'Q'P'$ — параллелограмм. Обозначим через O точку пересечения его диагоналей. Тогда MO — медиана, а, значит, и биссектриса в равнобедренных треугольниках $K'MQ'$ и $L'MP'$, что и требовалось доказать.

2004–2005 г.

8 класс

361. Заметим, что раз через два часа машины снова оказались на расстоянии 90 км, то ровно через час они встретятся. Но это значит, что «Запорожец» до встречи с «Москвичем» и «Москвич» после встречи с «Запорожцем» ехали по одному часу. Если Незнайка прав, получается, что суммарная скорость машин 60 км/ч. Но за два часа они в сумме проехали 180 км. Противоречие.

362. Ответ. Первый.

Заметим, что первый игрок делает ходы длиной 1, 4, …, 1024. Покажем, что первому удастся сделать ход длины 1024 (тогда второй проиграет, так как второму пришлось бы сделать ход длины 2048, что невозможно).

Заметим, что $1 + 2 + 4 + \ldots + 128 < 256$, т. е. до 5-го хода первого фишка находится на расстоянии не более 256 от центра. Пусть первый своим 5-м ходом (на 256 клеток) подвинет фишку в сторону центральной клетки. Тогда после его хода расстояние от фишки до центральной клетки также будет не более чем 256. После следующего хода второго (на 512 клеток) расстояние от фишки до центральной клетки будет не менее чем

256, и так как $256 + 1002 > 1024$, то первому удастся сделать ход длины 1024 (в направлении центральной клетки).

363. Ответ. Можно.

Напишем на десяти карточках цифру 2, а на оставшихся девяти — цифру 1. Известно, что натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда знакочередующаяся сумма S, составленная из цифр данного числа, кратна 11. В числе, составленном из десяти цифр 2 и девяти цифр 1, выполняются неравенства $-7 \leqslant S \leqslant 11$. Сумма всех цифр нечетна (она равна 21), поэтому S также нечетно. От -7 до 11 есть только одно нечетное число, кратное 11 — это число 11. Но для $S = 11$ имеется единственная возможность — когда на нечетных местах стоят двойки, а на четных единицы.

364. Пусть MO_1 и NO_2 — серединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC соответственно (M, N — середины AB и AC, O_1, O_2 лежат соответственно на прямых AC и AB) (см. рис. 169).

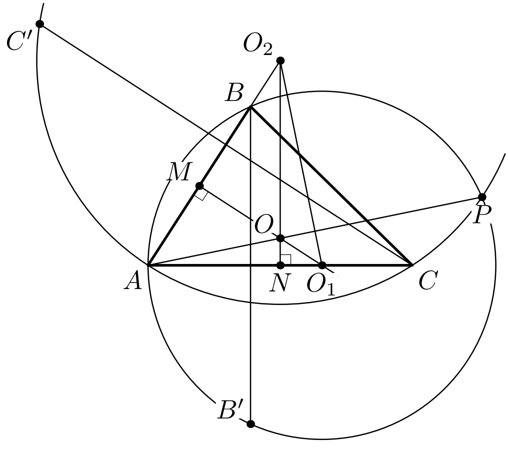


Рис. 169

Точка O пересечения прямых MO_1 и NO_2 является одновременно центром описанной окружности треугольника ABC и точкой пересечения высот треугольника AO_1O_2. Так как B и B' симметричны относительно AC, то AC является серединным перпендикуляром к BB'. Значит, O_1 равноудалена от точек A, B, B', т. е. O_1 — центр описанной окружности треугольника ABB'. Аналогично, O_2 — центр описанной окружности треугольника ACC'. Общая хорда AP двух этих окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2. Поэтому AP — высота треугольника AO_1O_2, следовательно, AP проходит через O.

365. Обозначим через $s(A)$ сумму цифр числа A. Из рассмотрения сложения «в столбик» двух чисел A и B следует, что $s(A+B) \leqslant s(A) + s(B)$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда при сложении нет переносов через разряд. Тем самым, из условия задачи вытекает, что при сложении $5N + 5N = 10N$ нет переносов через разряд, поскольку $s(10N) = s(N) = 100$. Но число $5N$ оканчивается на 5 или на 0 в случае соответственно нечетного и четного N. Первый случай отпадает, так как возникает перенос в последнем разряде.

366. Пусть R — точка пересечения BP и AQ. BR является одновременно и высотой и биссектрисой треугольника ABQ, следовательно, этот треугольник равнобедренный, $AB = BQ$. Треугольники BPA и BPQ равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle BQP = \angle BAP = \angle BCD$, а значит, PQ и CD параллельны, поскольку образуют равные углы с BC.

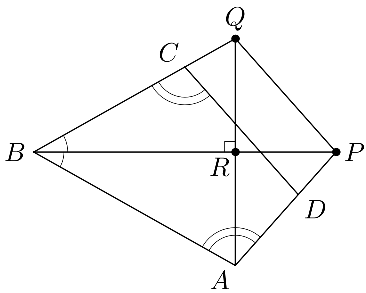


Рис. 170

367. **Ответ.** $(2^k, 2^k)$, где $k \geqslant 0$.

Из условия получаем $a^{2n} = x^2 + y^2 + 2xy = a^m + 2xy$. Отсюда $a^{2n} > a^m$, значит, a^{2n} делится на a^m. Следовательно, $2xy$ делится на $a^m = x^2 + y^2$. Получаем, что $2xy \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Отсюда $x^2 + y^2 = 2xy$, $x = y$. Следовательно, $2x = a^n$, $2x^2 = a^m$, откуда $4x^2 = a^{2n}$, $2 = a^{2n-m}$. Окончательно, $a = 2$, $x = y = 2^k$, где $k \geqslant 0$.

368. ***Первое решение.*** Пусть x_i — количество яблок в i-м ящике. Упорядочим ящики по убыванию количества яблок в них (т. е. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{99}$). Достаточно разбить ящики со 2-го по 99-й на две группы по 49 ящиков так, чтобы количество яблок в двух группах различалось не больше, чем на x_1. Тогда, выбрав ту из двух групп, в ящиках которой в сумме не меньше апельсинов, чем в другой, и добавив к ней первый ящик, мы получим требуемый выбор 50 ящиков. Приведем два способа разбить 98 ящиков на две группы требуемым образом.

Первый способ. В одну группу поместим ящики $2, 4, 6, \ldots, 98$, в другую — $3, 5, \ldots, 99$. Тогда в первой группе яблок не меньше, чем во второй, а в первой группе без ящика номер 2 — не больше, чем во второй группе. Значит, разность количества яблок не больше, чем $x_2 \leqslant x_1$.

Второй способ. Разобьем ящики как угодно. Если количество яблок различается больше, чем на x_2, то возьмем в группе, где яблок больше, ящик, где больше всего яблок, и поменяем его местами с ящиком из другой группы, в котором меньше всего яблок (ясно, что в первом яблок больше, чем во втором). При этом количество яблок в группах изменилось на разность каких-то двух ящиков, т. е. не могло случиться, что уже в другой группе яблок больше хотя бы на x_2. При этом разность количества яблок в группах уменьшается. Кроме того, возможных разбиений на две группы конечное число. Поэтому, повторяя эту операцию, мы придем к требуемой ситуации.

Второе решение. Допустим, что есть ящик A, в котором x_A яблок и y_A апельсинов, и ящик B, в котором $x_B < x_A$ яблок и $y_B < y_A$ апельсинов. Тогда заменим их на ящик A', в котором x_A яблок, и y_B апельсинов, и ящик B', в котором x_B яблок и y_A апельсинов. Заметим, что если мы можем выбрать 50 ящиков из нового набора, то и из старого тоже можем. В самом деле, если из нового набора мы должны взять только один из ящиков A' и B', то в старом наборе возьмем вместо него ящик A, а если в новом наборе мы должны были взять оба ящика A' и B' — возьмем в старом наборе оба ящика A и B.

Легко показать, что конечным числом таких замен мы можем прийти к набору ящиков со следующим свойством: если в ящике X больше яблок, чем в ящике Y, то в нем меньше апельсинов, чем в ящике Y. Действительно, нетрудно понять, что количество таких пар (A, B) при нашей операции уменьшается хотя бы на одну.

Теперь упорядочим ящики по убыванию количества яблок в них. Выберем ящики $1, 3, 5, \dots, 99$. Мы взяли не меньше яблок, чем осталось, поскольку в первом ящике яблок не меньше, чем во втором, в третьем — не меньше, чем в четвертом, и т. д. Аналогично, мы взяли не меньше апельсинов, чем оставили, поскольку в 99-м ящике апельсинов не меньше, чем в 98-м, в 97-м — не меньше, чем в 96-м и т. д.

9 класс

369. Ответ. Шесть игр.

В турнире разыграно не менее $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ очков, а поскольку за игру команды в сумме набирали не более трех очков, то сыграно не менее пяти игр. Но пять игр не могло произойти, поскольку тогда все игры закончились чьей-либо победой, и не будет команды, набравшей одно очко.

За шесть игр это могло случиться, например, так: 1 и 2, 2 и 5, 4 и 5 сыграли вничью, а 3, 4, 5 выиграли у 1.

370. Ответ. Можно.

См. решение задачи 363.

371. Ответ. Не сможет.

Опишем стратегию второго.

Заметим, что по каждой клетке проходят ровно два кольца, пересекающиеся, кроме нее, еще по одной клетке на противоположной грани. Назовем такие клетки соответствующими. Разобьем числа на пары с суммой 25: $(1, 24), (2, 23), \ldots, (12, 13)$.

Если первый игрок своим очередным ходом ставит в клетку некоторое число, то пусть второй игрок ставит в ответ парное число в соответствующую клетку. При такой стратегии второго по окончании игры в каждом кольце окажутся по два числа из четырех пар, поэтому их сумма равна $4 \cdot 25 = 100$.

372. Пусть NP — диаметр описанной окружности. Тогда $\angle NBP = \angle NAP = 90^\circ$, точка P — середина дуги AC, поэтому $\angle ABP = \angle CBP$, т. е. BP — биссектриса $\angle ABC$. Следовательно, I лежит на BP (см. рис. 171).

Диаметр NP является серединным перпендикуляром к отрезку AC, следовательно, NP проходит через M. Так как $\angle AIP$ — внешний для $\triangle AIB$, то $\angle AIP = \angle BAI + \angle ABI = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ABC}{2} = \angle IAC + \angle CBP = \angle IAC + \angle CAP = \angle IAP$. Получаем, что $\triangle API$ — равнобедренный ($AP = IP$). AM — высота прямоугольного треугольника NAP, поэтому $\frac{AP}{MP} = \frac{NP}{AP}$ и $\frac{IP}{MP} = \frac{NP}{IP}$. Из последнего равенства следует подобие треугольников $\triangle PMI \sim \triangle PIN$, откуда $\angle PMI = \angle PIN$.

Но $\angle IMA = \angle PMI - 90^\circ$, а из прямоугольного $\triangle BNI$: $\angle INB = \angle PIN - \angle IBN = \angle PIN - 90^\circ$.

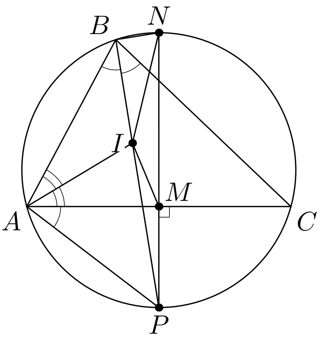


Рис. 171

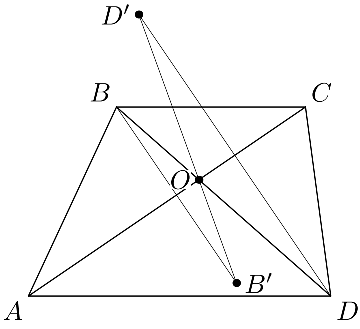


Рис. 172

373. См. решение задачи 365.

374. Пусть $ABCD$ — исходная трапеция с основаниями AD и BC, и пусть при отражении получаются точки A', B', C' и D' (см. рис. 172). Тогда отрезки BD и $B'D'$ симметричны относительно AC, поэтому они равны и пересекаются на прямой AC, а именно в точке O пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Кроме того, $\frac{BO}{OD} = \frac{B'O}{OD'}$. Аналогично, AC

проходит через O и $\frac{CO}{OA} = \frac{C'O}{OA'}$. Но $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA}$ из подобия треугольников AOD и COB. Поэтому $\frac{B'O}{OD'} = \frac{C'O}{OA'}$, следовательно, треугольники $A'OD'$ и $C'OB'$ также подобны, и поэтому $B'C' \parallel A'D'$.

Замечание. Из решения задачи 390 следует, что если угол между диагоналями равен $60°$, то при указанном отражении точки будут лежать на одной прямой.

375. Ответ. Не существует.

Предположим, что такая прогрессия существует. Тогда $A_n = (2a_n)\cdot\ldots\cdot(2a_{n+9})$ делится на $B_n = a_{n+4}+a_{n+5}$ при любом натуральном n. С другой стороны, обозначив через d разность прогрессии, имеем

$$A_n = (B_n-9d)(B_n-7d)\cdot\ldots\cdot(B_n-d)(B_n+d)\cdot\ldots\cdot(B_n+7d)(B_n+9d).$$

Значит, $A_n = B_nC_n + D$, где C_n — целое число, $D = -d^{10}(1\cdot3\cdot\ldots\cdot7\cdot9)^2$. Из этого равенства ясно, что A_n не делится на B_n при $B_n > D$. Противоречие.

376. ***Первое решение.*** Пусть x_i — количество яблок в i-м ящике. Упорядочим ящики по убыванию количества яблок в них (т. е. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{100}$). Достаточно разбить ящики со 2-го по 100-й на три группы по 33 ящика так, чтобы количество яблок в двух группах различалось не больше, чем на x_1. Тогда, выбрав ту из трех групп, в ящиках которой в сумме не меньше апельсинов, чем в любой другой, и добавив к ней первый ящик, мы получим требуемый выбор 34 ящиков. Приведем два способа разбить 99 ящиков на три группы требуемым образом.

Первый способ. В одну группу поместим ящики $2, 5, 8, \ldots, 98$, в другую — $3, 6, \ldots, 99$, в третью — $4, 7, \ldots, 100$. Пусть количество яблок в i-й группе A_i, тогда $A_1 \geqslant A_2 \geqslant A_3 \geqslant A_1 - x_2$. Значит, разность количества яблок не больше, чем $x_2 \leqslant x_1$.

Второй способ. Разобьем ящики как угодно. Если количество яблок различается больше, чем на x_2, то возьмем в группе, где яблок больше всего, ящик, где больше всего яблок, и поменяем его местами с ящиком из самой меньшей группы, в котором меньше всего яблок (ясно, что в первом яблок больше, чем во втором). При этом количество яблок в группах изменилось на разность каких-то двух ящиков, т. е. не могло случиться, что уже в другой группе яблок больше хотя бы на x_2. При этом максимальная разность количества яблок в группах уменьшается. Кроме того, возможных разбиений на три группы конечное число. Поэтому, повторяя эту операцию, мы придем к требуемой ситуации.

Второе решение. Допустим, что есть ящик A, в котором x_A яблок и y_A апельсинов, и ящик B, в котором $x_B < x_A$ яблок и $y_B < y_A$ апельсинов. Тогда заменим их на ящик A', в котором x_A яблок, и y_B апельсинов, и ящик B', в котором x_B яблок и y_A апельсинов. Заметим, что если мы можем выбрать 34 ящика из нового набора, то и из старого тоже можем. В самом деле, если из нового набора мы должны взять только один из ящиков A' и B', то в старом наборе возьмем вместо него ящик A, а если в новом наборе мы должны были взять оба ящика A' и B' — возьмем в старом наборе оба ящика A и B.

Легко показать, что конечным числом таких замен мы можем прийти к набору ящиков со следующим свойством: если в ящике X больше яблок, чем в ящике Y, то в нем меньше апельсинов, чем в ящике Y. Действительно, нетрудно понять, что количество таких пар (A, B) при нашей операции уменьшается хотя бы на одну.

Теперь упорядочим ящики по убыванию количества яблок в них. Выберем ящики $1, 4, 7, \ldots, 100$. Мы взяли не меньше трети яблок, поскольку в первом ящике яблок не меньше, чем во втором и в третьем, в четвертом — не меньше, чем в пятом и в шестом, и т. д. Аналогично, мы взяли не меньше апельсинов, чем оставили, поскольку в 100-м ящике апельсинов не меньше, чем в 98-м и в 97-м, в 96-м — не меньше, чем в 95-м и в 94-м и т. д.

10 класс

377. Ответ. 135°.

Из условия следует, что углы α_1, α_2, α_3 первого треугольника — острые ($\cos\alpha_i = \sin\beta_i > 0$, где β_1, β_2, β_3, — углы второго треугольника). Поэтому $\beta_i = \frac{\pi}{2} \pm \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Из равенства $\pi = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{3\pi}{2} + (\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3)$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, следует, что в скобках есть как знаки «$+$», так и знаки «$-$».

Кроме того, во втором треугольнике не может быть двух тупых углов, поэтому в скобках один знак «$+$» и два знака «$-$».

Значит, $\pi = \frac{3\pi}{2} + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$, откуда $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, т. е. $\beta_1 = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$. При этом это единственный тупой угол второго треугольника, а первый треугольник — остроугольный; значит, этот угол — наибольший.

Замечание. Треугольники, о которых говорится в задаче, существуют — например, треугольники с углами 70°, 65°, 45° и 20°, 25°, 135°.

378. По неравенству о средних арифметическом и геометрическом

$$1 + x^{n+1} \geqslant 2x^{\frac{n+1}{2}}, \quad 1 + x \geqslant 2x^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$(1 + x^{n+1})(1 + x)^{n-1} \geqslant 2x^{\frac{n+1}{2}} \cdot (2x^{\frac{1}{2}})^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot x^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n-1}{2}} = 2^n x^n.$$

Разделив на $(1 + x)^{n-1}$, получим нужное неравенство.

379. См. решение задачи 372.

380. **Ответ.** $N!$ ($N! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot N$).

Назовем полный ориентированный граф на N вершинах *транзитивным*, если его вершины можно занумеровать числами $1, 2, \ldots, N$ так, что любое ребро идет от вершины с меньшим номером к вершине с большим.

Лемма 1. *Полный ориентированный граф транзитивен тогда и только тогда, когда любой его подграф на трех вершинах транзитивен.*

Доказательство. Очевидно, что если граф транзитивен, то таковы же все его подграфы. Докажем обратное.

Индукция по N. База для $N = 3$ тривиальна. Пусть $N > 3$. Достаточно доказать, что существует вершина, из которой не ведет ни одного ребра. Тогда ее можно обозначить цифрой N и применить к оставшимся вершинам предположение индукции.

Пусть такой вершины нет. Тогда из любой вершины выходит ребро. Выйдем из любой вершины по ребру, выходящему из нее, из той вершины, в которую мы попадем — снова по выходящему ребру и т. д. Когда-нибудь мы попадем в вершину, в которой уже побывали. Следовательно, в графе нашелся ориентированный цикл (скажем, $A_1A_2\ldots A_kA_1$). Так как треугольники $A_{k-1}A_kA_1$, $A_{k-2}A_{k-1}A_1, \ldots, A_3A_4A_1$ транзитивны, последовательно получаем, что ребра $A_{k-1}A_1$, $A_{k-2}A_1$, $\ldots$, A_3A_1 направлены к A_1. Но тогда треугольник $A_1A_2A_3$ нетранзитивен — противоречие.

Лемма 2. *Пусть исходный граф покрашен в два цвета. Изменим все направления красных стрелок на противоположные. Раскраска однотонна тогда и только тогда, когда полученный граф также транзитивен.*

Доказательство. Пусть раскраска однотонна. Достаточно доказать, что в полученном графе любой подграф на трех вершинах транзитивен. Действительно, пусть вершины $A < B < C$ образуют нетранзитивный треугольник. Тогда ребра идут либо $A \to B \to C \to A$, либо $A \to C \to B \to A$. Но в обоих случаях путь ABC одноцветен и имеет другой цвет, нежели ребро AC, что невозможно.

Пусть, наоборот, полученный граф транзитивен. Если раскраска не была однотонной, то существуют одноцветные пути $A \to C_1 \to \cdots \to C_k \to B$ (красный) и $A \to D_1 \to \cdots \to D_l \to B$ (синий). Тогда в транзитивном графе нашелся ориентированный цикл $AD_1\ldots D_lBC_k\ldots C_1A$, что невозможно.

Теперь легко получить решение задачи. Действительно, однотонных раскрасок столько же, сколько возможно транзитивных графов на N вершинах; их, в свою очередь, столько же, сколько перенумераций N вершин, т. е. $N!$.

381. **Ответ.** Можно.

Пусть d — разность прогрессии. Если для всех n число $a_{n+31} \vdots 5$, то $d \vdots 5$. Если же при некотором n число $a_{n+31} \not\vdots 5$, то $a_n \vdots 5$ и $a_{n+62} \vdots 5$, значит, $a_{n+62} - a_n = 62d \vdots 5$. Но тогда $d \vdots 5$, поскольку 5 и 62 взаимно просты. Итак, в любом случае $d \vdots 5$. Отсюда $a_n^2 = a_n \cdot a_{n+31} - 31a_n d \vdots 5$, и, поскольку 5 — простое число, $a_n \vdots 5$.

Аналогично, пользуясь простотой числа 401, получаем, что $a_n \vdots 401$.

Поскольку 5 и 401 взаимно просты, a_n делится на $5 \cdot 401 = 2005$ при любом n.

382. См. решение задачи 374.

383. **Ответ.** $(2, 2)$.

Первое решение. Пусть условие выполнено, т. е. существует такая последовательность натуральных чисел c_n, что $a^n + b^n = c_n^{n+1}$. Ясно, что $c_n \leqslant a + b$, так как иначе $c_n^{n+1} > (a + b)^{n+1} \geqslant (a + b)^n = a^n + \ldots$ $\ldots + b^n \geqslant a^n + b^n$. Значит, в последовательности c_n хотя бы одно число $c \in \{1, 2, \ldots, a+b\}$ повторяется бесконечно много раз, т. е. уравнение $a^n +$ $+ b^n = c^{n+1}$ (с фиксированными a, b, c) имеет бесконечно много решений в натуральных n. Пусть для определенности $a \geqslant b$. Перепишем уравнение $a^n + b^n = c^{n+1}$ в виде $\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n = c$.

Если $a > c$, то $\frac{a}{c} = 1 + d$, где $d > 0$. Но тогда $\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n > \left(\frac{a}{c}\right)^n =$ $= (1 + d)^n = 1 + nd + \ldots + d^n \geqslant 1 + nd$, что больше c при $n > c/d$, т. е. число решений уравнения конечно.

Если $a \leqslant c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^n \leqslant 1$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^n \leqslant 1$, откуда $c = 2$ или $c = 1$. Первый случай возможен только при равенстве $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = 1$, т. е. при $a = b =$ $= 2$ этот случай удовлетворяет условию задачи. Второй случай, очевидно, невозможен.

Второе решение. **Лемма 1.** *Если $(z, t) = 1$, то $z^2 + t^2$ не делится на 3.*

Доказательство. Квадрат целого числа при делении на 3 дает остаток 0 или 1. Значит, если $z^2 + t^2 \vdots 3$, то $z \vdots 3$, $t \vdots 3$.

Лемма 2. *Если $(z, t) = 1$, то $(z + t, z^2 - zt + t^2)$ равен либо 1, либо 3.*

Доказательство. * сразу следует из равенства $z^2 - zt + t^2 = (z +$ $+ t)^2 - 3zt$.

Решение задачи. Обозначим $d = (a, b)$, $x = \frac{a}{d}$, $y = \frac{b}{d}$. Докажем вначале, что $x = y = 1$. Предположив противное, имеем $x^k + y^k > x^m +$ $+ y^m$ при $k > m$; в частности, рассматривая числа $D_n = x^{2 \cdot 3^n} + y^{2 \cdot 3^n}$, имеем $D_{n+1} > D_n$ при любом натуральном n. Пусть p_n — некоторый простой делитель большего 1 натурального числа $\frac{D_{n+1}}{D_n}$. По лемме 1 $p_n \neq 3$. Отсюда по лемме 2 D_n не делится на p_n, и в разложение на простые множители любого числа D_l, где $l \geqslant n+1$, число p_n входит в одной и той же степени (для доказательства второго утверждения нужно рассмотреть дробь $\frac{D_{n+k+1}}{D_{n+k}}$ и убедиться, что она не делится на p_n, так как $D_{n+k} \vdots p_n$). Поэтому $p_n \neq p_k$ при $n \neq k$. Очевидно, в последовательности попарно различных чисел $p_1, p_2, \ldots$ можно выбрать $p = p_{n_0}$ такое, что $(p, d) = 1$. В разложение любого числа $d^{2\cdot 3^l} \cdot D_l$, где $l \geqslant n_0 + 1$, простой множитель p входит в одной и той же степени. С другой стороны, из условия задачи следует, что эта степень делится на $2 \cdot 3^l + 1$ при любом натуральном $l \geqslant n_0 + 1$. Противоречие.

Получили $a = b = d$. Найдем d. Очевидно, $d \neq 1$; пусть простое число p входит в разложение d на простые множители в степени α. Пусть $p \neq 2$. Из условия задачи следует, что $n\alpha \vdots n+1$ при любом натуральном n; значит, $(n+1)\alpha - \alpha \vdots n+1$, $\alpha \vdots n+1$, что невозможно. Если $p = 2$, то $1 + n\alpha \vdots n+1$ при любом натуральном n, $1 + (n+1)\alpha - \alpha \vdots n+1$, $1 - \alpha \vdots n+1$. Отсюда $\alpha = 1$. Получили: $d = 2$.

384. **Ответ.** Не может.

Первое решение. Допустим, это возможно для прямоугольника $ABCD$.

Пусть AB — его наименьшая сторона. Выберем начало координат в узле сетки, и направим оси координат вдоль линий сетки так, чтобы среди вершин прямоугольника вершина A имела наименьшую абсциссу, а вершина B — наименьшую ординату. Через A_x, B_x, C_x, D_x и A_y, B_y, C_y, D_y обозначим проекции вершин на оси (см. рис. 173). Абсциссы точек A_x, B_x, C_x, D_x и ординаты точек A_y, B_y, C_y, D_y — нецелые, так как вершины A, B, C, D не лежат на линиях сетки. Так как

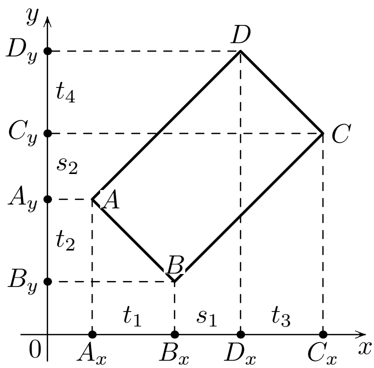


Рис. 173

$\overrightarrow{D_xC_x} = \overrightarrow{A_xB_x}$ и $A_xD_x = AD \cdot \cos 45^\circ \geqslant AB \cdot \cos 45^\circ = A_xB_x$, то точки на оси Ox лежат в порядке A_x, B_x, D_x, C_x. (B_x и D_x могут совпасть). Также, точки на оси Oy лежат в порядке B_y, A_y, C_y, D_y. При этом $A_xB_x = D_xC_x = B_yA_y = C_yD_y = AB \cdot \cos 45^\circ$, $B_xD_x = A_yC_y = (AD - AB)\cos 45^\circ$.

Через t_1, t_2, t_3, t_4, s_1, s_2 обозначим количество точек с целыми координатами соответственно на отрезках A_xB_x, B_yA_y, D_xC_x, C_yD_y, B_xD_x, A_yC_y. На отрезке A_xB_x ровно t_1 целочисленных точек, поэтому сторона AB пересекает ровно t_1 вертикальных линий сетки; на отрезке A_yD_y t_4+s_2 целочисленных точек, следовательно, сторона AD пересекает ровно t_4+s_2 горизонтальных линий сетки, и т. д. Таким образом, условие пересечения каждой стороной нечетного числа линий сетки эквивалентно нечетности чисел t_1+t_2, t_3+t_4, $t_1+t_4+s_1+s_2$, $t_2+t_3+s_1+s_2$.

Лемма. *Если два отрезка равной длины d расположены на числовой прямой так, что их концы нецелочисленны, то количества целых точек на этих отрезках отличаются не более, чем на 1.*

В самом деле, если на отрезке с левым концом в нецелой точке a и правым концом в нецелой точке b лежит k целых точек $n, n+1, \ldots, n+k-1$, то $n-1<a<n$ и $n+k-1<b<n+k$, поэтому $k-1<d=b-a<k+1$ и $d-1<k<d+1$, т. е. $k=[d]$ или $k=[d]+1$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что числа t_1, t_2, t_3, t_4 отличаются не более, чем на 1, т. е. равны t или $t+1$, и также числа s_1 и s_2 равны s или $s+1$. Так как t_1+t_2 нечетно, то $t_1 \neq t_2$. Пусть для определенности $t_1=t$, $t_2=t+1$.

1) Если $t_3=t$, то $t_4=t+1$, так как t_3+t_4 нечетно. Тогда $s_1+s_2=(t_1+t_4+s_1+s_2)-(t_1+t_4)=(t_1+t_4+s_1+s_2)-(2t+1)$ — четно. Отсюда $s_1=s_2$. Но тогда $(t_2+s_2+t_4)-(t_1+s_1+t_3)=2$ — противоречие утверждению леммы для отрезков A_xC_x и B_yD_y.

2) Если же $t_3=t+1$, то $t_4=t$. Тогда $s_1+s_2=(t_1+t_4+s_1+s_2)-(t_1+t_4)$ — нечетно, т. е. либо $s_1=s$, $s_2=s+1$, либо $s_1=s+1$, $s_2=s$. Первый случай противоречит утверждению леммы для отрезков A_xD_x и B_yC_y, второй — для отрезков B_xC_x и A_yD_y.

Второе решение. Предположим, такой прямоугольник $ABCD$ существует. Пусть $AB \geqslant \sqrt{2}$. Отложим на сторонах AB и CD отрезки $BB'=CC'=\sqrt{2}[AB/\sqrt{2}]$. Тогда отрезки BB' и CC' пересекают по одной вертикальной и горизонтальной линии, а отрезок $B'C'$ получается из BC переносом на вектор $\overrightarrow{BB'}$ с целыми координатами. Поэтому прямоугольник $AB'C'D$ также удовлетворяет условию. Продолжая такие действия, получим в результате прямоугольник, все стороны которого меньше $\sqrt{2}$ (обозначим его опять $ABCD$). Тогда каждая сторона пересекает не более одной прямой каждого направления, т. е. ровно по одной прямой — либо вертикальной, либо горизонтальной.

Пусть A — самая левая точка прямоугольника, а B — самая нижняя, тогда C — самая правая, а D — самая верхняя. Если отрезки AB и BC пересекают вертикальные прямые, то ломаная CDA их также пересекает, а горизонтальные прямые, соответственно, не пересекает. Тогда проекция $ABCD$ на горизонтальную прямую имеет длину больше 1 (между A и C две вертикальных прямых), а на вертикальную — меньше 1, что невозможно.

Если отрезки AB и BC пересекают (одну и ту же!) горизонтальную прямую, то $ABCD$ лежит в полосе между двумя соседними вертикалями, а тогда AD и DC также пересекают горизонтальную прямую, что невозможно по тем же причинам.

Остался единственный (с точностью до симметрии) случай — AB и CD пересекают одну и ту же вертикальную прямую v, а BC и AD — одну и ту же горизонтальную прямую h. Тогда A и B лежат под h, а C — над h, поэтому $BC > AB$. Аналогично, B и C лежат правее v, а D — левее v, поэтому $BC < CD$. Итого, $AB < BC < CD$, что невозможно.

11 класс

385. Ответ. Таких чисел нет.

Действительно, если $x \leqslant 1$, то $\sin(xy) \leqslant \sin y < \sin x + \sin y$; аналогично, если $y \leqslant 1$. Если же $x, y > 1 > \frac{\pi}{6}$, то $\sin x, \sin y > \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, т. е. $\sin x + \sin y > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \geqslant \sin(xy)$.

386. Ответ. -2.

Если числа a, b, c, d удовлетворяют условиям утверждения в задаче, то числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ удовлетворяют этим условиям, а значит, для тех и других верно заключение этого утверждения, т. е. $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = S$ и $\frac{1}{\frac{1}{a}-1} + \frac{1}{\frac{1}{b}-1} + \frac{1}{\frac{1}{c}-1} + \frac{1}{\frac{1}{d}-1} = S$. Сложив эти равенства, получим $-4 = 2S$, ибо $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{\frac{1}{a}-1} = -1$, откуда $S = -2$.

Замечание. Нетрудно убедиться, что верно следующее утверждение: если $a + b + c + d = -2$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = -2$ (a, b, c, d отличны от нуля и единицы), то $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = -2$. Но этого в задаче не требуется.

387. Ответ. $N!$ $(N! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot N)$.

См. решение задачи 380.

388. Обозначим в треугольнике ABC за A_0, B_0 — середины сторон BC и CA, за H — точку пересечения высот треугольника, за O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Точки A, B, A_1, B_1 лежат на одной окружности (с диаметром AB), поэтому $\angle CB_1A_1 = \angle CBA = \angle CA_0B_0$, следовательно, точки A_1, B_1, A_0, B_0 лежат на одной окружности ω_1. Пусть ω_2 — окружность с диаметром

CH, а ω_3 — окружность с диаметром CO. Заметим, что точки A_1, B_1 лежат на ω_2, а точки A_0, B_0 лежат на ω_3.

Точка C' имеет одинаковую степень относительно ω_1 и ω_2, а также относительно ω_1 и ω_3, следовательно, относительно ω_2 и ω_3, т. е. лежит на их радикальной оси. Центры окружностей ω_2 и ω_3 — середины CH и CO соответственно. Прямая CC' перпендикулярна линии центров, а значит и HO.

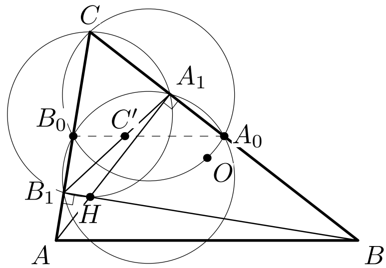


Рис. 174

Замечание. Степенью точки X относительно окружности радиуса R с центром O называется величина $OX^2 - R^2$. *Радикальной осью* двух окружностей называется геометрическое место точек, имеющих равные степени относительно этих окружностей. Радикальная ось всегда является прямой, а в случае двух пересекающихся окружностей — прямой, проходящей через точки их пересечения.

389. Заметим, что числа $P(r)$ и $P(mk + r)$ дают одинаковые остатки при делении на k. Следовательно, в сумме $P(1) + P(2) + \ldots + P(k^2)$ для каждого $r = 0, 1, \ldots, k - 1$ будет k слагаемых вида $P(mk + r)$, дающих одинаковые остатки при делении на k. Сумма этих k слагаемых делится на k; сумма всех k^2 слагаемых разбивается на k таких сумм, а потому тоже делится на k.

390. При указанном отражении сохраняются длины диагоналей четырехугольника. Пусть острый угол между диагоналями был равен α, тогда после отражения один из углов между диагоналями становится равным либо 3α, либо $3\alpha - \pi$, а поэтому отношение площадей равно $\left|\frac{\sin(3\alpha)}{\sin\alpha}\right|$. Используя формулу для синуса тройного угла, получим, $\frac{S'}{S} = |3 - 4\sin^2\alpha| < 3$.

391. Ответ. Больше тех, у которых семнадцатая с конца цифра — 7.

Запишем каждое число, не превосходящее 10^{20}, двадцатью цифрами (если цифр в записи числа меньше двадцати, дополним его недостающими нулями в старших разрядах). Зафиксируем первые три цифры и убедимся, что при любом выборе этих трех цифр квадратов с такими первыми тремя цифрами и четвертой цифрой 7 больше, чем квадратов с такими первыми тремя цифрами и четвертой цифрой 8 — очевидно, наш ответ из этого следует.

Нам нужно сравнить количество точных квадратов на полуинтервале $[(A-1)\cdot 10^{16}; A\cdot 10^{16})$ с числом точных квадратов на полуинтервале $[A\cdot 10^{16}; (A+1)\cdot 10^{16})$ (здесь $A < 10^4$ — число, полученное приписыванием восьмерки к трем зафиксированным первым цифрам), т. е. количество натуральных чисел на полуинтервале $[\sqrt{A-1}\cdot 10^8; \sqrt{A}\cdot 10^8)$ с количеством натуральных чисел на полуинтервале $[\sqrt{A}\cdot 10^8; \sqrt{A+1}\cdot 10^8)$. А так как количество натуральных чисел на полуинтервале $[a; b)$ отличается от его длины $b-a$ не более, чем на 1, нам достаточно показать, что длины последних полуинтервалов отличаются более, чем на 2. В этом можно убедиться непосредственно:

$$(\sqrt{A}\cdot 10^8 - \sqrt{A-1}\cdot 10^8) - (\sqrt{A+1}\cdot 10^8 - \sqrt{A}\cdot 10^8) =$$
$$= 10^8((\sqrt{A}-\sqrt{A-1}) - (\sqrt{A+1}-\sqrt{A})) =$$
$$= 10^8\left(\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{A-1}} - \frac{1}{\sqrt{A+1}+\sqrt{A}}\right) =$$
$$= 10^8\cdot\frac{\sqrt{A+1}-\sqrt{A-1}}{(\sqrt{A}+\sqrt{A-1})(\sqrt{A+1}+\sqrt{A})} =$$
$$= \frac{2\cdot 10^8}{(\sqrt{A+1}+\sqrt{A-1})(\sqrt{A}+\sqrt{A-1})(\sqrt{A+1}+\sqrt{A})} >$$
$$> \frac{2\cdot 10^8}{2\sqrt{10^4}\cdot 2\sqrt{10^4}\cdot 2\sqrt{10^4}} = 25 > 2.$$

392. Лемма. *Любые $2n$ пар положительных чисел (a_i, b_i) можно так разбить на две группы по n пар в каждой, что сумма a_i в первой группе отличается от суммы a_i во второй группе не более, чем на максимальное a_i, и сумма b_i в первой группе отличается от суммы b_i во второй группе не более, чем на максимальное b_i.*

Доказательство. * 1. Докажем утверждение по индукции. База $n = 0$ очевидна. Теперь докажем переход.

Возьмем из $2n+2$ пар две, в которых максимальны a_i. Пусть это (a_1, b_1) и (a_2, b_2) $(a_1 \geqslant a_2)$. Тогда оставшиеся пары можно разбить на две группы по n пар так, что выполняются условия леммы. Обозначим через a и a' суммы чисел a_i в группах, а через b и b' — суммы b_i. Тогда $|a-a'| \leqslant a_2$ (так как максимальное a_i из оставшихся не превосходит a_2) и $|b-b'| \leqslant \max\limits_i b_i$. Без ограничения общности можно считать, что $b \leqslant b'$. Пусть $b_1 \leqslant b_2$. Тогда добавим первую пару во вторую группу, а вторую пару в первую группу. Тогда суммы a_i в группах стали равны $a+a_2$ и $a'+a_1$, причем $|(a+a_2)-(a'+a_1)| \leqslant |a-a'| + |a_2-a_1| \leqslant a_2 + a_1 - a_2 = \max\limits_i a_i$; суммы же b_i в группах стали равны $b+b_2$ и $b'+b_1$, причем

$|(b+b_2)-(b'+b_1)| \leqslant \max(b'-b, b_2-b_1) \leqslant \max\limits_i b_i$, так как b_2-b_1 и $b-b'$ разных знаков. Поэтому данное разбиение разбиение удовлетворяет условиям леммы. Если же $b_1 \geqslant b_2$, то, добавив первую пару к первой группе, а вторую — ко второй, аналогично будем иметь $|(b+b_2)-(b'+b_1)| \leqslant \max\limits_i b_i$ и $|(a+a_2)-(a'+a_1)| \leqslant a_1$. Лемма доказана.

Доказательство. * 2. Упорядочим пары по убыванию a_i (т. е. $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n}$). Назовем пары с номерами $2i-1$ и $2i$ *двойкой*. Заметим, что если разбить пары на две группы так, что пары любой двойки попадут в разные группы, то разность a_i в группах не будет превосходить $(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n}) \leqslant a_1$.

Распределим двойки по группам произвольным образом. Пусть еще не получилось требуемого разбиения, причем в первой группе сумма b_i больше, чем во второй. Тогда в какой-то из двоек b_i, попавшее в первую группу, больше b_j, попавшего во вторую. Поменяв пары, принадлежащие этой двойке, местами, мы получим, что разность сумм b_i уменьшилась по модулю, поскольку изменилась не более, чем на $2b_1$. Тогда такой процесс не может продолжаться бесконечно, поэтому когда-нибудь распределение станет требуемым.

Перейдем к решению задачи. Выберем из наших коробок ту, что содержит наибольшее количество апельсинов, а затем из оставшихся ту, что содержит наибольшее количество яблок. Тогда оставшиеся коробки согласно лемме можно разбить на две группы по 49 ящиков так, что разность количества апельсинов в первой и второй группах не превосходит числа апельсинов в первой коробке, и разность числа яблок в первой и второй группах не превосходит числа яблок во второй коробке. Но тогда добавим эти две коробки в ту группу, где не меньше бананов. Очевидно, полученный набор из 51 коробки удовлетворяет условиям задачи, что и требовалось.

2005–2006 г.

8 класс

393. Подойдет, например, число 391524680. Действительно, если не вычеркнуть одну из последних шести цифр, то полученное число будет составным (оно будет делиться либо на 5, либо на 2). Если же вычеркнуть шесть последних цифр, то останется вычеркнуть одну цифру из числа 391. А числа 39 и 91 — составные.

394. **Ответ.** Может.

Докажем, что второй может добиться того, чтобы перед каждым ходом первого четные и нечетные числа чередовались. Тогда этим ходом первому не удастся сделать все числа равными, и он не выиграет.

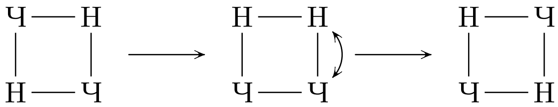


Рис. 175

Заметим, что изначально четные и нечетные числа чередуются. После любого хода первого игрока получим подряд два четных и два нечетных числа. Поменяем четное и соседнее с ним нечетное число местами. Таким образом, после хода второго четные и нечетные числа чередуются, поэтому первый игрок никогда не получит четыре равных числа (см. рис. 175).

395. Достаточно решить задачу для случая, когда самый медленный гонщик стоит на месте в точке старта, а остальные (назовем их Петя, Вася и Коля) едут со скоростями, уменьшенными на скорость самого медленного; при таком изменении условия моменты встреч гонщиков останутся неизменными. Пусть до первой встречи с Васей в точке старта Петя проехал a кругов, а с Колей — b кругов. Тогда Петя будет встречаться на старте с Васей через каждые a кругов, а с Колей — через каждые b кругов, и через ab Петиных кругов в точке старта окажутся все трое.

396. **Ответ.** Нельзя.

Так как каркас состоит из 54 единичных отрезков, для его изготовления необходимо 18 деталей. Рассмотрим одну из восьми вершин куба. Для того, чтобы припаять к ней три отрезка, нужно использовать не менее двух деталей. То есть, для формирования вершин куба нужно не менее 16 деталей. Рассмотрим центр куба. Из него должно выходить 6 отрезков, и для этого необходимо не менее трех деталей. А так как одна и та же деталь не может использоваться в вершине куба и в его центре, то необходимо не менее 19 деталей. Противоречие.

397. **Ответ.** 33.

Рассмотрим самое левое четное число a_i и самое правое четное число a_k. Заметим, что четными являются все суммы с номерами от i до $k-1$, и только они (в суммах с меньшими номерами первое слагаемое нечетно, а второе четно; в суммах с бóльшими номерами — наоборот). Таким образом, $k-i=32$. Между a_i и a_k могут стоять как четные, так и нечетные числа — от этого четность сумм не изменится. Количество четных чисел будет наибольшим, если все числа между a_i и a_k также четны. В этом случае количество четных чисел будет равно 33.

398. **Ответ.** Не может.

Пусть условие задачи выполнено. Тогда каждой покрашенной клетке A поставим в соответствие клетку B (отличную от A) того же цвета, находящуюся в квадрате 3×3 с центральной клеткой A. По условию для данной клетки A клетка B определяется единственным образом. Заметим, что клетка A находится в квадрате 3×3 с центральной клеткой B, значит клетка A поставлена в соответствие клетке B. Таким образом, рассмотренное соответствие разбивает все покрашенные клетки на пары. Однако, количество покрашенных клеток равно 99^2 — нечетному числу. Противоречие.

399. Ответ. $\triangle A_1B_1C_1$ — равносторонний, все углы равны 60°.

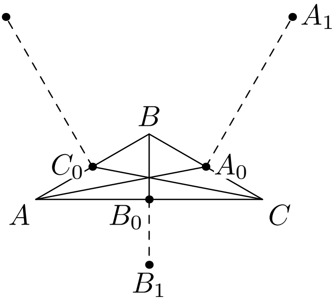


Рис. 176

Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то BB_0 — серединный перпендикуляр в основанию AC. Значит, B_1 лежит на этом перпендикуляре и $CB_0 \perp \perp BB_1$. В $\triangle BCB_1$ точка B_0 — основание высоты и медианы на стороне BB_1, откуда $BC = B_1C$, а так как $\angle B_1BC = \frac{1}{2}\angle ABC = 60^\circ$. Значит, $\triangle B_1BC$ — равносторонний, а A_0, будучи серединой стороны BC является основанием высоты в треугольнике B_1BC. Получается, что точки A_1 и B_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Аналогично, C_1 и B_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Значит, $\angle C_1B_1A_1 = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ$, $B_1A_1 = B_1A_0 + A_0A_1 = B_1A_0 + A_0A = = B_1C_0 + C_0C = B_1C_0 + C_0C_1 = B_1C_1$, т. е. $\triangle A_1B_1C_1$ — равнобедренный с углом при вершине 60°.

400. Ответ. Может.

Пусть m_1 и m_2 — фальшивые монеты, m_3, m_4 и m_5 — какие-то три из настоящих монет. Работник делает два таких взвешивания:

$$m_1 \vee m_3,$$

$$m_4 + m_5 \vee m_2 + m_3.$$

В результате начальник убеждается, что $m_1 < m_3$ и $m_4 + m_5 > m_2 + + m_3$. Из первого взвешивания он делает вывод, что m_1 — более легкая монета, чем m_3, а из второго — что среди монет m_4 и m_5 тяжелых монет больше, чем среди m_2 и m_3. Таким образом, он делает вывод, что m_4 и m_5 — тяжелые монеты, а m_2 — легкая. В итоге он видит три тяжелых монеты и две легких, а поскольку он знает, что фальшивых монет ровно две, то он убеждается в том, что фальшивыми являются именно легкие монеты m_1 и m_2.

9 класс

401. См. решение задачи 393.

402. **Ответ.** Не могут.

Предположим, что при некоторой расстановке чисел все клетки оказались правильными.

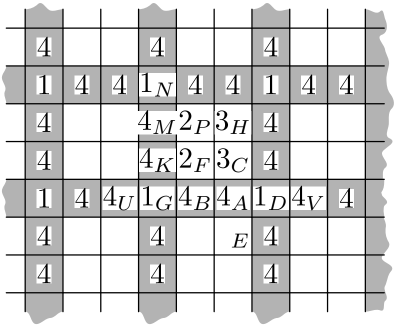


Рис. 177

Пусть в клетку A записано число 4, тогда в одной из соседних с A клеток, например, в клетку B, записано число 4, а в одну из клеток C, D, E — число 1. Если 1 записана в клетке C, то в клетку F также записано 4 — противоречие: у клетки B две соседних клетки с числом 4. Аналогично, число 1 не может быть записано в клетку E. Значит, 1 — в клетке D. Аналогично, 1 — в клетке G, а тогда в клетках U и V — опять четверки. Итак, числа 4 порождают «цепочки» $\ldots - 1 - 4 - 4 - 1 - 4 - 4 - \ldots$. Из того, что в клетку K записано число 4, следует, что в M записано 4, в N — 1, и тогда однозначно восстанавливаются числа в выделенных строках и столбцах (см. рис. 177).

Далее, в один из незаполненных еще квадратов 2×2 записано число 3. Пусть, для определенности, 3 записано в клетку C. В клетки F и H нельзя записать 1 и 4, значит, там записаны 2 и 3. Без ограничения общности, пусть 2 записано в F, а 3 — в H. Рассматривая клетку H, получаем, что в клетку P записано число 2. Но в этом случае у клетки F с числом 2 в соседних клетках три различных числа. Противоречие.

403. Если среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_6$ нечетное число отрицательных или есть ноль, то неравенство очевидно. Пусть отрицательных чисел два или четыре. Меняя, если нужно, знаки у всех чисел, можно добиться того, что ровно два числа будут отрицательными. Пусть для определенности это числа x_1 и x_2. Положим $y_k = |x_k|$. Тогда $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_6^2 = 6$ и $y_1 + y_2 = y_3 + y_4 + y_5 + y_6$. Обозначим последнюю сумму через s. По неравенству о средних для двух чисел имеем

$$y_1 y_2 \leqslant \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4}\,.$$

Аналогично,

$$y_3 y_4 y_5 y_6 \leqslant \left(\frac{y_3 + y_4 + y_5 + y_6}{4}\right)^4 = \frac{s^4}{4^4}\,.$$

Значит, $y_1 y_2 \ldots y_6 \leqslant \frac{s^6}{4^5}$. С другой стороны

$$2(y_1^2 + y_2^2) \geqslant (y_1 + y_2)^2 = s^2 \quad \text{и}$$
$$4(y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2) \geqslant (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2 = s^2,$$

что следует из неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим (или доказывается с помощью простого раскрытия скобок). Таким образом,

$$6 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_6^2 \geqslant \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{4} = \frac{3}{4} \cdot s^2.$$

Стало быть, $s^2 \leqslant 8$ и

$$x_1 x_2 \ldots x_6 = y_1 y_2 \ldots y_6 \leqslant \frac{s^6}{4^5} \leqslant \frac{8^3}{4^5} = \frac{1}{2}\,.$$

404. Обозначим центр вписанной окружности через I. Пусть B_0 — точка пересечения биссектрисы угла B с описанной окружностью. Тогда $\angle IBC_0 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC_0} + \overset{\frown}{AB_0}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC_0} + \overset{\frown}{CB_0}) = \angle BIC_0$, т. е. треугольник BIC_0 равнобедренный, $BC_0 = IC_0$. Аналогично, $BA_0 = IA_0$, значит треугольники A_0IC_0 и A_0BC_0 равны (см. рис. 178). Следовательно, точки B и I симметричны относительно C_0A_0, т. е. A_0P — серединный перпендикуляр к отрезку BI.

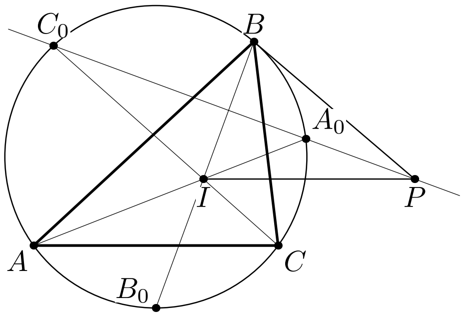


Рис. 178

Пусть, для определенности, P лежит на луче C_0A_0. Пользуясь симметрией относительно A_0P, имеем: $\angle A_0BP = \angle A_0IP = \angle A_0AC = \angle A_0AB$. Получилось, что угол между хордой A_0B окружности и прямой BP равен вписанному углу этой окружности, опирающемуся на дугу

A_0B. По теореме, обратной теореме об угле между касательной и хордой, заключаем, что BP — касательная к описанной окружности треугольника ABC.

405. **Ответ.** 33.

См. решение задачи 397.

406. Обозначим через K, L, M — основания перпендикуляров, опущенных из точки D соответственно на AB, AC, BE (см. рис. 179). (Точки K, L, M лежат на отрезках AB, AC, BE, а не на их продолжениях, так как $\triangle ABC$ — остроугольный.) Пусть DK пересекает BE в точке P. Заметим, что $DLEM$ — прямоугольник, а точка D равноудалена от сторон AB и AC, так как лежит на биссектрисе AD. Отсюда $EM = DL = DK > DP > DM$. Поскольку в треугольнике EDM против большей стороны лежит больший угол, $\angle EDM > \angle DEM = 90° - \angle EDM$, поэтому $\angle EDM > 45°$. Но $\angle EDM = \angle CED$, откуда получаем требуемое.

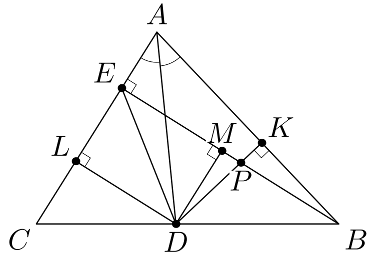


Рис. 179

407. **Ответ.** Может.

См. решение задачи 400.

408. Пусть $N = 9a^2 + 9b^2 + 9c^2$. Если числа a, b, c делятся на 3, то N делится на 81, что неверно. Пусть для определенности a не делится на 3. Если $a + b + c$ делится на 3, то заменим a на $-a$. Таким образом, можно считать, что $a + b + c$ не делится на 3. Тогда $N = 9a^2 + 9b^2 + 9c^2 = (2a + 2b - c)^2 + (2a + 2c - b)^2 + (2b + 2c - a)^2$, где число $2a + 2b - c = 2(a + b + c) - 3c$ не делится на 3; аналогично и с остальными числами. Требуемое представление получено.

10 класс

409. Рассмотрим числа 100, 101, ..., 200. Так как их всего 101, то какие-то три из них попадут в одно множество. Сумма любых двух из этих трех чисел больше 200, и, следовательно, больше третьего числа. Значит, существует треугольник с соответствующими длинами сторон, что и требовалось доказать.

410. Заметим, что любой уголок содержит горизонтальный прямоугольник 1×3. Также заметим, что любую горизонталь можно покрасить в три цвета так, чтобы любой прямоугольник 1×3 содержал клетки трех различных цветов, ровно $3! = 6$ способами (получится раскраска $ABCABCAB$, а цвета ABC можно выбрать 6 способами). Это означает, что раскраска, при которой каждая горизонталь покрашена указанным способом, будет хорошей. Поскольку каждую горизонталь можно покрасить независимо от других, число хороших раскрасок такого вида будет в точности 6^8.

Замечание. Покажем, что есть еще хорошие раскраски, которые мы не посчитали, например такая, при которой каждая из горизонталей одноцветна, а цвета горизонталей чередуются указанным выше образом (в этом случае любой вертикальный прямоугольник 1×3 будет содержать клетки трех различных цветов). Поэтому общее количество хороших раскрасок больше 6^8.

411. См. решение задачи 404.

412. **Ответ.** Не может.

Предположим противное. Поскольку все $2n$ коэффициентов различны, то они и составляют все множество корней наших трехчленов, причем у каждого из них два корня. Пусть α_i, β_i — корни трехчлена $x^2 - a_i x + b_i$. Тогда по теореме Виета $a_i = \alpha_i + \beta_i$, $b_i = \alpha_i\beta_i$. Поскольку множество корней многочленов совпадает с множеством $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 0$.

Далее, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = (\alpha_i + \beta_i)^2 - 2\alpha_i\beta_i = a_i^2 - 2b_i$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2 + \beta_i^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Значит, $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$, т. е. все коэффициенты b_i равны нулю. Это противоречит тому, что они различны.

413. Поскольку функция «синус» нечетная и имеет период 2π, можно считать, что $0 < x < \pi$.

Если $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$, то подойдет $n = 1$.

Если $0 < x < \frac{\pi}{3}$, то, последовательно откладывая углы x, $2x$, …, nx, …, мы когда-нибудь выйдем из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$; а поскольку «шаг» меньше $\frac{\pi}{3}$, то мы при этом попадем в уже рассмотренный промежуток $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Если же $x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \pi\right)$, то, учитывая равенство $|\sin nx| = |\sin n(\pi - x)|$, этот случай сводится к случаю $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

414. Обозначим через H ортоцентр (т. е. точку пересечения высот) $\triangle ABC$, через H_1, H_2, H_3 — основания высот на сторонах BC, CA, AB

соответственно, а через A_1, B_1, C_1 — вторые точки пересечения окружностей.

Так как прямая BC — касательная к окружности, проходящей через H и H_1 и $HH_1 \perp BC$, то HH_1 — диаметр одной из окружностей, данных в условии. Аналогично для двух других окружностей.

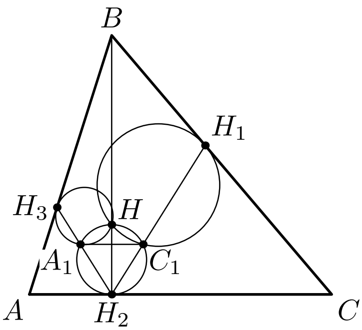


Рис. 180

На диаметр в любой окружности опирается прямой угол, поэтому $\angle HC_1H_2 + \angle HC_1H_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, т. е. C_1 лежит на отрезке H_1H_2. Аналогично, $A_1 \in H_2H_3$. Точки B, H_2, H_3, C лежат на окружности с диаметром BC, следовательно, $\angle HH_2A_1 = \angle BH_2H_3 = \angle BCH_3 = 90^\circ - \angle ABC$. Аналогично $\angle HH_2C_1 = 90^\circ - \angle ABC$.

Получается, что прямоугольные треугольники HH_2A_1 и HH_2C_1 равны, а точки A_1 и C_1 симметричны относительно HH_2. Значит, $A_1C_1 \perp HH_2$, откуда $A_1C_1 \parallel AC$. Аналогично $B_1C_1 \parallel BC$ и $A_1B_1 \parallel AB$, что и доказывает подобие треугольников.

415. Ответ. При всех нечетных n.

Если n нечетно, то положим $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2^n - 1}{2}$. Тогда $a + b$ целое, и $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) = 2^{n-1}(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$; знаменатель дроби в скобках равен 2^{n-1}, поэтому число $a^n + b^n$ также целое.

Пусть n четное, $n = 2k$. Предположим, что требуемые числа a, b нашлись. Так как их сумма целая, то знаменатели в их несократимой записи равны, т. е. их несократимая запись такова: $a = \frac{p}{d}$, $b = \frac{q}{d}$; при этом $p + q$ кратно d. Тогда $p^n + q^n = (p^{2k} - q^{2k}) + 2q^{2k} = (p^2 - q^2)(p^{2k-2} + p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2}) + 2q^{2k} = (p+q)K + 2q^{2k}$, где $K = (p-q)(p^{n-2} + p^{n-4}q^2 + \ldots + q^{n-2})$ — целое число. Заметим, что $a^n + b^n = \frac{p^n + q^n}{d^n}$ — целое, т. е. $p^n + q^n$ делится на d^n; в частности, оно делится на d. А так как $p + q$ делится на d, то и $2q^n$ должно делиться на d. Поскольку дробь $\frac{q}{d}$ несократима, то 2 делится на d, т. е. $d = 2$.

Но тогда p^n и q^n — квадраты нечетных чисел, следовательно, дают остаток 1 при делении на 4. Поэтому $p^n + q^n$ не делится на 4, а должно делиться на 2^{2k}, которое кратно 4. Противоречие.

416. Ответ. $\left[\frac{2n}{3}\right]$.

Назовем вершину, в которой сходится ровно 3 ребра, *хорошей*.

Докажем, что никакие две хорошие вершины не лежат в одной грани. Предположим противное — пусть хорошие вершины A и B лежат в одной грани ABC. Ребро AB принадлежит еще одной грани ABD. Поскольку вершина A — хорошая, то кроме AB, AC, AD нет других ребер, выходящих из A. В вершине A сходятся ровно 3 грани — ABC, ABD и грань, содержащая ребра AC и AD, т. е. грань ACD. Аналогично получаем, что BCD является гранью многогранника. Получается, что многогранник является тетраэдром $ABCD$, что противоречит условию $n \geqslant 3$.

Из доказанного следует, что каждой хорошей вершине можно сопоставить три грани, сходящиеся в ней, причем различным хорошим вершинам сопоставлены разные грани. Отсюда следует, что количество хороших вершин не превосходит $\frac{2n}{3}$.

Опишем построение выпуклого $2n$-гранника, для которого количество хороших вершин равно $\left[\frac{2n}{3}\right]$.

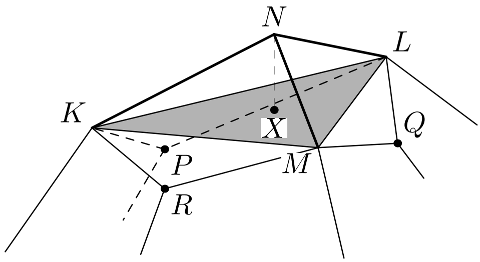


Рис. 181

Определим вначале процедуру *наращивания грани* многогранника T с треугольными гранями. Пусть KLM — одна из граней, KLP, LMQ, MKR — грани, отличные от KLM, содержащие соответственно ребра KL, LM, MK (точки P, Q, R не обязательно различны) (см. рис. 181). Пусть X — некоторая внутренняя точка треугольника KLM. На перпендикуляре к плоскости KLM, восставленном в точке X, вне многогранника T выберем такую точку N, что точки K и N лежат по одну сторону от плоскости LMQ, L и N — по одну сторону от MKR, M и N — по одну сторону от KLP (этого можно добиться, выбирая длину XN достаточно малой). Рассмотрим многогранник T', получаемый добавлением к T пирамиды $KLMN$. По построению многогранник T' — выпуклый. Будем говорить, что T' получен из T наращиванием грани KLM.

Если $n = 3$, то нарастив одну из граней тетраэдра, получим пример шестигранника с двумя хорошими вершинами.

Пусть $n \geqslant 4$. В зависимости от остатка при делении на 3, представим n в виде $n = 3k$, $n = 3k - 1$ или $n = 3k - 2$ для некоторого натурального

$k \geqslant 2$. Рассмотрим тетраэдр и нарастим некоторую его грань; у полученного многогранника нарастим еще одну грань; и т. д. При каждой операции количество граней увеличивается на 2, поэтому через $(k-2)$ операции мы получим выпуклый $2k$-гранник, все грани которого треугольные. Отметим $n-k$ граней этого многогранника и последовательно их нарастим. При этом образуется $n-k = \left[\frac{2n}{3}\right]$ новых вершин, и каждая из них является хорошей.

11 класс

417. См. решение задачи 409.

418. Заметим, что $P(x) > 0$ при $x \geqslant 0$, поэтому $P(x)$ не имеет неотрицательных корней. Если при некотором k выполнено $b_k \leqslant 0$, то трехчлен $x^2 + a_k x + b_k$ имеет неотрицательный корень. Таким образом, $b_k > 0$ для всех k.

Далее, $c_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 0$, поэтому $a_k > 0$ хотя бы при одном k.

419. **Ответ.** 13.

Предположим, что участников не больше 12. Пусть при этом один из участников (назовем его A) выиграл все 11 этапов, а каждый из оставшихся хотя бы раз занял последнее место. Тогда участник A после 12 этапов наберет не меньше $11a_1 + a_n$ очков, а каждый из оставшихся — не больше $a_n + 10a_2 + a_1$ очков (поскольку каждый из оставшихся занимал последнее место на одном из этапов и мог быть первым только на 12 этапе), что меньше, чем $11a_1 + a_n$. Следовательно, только A может занять первое место. Поэтому для выполнения условия количество участников должно быть не менее 13.

Пусть участников 13, тогда устроителю достаточно выбрать числа $a_1 = 1011$, $a_2 = 1010$, $\ldots$, $a_{12} = 1000$, $a_{13} = 1$. Рассмотрим участника, набравшего наибольшее количество очков после 11 этапов (назовем его A). Тогда среди 12 оставшихся найдется по крайней мере один участник, который не занимал последнего места ни на одном из этапов (назовем его B). Заметим, что A набрал не более $1011 \cdot 11 = 11121$ очков, а B не менее $1000 \cdot 11 = 11000$ очков. То есть после 11 этапов A опережает B не более чем на 121 очко. Очевидно, что после 11 этапа A имеет шансы занять первое место. Однако, если на 12 этапе A займет последнее место, то B наберет на 12 этапе хотя бы на 999 очков больше, чем A и обгонит его. То есть A будет не первым. Это и означает, что еще какой-то участник после 11 этапа имеет шансы занять первое место.

420. Обозначим центр вписанной окружности через I. Заметим, что $\angle IAC_0 = \frac{1}{2}(\smile BC_0 + \smile BA_0) = \frac{1}{2}(\smile AC_0 + \smile CA_0) = \angle AIC_0$, т. е. треугольник AIC_0 равнобедренный, $C_0A = C_0I$. Далее, $\angle C_0AC_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{C_0B} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{C_0A} = \angle C_0CA$, поэтому треугольники C_0AC_1 и C_0CA подобны по двум углам. Отсюда получаем $\frac{C_0A}{C_0C_1} = \frac{C_0C}{C_0A}$, т. е. $\frac{C_0I}{C_0C_1} = \frac{C_0C}{C_0I}$.

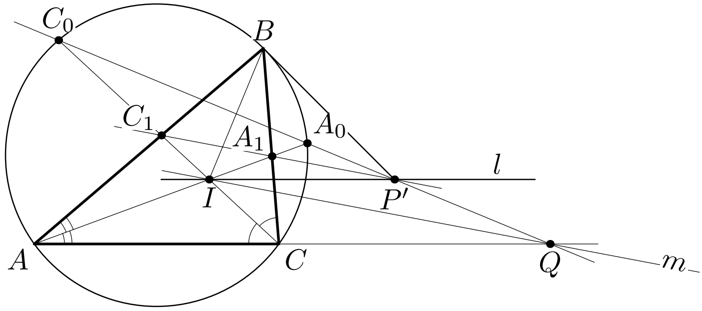


Рис. 182

Проведем через I прямые l и m, параллельные AC и A_1C_1 соответственно. Пусть P' — точка пересечения прямых l и A_1C_1, а Q — точка пересечения m и AC. Из доказанного соотношения следует, что при гомотетии с центром C_0, переводящей C_1 в I, точка I переходит в C, прямые l и A_1C_1 — в AC и m соответственно; поэтому точка P' переходит в Q. Следовательно, C_0 лежит на прямой $P'Q$. Аналогично, A_0 лежит на прямой $P'Q$, поэтому $P'Q$ и A_0C_0 совпадают, P' лежит на A_0C_0 и совпадает с P, что и требовалось.

421. См. решение задачи 413.

422. Продолжим отрезок AB' до пересечения с плоскостью BCD в точке B''. Так как плоскости (BCD) и (ACD) симетричны относительно биссекторной плоскости, то $AB' = B'B''$. Аналогично по точкам C' и D' строим точки C'' и D''.

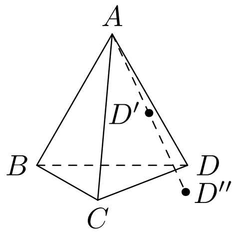


Рис. 183

При гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$ плоскость $(B''C''D'')$ переходит в плоскость $(B'C'D')$, поэтому $(B'C'D') \parallel (B''C''D'') = (BCD)$, что и требовалось доказать.

423. Из условия следует, что число N можно представить в виде

$$9^n(a^2 + b^2 + c^2), \qquad (*)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, a не делится на 3.

Лемма. *Всякое число вида* $(*)$ *можно представить в виде* $9^{n-1}(x^2 + y^2 + z^2)$, *где* $x, y, z \in \mathbb{Z}$, x, y, x *не делятся на* 3.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $a + b + c$ не делится на 3 (иначе число a можно заменить на $-a$). Имеем:

$$9(a^2+b^2+c^2)=(4a^2+4b^2+c^2)+(4b^2+4c^2+a^2)+(4c^2+4a^2+b^2)=$$
$$=(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2.$$

Каждое из чисел $2a+2b-c$, $2b+2c-a$, $2c+2a-b$ сравнимо по модулю 3 с не делящимся на 3 числом $2(a+b+c)$. Значит, эти числа тоже не делятся на 3. Лемма доказана.

Для завершения решения осталось применить эту лемму n раз.

424. Ответ. 30000.

Закрасив в квадрате все клетки 2-й, 5-й, 8-й, ..., 299-й горизонталей в черный цвет, получим требуемый пример. Осталось показать, что меньшим количеством закрашенных клеток не обойтись.

Пусть раскраска, в которой есть b черных и w белых клеток удовлетворяет условию задачи. Запишем в каждую черную клетку ноль. Затем для каждой белой клетки выполним такую операцию. Если после ее закрашивания она становится центральной клеткой черного уголка, то прибавим к обеим остальным клеткам этого уголка по 1. В противном случае прибавим 2 к центральной клетке полученного уголка. В обоих случаях, если получилось несколько уголков, то мы выполняем указанную операцию лишь с одним из них. Тогда сумма всех чисел в черных клетках равна $2w$.

Покажем,что в произвольной черной клетке A стоит число, не большее 4. Если у нее нет черных соседей, то после перекрашивания любого белого соседа A не может стать центральной клеткой уголка, поэтому каждый сосед добавил в нее не более 1. Если у A не более двух белых соседей, то каждый из них добавил не более 2. Поэтому больше 4 в ней может добавиться только в том случае, если у нее 1 черный и 3 белых соседа (см. рис. 184).

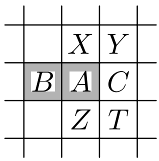


Рис. 184

Клетка C не могла добавить в A двойку, так как тогда одна из клеток X или Z была бы черной. Если C добавила в A единицу, то одна из клеток Y и T черная — пусть это Y. Тогда после закрашивания X она (клетка X) становится центральной клеткой уголка, и поэтому также добавляет не более 1, а Z — не более 2. Если же C ничего в A не добавляет,то в A опять же не больше 4, полученных из клеток X и Z.

Итого, в каждой черной клетке записано не более 4, поэтому сумма всех чисел не больше $4b$, т. е. $2w \leqslant 4b$, и черных клеток не меньше, чем треть, что и требовалось.

Заключительный этап олимпиады

1992–1993 г.

9 класс

425. Ответ. Не может.

Если $2n+1=k^2$, $3n+1=m^2$, то число $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4k^2-m^2=(2k+m)(2k-m)$ является составным, поскольку $2k-m\neq 1$ (в противном случае $5n+3=2m+1$ и $(m-1)^2=m^2-(2m+1)+2=(3n+1)-(5n+3)+2=-2n<0$, что невозможно).

426. Построим отрезок CB_1 так, что четырехугольник ABB_1C — параллелограмм, тогда $AC=BB_1$. Из треугольника BB_1D получаем, что $BB_1+BD\geqslant B_1D$ и, следовательно, $AC+BD\geqslant B_1D$. Остается заметить, что треугольник CB_1D равносторонний ($CD=CB_1=1$, а $\angle B_1CD=\angle AOC=60°$), и, значит, $B_1D=1$. Таким образом, получаем $AC+BD\geqslant 1$.

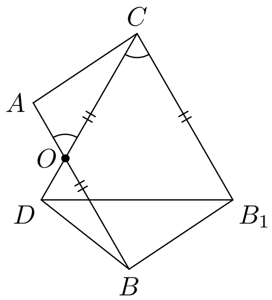


Рис. 185

427. Ответ. Нельзя.

Первое решение. Пусть $f(x)=Ax^2+Bx+C$, его дискриминант равен B^2-4AC. В результате выполнения первой операции $f(x)$ меняется на трехчлен $(A+B+C)x^2+(B+2A)x+A$ с дискриминантом $(B+2A)^2-4(A+B+C)\cdot A=B^2+4AB+4A^2-4A^2-4BA-4CA=B^2-4AC$, а в результате выполнения второй операции — на трехчлен $Cx^2+(B-2C)x+(A-B+C)$ с дискриминантом $(B-2C)^2-4C(A-B+C)=B^2-4BC+4C^2-4CA+4CB-4C^2=B^2-4AC$. Следовательно, при выполнении разрешенных операций дискриминант сохраняется. Но у трехчлена x^2+4x+3 дискриминант равен $16-4\cdot 3=4$, а у трехчлена $x^2+10x+9$ он равен $100-4\cdot 9=64$, следовательно, получить из первого квадратного трехчлена второй невозможно.

Второе решение. Положим $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Тогда $\varphi=\frac{1}{\varphi}+1$, $\varphi=\frac{1}{\varphi-1}$, $\varphi-1=\frac{1}{\varphi}$. Поэтому при выполнении разрешенных операций значение трехчлена в точке φ умножается или делится на φ^2. Осталось заметить, что такими преобразованиями $\varphi^2+4\varphi+3$ не переводится в $\varphi^2+10\varphi+9$ (достаточно проследить за ростом модуля этого значения).

Замечание. Еще одно решение можно получить, заметив, что данные преобразования взаимно обратны, т. е. их композиция тождественна.

428. Ответ. 16.

Назовем десятерых мужчин, стоящих в центре фотографий, *главными лицами*. Разделим всех мужчин на фотографиях на уровни. К уровню 0 отнесем тех, кто не имеет отцов на фотографиях, к уровню $k+1$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ отнесем мужчин, имеющих на фотографиях отцов, отнесенных к уровню k. Обозначим через r_k число главных лиц уровня k, а через t_k — число всех остальных мужчин уровня k. Число отцов мужчин уровня $k+1$ не больше, чем $\frac{1}{2}r_{k+1} + t_{k+1}$, так как каждое главное лицо имеет брата. Действительно, пусть каждое главное лицо отдаст отцу полрубля, а неглавное — рубль; тогда у любого отца скопится не менее рубля. В то же время, отцов мужчин уровня $k+1$ не меньше r_k, так как каждое главное лицо имеет сына. Следовательно, $r_k \leqslant \frac{1}{2}r_{k+1} + t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Заметим также, что $1 \leqslant \frac{1}{2}r_0 + t_0$. Складывая все полученные неравенства, найдем, что

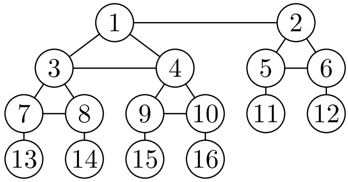


Рис. 186

$$\frac{1}{2}(r_0 + r_1 + \ldots) + (t_0 + t_1 + \ldots) \geqslant (r_0 + r_1 + \ldots) + 1,$$

откуда

$$(r_0 + r_1 + \ldots) + (t_0 + t_1 + \ldots) \geqslant \frac{3}{2}(r_0 + r_1 + \ldots) + 1 = \frac{3}{2} \cdot 10 + 1 = 16.$$

Итак, на фотографиях изображено не менее 16 мужчин. На рис. 186 схематично представлены фотографии 16 мужчин с 10 главными лицами (пронумерованы от 1 до 10).

Горизонтальные линии соединяют братьев, остальные линии ведут (сверху вниз) от отца к сыну.

Фотографии: (3, 1, 2); (5, 2, 1); (7, 3, 4); (9, 4, 3); (11, 5, 6); (12, 6, 5); (13, 7, 8); (14, 8, 7); (15, 9, 10) и (16, 10, 9);

429. Докажем, что числа x, y и z дают одинаковые остатки при делении на 3. Тогда из условия будет следовать, что число $x + y + z$ делится на 27.

Если числа x, y и z дают различные остатки при делении на три, то число $(x - y)(y - z)(z - x)$ не делится на 3, а число $x + y + z$, наоборот, делится на 3. Следовательно, по крайней мере, два из трех чисел x, y, z дают одинаковые остатки при делении на 3. Но тогда число $x + y + z = (x-y)(y-z)(z-x)$ делится на 3, а для этого необходимо, чтобы и третье число давало тот же остаток при делении на 3, что и первые два числа.

430. Пусть величины двух противоположных углов четырехугольников, образованного прямыми A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2, равны α и β (см. рис. 187). Нам достаточно показать, что $\alpha + \beta = \pi$. Так как хорды A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2 и D_1A_2 равны, то равны и угловые величины дуг $A_1D_1B_2$,

$B_1A_1C_2$, $C_1B_1D_2$, $D_1C_1A_2$, которые мы обозначим через γ. Тогда по теореме о величине угла с вершиной вне круга

$$2\alpha = \overparen{A_1D_1B_2} - \overparen{A_2B_1} = \gamma - \overparen{A_2B_1},$$
$$2\beta = \overparen{C_1B_1D_2} - \overparen{C_2D_1} = \gamma - \overparen{C_2D_1}.$$

Сложив эти равенства, получим, что

$$2\alpha + 2\beta = 2\gamma - (\overparen{A_2B_1} + \overparen{C_2D_1}) = 2\gamma - (\overparen{B_1A_1C_2} + \overparen{D_1C_1A_2} - 2\pi) = 2\pi,$$

следовательно, $\alpha + \beta = \pi$.

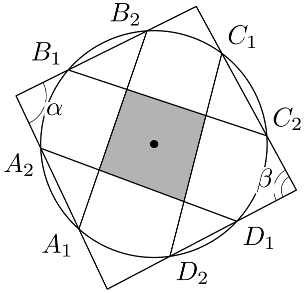


Рис. 187

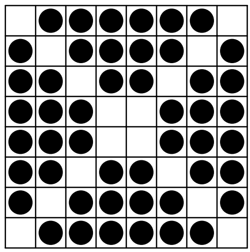


Рис. 188

431. Ответ. 48.

Заметим, что на шахматной доске имеется 16 диагоналей, содержащих нечетное число клеток и не имеющих общих клеток. Следовательно, число фишек не может быть более, чем $64 - 16 = 48$. Удовлетворяющая условию задачи расстановка 48 фишек получится, если поставить по фишке на каждую клетку доски, за исключением клеток двух главных диагоналей (см. рис. 188).

432. Ответ. $\dfrac{n+1}{2}$.

Приведем стратегию первого игрока, позволяющую ему получить не менее $\dfrac{n+1}{2}$ уравнений, не имеющих корней.

Назовем *распечатыванием* выражения первую замену в нем звездочки на число. Своим первым ходом, а также в ответ на любой распечатывающий ход второго игрока, первый игрок распечатывает одно из оставшихся выражений, записывая число 1 перед x. Если второй игрок записывает число a перед x^2 или вместо свободного члена в выражении, распечатанном первым, то в ответ первый записывает на оставшееся место число $\frac{1}{a}$. Дискриминант получившегося уравнения ($D = 1 - 4a \cdot \frac{1}{a} = -3$) отрицателен, поэтому оно не имеет корней. Если же второй игрок запишет число вместо одной из двух звездочек в ранее распечатанном им выражении, то первый произвольным образом заполняет в этом выражении оставшееся место. Ясно, что описанная стратегия позволяет первому игроку распечатать $\frac{n+1}{2}$ выражений, которые он в ходе игры превращает в уравнения, не имеющие корней.

Осталось показать, что второй игрок, мешая первому, может получить $\frac{n-1}{2}$ уравнений, имеющих корни. В самом деле, второй игрок может $\frac{n-1}{2}$ раз распечатать выражения, записывая число 1 перед x^2. Тогда, как бы ни играл первый игрок, второй сумеет поставить еще по одному числу в каждое из распечатанных им выражений. Если место свободного члена не занято, то, записывая на него число -1, второй игрок обеспечивает получение уравнения с положительным дискриминантом. Если же вместо свободного члена первым игроком было записано число c, то второму достаточно записать перед x число $b > 2\sqrt{|c|}$, и дискриминант полученного уравнения окажется положительным.

10 класс

433. Пусть длины сторон треугольника равны a, b, c. Из формулы Герона имеем:

$$16S^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c), \tag{1}$$

где S — площадь, а $P = a+b+c$ — периметр треугольника. Допустим, что S — целое число. Тогда из (1) следует, что P — четное число (если P — нечетно, то правая часть (1) также нечетна). Следовательно, либо числа a, b, c — четные, либо среди них одно четное и два нечетных. В первом случае, так как a, b, c — простые числа, $a = b = c = 2$, и площадь треугольника равна $\sqrt{3}$, т. е. нецелая. Во втором случае будем считать, что $a = 2$, а b и c — нечетные простые числа. Если $b \neq c$, то $|b-c| \geqslant 2$, и неравенство треугольника не выполнено. Следовательно, $b = c$. Из (1) получаем, что $S^2 = b^2 - 1$, или $(b-S)(b+S) = 1$, что невозможно для натуральных b и S. Итак, оба случая невозможны, т. е. S не может быть целым числом.

434. ***Первое решение.*** Пусть A_1 и A_2 — точки, лежащие на первой окружности, а B_1 и B_2 — точки, лежащие на второй окружности. Обратимся к ситуации, изображенной на рис. 189 (случай, изображенный на рис. 190 рассматривается аналогично).

Пусть точки A_3, B_3 и B_4 симметричны точкам B_2, A_1 и A_2 соответственно относительно точки O. По теореме о пересекающихся хордах $B_3O \cdot OB_1 = B_2O \cdot OB_4$, откуда $OA_1 \cdot OB_1 = OB_2 \cdot OA_2$, так как $B_3O = OA_1$ и $OB_4 = OA_2$. Это и означает, что точки A_1, B_1, B_2 и A_2 лежат на одной окружности.

Второе решение. В случае, показанном на рис. 189, $\smile B_2B_3 = \smile A_1A_3$ в силу симметрии этих дуг относительно точки O. Поэтому $\angle A_3A_2A_1 =$

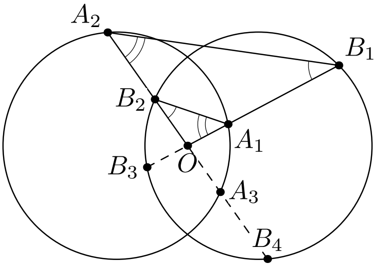


Рис. 189

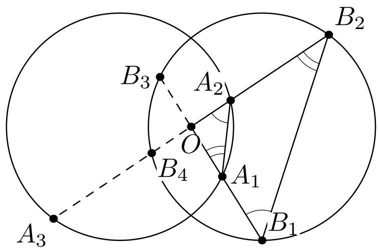


Рис. 190

$= \angle B_3B_1B_2$, т. е. отрезок A_1B_2 виден из точек B_1 и A_2 под одинаковым углом, следовательно, точки A_1, A_2, B_1 и B_2 лежат на одной окружности.

В случае, изображенном на рис. 190, $\overset{\frown}{B_2B_3} = \overset{\frown}{A_1A_3}$, $\angle A_3A_2A_1 = \angle B_3B_1B_2$, но $\angle A_1A_2B_2 = 180^\circ - \angle A_3A_2A_1$, поэтому $\angle B_3B_1B_2 + \angle A_1A_2B_2 = 180^\circ$.

435. См. решение задачи 427.

436. **Ответ.** При $F = 8$.

Если $F = 0$, то можно указать на любого человека, сидящего за столом.

Пусть теперь $F \neq 0$. Разобьем всех сидящих за столом на непустые группы подряд сидящих умных и подряд сидящих дураков; число этих групп обозначим через $2k$ (k групп умных и k групп дураков). Количество людей в i-й группе умных обозначим через w_i, а количество людей в i-й группе дураков — через f_i ($1 \leqslant i \leqslant k$). Тогда $f_1 + f_2 + \ldots + f_k \leqslant F$. Рассмотрим последовательность подряд идущих ответов «умный» и последнего человека x, про которого так говорят. Группа из w_i умных дает такую последовательность длины не меньше $w_i - 1$, при этом x — действительно умный. Если же x — дурак и находится в i-й группе дураков, то длина такой последовательности не более $f_i - 1$. Следовательно, если $\max\limits_i w_i > \max\limits_i f_i$, то можно утверждать, что последний человек, который назван умным в самой длинной последовательности ответов «умный», действительно умный. Так как $\max\limits_i w_i \geqslant \dfrac{30 - (f_1 + \ldots + f_k)}{k} \geqslant \dfrac{30 - F}{k}$,

$$\max_i f_i \leqslant (f_1 + \ldots + f_k) - k + 1 \leqslant F - k + 1,$$

то если неравенство $\dfrac{30 - F}{k} > F - k + 1$ выполняется при всех k от 1 до F, то можно указать на умного человека, сидящего за столом. Это неравенство равносильно такому:

$$k^2 - (F + 1)k + 30 - F > 0.$$

Оно справедливо для всех k, если $D = (F+1)^2 + 4(F-30) < 0$, т. е. при $F < -3 + \sqrt{128} < -3 + 12 = 9$. Итак, при $F \leqslant 8$ можно на основании данных ответов указать на умного человека.

При $F = 9$ это не всегда возможно. Действительно, рассмотрим компанию, сидящую за столом так, как показано на рис. 191 (на рисунке рядом со стрелочками даны ответы: у — «умный», д — «дурак»; дураки показаны заштрихованными кружочками).

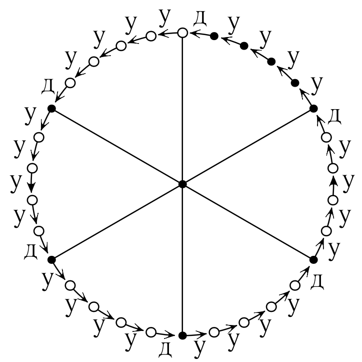


Рис. 191

Будем поворачивать эту картинку вокруг центра на углы 60°, 120°, 180°, 240° и, наконец, 300° по часовой стрелке. При этом, как нетрудно проверить, на каждом месте может оказаться как умный, так и дурак, а последовательность ответов останется той же самой. Поэтому в такой компании указать на умного человека на основании данных ответов невозможно.

437. См. решение задачи 429.

438. **Ответ.** Верно.

Пусть даны два прямоугольника равной площади: $A_1B_1C_1D_1$ со сторонами a_1 и b_1 и $A_2B_2C_2D_2$ со сторонами a_2 и b_2. Без ограничения общности будем считать, что $a_1 < b_2$ и $a_2 < b_1$ (если $a_1 = b_2$, то в силу равенства площадей и $a_2 = b_1$, в этом случае утверждение очевидно); случай $a_1 < b_2$, $b_1 < a_2$ невозможен, так как $a_1b_1 = a_2b_2$.

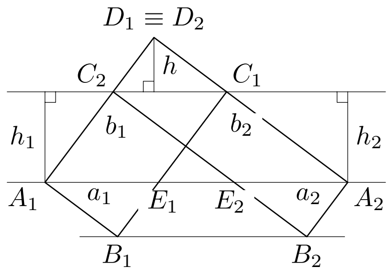


Рис. 192

Расположим прямоугольники так, как показано на рис. 192. Это расположение удовлетворяет условию задачи. Докажем это.

Заметим сначала, что $A_1A_2 \parallel C_1C_2$. Действительно, из подобия треугольников получаем, что $\frac{h_1}{h} = \frac{b_1 - a_2}{a_2}$ и $\frac{h_2}{h} = \frac{b_2 - a_1}{a_1}$ (см. рис. 192). Так как $a_1b_1 = a_2b_2$, то $\frac{b_1 - a_2}{a_2} = \frac{b_2 - a_1}{a_1}$, следовательно, $h_1 = h_2$ и $A_1A_2 \parallel \parallel C_1C_2$. Из этого вытекает, что четырехугольники $A_1E_1C_1C_2$ и $A_2E_2C_2C_1$ — параллелограммы (значит, $A_1E_1 = A_2E_2$), и площади их равны. Тогда, в силу равенства площадей прямоугольников, равны и площади треугольников $A_1B_1E_1$ и $A_2B_2E_2$, а так как $A_1E_1 = A_2E_2$, то равны их высоты. Поэтому $B_1B_2 \parallel A_1A_2 = a_1$. Следовательно, треугольники $A_1B_1E_1$ и

$E_2B_2A_2$ равны по двум катетам. Из этого следует, что любая горизонтальная прямая, пересекающая эти треугольники, пересекает их по равным отрезкам. Если же горизонтальная прямая пересекает параллелограммы $A_1E_1C_1C_2$ и $A_2E_2C_2C_1$ или совпадающие треугольники $C_1D_2C_2$ и $C_1D_1C_2$, то равенство соответствующих отрезков очевидно.

Замечание. Аналогичное утверждение для других равновеликих фигур, вообще говоря, неверно. Примером могут служить круг и квадрат равной площади.

439. Ответ. $n = 7$.

Ясно, что если n клеток отмечены так, что выполняется условие задачи, то в каждой строке и в каждом столбце находится ровно одна отмеченная клетка. Считая, что $n \geqslant 3$ (очевидно, что $n = 2$ — не наибольшее), возьмем строку A, в которой отмечена первая клетка, строку B, соседнюю с A, и строку C, соседнюю либо с A (и не совпадающую с B), либо с B (и не совпадающую с A).

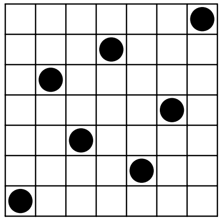


Рис. 193

Пусть b — номер отмеченной клетки в строке B. Если $b \leqslant n - \left[\frac{n+1}{2}\right]$ или $b \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] + 2$, то в строках A и B найдется прямоугольник площади не меньшей n, не содержащий отмеченных клеток, следовательно, $n - \left[\frac{n+1}{2}\right] < b < \left[\frac{n+1}{2}\right] + 2$.

Рассмотрим два прямоугольника, образованных пересечением строк A, B и C со столбцами с номерами $2, 3, \ldots, n - \left[\frac{n+1}{2}\right]$ и со столбцами с номерами $2 + \left[\frac{n+1}{2}\right], \ldots, n$. В этих прямоугольниках не лежат отмеченные клетки строк A и B. Если $n > 7$, то площадь каждого из них не меньше n, но строка C содержит лишь одну отмеченную клетку, т. е. один из этих прямоугольников не содержит отмеченных клеток. Итак, мы доказали, что $n \leqslant 7$. Пример доски 7×7, удовлетворяющей условию задачи, приведен на рис. 193.

Замечание. При $n = 6$ отметить клетки требуемым образом невозможно, что следует из решения.

440. Назовем последовательность *m-хорошей*, если если она сама и первые ее m усреднений состоят из целых чисел. Докажем, пользуясь методом математической индукции, что если последовательность $\{x_k\}$ — хорошая, то последовательность $\{x_k^2\}$ — m-хорошая для любого целого неотрицательного числа m. Из этого и вытекает утверждение задачи. Очевидно, что если последовательность $\{x_k\}$ — хорошая, то последовательность $\{x_k^2\}$ — 0-хорошая. Предположим, что последовательность $\{x_k^2\}$ — m-хорошая, и докажем, что она $(m+1)$-хорошая. Это следует из тождества $\dfrac{x_k^2+x_{k+1}^2}{2} = \left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2} - x_{k+1}\right)^2$, так как последовательности с общими членами $\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}$ и $\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2} - x_{k+1}$ — хорошие, а поэтому, согласно индуктивному предположению, их квадраты — m-хорошие последовательности, т. е. последовательность $\{x_k^2\}$ — $(m+1)$-хорошая.

Замечание 1. Нетривиальный пример хорошей последовательности дает арифметическая прогрессия с четной разностью, состоящая из целых чисел, например: $1, 3, 5, 7, \ldots$

Замечание 2. Изменим определение усреднения последовательности на более общее: $a_k' = \dfrac{a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+p-1}}{p}$, $p \in \mathbb{N}$. Известно доказательство аналогичного утверждения (если $\{x_k\}$ — хорошая, то и $\{x_k^p\}$ — хорошая) при $p = 3$. Интересно было бы выяснить, при каких p оно справедливо. Гипотеза: только при простых p.

11 класс

441. См. решение задачи 425.

442. Параллельным переносом одного из двух данных треугольников совместим вершины C и C' их прямых углов, а гомотетией того же треугольника с центром в точке C совместим их медианы (см. рис. 194). Тогда окружность с центром E и радиусом CE описана около обоих треугольников, причем угол между их гипотенузами — центральный и, значит, вдвое больше соответствующего вписанного угла, каковым является один из углов между катетами (на рис. 194 это углы: $\angle AEA' = 2\angle ACA'$). Для доказательства требуемого утверждения остается заметить, что проделанные выше преобразования одного из треугольников не меняют углов между прямыми.

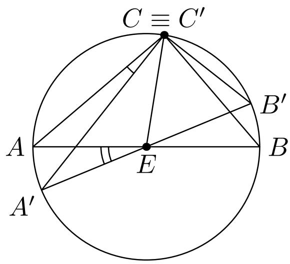


Рис. 194

443. **Ответ.** $f(x) \equiv 1$, $f(x) \equiv x$.

Заметив, что $f(x) \equiv 1$ удовлетворяет условию задачи, будем искать другие решения.

Пусть $f(a) \neq 1$ при некотором $a > 0$. Тогда из равенств $f(a)^{f(xy)} = f(a^{xy}) = f(a^x)^{f(y)} = f(a)^{f(x)\cdot f(y)}$ следует, что

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \qquad (1)$$

для любых $x,\ y > 0$. А тогда из равенств $f(a)^{f(x+y)} = f(a^{x+y}) = f(a^x) \cdot f(a^y) = f(a)^{f(x)} \cdot f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)}$ следует, что

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{2}$$

для любых $x, y > 0$.

Из (1) имеем

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2,$$

т. е. $f(1) = 1$, а затем из (2) и (1) получаем

$$f(n) = f(1 + \ldots + 1) = f(1) + \ldots + f(1) = n,$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot n = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f(n) = f(m) = m,$$

т. е. для любых $m, n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}\,. \tag{3}$$

Предположим, что для некоторого $x > 0$ имеет место неравенство $f(x) \neq x$, скажем, $f(x) < x$ (случай $f(x) > x$ рассматривается аналогично). Подобрав число $y = \frac{m}{n}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$f(x) < y < x,$$

из (2) и (3) получаем противоречащее им неравенство.

$$f(x) = f(y + (x-y)) = f(y) + f(x-y) > f(y) = y.$$

Итак, сделанное выше предположение неверно, поэтому $f(x) = x$ для любого $x > 0$, и, разумеется, найденная функция годится.

444. Пусть для некоторого n указанное в задаче разбиение произведено. Раскрасим вершины треугольников в 3 цвета, как на рис. 195, где цвета обозначены буквами A, B, C. Заметим, что у любого правильного треугольника с вершинами в этих точках все вершины либо разноцветные, либо одноцветные. Убедиться в этом можно, проверив, что если такой треугольник повернуть вокруг любой его вершины (без потери общности можно считать, что она имеет цвет A) на угол 60°, то вершины, оставшиеся после поворота в исходном треугольнике и имевшие цвет A, сохранят его, а имевшие цвет B и C — поменяют его на C и B соответственно (если одна из вершин правильного треугольника с вершинами в покрашенных точках совпадает с центром поворота, то одна из оставшихся вершин переходит в другую).

$$\begin{array}{c} A \\ B\ C \\ C\ A\ B \\ A\ B\ C\ A \\ B\ C\ A\ B\ C \\ C\ A\ B\ C\ A\ B \\ A\ B\ C\ A\ B\ C\ A \end{array}$$

Рис. 195

Выберем цвет, которым покрашено наименьшее число точек, и выбросим точки этого цвета. Эту операцию назовем *разрежением*. Останется не менее $\frac{2}{3} \cdot \frac{n^2}{2}$ точек двух цветов (так как точек было больше, чем $\frac{n^2}{2}$). Любой правильный треугольник с вершинами в этих точках одноцветный, а значит, имеет сторону длиной не менее $\sqrt{3}$.

Рассмотрим отдельно множество точек каждого из двух оставшихся цветов, которые образуют часть треугольной решетки со стороной $\sqrt{3}$, и сделаем аналогичное разрежение. В результате останется не менее $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{n^2}{2}$ точек, которые могут образовывать вершины правильного треугольника только со стороной не менее $(\sqrt{3})^2$. Действуя аналогично, после k-го разрежения, мы сохраним не менее $\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{n^2}{2}$ точек, а правильные треугольники будут иметь сторону не менее. чем $(\sqrt{3})^k$.

Пусть $n = 3^m$, тогда после $k = 2m+1$ разрежений, правильных треугольников не останется вовсе, а точек останется не менее, чем $\left(\frac{2}{3}\right)^{2m+1} \cdot \frac{n^2}{2} = \left(\frac{4}{3}\right)^m \cdot \frac{n}{3} \geqslant 1993 \cdot n$, при $\left(\frac{4}{3}\right)^m \geqslant 3 \cdot 1993$. Таким образом, достаточно взять $m > \log_{\frac{4}{3}}(3 \cdot 1993)$.

445. **Ответ.** $\{0, 0, 0, 0\}, \{1, 1, 1, 1\}, \{-1, -1, 1, 1\}, \{-1, -1, -1, 1\}$ (с точностью до перестановки чисел четверки).

Рассмотрим модули искомых чисел и упорядочим их по неубыванию: $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Заметим, что $a \geqslant bc$, так как либо $a = bc$, либо $a = bd \geqslant bc$, либо $a = cd \geqslant bc$. Аналогично, $d \leqslant bc$. Следовательно, $bc \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant bc$, т. е. $a = b = c = d = bc = x$. Так как $x = x^2$, то $x = 0$ или $x = 1$. Остается проверить, что если в четверке есть отрицательные числа, то их количество равно двум или трем.

446. Требуемое утверждение докажем индукцией по количеству n чисел в строке (в условии задачи взято $n = 1993$).

При $n = 1$ на первом месте стоит число 1. Пусть теперь для строки из $n-1$ чисел утверждение доказано. Докажем его для строки из n чисел. Если в результате выполнения описанных в условии операций число n окажется на последнем месте, то к первым $(n-1)$ числам сразу можно применить предположение индукции, так как число n уже никуда не переместится.

Если же число n никогда не окажется на последнем месте, то оно не окажется и на первом месте. Но тогда число, находящееся на последнем месте, никуда не перемещается. Поэтому, поменяв местами число n и число, стоящее на последнем месте, мы никак не изменим происходящего. Следовательно, к первым $(n-1)$ числам можно применить предположение индукции.

447. **Ответ.** $n = 8k+1$, где $k \in \mathbb{N}$.

Пусть описанный в задаче турнир проведен. Тогда все противники одного теннисиста разбиваются на пары, поэтому n нечетно. Все возможные пары противников разбиваются на четверки пар, игравших в одном матче. Следовательно, число этих пар $\frac{n(n-1)}{2}$ кратно четырем, откуда $n - 1 = 8k$.

Докажем, что при любом $k = 1, 2, \ldots$ указанный турнир для $n = 8k + 1$ участников возможен.

При $k = 1$ для описания турнира поставим в соответствие теннисистам вершины правильного девятиугольника $A_1A_2\ldots A_9$. На рис. 196 изображен матч пары A_1, A_2 против пары A_3, A_5, причем отрезками соединены противники. Поворачивая эту конструкцию из отрезков вокруг центра на углы. кратные $\frac{2\pi}{9}$, мы получим изображения для остальных восьми матчей. При этом каждая хорда вида A_iA_j появится в изображении один раз, поскольку она равна в точности одной из хорд A_2A_3, A_1A_3, A_2A_5 и A_1A_5. При $k > 1$ выделим одного из $8k + 1$ теннисистов, а остальных разобьем на k групп по 8 человек. Присоединяя выделенного теннисиста последовательно к каждой группе, проведем в них турниры по описанной выше схеме для 9 человек. Тогда останется только провести матчи между противниками из разных групп. Для этого достаточно разбить каждую группу на 4 команды по 2 человека и провести все возможные матчи между командами из разных групп.

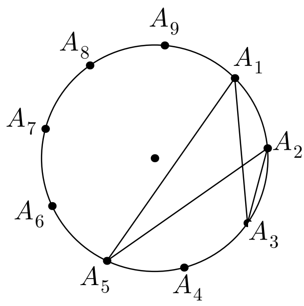


Рис. 196

448. Пусть даны прямоугольные параллелепипеды $ABCDA'B'C'D'$ и $A_1B_1C_1D_1A_1'B_1'C_1'D_1'$ равного объема, который мы будем считать единичным. Обозначим длины их ребер через a, b, c и a_1, b_1, c_1 соответственно. Если у параллелепипедов есть равные ребра, например $a = a_1$, то достаточно поставить параллелепипеды на горизонтальную плоскость так, чтобы ребра a и a_1 были перпендикулярны ей, так как тогда любое их сечение горизонтальной плоскостью будет иметь площадь $bc = b_1c_1$. Поэтому далее будем считать, что длины ребер параллелепипедов различны. Всюду буквами S и V обозначим площадь и объем соответственно.

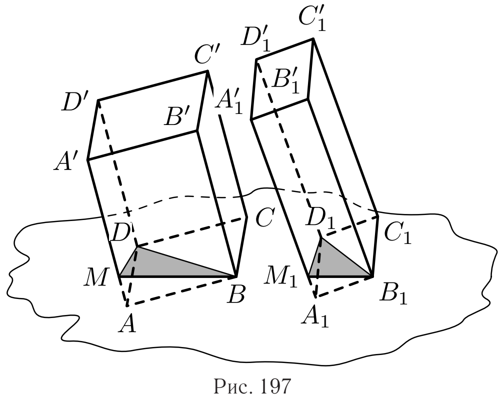


Рис. 197

Мы покажем, что на ребрах AA' и A_1A_1' параллелепипедов найдутся точки M и M_1 такие, что $S_{MBD} = S_{M_1B_1D_1}$ и $V_{AMBD} = V_{A_1M_1B_1D_1}$. Далее мы получим, что расположение параллелепипедов, при котором плоскости MBD и $M_1B_1D_1$ горизонтальны и совпадают (см. рис. 197), удовлетворяет условию.

Докажем предварительно несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть в пирамиде $ABCD$ плоские углы при вершине A прямые, а площади граней BCD, ABC, ABD и ACD равны S_0, S_1, S_2 и S_3 соответственно. Тогда $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.*

Доказательство. Спроектируем пирамиду ортогонально сначала на плоскость ABC, затем на плоскости ABD, ACD и BCD (см. рис. 198). Обозначим углы, образуемые гранями ABC, ABD и ACD с гранью BCD через α_1, α_2 и α_3. Тогда по теореме о площади ортогональной проекции многоугольника $S_i = S_0 \cdot \cos\alpha_i$ ($i = 1,\ 2,\ 3$), $S_0 = S_1\cos\alpha_1 + S_2\cos\alpha_2 + S_3\cos\alpha_3$, поэтому $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$ и $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$. Лемма 1 доказана.

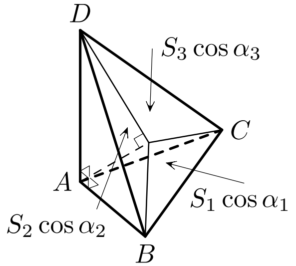


Рис. 198

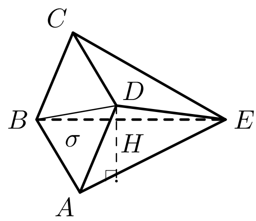


Рис. 199

Рассмотрим четырехугольную пирамиду $EABCD$ ($ABCD$ — прямоугольник), лежащую на горизонтальной плоскости гранью EAB (см. рис. 199). Такую пирамиду назовем *клином* с основанием EAB, а расстояние от прямой CD до плоскости EAB назовем высотой клина. Пусть площадь основания клина $EABCD$ равна σ, а его высота равна H.

Лемма 2. *Объем клина равен двум третям произведения площади его основания на высоту, т. е. $V = \frac{2}{3}\sigma \cdot H$.*

Доказательство. Разобьем клин на две пирамиды $DEAB$ и $DEBC$. Их объемы равны, так как $S_{ABD} = S_{BCD}$ и расстояние от точки E до их оснований одно и то же. Поэтому $V = 2V_{DEAB} = \frac{2}{3}\sigma H$.

Лемма 3. *На горизонтальной плоскости стоят два тетраэдра (или два клина) с равными высотами и равными площадями оснований. Тогда их сечения плоскостью, параллельной основаниям, имеют равные площади.*

Доказательство. В случае тетраэдров (см. рис. 200) из подобия получаем, что $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{H-x}{H}\right)^2$ и $\frac{S_2}{S} = \left(\frac{H-x}{H}\right)^2$, следовательно, $S_1 =$

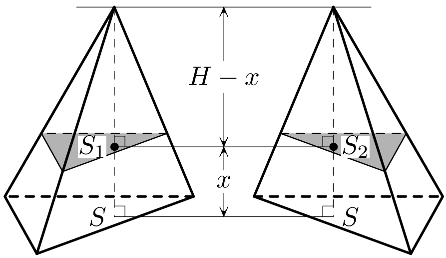


Рис. 200

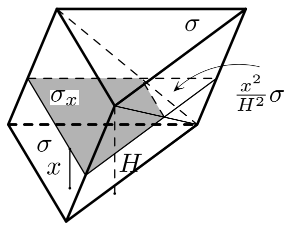


Рис. 201

$= S_2$. Чтобы доказать это утверждение для клиньев, достаточно достроить клин до призмы (см. рис. 201). Из рисунка видно, что $\sigma_x = \sigma - \frac{x^2}{H^2}\,\sigma = \sigma\left(1 - \frac{x^2}{H^2}\right)$, откуда и следует равенство площадей сечений.

Докажем теперь **существование точек** M и M_1. Если $AM = xc$, а $A_1M_1 = xc_1$, где $x \in (0,1]$, то равенство объемов пирамид $AMBD$ и $A_1M_1B_1D_1$ выполняется автоматически, а равенство площадей треугольников MBD и $M_1B_1D_1$ равносильно равенству $f(x) = (a^2c^2 + b^2c^2 - a_1^1c_1^2 - b_1^2c_1^2)x^2 + (a^2b^2 - a_1^2b_1^2) = 0$, так как $S_{MBD}^2 = \frac{1}{4}\,(x^2a^2c^2 + x^2b^2c^2 + a^2b^2)$ и $S_{M_1B_1D_1}^2 = \frac{1}{4}\,(x^2a_1^2c_1^2 + x^2b_1^2c_1^2 + a_1^2b_1^2)$ в силу леммы 1. Покажем, что $f(0) > 0$, а $f(1) \leqslant 0$ (или наоборот). Отсюда и будет следовать существование $x \in (0,1]$ такого, что $f(x) = 0$, а, значит, и существование точек M и M_1.

Заметим, что $f(0) = a^2b^2 - a_1^2b_1^2 = \frac{a^2b^2c^2}{c^2} - \frac{a_1^2b_1^2c_1^2}{c_1^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_1^2}$ и, аналогично, $f(1) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{c_1^2}$, так как $abc = a_1b_1c_1 = 1$.

Рассмотрим два новых прямоугольных параллелепипеда: один с ребрами $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ и диагональю d, другой — с ребрами $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{c_1}$ и диагональю d_1: их объемы равны единице, а диагональ одного из них не меньше, чем диагональ другого. Пусть, скажем, $d \leqslant d_1$, тогда $f(1) \leqslant 0$. Так как объемы параллелепипедов равны, то у первого параллелепипеда найдется ребро, большее какого-нибудь ребра второго (выше мы предполагали, что равных ребер нет). Изменив в случае необходимости обозначения, будем считать, что $\frac{1}{c} > \frac{1}{c_1}$. Тогда $f(0) > 0$, что и требовалось.

Осталось доказать, что описанное выше расположение параллелепипедов удовлетворяет условию. Ясно, что в силу симметрии параллелепипедов относительно своих центров, достаточно проверить это утверждение для их «половинок», т. е. призм $ABDA'B'D'$ и $A_1B_1D_1A_1'B_1'D_1'$. Для пирамид $MABD$ и $M_1A_1B_1D_1$ справедливость его следует из леммы 3.

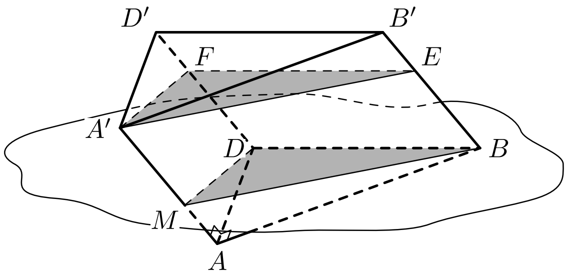


Рис. 202

Проведем плоскость $A'FE \parallel MBD$ (см. рис. 202) и плоскость $A'_1F_1E_1 \parallel M_1B_1D_1$. Эти плоскости отсекают от призм клинья $A'B'D'FE$ и $A'_1B'_1D'_1F_1E_1$ равного объема, так как (в силу леммы 2)

$$V_{A'B'D'FE} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\,axc\cdot b = \frac{1}{3}\,x = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\,a_1xc_1\cdot b_1 = V_{A'_1B'_1D'_1F_1E_1}.$$

Так как площади оснований и объемы клиньев равны, то равны и их высоты, поэтому в силу леммы 3 утверждение справедливо и для клиньев.

Остается заметить. что призмы $MBDA'EF$ и $M_1B_1D_1A'_1E_1F_1$ имеют равные площади оснований и равные объемы (а, следовательно, и равные высоты), поэтому площади их сечений любой горизонтальной плоскостью равны.

Замечание 1. Аналогичное утверждение для произвольных фигур равного объема, вообще говоря, неверно (см. также задачу 438 и замечания к ней).

Замечание 2. В условии задачи можно отказаться от прямоугольности параллелепипедов. Утверждение при этом остается справедливым. Кроме того, оно справедливо для произвольных равновеликих тетраэдров, однако известное доказательство этого факта неэлементарно.

1993–1994 г.

9 класс

449. ***Первое решение.*** Умножая обе части данного неравенства на $x - \sqrt{x^2+1}$, получаем, что $-y-\sqrt{y^2+1} = x-\sqrt{x^2+1}$. Аналогично, умножая обе части данного равенства на $y - \sqrt{y^2+1}$, приходим к равенству $-x - \sqrt{x^2+1} = y - \sqrt{y^2+1}$. Складывая полученные равенства, приходим к равенству $-(x+y) = x+y$, откуда $x+y=0$.

Второе решение. Заметим, что функция $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ возрастает при $x \geqslant 0$; при $x < 0$ она также возрастает, так как $f(x) =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ и знаменатель, очевидно, убывает. Поэтому при фиксированном y у данного уравнения не больше одного решения; с другой стороны, $x = -y$ — очевидно, рещение уравнения.

450. ***Первое решение.*** Так как касательные к окружности S_2 в точках B и C параллельны, то BC — ее диаметр, и $\angle BFC = 90^\circ$. Докажем, что и $\angle AFB = 90^\circ$. Проведем через точку F общую касательную к окружностям (см. рис. 203), пусть она пересекает прямую l в точке K. Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что треугольники AKF и BKF равнобедренные. Следовательно,

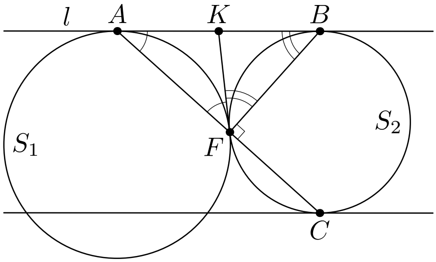


Рис. 203

$$\angle AFB = \angle AFK + \angle KFB = \angle FAB + \angle FBA = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Второе решение. Рассмотрим гомотетию с центром F и коэффициентом, равным $-\frac{r_2}{r_1}$, где r_1 и r_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2. При этой гомотетии S_1 переходит в S_2, а прямая l — касательная к S_1 — переходит в параллельную прямую — касательную к S_2. Следовательно, точка A переходит в точку C, поэтому точка F лежит на отрезке AC.

451. **Ответ.** Выигрывает начинающий.

Если перед ходом начинающего количества спичек на столе имеют вид $2^n \cdot a$, $2^n \cdot b$ и $2^m \cdot c$, где $0 \leqslant n < m$, а числа a, b и c нечетны, то он сможет, очевидно, сделать свой следующий ход. Докажем индукцией по числу ходов k, сделанных начинающим, что он сможет добиться такого распределения спичек по кучкам перед каждым своим ходом.

При $k = 0$ утверждение верно: $100 = 2^2 \cdot 25, 300 = 2^2 \cdot 75, 200 = 2^3 \cdot 25$.

Предположим, что оно справедливо для $k = l - 1$. Это означает, что перед l-м ходом начинающего на столе лежат кучки, содержащие $2^n \cdot a$, $2^n \cdot b$ и $2^m \cdot c$ спичек. Тогда своим l-м ходом начинающий уберет кучку из $2^n \cdot a$ спичек, а кучку из $2^m \cdot c$ спичек разделит на кучки из 2^n и $2^n(2^{m-n} \cdot c - 1)$ спичек. После этого количества спичек в кучках будут иметь вид $2^n \cdot a_1$, $2^n \cdot a_2$, $2^n \cdot a_3$, где a_1, a_2 и a_3 — нечетные числа. Без ограничения общности можно считать, что второй игрок своим ходом убирает кучку из $2^n \cdot a_1$ спичек, а кучку из $2^n \cdot a_2$ спичек делит на две кучки — из $2^{n_1} \cdot b_1$ и $2^{n_2} \cdot b_2$, где b_1 и b_2 — нечетные числа и $n_1 \geqslant n_2$. Тогда $2^n \cdot a_2 = 2^{n_1} \cdot b_1 + 2^{n_2} \cdot b_2$. Если при этом $n_1 < n$, то $n_1 = n_2 < n$, и утверждение верно; если $n_1 = n$, то $n_2 > n$, а если $n_1 > n$, то $n_2 = n$, следовательно, утверждение верно и при $k = l$.

452. ***Первое решение.*** Докажем утверждение задачи в более общем предположении, когда рассматриваемые точки могут и совпадать. Доказательство будем вести индукцией по числу N различных точек среди $2n$ отмеченных.

В случае $N = 1$ доказываемое неравенство, очевидно, выполнено. Для N различных точек обозначим через S_1^N сумму попарных расстояний между точками одного цвета, а через S_2^N — сумму попарных расстояний между точками разных цветов.

Предположим, что $S_1^{N-1} \leqslant S_2^{N-1}$, и докажем, что $S_1^N \leqslant S_2^N$.

Занумеруем различные точки, двигаясь по прямой слева направо: A_1, $A_2, \ldots, A_N$. Пусть с точкой A_1 совпадает k красных и s синих точек. Переместим все точки, совпадающие с A_1, в точку A_2. При этом разность $S_1^N - S_2^N$ не уменьшается. Действительно, так как $S_1^N - S_1^{N-1} = (k(n - k) + s(n - s)) \cdot A_1A_2$, а $S_2^N - S_2^{N-1} = (k(n - s) + s(n - k)) \cdot A_1A_2$, то

$$(S_1^N - S_2^N) - (S_1^{N-1} - S_2^{N-1}) = (S_1^N - S_1^{N-1}) - (S_2^N - S_2^{N-1}) = \\ = (2ks - k^2 - s^2) \cdot A_1A_2 = -(k - s)^2 \cdot A_1A_2 \leqslant 0,$$

т. е. $S_1^N - S_2^N \leqslant S_1^{N-1} - S_2^{N-1} \leqslant 0$, откуда и следует доказываемое неравенство.

Второе решение. Рассмотрим произвольный отрезочек между двумя соседними отмеченными точками. Докажем, что количество отрезков с одноцветными концами, покрывающих его, не превосходит количества отрезков с разноцветными концами, покрывающих его (из этого, очевидно, будет следовать требуемое).

Пусть слева от нашего отрезочка лежит k синих и l красных точек (одна из них — левый конец отрезочка). Тогда количество требуемых одноцветных отрезков равно $k(n - k) + l(n - l)$, а разноцветных — $k(n - l) + l(n - k)$, и требуемое неравенство переписывается в виде $n(k + l) - (k^2 + l^2) \geqslant n(k + l) - 2kl$, что очевидно.

453. Имеем:

$$\frac{a_1}{a_2(a_1 + a_2)} + \frac{a_2}{a_3(a_2 + a_3)} + \ldots + \frac{a_n}{a_1(a_n + a_1)} =$$
$$= \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1 + a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2 + a_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n + a_1}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2 + a_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + a_1}\right) =$$
$$= \frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)} + \frac{a_3}{a_2(a_2 + a_3)} + \ldots + \frac{a_1}{a_n(a_n + a_1)}.$$

454. Заметим, что карточку с числом 1 двигать нельзя. Следовательно, карточку с числом 2 можно двигать не более одного раза, карточку с числом 3 — не более двух раз, и т. д. Итак, для любого $n \leqslant 1000$ карточку с числом n можно двигать не более $n-1$ раз (так как мы можем положить ее только справа от карточки с числом $n-1$, которая, в свою очередь, может двигаться не более $n-2$ раз). Значит, число сделанных ходов не превосходит $1+2+\ldots+999 = 999 \cdot \frac{1000}{2} = 499\,500 < 500\,000$.

455. Пусть S_1 — окружность, описанная около треугольника APB, а S_2 — окружность, описанная около треугольника CPD, Q_1 — их точка пересечения, отличная от точки P. Соединим точку Q_1 с точками P, B и C (см. рис. 204).

Так как $AB \parallel CD$, то $\angle CDA + \angle BAD = 180^\circ$. Кроме того, $\angle CQ_1P + \angle CDA = 180^\circ$ и $\angle PQ_1B + \angle BAD = 180^\circ$. Из этих равенств вытекает, что $\angle CQ_1P + \angle PQ_1B = 180^\circ$, следовательно, точка Q_1 лежит на отрезке BC. Теперь $\angle CPD = \angle CQ_1D$ и $\angle APB = \angle AQ_1B$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу). Но по условию $\angle APB = \angle CPD$, следовательно, $\angle AQ_1B = \angle CQ_1D$. Из сказанного вытекает, что точка Q_1 совпадает с точкой Q, так как точка Q на отрезке BC такая, что $\angle AQB = \angle CQD$, находится однозначно как точка пересечения прямой BC и прямой AD_1, где D_1 — точка, симметричная точке D относительно BC. (Другие случаи расположения Q_1 разбираются аналогично; при этом, если точка Q' попадает на прямую BC вне отрезка BC, то точки Q не существует.)

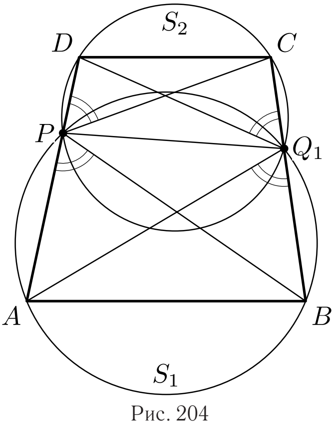


Рис. 204

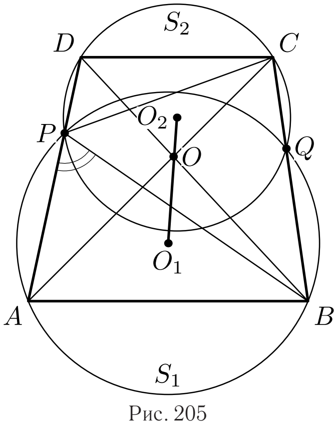


Рис. 205

Применим теорему синусов к треугольникам APB и CDP (см. рис. 205):

$$\frac{DC}{\sin\alpha} = 2R_2, \quad \frac{AB}{\sin\alpha} = 2R_1,$$

где $\alpha = \angle APB = \angle CPD$, R_1 и R_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2. Следовательно, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{AB}{CD}$. Отсюда вытекает, что точка O пересечения диагоналей трапеции является центром гомотетии, переводящей окружность S_1 в окружность S_2. Поэтому точка O равноудалена от концов общей хорды этих окружностей, т. е. от точек P и Q.

456. Для каждой каемки проведем две вертикальных и две горизонтальных полоски шириной 1, в которых лежат ее клетки. Тогда проведенные полоски покрывают наш квадрат, поэтому либо все 100 горизонтальных, либо все 100 вертикальных полосок, пересекающих квадрат, проведены (пусть это вертикальные). Таким образом, все вертикальные полоски для разных каемок не совпадают и проходят по клеткам квадрата.

Отсюда следует, что две угловые клетки квадрата (скажем, A и B) покрыты одной и той же каемкой, и остальные две угловые клетки (C и D) также покрыты одной каемкой. Сторона каждой из этих каемок не меньше 100; однако для каждой из этих каемок обе вертикальные полоски пересекают квадрат. Поэтому это одна и та же каемка со стороной 100, содержащая все граничные клетки нашего квадрата. Удалив эту каемку, мы получим квадрат 98×98, к которому можно снова применить аналогичные рассуждения. Продолжая эту процедуру, мы убедимся, что утверждение задачи справедливо.

10 класс

457. Каждый корень данного уравнения является корнем одного из квадратных трехчленов $\pm P_1 \pm P_2 \pm P_3$ с некоторым набором знаков. Таких наборов 8, и все они дают действительно квадратные трехчлены, так как коэффициент при x^2 имеет вид $\pm 1 \pm 1 \pm 1$, т. е. отличен от нуля. Однако двум противоположным наборам знаков соответствуют квадратные уравнения, имеющие одни и те же корни. Значит, все решения уравнения $|P_1(x)| + |P_2(x)| = |P_3(x)|$ содержатся среди корней четырех квадратных уравнений. Следовательно, их не более восьми.

458. См. решение задачи 451.

459. Продолжим медианы до пересечения с описанной окружностью в точках A_1, B_1 и C_1 (см. рис. 206). Очевидно, что $AA_1 \leqslant D$, $BB_1 \leqslant D$, $CC_1 \leqslant D$, т. е.

$$\begin{gathered} m_a + A_1A_2 \leqslant D,\ m_b + B_1B_2 \leqslant D, \\ m_c + C_1C_2 \leqslant D. \end{gathered} \tag{1}$$

Найдем A_1A_2. По теореме о пересекающихся хордах $A_1A_2 \cdot AA_2 = BA_2 \cdot A_2C$, т. е. $m_a \cdot A_1A_2 = \frac{a^2}{4}$ и $A_1A_2 = \frac{a^2}{4m_a}$. Аналогично, $B_1B_2 = \frac{b^2}{4m_b}$ и $C_1C_2 = \frac{c^2}{4m_c}$.

Подставим эти выражения в неравенства (1) и сложим их:

$$\frac{4m_a^2+a^2}{4m_a}+\frac{4m_b^2+b^2}{4m_b}+\frac{4m_c^2+c^2}{4m_c}\leqslant 3D,$$

но $4m_a^2+a^2=2b^2+2c^2$, $4m_b^2+b^2=2c^2+2a^2$, $4m_c^2+c^2=2a^2+2b^2$ (сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон), следовательно,

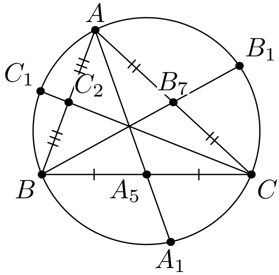


Рис. 206

$$\frac{a^2+b^2}{2m_c}+\frac{b^2+c^2}{2m_a}+\frac{c^2+a^2}{2m_b}\leqslant 3D,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство.

460. Будем для краткости называть треугольниками равнобедренные треугольники с вершинами в вершинах $(6n+1)$-угольника.

Заметим, что всякая диагональ и всякая сторона данного многоугольника M принадлежит ровно трем различным треугольникам (этот факт верен только при условии, что число сторон многоугольника имеет при делении на 6 остаток 1 или 5).

Обозначим через CC, CK и KK число диагоналей и сторон M, концы которых окрашены в синий, синий и красный, красный цвета соответственно, а через CCC, CCK, CKK и KKK число треугольников, у которых в синий цвет окрашены 3, 2, 1 и 0 вершин соответственно.

Тогда $3\cdot CC=3\cdot CCC+CCK$, так как каждая диагональ (или сторона) M принадлежит трем треугольникам, в треугольниках с тремя синими вершинами три стороны с двумя синими концами, в треугольнике с двумя синими вершинами одна такая сторона, а в треугольниках с меньшим числом синих вершин таких сторон нет.

Аналогично доказываются равенства

$$3\cdot KC=2\cdot CCK+2\cdot CKK \quad \text{и} \quad 3\cdot KK=CKK+3\cdot KKK.$$

Из этих равенств следует, что

$$CCC+KKK=KK+CC-\frac{1}{2}\cdot KC=$$
$$=\frac{1}{2}\,K(K-1)+\frac{1}{2}\,C(C-1)-\frac{1}{2}\,K\cdot C,$$

где C — число синих вершин, $C=6n+1-K$.

Это и доказывает утверждение задачи.

461. Сравним степени, в которых данное простое число p входит в левую и правую части доказываемого неравенства. Пусть p входит в разложение числа k на простые множители в степени α, в разложение числа m — в степени β и в разложение числа n — в степени γ. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Тогда в правую часть p входит в степени 2γ, а в левую — в степени $\beta + 2\gamma$, откуда и следует требуемое неравенство.

462. Пусть a — одно из значений, принимаемых функцией $f(x)$, а n_a и k_a — количество тех x, для которых $f(x) = a$ и $g(x) = a$ соответственно (возможно, что $k_a = 0$). Тогда $n_a \cdot k_a$ пар чисел (x, y) будут удовлетворять равенствам $f(x) = a$, $g(x) = a$, n_a^2 пар — равенствам $f(x) = a$, $f(y) = a$, и k_a^2 пар — равенствам $g(x) = a$, $g(y) = a$. Поэтому, если a, b, …, u — все значения, принимаемые функцией f, то $m = n_a k_a + n_b k_b + \ldots + n_u k_u$, $n = n_a^2 + n_b^2 + \ldots + n_u^2$, $k \leqslant k_a^2 + k_b^2 + \ldots + k_u^2$.

Используя неравенство $2pq \leqslant p^2 + q^2$, получаем требуемое.

463. Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть преобразование плоскости H является композицией гомотетий $H_{O_1}^{k_1}$ и $H_{O_2}^{k_2}$ (с центрами O_1 и O_2, коэффициентами k_1 и k_2).*

Тогда если $k_1 k_2 = 1$, то H — параллельный перенос, а если $k_1 k_2 \neq 1$, то H — гомотетия с коэффициентом $k = k_1 k_2$ и центром, лежащим на прямой $O_1 O_2$.

Доказательство. Если $X_1 = H_{O_1}^{k_1}(X)$, $Y_1 = H_{O_1}^{k_1}(Y)$, $X_2 = H_{O_2}^{k_2}(X_1)$, а $Y_2 = H_{O_2}^{k_2}(Y_1)$, то $\overrightarrow{X_1Y_1} = k_1\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{X_2Y_2} = k_2\overrightarrow{X_1Y_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{X_2Y_2} = k_1 k_2 \overrightarrow{XY}$. Из этого вытекает, что H — параллельный перенос, если $k_1 k_2 = 1$, и гомотетия с коэффициентом $k_1 k_2$, если $k_1 k_2 \neq 1$.

Пусть $k_1 k_2 \neq 1$. Тогда

$$\overrightarrow{O_2X_2} = k_2(\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1X_1}) = k_2\overrightarrow{O_2O_1} + k_2 k_1 \overrightarrow{O_1X} = \\ = k_2\overrightarrow{O_2O_1} + k_1 k_2(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2X}) = (k_1k_2 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2} + k_1k_2\overrightarrow{O_2X}.$$

Подставив сюда центр гомотетии O вместо X и X_2, получим, что

$$\overrightarrow{O_2O} = \frac{k_1k_2 - k_2}{1 - k_1k_2}\,\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Следовательно, точка O принадлежит прямой O_1O_2. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству утверждения задачи. Пусть σ — окружность с центром J и радиусом r, вписанная в треугольник ABC; O — центр окружности S; X — точка, лежащая на отрезке OJ, причем $OX : XJ = R : r$, где R — радиус окружности S (см. рис. 207).

Выбранная таким образом точка X является центром гомотетии H (с коэффициентом $-R/r$), переводящей окружность σ в окружность S. Заметим теперь, что $H = H_{A_1} \circ H_A$, где H_A — гомотетия с центром A и коэффициентом $k_1 = r_1/r$ (r_1 — радиус окружности S_1), переводящая σ в S_1, а H_{A_1} — гомотетия с центром A_1 и коэффициентом $k_2 = -R/r_1$,

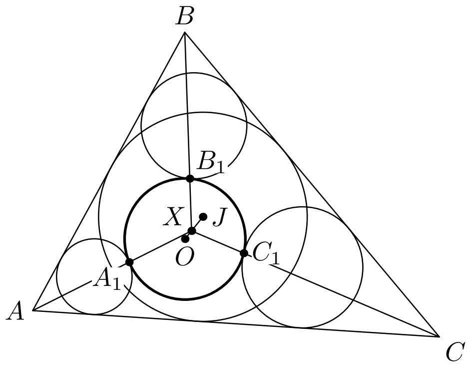


Рис. 207

переводящая S_1 в S. Так как $k_1k_2 = -R/r \neq 1$, то согласно доказанной лемме точка X лежит на прямой AA_1. Аналогично доказывается, что она лежит на прямых BB_1 и CC_1.

464. Ответ. 25.

Учеников, которые учатся лучше большинства своих друзей, назовем *хорошими*. Пусть x — число хороших учеников, k — число друзей у каждого ученика.

Лучший ученик класса является лучшим в k парах друзей, а любой другой хороший ученик — не менее, чем в $\left[\frac{k}{2}\right] + 1 \geqslant \frac{k+1}{2}$ парах (здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа). Поэтому хорошие ученики являются лучшими не менее, чем в $k + (x-1)\,\frac{k+1}{2}$ парах. Это число не может превышать числа всех пар друзей в классе, равного $\frac{30k}{2} = 15k$. Отсюда $k + (x-1)\,\frac{k+1}{2} \leqslant 15k$, или

$$x \leqslant 28 \cdot \frac{k}{k+1} + 1. \qquad (1)$$

Заметим далее, что

$$\frac{k+1}{2} \leqslant 30 - x, \qquad (2)$$

поскольку число учеников, лучше которых учится наихудший из хороших учеников, не превышает $30 - x$.

Правая часть неравенства (1) возрастает с ростом k, а неравенство (2) равносильно условию

$$k \leqslant 59 - 2x. \qquad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что $x \leqslant 28 \cdot \frac{59-2x}{60-2x} + 1$, или

$$x^2 - 59x + 856 \geqslant 0. \qquad (4)$$

Наибольшим целым x, удовлетворяющим (4) и условию $x \leqslant 30$, является $x = 25$. Итак, число хороших учеников не превышает 25.

Покажем, что оно может равняться 25. Занумеруем учеников числами от 1 до 30 в порядке ухудшения успеваемости и расположим номера в таблице 6×5 так, как показано на рис. 208. Пусть пара учеников является парой друзей, если их номера расположены одним из трех способов: а) в соседних строках и в разных столбцах; б) в одном столбце и один из номеров при этом находится в нижней строке; в) в верхней строке. При этом, как нетрудно проверить, все требуемые условия выполнены.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

Рис. 208

11 класс

465. Имеем:
$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2+b^2+a+b}{ab}\,.$$

Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b. Так как ab делится на d^2, то a^2+b^2+a+b делится на d^2. Число a^2+b^2 также делится на d^2. Поэтому $a+b$ делится на d^2 и $\sqrt{a+b} \geqslant d$.

466. Будем называть *выпуклой оболочкой* конечного множества точек наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все эти точки. Можно доказать, что у любого конечного множества точек существует единственная выпуклая оболочка.

Пусть $M = A_1A_2\ldots A_n$ — выпуклая оболочка выбранных k точек ($n \leqslant k$), и точка $O \in M$ отлична от $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Рассмотрим отрезки OA_i и продолжим каждый из них за точку A_i до пересечения с границей стоугольника в точке B_i. Докажем, что M находится внутри выпуклой оболочки M' точек $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Разрежем многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ на треугольники. Тогда, как легко видеть, если $O \in A_iA_jA_k$, то $O \in B_iB_jB_k$, а, следовательно, O лежит также и в выпуклой оболочке точек $B_1, \ldots, B_n$.

Поскольку A_i лежит внутри отрезка OB_i, то $A_i \in M'$, и M лежит внутри M'.

Выберем для каждой точки B_i сторону многоугольника, ее содержащую. Рассмотрим множество концов этих сторон. В нем $m \leqslant 2n \leqslant 2k$ точек. Добавим к ним произвольным образом $2k-m$ вершин стоугольника и рассмотрим $2k$-угольник с вершинами в полученных точках. Он выпуклый, его граница содержит точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и, следовательно, он содержит M' и M.

467. Заметим, что точки A, F и C лежат на одной прямой (см. решение задачи 450). Докажем, что центры окружностей ω_1 и ω_2, описанных около треугольников ABC и BDE соответственно, лежат на AC. Тогда, поскольку общая хорда двух окружностей перпендикулярна линии центров, мы получаем требуемое ($BF \perp FC$, так как BC — диаметр S_2).

Очевидно, центр ω_1 лежит на AC, так как $\triangle ABC$ — прямоугольный. Поэтому достаточно показать, что центр окружности ω_2 совпадает с A. Очевидно, что $AE = AD$, поэтому достаточно проверить, что $AD = AB$.

Пусть радиусы S_1 и S_2 равны R и r соответственно. Тогда из прямоугольной трапеции BAO_1O_2, где O_1 и O_2 — центры S_1 и S_2, находим $AB = 2\sqrt{Rr}$ (см. рис. 209).

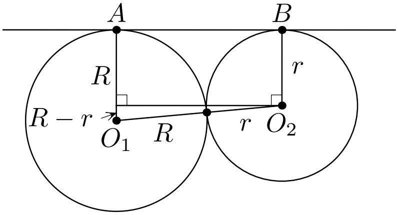


Рис. 209

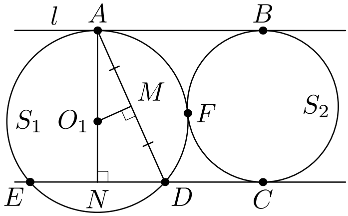


Рис. 210

Проведем серединные перпендикуляры O_1N и O_1M к ED и AD соответственно (см. рис. 210).

Из подобия треугольников AND и AMO_1 находим: $\frac{AD}{AO_1} = \frac{AN}{AM}$ или $\frac{AD}{R} = \frac{2r}{AD/2}$, откуда $AD = 2\sqrt{Rr}$.

468. Выберем произвольную клетку и обозначим ее центр через O. Введем декартову систему координат с началом O, осями, параллельными линиям сетки и единичным отрезком, равным стороне клетки. Зафиксируем какие-либо положения данных фигур I и II и обозначим центры накрываемых ими клеток через $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно. Обозначим

$$\overrightarrow{OA_i} = \vec{a}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OB_j} = \vec{b}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $\vec{c}$ — произвольный вектор с целочисленными координатами, X — произвольная точка с целочисленными координатами, а $g(X, \vec{c})$ — число, записанное в клетке с центром в конце вектора, отложенного от точки X и равного вектору $\vec{c}$. Заметим, что

$$g(A_i, \vec{b}_j) = g(B_j, \vec{a}_i) = g(O, \vec{a}_i + \vec{b}_j), \tag{1}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $S_{\mathrm{I}}(X)$ ($S_{\mathrm{II}}(X)$) — сумма чисел, накрываемых первой (второй) фигурой, перенесенной из первоначального положения на вектор $\overrightarrow{OX}$. Тогда $S_{\mathrm{I}}(X) = \sum\limits_{i=1}^{m} g(X, \vec{a}_i)$ и $S_{\mathrm{II}}(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(X, \vec{b}_j)$.

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{i=1}^{m} S_{\mathrm{II}}(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} g(A_i, \vec{b}_j)$. Изменяя порядок суммирования и используя (1), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} S_{\mathrm{II}}(A_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} g(B_j, \vec{a}_i) = \sum_{j=1}^{n} S_{\mathrm{I}}(B_j).$$

По условию задачи все слагаемые в сумме $\sum\limits_{j=1}^{n} S_{\mathrm{I}}(B_j)$ положительны, так как каждое из них есть сумма чисел, накрываемых первой фигурой в некотором положении, значит, по крайней мере одно слагаемое в сумме $\sum\limits_{i=1}^{m} S_{\mathrm{II}}(A_i)$ положительно, что и требовалось доказать.

469. По условию b_1 отлично от 0 и 5, поэтому b_2 есть одно из чисел 2, 4, 6 или 8, но тогда последовательность $b_2, b_3, \ldots$ является периодической с периодом 4:

$$\ldots,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ \ldots$$

Поэтому для любого $n > 1$ $a_{n+4} = a_n + (2+4+8+6)$ и для любого $s > 1$ $a_{n+4s} = a_n + 20s$.

Из двух членов последовательности $a_n = 10m + 2$ и $a_{n+1} = 10m + 4$ хотя бы одно число делится на 4, пусть это будет число $a_{n_1} = 4l$. Тогда $a_{n_1+4s} = 4(l + 5s)$, и осталось доказать, что среди чисел вида $l + 5s$ бесконечно много степеней двойки.

Последнее следует из того, что остатки от деления на 5 степеней двойки образуют периодическую последовательность:

$$1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 3,\ \ldots$$

и, следовательно, бесконечно много степеней двойки дают при делении на 5 такой же остаток, как и число l.

470. См. решение задачи 462.

471. Пусть $E = CHD \cap AB$, $F = AHD \cap BC$, $G = BHD \cap CA$. Так как $CC_1 \perp AB$ и $DD_1 \perp AB$, то $AB \perp CED$, т. е. DE и CE — высоты треугольников ABD и ABC. Из аналогичных рассуждений для других ребер следует, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 — ортоцентры (точки пересечения высот или их продолжений) граней тетраэдра $ABCD$.

Из этого факта и из условия задачи вытекает, что все грани данного тетраэдра являются остроугольными треугольниками. Как известно, высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами треугольника с вершинами в основаниях данных высот (ортотреугольника), т. е. ортоцентр остроугольного треугольника есть центр окружности, вписанной в ортотреугольник.

Проведем через точку H плоскость α, параллельную плоскости ABC. Пусть $K = \alpha \cap DE$, $L = \alpha \cap DF$, $M = \alpha \cap DG$, $N_1 = \alpha \cap D_1C_1$, $N_2 = \alpha \cap D_1A_1$, $N_3 = \alpha \cap D_1B_1$ (см. рис. 211). Тогда сфера касается граней пирамиды $D_1N_1N_2N_3$, имеющих вершину D_1. Пусть X, Y, Z — точки касания (см. рис. 212).

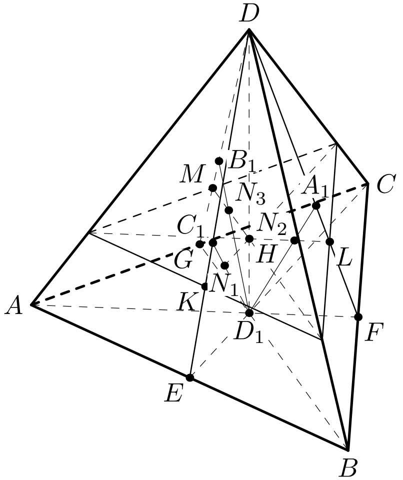


Рис. 211

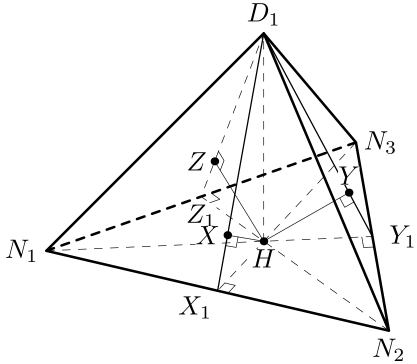


Рис. 212

Поскольку $\alpha \parallel ABC$, H — центр окружности. вписанной в треугольник KLM.

Докажем, что эта точка является также и центром окружности, вписанной в треугольник $N_1N_2N_3$. Прямоугольные треугольники D_1HX, D_1HY и D_1HZ равны по катету и гипотенузе ($HX = HY = HZ$ как радиусы сферы, гипотенуза D_1H — общая). Тогда из равенства углов XD_1H, YD_1H и ZD_1H следует равенство по катету и острому углу треугольников D_1HX_1, D_1HY_1 и D_1HZ_1, следовательно $HX_1 = HY_1 = HZ_1$.

Пусть $\angle MKL = \theta$, $\angle KLM = \varphi$, $\angle LMK = \psi$ (см. рис. 213).

Тогда $\angle MHL = 180^\circ - \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \theta}{2} = 90^\circ + \frac{\theta}{2}$. Если $\angle N_3N_1N_2 = \theta_1$, то аналогично $\angle N_3HN_2 = 90^\circ + \frac{\theta_1}{2} = \angle MHL$, следовательно, $\theta_1 = \theta$, значит, $N_1N_2 \parallel KL$. Аналогично получаем, что $N_2N_3 \parallel LM$ и $N_3N_1 \parallel KM$. Из подобия треугольников следует, что $\frac{KN_1}{N_1H} =$

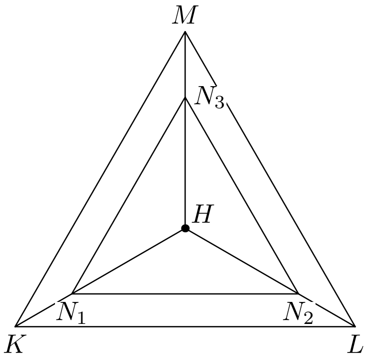


Рис. 213

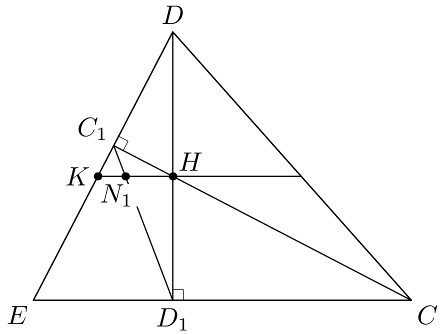


Рис. 214

$= \frac{LN_2}{N_2H} = \frac{MN_3}{N_3H}$ и (см. рис. 214) $\frac{KN_1}{N_1H} = \frac{ED_1}{D_1C}$, $\frac{LN_2}{N_2H} = \frac{FD_1}{D_1A}$, $\frac{MN_3}{N_3H} = \frac{GD_1}{D_1B}$. Значит,

$$\frac{ED_1}{D_1C} = \frac{FD_1}{D_1A} = \frac{GD_1}{D_1B}. \tag{1}$$

По теореме о пересекающихся хордах (см. рис. 215)

$$ED_1 \cdot D_1C = FD_1 \cdot D_1A = GD_1 \cdot D_1B. \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что $ED_1 = FD_1 = GD_1$, а $D_1C = D_1A = D_1B$, т. е. центры вписанной в треугольник ABC и описанной около него окружностей совпадают, поэтому этот треугольник правильный. Аналогично, правильными треугольниками являются и остальные грани тетраэдра $ABCD$, следовательно, он правильный.

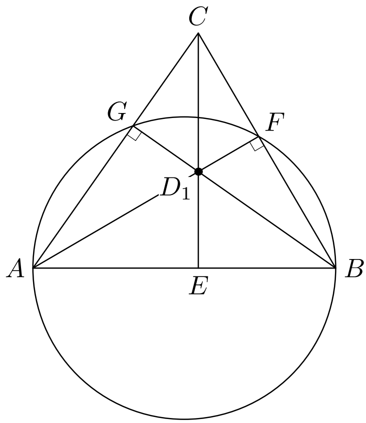


Рис. 215

472. Так как игра заканчивается не более, чем через 1994^2 ходов, то один из двух игроков обязательно имеет выигрышную стратегию. Если у игрока A нет выигрышной стратегии, то игрок B, правильно играя, выигрывает при любом первом ходе игрока A. Докажем, что это невозможно. Для этого организуем две игры на двух досках (на второй доске A будет делать только вертикальные ходы, а B — только горизонтальные; заметим, что если повернуть доску на $90°$, то игра происходит в точности по правилам условия задачи). На первой доске A делает произвольный первый ход с поля x на поле y. На второй доске A ставит коня на поле y и ждет ответного хода B

на первой доске. После чего в точности повторяет ход B на второй доске в качестве своего хода. Далее игрок B делает горизонтальный ход на второй доске, который повторяется игроком A на первой доске в качестве своего хода, и т. д. Заметим, что игрок B не может на второй доске попасть на поле x, так как B всегда ходит на поле одного цвета, отличного от цвета x. В этой двойной игре A всегда имеет возможность сделать очередной ход, если B имеет такую возможность. Поэтому на одной из двух досок проиграет B вопреки предположению, что у него есть выигрышная стратегия.

1994–1995 г.

9 класс

473. **Ответ.** 0 или 12.

Заметим, что число минут времени прибытия z равно либо $x + y$, либо $x + y - 60$, а так как $x + y < 24 + 24 < 60$, то $z = x + y$.

Пусть за время нахождения поезда в пути новые сутки наступали k раз. Тогда число часов времени прибытия $y = x + z - 24k$.

Из полученных равенств следует, что $x = 12k$, а так как $x < 24$, то либо $x = 0$, либо $x = 12$.

Такие значения x действительно возможны, что показывают следующие примеры: $x = 0$, $y = z = 15$ и $x = 12$, $y = 15$, $z = 27$.

474. Будем доказывать более общее утверждение: если хорда AE пересекает радиус OC в точке M, а хорда DE — хорду BC в точке N, то $\frac{CM}{CO} = \frac{CN}{CB}$ (в условии задачи эти отношения равны 1/2).

Первое решение (см. рис. 216). Заметим, что дуги AC и AD симметричны относительно прямой AB; следовательно, их угловые величины равны. Поэтому равны углы AEC и AED, вписанные в окружность и опирающиеся на эти дуги. Углы AEC и ABC равны как вписанные, опирающиеся на дугу AC, а углы ABC и OCB равны, так как треугольник OCB равнобедренный. Следовательно, $\angle AED = \angle OCB$, т. е. $\angle MEN = \angle MCN$, а это означает, что точки M, N, E и C лежат на одной окружности. Поэтому $\angle MNC = \angle MEC = \angle OBC$. Следовательно, треугольники MNC и OBC подобны, а значит, $\frac{CM}{CO} = \frac{CN}{CB}$.

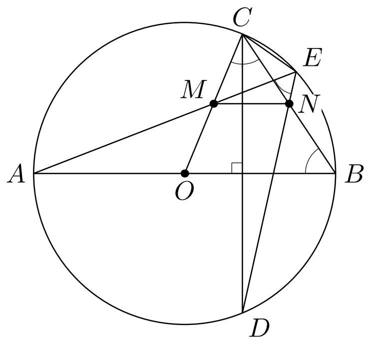


Рис. 216

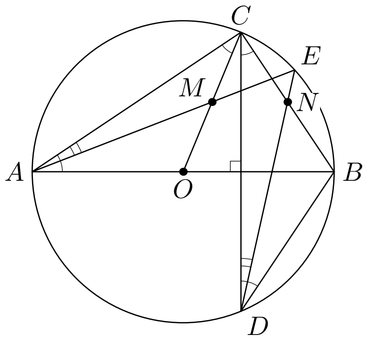


Рис. 217

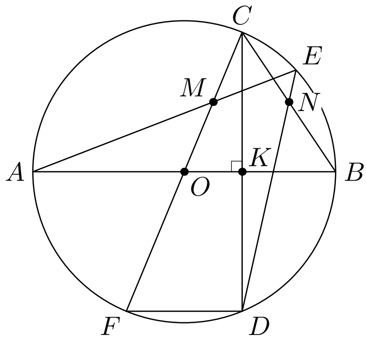


Рис. 218

Второе решение (см. рис. 217). Рассмотрим треугольники AOC и DBC. Они равнобедренные, следовательно, $\angle ACO = \angle CAB$ и $\angle DCB = \angle CDB$. Но $\angle CAB = \angle CDB$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Поэтому эти треугольники подобны, а так как $\angle CAM = \angle CDN$ (вписанные, опирающиеся на дугу CE), то точка M делит отрезок OC в том же отношении, что и точка N делит отрезок BC.

Третье решение (см. рис. 218). Заметим, что $FD \parallel AB$. Действительно, $\angle FDC = 90°$. По теореме Паскаля[1], примененной к вписанному шестиугольнику $ABCFDE$, получаем, что $MN \parallel AB$, откуда и следует доказываемое утверждение.

Замечание. На рисунках рис. 216—рис. 218 хорда CD расположена ближе к точке B, чем к точке A. В случае, когда это не так, рассуждения, приведенные нами, также остаются в силе.

475. Ответ. Не может.

Предположим, что числа 1, 2, 3, 4, 5, 7 и 8 — корни уравнения $f(g(h(x))) = 0$. Если прямая $x = a$ — ось параболы, задаваемой уравнением $y = h(x)$, то $h(x_1) = h(x_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 = 2a$. Многочлен $f(g(x))$ имеет не более четырех корней, но числа $h(1)$, $h(2)$, $\ldots$, $h(8)$ являются его корнями, следовательно, $a = 9/2$ и $h(4) = h(5)$, $h(3) = h(6)$, $h(2) = h(7)$, $h(1) = h(8)$. Мы попутно доказали, что числа $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$ образуют монотонную последовательность.

Аналогично, рассматривая трехчлен $f(x)$ и его корни $g(h(1))$, $g(h(2))$, $g(h(3))$ и $g(h(4))$, получаем, что $h(1) + h(4) = 2b$, $h(2) + h(3) = 2b$, где прямая $x = b$ — ось параболы, задаваемой уравнением $y = g(x)$. Но из

[1] Теорема Паскаля утверждает, что если шестиугольник $ABCFDE$ вписан в окружность (более общо — в коническое сечение), то точки Q, N, M пересечения прямых AB и DF, BC и ED, CF и EA (возможно, бесконечно удаленные), лежат на одной прямой. В нашем случае бесконечно удаленной является точка Q.

уравнения $h(1) + h(4) = h(2) + h(3)$ для $h(x) = Ax^2 + Bx + C$ следует, что $A = 0$. Получили противоречие.

476. Ответ. Можно.

Покажем, как построить пример такой таблицы.

Таблица T, изображенная на рис. 219, содержит по девять раз каждое из чисел 1, 2, $\ldots$, 9 и обладает тем свойством, что сумма чисел в любом квадрате 3×3 равна 36. Ясно, что таблица Q, получаемая из нее поворотом на $90°$, также обладает указанными свойствами. Заметим теперь, что одинаковым числам таблицы T соответствуют различные числа таблицы Q, поэтому существует взаимно однозначное соответствие между клетками таблицы 9×9 и парами $(a; b)$, где $a, b = 1, 2, \ldots, 9$. Если теперь взять новую таблицу 9×9 и в ее клетке, соответствующей паре $(a; b)$, записать число $9a + b - 9$, то каждое из чисел от 1 до 81 встретится в такой таблице ровно один раз, а сумма чисел в каждом квадрате 3×3 будет одна и та же (она равна 369).

1	4	7	1	4	7	1	4	7
2	5	8	2	5	8	2	5	8
3	6	9	3	6	9	3	6	9
7	1	4	7	1	4	7	1	4
8	2	5	8	2	5	8	2	5
9	3	6	9	3	6	9	3	6
4	7	1	4	7	1	4	7	1
5	8	2	5	8	2	5	8	2
6	9	3	6	9	3	6	9	3

Рис. 219

477. Заметим, что $459 + 495 = 954$, а число 1995 делится на 3. Поэтому искомыми будут, например, числа $\underbrace{\overbrace{459}\,\overbrace{459}\ldots\overbrace{459}}_{665\text{ троек}}$, $\underbrace{\overbrace{495}\,\overbrace{495}\ldots\overbrace{495}}_{665\text{ троек}}$ и их сумма.

Отметим, что 459, 495 и 954 — периоды десятичных разложений дробей $\frac{51}{111}$, $\frac{55}{111}$ и их суммы $\frac{106}{111}$. Вообще, дроби с одинаковыми знаменателями разбиваются на группы дробей с одинаковыми наборами цифр в периоде (подумайте, почему!): $\frac{2}{13} = 0{,}(153846)$, $\frac{5}{13} = 0{,}(384615)$, $\frac{7}{13} = 0{,}(538461)$, (таким образом, $153846 + 384615 = 538461$); $\frac{1}{13} = 0{,}(076923)$, $\frac{3}{13} = 0{,}(230769)$ и т. п. Добавляя к периодам из одной группы необходимое числа девяток, можно получить другие тройки искомых похожих чисел. Например: $15384\underbrace{99\ldots9}_{1989}6 + 38461\underbrace{99\ldots9}_{1989}5 = 53846\underbrace{99\ldots9}_{1989}1$.

478. Ответ. $180°$.

Первое решение. Пусть M — середина стороны AB (см. рис. 220). Заметим, что отрезки MA_2 и MB_2 — средние линии прямоугольных треугольников AA_1B и AB_1B. Из этого следует, что, во-первых, $\angle A_2MB_2 = \angle ACB$ (как углы с соответственно параллельными и противоположно направленными сторонами), а во-вторых, $\angle HA_2M = \angle HB_2M = 90^\circ$, поэтому точки M, A_2, H и B_2 лежат на окружности с центром в середине отрезка MH. Так как $\angle MC_1H = 90^\circ$, то на указанной окружности лежит и точка C_1. Следовательно, $\angle A_2MB_2 = \angle A_2C_1B_2$ (как вписанные, опирающиеся на дугу A_2B_2).

Итак, $\angle A_2MB_2 = \angle ACB$ и $\angle A_2MB_2 = \angle A_2C_1B_2$, поэтому $\angle A_2C_1B_2 = \angle ACB$. Аналогично доказывается, что $\angle B_2A_1C_2 = \angle BAC$ и $\angle C_2B_1A_2 = \angle CBA$. Следовательно, искомая сумма равна сумме углов треугольника ABC.

Второе решение. Известно, что треугольники ABC, A_1B_1C и A_1BC_1 подобны, откуда $\angle BA_1B_1 = \angle C_1A_1C$ и $\frac{A_1C_1}{A_1C} = \frac{A_1B}{A_1B_1}$. Поэтому треугольники A_1CC_1 и A_1B_1B подобны, и существует поворотная гомотетия с центром A_1 на угол CA_1B_1, переводящая один из этих треугольников в другой. Следовательно, $\angle C_2A_1B_2 = \angle B_1A_1C$, так как при этой поворотной гомотетии середина отрезка CC_1 перейдет в середину отрезка B_1B; аналогично $\angle B_2C_1A_2 = \angle A_1C_1B$ и $\angle A_2B_1C_2 = \angle C_1B_1A$; суммируя углы треугольников CA_1B_1, BC_1A_1 и AB_1C_1, получаем, что $\angle B_1A_1C + \angle A_1C_1B + \angle C_1B_1A = 180^\circ$, откуда и следует доказываемое утверждение.

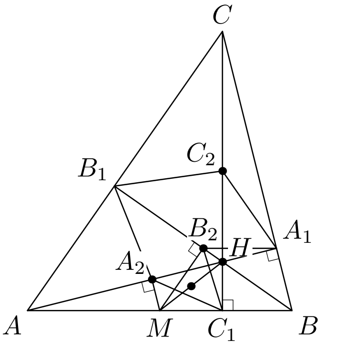


Рис. 220

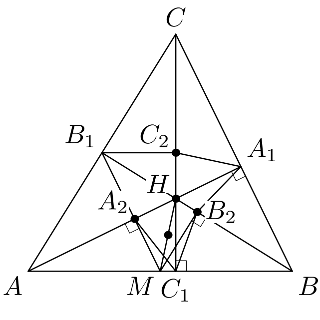


Рис. 221

Замечание. Кроме случая, изображенного на рис. 220, возможен еще случай, изображенный на рис. 221. Приведенное доказательство проходит в обоих случаях.

479. Ответ. 0.

Первое решение. Будем называть камни из одной кучи *знакомыми*, из разных — *незнакомыми*. Тогда доход Сизифа за одно перетаскивание равен изменению количества пар знакомых камней. Так как в конечный момент все камни оказались в исходных кучах, то общее изменение количества знакомств равно нулю, а, значит, и доход Сизифа равен нулю.

Второе решение. Покажем, что величина $A = ab + bc + ca + S$, где a, b и c — количества камней в кучах, S — доход Сизифа, не изменяется при перетаскивании камней. Действительно, без ограничения общности можно считать, что Сизиф перетащил камень из первой кучи во вторую. Тогда $A' = (a-1)(b+1) + (b+1)c + c(a-1) + S' = A$, так как $S' = S + (b - (a-1))$. Но величина $ab + bc + ca$ в начальный и конечный момент одна и та же, а, следовательно, и конечный доход Сизифа равен начальному, т. е. нулю.

Аналогичным является решение, использующее инвариантность величины $B = a^2 + b^2 + c^2 - 2S$.

Третье решение. Можно проверить, что если поменять местами очередность двух перетаскиваний камней, то S при этом изменится на одну и ту же величину. Кроме того, за два перетаскивания камня: из кучи A в кучу B, а затем из B в A, доход Сизифа равен нулю. Таким же будет доход за три перетаскивания: $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$.

Из того, что в конце все камни оказались в исходных кучах, следует, что порядок перетаскивания камней можно изменить так, что все перетаскивания разобьются на тройки вида $A \to B \to C \to A$ и двойки вида $A \to B \to A$, дающие Сизифу нулевой доход.

480. Сумма всех чисел в таблице неотрицательна, поэтому найдется строка, содержащая не менее 1000 единиц. Переставим столбцы таблицы так, чтобы в первых 1000 клетках этой строки стояли 1. Обозначим через A и B прямоугольники $2000 \cdot 1000$, образованные соответственно первыми 1000 и последними 1000 столбцами таблицы.

Пусть A_1 — 1000 строк прямоугольника A с наибольшими суммами записанных в них чисел, A_2 — остальные 1000 строк. Если сумма чисел в A_1 не меньше 1000, то утверждение задачи доказано.

Допустим, что сумма чисел в A_1 меньше 1000. Покажем, что тогда в каждой строке из A_2 сумма чисел отрицательна. Действительно, если хотя бы в одной из строк из A_2 сумма неотрицательна, то и во всех строках из A_1 она неотрицательна. Кроме того, одна из строк A_1 вся состоит из 1, следовательно, сумма всех чисел в A_1 не меньше 1000. Противоречие. Отсюда следует, что сумма чисел в каждой строке из A_2 не больше, чем -2, так как сумма чисел в любой строке четна. Значит, сумма чисел во всем прямоугольнике A меньше, чем $1000 + (-2) \cdot 1000$, т. е. меньше -1000. Но по условию сумма чисел в прямоугольнике B больше 1000. Пусть B_1 — 1000 строк прямоугольника B с наибольшими, а B_2 — 1000 строк прямоугольника B с наименьшими суммами записанных в них чисел. Докажем, что сумма чисел в B_1 не меньше 1000. Это верно, если сумма чисел в каждой строке из B_2 неположительна. Если же хотя бы в одной строке из B_2 сумма чисел положительна, то она положительна и в каждой строке из B_1. Утверждение задачи доказано.

10 класс

481. Ответ. Корней нет.

Покажем, что при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\cos\cos\cos\cos x > \sin\sin\sin\sin x. \tag{1}$$

Достаточно это доказать для $x \in [0, 2\pi]$. Если $x \in [\pi, 2\pi]$, то утверждение очевидно: для таких x выполнено $\cos\cos\cos\cos x > 0$, а $\sin\sin\sin\sin x \leqslant 0$.

Пусть $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда каждое из чисел $\cos x$, $\sin x$, $\cos\cos x$, $\sin\sin x$, $\cos\cos\cos x$, $\sin\sin\sin x$ неотрицательно и не превосходит 1. Так как всегда $\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, то для рассматриваемых значений x выполняются неравенства $0 \leqslant \cos x < \frac{\pi}{2} - \sin x$. Следовательно,

$$\cos\cos x > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \sin\sin x, \tag{2}$$

$$\sin\cos x < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \cos\sin x. \tag{3}$$

Из (2) получаем, что $\cos\cos\cos x < \cos\sin\sin x$, поэтому $\cos\cos\cos x + \sin\sin\sin x < \cos(\sin\sin x) + \sin(\sin\sin x) < \frac{\pi}{2}$, откуда $\cos\cos\cos x < \frac{\pi}{2} - \sin\sin\sin x$ и, следовательно,

$$\cos\cos\cos\cos x > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sin\sin\sin x\right) = \sin\sin\sin\sin x.$$

Пусть $x \in \left(\frac{\pi}{2}\,; \pi\right)$. Положим $y = x - \frac{\pi}{2}$, тогда $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и неравенство (1) принимает вид

$$\cos\cos\cos\sin y > \sin\sin\sin\cos y. \tag{1'}$$

Так как при $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ каждое из чисел $\cos\sin y$ и $\sin\cos y$ также принадлежит интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то в силу (2) получаем, что $\cos\cos(\cos\sin y) > \sin\sin(\cos\sin y)$. Функция $\sin\sin t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, является возрастающей, поэтому в силу (3) имеем

$$\sin\sin(\cos\sin y) > \sin\sin(\sin\cos y).$$

Неравенство (1′) (а вместе с ним и неравенство (1)) доказано.

482. См. решение задачи 474.

483. Ответ. Существует.

Укажем способ построения такой последовательности. В качестве первого члена a_1 можно взять число 1. Пусть удалось подобрать n первых членов a_1, a_2, …, a_n, и пусть m — наименьшее число из не вошедших в них, а M — наибольшее из вошедших. Обозначим S_k сумму первых k членов ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Пусть теперь $a_{n+1} = m[(n+2)^t - 1] - S_n$, $a_{n+2} = m$, где натуральное t выбрано достаточно большим для того, чтобы выполнялось условие $a_{n+1} > M$. Легко видеть, что $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = m[(n+2)^t - 1]$ делится на $(n+2) - 1 = n+1$, а сумма $S_{n+2} = m(n+2)^t$ делится на $(n+2)$. Продолжая таким образом, мы включим все натуральные числа, и при том ровно по одному разу, в нашу последовательность.

484. ***Первое решение.*** Пусть A_nA_1 — самая короткая (одна из них) сторона многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ с равными углами. Тогда $A_nA_1 \leqslant A_1A_2$ и $A_nA_1 \leqslant A_{n-1}A_n$. Предположим, что многоугольник не имеет других, кроме A_nA_1 сторон, не превосходящих соседних с ними. Пусть A_mA_{m+1} — самая длинная (одна из них) сторона многоугольника. Тогда $A_nA_1 < A_1A_2 < A_2A_3 < \ldots < A_mA_{m+1}$, так как если $A_{k-1}A_k \geqslant A_kA_{k+1}$, то наименьшая среди сторон $A_kA_{k+1}, \ldots, A_{m-1}A_m$ не длиннее соседних с ней. Аналогично $A_nA_1 < A_{n-1}A_n < \ldots < A_{m+1}A_{m+2} < A_mA_{m+1}$.

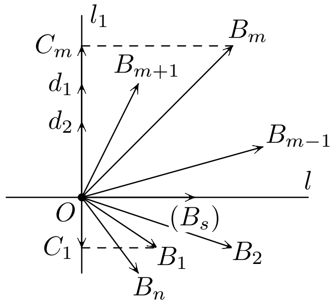


Рис. 222

Отложим векторы $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n$ от одной точки: $\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (см. рис. 222). Тогда $\overrightarrow{OB_1} + \ldots + \overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$, и, следовательно, сумма проекций $\overrightarrow{OC_i}$, $i = 1, \ldots, n$, этих векторов на любую прямую l_1 равна $\vec{0}$. Возьмем в качестве l_1 прямую, перпендикулярную биссектрисе l угла B_1OB_m. Из условия следует, что $\angle B_1OB_2 = \ldots = \angle B_{m-1}OB_m = \frac{2\pi}{n}$, поэтому пары лучей $[OB_1)$ и $[OB_m)$, $[OB_2)$ и $[OB_{m-1})$, … симметричны относительно прямой l. Для нечетного m, $m = 2s-1$, без пары останется луч $[OB_s)$, лежащий на l. Соответственно, векторы $\overrightarrow{OC_i}$ $i = 1, \ldots, m$, разобьются на пары противоположно направленных векторов, причем $OC_1 < OC_m$, $OC_2 < OC_{m-1}$, … (если $m = 2s+1$, то $\overrightarrow{OC_i} = \vec{0}$). Таким образом, $\overrightarrow{OC_1} + \ldots + \overrightarrow{OC_m} = \vec{d_1}$, где $\vec{d_1}$ — направленный вверх вектор. Аналогично, $\overrightarrow{OC_n} + \overrightarrow{OC_{n-1}} + \ldots + \overrightarrow{OC_{m+1}} = \vec{d_2}$, где $\vec{d_2}$ сонаправлен с $\vec{d_1}$ и хотя бы один из векторов $\vec{d_1}$ и $\vec{d_2}$ ненулевой. Но тогда $\overrightarrow{OC_1} + \ldots + \overrightarrow{OC_n} = \vec{d_1} + \vec{d_2} \neq \vec{0}$. Противоречие, следовательно найдется отличная от A_nA_1 сторона многоугольника, не превосходящая соседние с ней стороны.

485. Так как каждое a_i делится на НОД(a_i, a_{2i}) = НОД$(i, 2i) = i$, то $a_i \mathrel{\vdots} i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Предположим, что при некотором i выполняется неравенство $a_i > i$. Тогда, с одной стороны, НОД(a_{a_i}, a_i) = НОД$(a_i, i) = i$, а с другой стороны, поскольку a_{a_i} делится на a_i, то НОД$(a_i, a_{a_i}) = a_i > i$. Получили противоречие.

486. ***Первое решение.*** Пусть O_1 и O_2 — центры, OP и OQ — диаметры окружностей w_1 и w_2 соответственно, описанных около треугольников AOC и DOB (см. рис. 223).

Отрезок O_1O_2 перпендикулярен общей хорде OK этих окружностей и делит ее пополам, и, в то же время, является средней линией треугольника POQ, поэтому прямая PQ проходит через точку K и перпендикулярна OK. Таким образом, угол MKO будет прямым, если точка M лежит на прямой PQ. Докажем это.

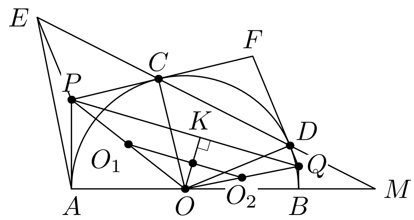


Рис. 223

Отрезок PO — диаметр окружности w_1, проходящей через точку A, поэтому угол PAO — прямой, следовательно, отрезок PA касается полуокружности. Аналогично, PC, QB и QD — также касательные к полуокружности.

Пусть F — точка пересечения прямых PC и QD, а E — точка пересечения прямой CD и прямой, проходящей через точку P и параллельной QD. Тогда из равенства касательных FC и FD следует, что $\angle QDM = \angle FDC = \angle FCD = \angle PCE$. Но $\angle QDM = \angle PEM$, так как $PE \parallel QD$. Итак, $PE = PC$, но $PC = PA$ и $QB = QD$, значит, APE и BQD — подобные равнобедренные треугольники с соответственно параллельными сторонами AP и BQ, PE и QD. Гомотетия с центром в точке M и коэффициентом $k = MA : MB$ переводит точку B в точку A, точку D в точку E, следовательно, она переводит точку Q в точку P, так как треугольники BQD и APE подобны. Значит, прямая PQ проходит через центр гомотетии — точку M.

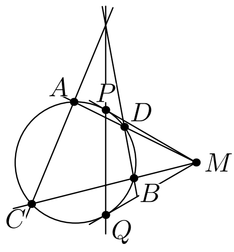


Рис. 224

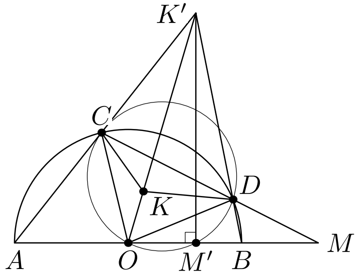


Рис. 225

Второе решение. Сделаем инверсию относительно окружности с центром O и диаметром AB. Точки A, C, B, D останутся неподвижными, а точка K перейдет в точку K' пересечения прямых AC и BD (см. рис. 225).

Точка M перейдет в точку M' пересечения окружности, описанной вокруг $\triangle COD$, и прямой AB, отличную от O. Описанная окружность $\triangle COD$ — окружность 9 точек $\triangle AK'B$ (так как O — середина AB, C и D — основания высот), поэтому она вторично пересекает AB в точке M' — основании высоты, следовательно, $K'M' \perp AB$.

Так как $OK \cdot OK' = OM \cdot OM'$, то $\triangle OKM$ подобен $\triangle OK'M'$ и, следовательно, $\angle OKM = 90°$.

Третье решение. Пусть O_1 и O_2 — центры, OP и OQ — диаметры окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB соответственно (см. рис. 223). Очевидно, O и K симметричны относительно O_1O_2 (см. решение 1).

Осуществим гомотетию с центром O и коэффициентом 2. При этом точки O_1 и O_2 перейдут соответственно в точки P и Q, а середина отрезка OK — в точку K. Следовательно, точка K принадлежит прямой PQ.

При описанной гомотетии серединные перпендикуляры к отрезкам OA, OB, OC и OD перейдут в касательные к окружности в точках A, B, C и D соответственно.

Рассмотрим шестиугольник $ABBCDDA$ (вырожденный и самопересекающийся), вписанный в окружность. По теореме Паскаля[1] точки пересечения пар прямых AB и CD (пересекаются в точке M), касательных BB и DD (пересекаются в точке Q) и BC и DA (обозначим точку их пересечения через L) лежат на одной прямой. Таким образом, точка Q лежит на прямой LM. Аналогично, точка P лежит на прямой LM. Значит, точки P, Q и M лежат на одной прямой, откуда следует (см. решение 1), что $\angle OKM = 90°$.

487. См. решение задачи 480.

488. Рассмотрим произвольный многочлен

$$R(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0.$$

Назовем его нормой число $\|R\| = \sqrt{c_n^2 + c_{n-1}^2 + \ldots + c_0^2}$. Положим $R^*(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$.

Лемма. *Для любых многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ справедливо равенство $\|PQ\| = \|PQ^*\|$.*

Доказательство. Пусть $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, $Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0$. Перемножим многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, не приводя подобные члены, и запишем получившиеся коэффициенты (при степенях переменной) в таблицу следующим образом:

Для того чтобы найти коэффициент при x^k в многочлене $P(x)Q(x)$, нужно сосчитать сумму всех чисел, стоящих на соответствующей диаго-

[1] См. подстрочное примечание на с. 294.

x^{n-m}	x^{n-m-1}	x^{n-m-2}	x^{n-m-3}				
a_nb_m	a_nb_{m-1}	a_nb_{m-2}	a_nb_{m-3}	$\cdots$	a_nb_2	a_nb_1	a_nb_0
$a_{n-1}b_m$	$a_{n-1}b_{m-1}$	$a_{n-1}b_{m-2}$	$a_{n-1}b_{m-3}$	$\cdots$	$a_{n-1}b_2$	$a_{n-1}b_1$	$a_{n-1}b_0$
$a_{n-2}b_m$	$a_{n-2}b_{m-1}$	$a_{n-2}b_{m-2}$	$a_{n-2}b_{m-3}$	$\cdots$	$a_{n-2}b_2$	$a_{n-2}b_1$	$a_{n-2}b_0$
$a_{n-3}b_m$	$a_{n-3}b_{m-1}$	$a_{n-3}b_{m-2}$	$a_{n-3}b_{m-3}$	$\cdots$	$a_{n-3}b_2$	$a_{n-3}b_1$	$a_{n-3}b_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_0b_m	a_0b_{m-1}	a_0b_{m-2}	a_0b_{m-3}	$\cdots$	a_0b_2	a_0b_1	a_0b_0

Рис. 226

нали таблицы (на рисунке эти диагонали отмечены сплошными стрелками; будем называть их левыми). Следовательно, квадрат нормы многочлена $P(x)Q(x)$ равен сумме квадратов всех таких сумм.

Перемножив, не приводя подобных членов, многочлены $P(x)$ и $Q^*(x)$, записав аналогичным образом получившиеся коэффициенты в таблицу, убеждаемся, что i-я строка этой новой таблицы есть i-я строка исходной таблицы, элементы которой записаны в обратном порядке: первый элемент стал последним, второй — предпоследним и т. д. Поэтому для того чтобы найти квадрат нормы многочлена $P(x)Q^*(x)$, нужно сначала сосчитать сумму всех чисел, стоящих на каждой диагонали таблицы, отмеченной пунктиром (назовем эти диагонали правыми), а затем найти сумму квадратов всех получившихся сумм. Ясно, что в выражении для квадратов норм $\|PQ\|^2$ и $\|PQ^*\|^2$ квадрат каждого элемента таблицы входит ровно один раз. Покажем, что если удвоенное произведение некоторых двух элементов таблицы входит в выражение для $\|PQ\|^2$, то оно входит и в выражение для $\|PQ^*\|^2$, и наоборот.

Действительно, рассмотрим элементы a_xb_y и a_ub_v, которые стоят на одной и той же левой диагонали таблицы (тогда $x + y = u + v$) и удвоенное произведение которых входит в выражение для $\|PQ\|^2$. Их удвоенное произведение $2a_xb_ya_ub_v$ входит, соответственно, в выражение для $\|PQ^*\|^2$ как удвоенное произведение элементов a_xb_v и a_ub_y, стоящих на одной правой диагонали таблицы (поскольку $x - v = u - y$; более того, все четыре элемента a_xb_y, a_ub_v, a_xb_v, a_ub_y расположены в вершинах прямоугольной подтаблицы исходной таблицы). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь многочлены $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ и $Q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0$, старшие коэффициенты которых равны 1. По лемме $\|PQ\| = \|PQ^*\|$, $Q^*(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + 1$. Поэтому $PQ^*(x) = b_0x^{m+n} + \ldots + (a_1 + a_0b_{m-1})x + a_0$ и, значит, $\|PQ^*\|^2 \geqslant a_0^2 + b_0^2$. Следовательно, $\|PQ\|^2 \geqslant a_0^2 + b_0^2$.

11 класс

489. Ответ. Нет, не могут.

Покажем, что три различных простых числа не могут входить в одну геометрическую прогрессию.

Предположим противное: $p_1 < p_2 < p_3$ — простые числа, $p_1 = a_1q^{k-1}$, $p_2 = a_1q^{r-1}$, $p_3 = a_1q^{m-1}$. Тогда $\frac{p_2}{p_1} = q^{r-k} = q^s$, $\frac{p_3}{p_2} = q^{m-r} = q^n$. Отсюда следует $p_2^{s+n} = p_1^n \cdot p_3^s$, что невозможно, так как n и s — ненулевые целые числа.

Утверждение задачи теперь следует из того, что среди чисел от 1 до 100 содержится 25 простых чисел, а в одну прогрессию могут входить не более двух из них.

490. Пусть $f(x)$ — данная функция. Покажем, как ее можно представить в виде суммы функции $f_1(x)$, график которой симметричен относительно прямой $x = 0$ и функции $f_2(x)$, график которой симметричен относительно прямой $x = a$, $a > 0$. Значения функций f_1 и f_2 мы определим на отрезке $[-a, a]$, затем последовательно на отрезках $[a, 3a]$, $[-3a, -a]$, $[3a, 5a]$ и т. д.

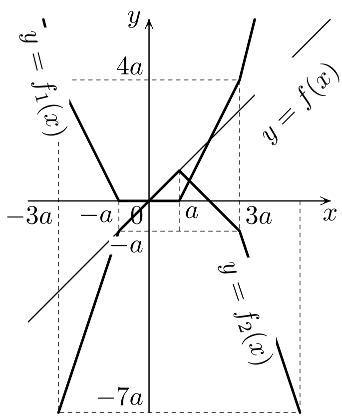


Рис. 227

На $[-a, a]$ положим $f_1(x) = 0$ (можно в качестве $f_1(x)$ взять и любую четную на $[-a, a]$ функцию, обращающуюся в нуль на концах этого отрезка), а $f_2(x) = f(x) - f_1(x) = f(x)$. На отрезке $[a, 3a]$ определим функцию $f_2(x)$ так, чтобы на $[-a, 3a]$ ее график был симметричен относительно прямой $x = a$, т. е. $f_2(x) = f_2(2a - x)$. Такое определение функции $f_2(x)$ корректно, так как если $x \in [a, 3a]$, то $(2a - x) \in [-a, a]$. Функцию $f_1(x)$ на отрезке $[a, 3a]$ определим равенством $f_1(x) = f(x) - f_2(x)$. На отрезке $[-3a, -a]$ положим $f_1(x) = f_1(-x)$, а $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$, на отрезке $[3a, 5a]$ — $f_2(x) = f_2(2a - x)$, а $f_1(x) = f(x) - f_2(x)$, и т. д.

На рис. 227 приведен пример такого представления для функции $f(x) = x$.

На $[-a, a]$: $f_1(x) = 0$,
$$f_2(x) = f(x) - f_1(x) = f(x) = x;$$
на $[a, 3a]$: $f_2(x) = f_2(2a - x) = 2a - x$,
$$f_1(x) = x - (2a - x) = 2x - 2a;$$
на $[-3a, -a]$: $f_1(x) = f_1(-x) = -2x - 2a$,
$$f_2(x) = x - (-2x - 2a) = 3x + 2a;$$

на $[3a, 5a]$: $f_2(x) = f_2(2a - x) = 3(2a - x) + 2a = 8a - 3x$,

$$f_1(x) = x - (8a - 3x) = 4x - 8a; \text{ и т. д.}$$

491. а) Покажем, что Ц$(2^n) \geqslant n$. Действительно, если d — наибольшее из расстояний между отмеченными точками, то проведение одной линии циркулем позволяет получить отмеченную точку на расстоянии не более $2d$ от уже отмеченных.

Отсюда следует, что Ц$(2^{2^n}) \geqslant 2^n$.

б) Покажем, что ЛЦ$(2^{2^n}) \leqslant 5(n+1)$. Пусть A и B — две данные отмеченные точки. Проведение пяти линий позволяет построить угол BAC, где $BA = 1$, $AC = 2$ (см. рис. 228): окружности радиуса 1 с центрами в точках A, B и T, прямые AB и AT.

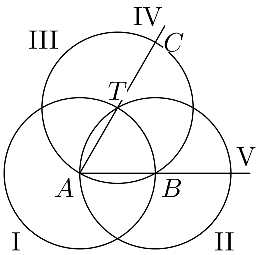


Рис. 228

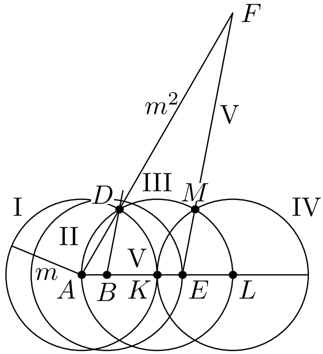


Рис. 229

Далее, проведение пяти линий позволяет построить отрезок длины m^2, если уже получен отрезок длины m (см. рис. 229): последовательно строим окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 радиуса m с центрами в точках A, B, K ($K = \omega_1 \cap AB$), L ($L = \omega_3 \cap AB$) и, наконец, прямую EM, где $E = \omega_2 \cap \cap AB$, $M = \omega_3 \cap \omega_4$.

Пусть $F = EM \cap AC$. Пусть $D = \omega_1 \cap \omega_3$, тогда D лежит на луче AC. Покажем, что $DF = m^2$.

Действительно, треугольники ADK и KML равносторонние со сторонами $AD = KM = m$, $\angle DAB = \angle MKE = 60°$, $AB = KE = 1$, поэтому $\angle DBA = \angle MEK$, следовательно, $EM \parallel BD$. По теореме Фалеса $AB : AD = BE : DF$, откуда следует, что $DF = m^2$.

Таким образом, ЛЦ$(2) \leqslant 5$, ЛЦ$(4) \leqslant 2 \cdot 5, \ldots,$ ЛЦ$(2^{2^n}) \leqslant 5(n+1)$.

Утверждение задачи следует из того, что $\dfrac{2^n}{5(n+1)} \to \infty$ при $n \to \infty$.

492. См. решение задачи 484.

493. Докажем, что для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию задачи, можно найти такое a_{n+1}, что $A_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 +$

$+a_{n+1}^2$ делится на $B_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}$. Из равенства $A_{n+1} = A_n + (a_{n+1} - B_n)(a_{n+1} + B_n) + B_n^2$ следует, что A_{n+1} делится на B_{n+1}, если $A_n + B_n^2$ делится на B_{n+1}, поскольку $a_{n+1} + B_n = B_{n+1}$.

Таким образом, достаточно взять $a_{n+1} = A_n + B_n^2 - B_n$ (в этом случае $A_n + B_n^2 = B_{n+1}$). Осталось показать, что тогда $a_{n+1} > a_n$. Но так как $B_n^2 - B_n > 0$ $(1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n)$, то $a_{n+1} > A_n \geqslant a_n^2 > a_n$.

494. **Ответ.** При четных n.

Пусть n нечетно. Тогда сумма длин всех $n-1$ переходов равна $1 + 2 + \ldots + (n-1) = n \cdot \frac{n-1}{2}$, т. е. делится на n. Это означает, что после $n-1$ переходов мальчик оказался на том же месте, с которого он начал кататься, и, значит, на каком-то из сидений он не побывал.

Пусть n четно. Мальчик мог побывать на каждом сиденье при следующих длинах переходов: 1, $n-2$, 3, $n-4$, $\ldots$, $n-5$, 4, $n-3$, 2, $n-1$ (т. е. мальчик побывал последовательно на сиденьях с номерами 1, 2, n, 3, $n-1$, $\ldots$, $\frac{n}{2}-1$, $\frac{n}{2}+3$, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}+2$, $\frac{n}{2}+1$).

495. Пусть AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — высоты тетраэдра $ABCD$, H — точка их пересечения, A_2, B_2, C_2 — точки, делящие высоты в отношении $2:1$, считая от соответствующих вершин, M — точка пересечения медиан AA_3, BB_3, CC_3 треугольника ABC (на рис. 230 проведены не все указанные линии). Докажем, что точки M, A_2, B_2, C_2, D_1 и H лежат на одной сфере с диаметром MH.

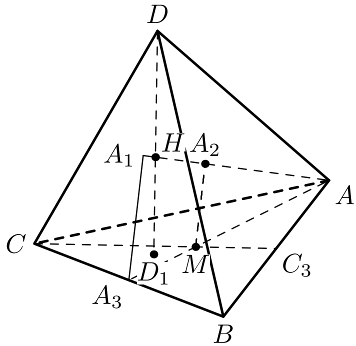


Рис. 230

Из подобия треугольников MAA_2 и A_3AA_1 $(MA : A_3A = A_2A : A_1A = 2:3)$ следует, что $MA_2 \parallel A_3A_1$, т. е. $MA_2 \perp A_1A$, так как A_1A — высота тетраэдра и, значит, $AA_1 \perp A_3A_1$. Аналогично доказывается, что $MB_2 \perp B_1B$ и $MC_2 \perp C_1C$. Наконец, DD_1 — высота тетраэдра, поэтому $MD_1 \perp D_1D$. Утверждение доказано.

496. См. решение задачи 488.

1995–1996 г.

9 класс

497. **Ответ.** Не представимых в таком виде.

Пусть $n = k^2 + m^3$, где $k, m, n \in \mathbb{N}$, а $n \leqslant 1\,000\,000$. Ясно, что тогда $k \leqslant 1000$, а $m \leqslant 100$. Поэтому интересующее нас представление могут давать не более, чем $100\,000$ пар (k, m). Но чисел n, удовлетворяющих условию, заведомо меньше, чем таких пар, так как некоторые пары дают числа n, большие 1 000 000, а некоторые различные пары дают одно и то же число n.

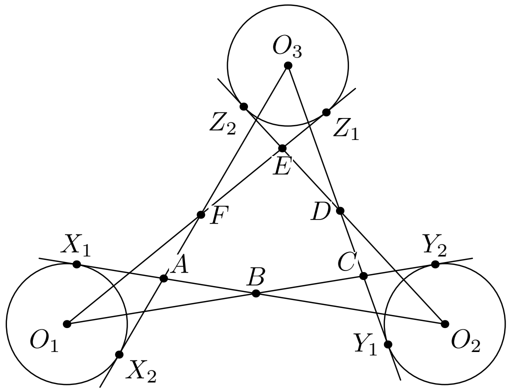


Рис. 231

498. Введем обозначения так, как показано на рис. 231. Так как данные окружности имеют одинаковые радиусы, то $X_1O_2 = O_1Y_2$, $Y_1O_3 = O_2Z_2$, $Z_1O_1 = O_3X_2$, или $X_1A + AB + BO_2 = O_1B + BC + CY_2$, $Y_1C + CD + DO_3 = O_2D + DE + EZ_2$, $Z_1E + EF + FO_1 = O_3F + FA + AX_2$.

Сложив полученные равенства и заметив, что

$$X_1A = AX_2, \quad Y_1C = CY_2, \quad Z_1E = EZ_2$$

(как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки) и

$$BO_2 = O_1B, \quad DO_3 = O_2D, \quad FO_1 = O_3F$$

(так как радиусы данных окружностей равны), получим: $AB+CD+EF = BC + DE + FA$, что и требовалось доказать.

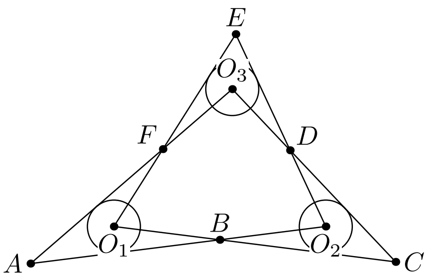


Рис. 232

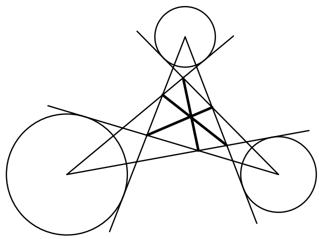


Рис. 233

Замечание 1. Аналогичное утверждение справедливо и для невыпуклого шестиугольника в случае, изображенном на рис. 232.

Замечание 2. В обозначениях рис. 231 и рис. 232 справедливо равенство $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$, равносильное тому, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

Замечание 3. Предыдущее утверждение остается справедливым, даже если отказаться от равенства данных окружностей (см. рис. 233).

499. Пусть $m = \text{НОД}(x, y)$. Тогда $x = mx_1$, $y = my_1$, и в силу данного в условии равенства $m^n(x_1^n + y_1^n) = p^k$, поэтому $m = p^\alpha$ для некоторого целого неотрицательного α. Следовательно,

$$x_1^n + y_1^n = p^{k-n\alpha}.$$

Так как n нечетно, то

$$\frac{x_1^n + y_1^n}{x_1 + y_1} = x_1^{n-1} - x_1^{n-2}y_1 + x_1^{n-3}y_1^2 - \ldots - x_1y_1^{n-2} + y_1^{n-1}.$$

Обозначим число, стоящее в правой части этого равенства, буквой A. По условию $p > 2$, следовательно, хотя бы одно из чисел x_1, y_1 больше 1 (ибо $x_1 + y_1 \,\vdots\, p$), а так как $n > 1$, то и $A > 1$.

Из равенства вытекает, что $A(x_1 + y_1) = p^{k-n\alpha}$, а так как $x_1 + y_1 > 1$, и $A > 1$, то каждое из этих чисел делится на p; более того, $x_1 + y_1 = p^\beta$ для некоторого натурального β. Тогда

$$A = x_1^{n-1} - x_1^{n-2}(p^\beta - x_1) + x_1^{n-3}(p^\beta - x_1)^2 - \ldots - x_1(p^\beta - x_1)^{n-2} + \\ +(p^\beta - x_1)^{n-1} = nx_1^{n-1} + Bp^\beta.$$

Число A делится на p, а число x_1 взаимно просто с p, следовательно, n делится на p.

Пусть $n = pq$. Тогда $x^{pq} + y^{pq} = p^k$ или $(x^p)^q + (y^p)^q = p^k$.

Если $q > 1$, то, как мы только что доказали, q делится на p. Если $q = 1$, то $n = p$. Повторяя это рассуждение, мы получим, что $n = p^l$ для некоторого натурального l.

500. Предположим, что любые два комитета имеют не более трех общих членов. Пусть двое депутатов составляют списки всевозможных председателей на три заседания Думы. Первый считает, что любой депутат может быть председателем на каждом из этих заседаний, поэтому у него получилось 1600^3 списков. Второй считает, что на каждом заседании могут председательствовать только члены одного (не важно какого именно) комитета, поэтому сначала он запросил соответствующие списки от каждого комитета и получил $16000 \cdot 80^3$ списков. После этого второй депутат выбросит из списков, поданных i-м комитетом, те тройки, которые уже вошли в списки одного из предыдущих $i - 1$ комитетов. Так как каждые два комитета (а таких пар $\frac{16000 \cdot (16000 - 1)}{2}$) выдвинули всех своих общих членов, то второй депутат при формировании своих списков выбросил не более, чем $\frac{16000 \cdot (16000 - 1)}{2} \cdot 3^3$ из списков, поданных комитетами.

Очевидно, что списков, которые составил первый депутат, не меньше, чем списков, которые составил второй депутат, т. е.

$$1600^3 \geqslant 16000 \cdot 80^3 - \frac{16000 \cdot (16000-1)}{2} \cdot 3^3, \text{ но}$$

$$16000 \cdot 80^3 - \frac{16000 \cdot (16000-1)}{2} \cdot 3^3 > 16000 \cdot 80^3 - \frac{16000 \cdot (16000-1)}{2} \cdot \frac{4^3}{2} =$$

$$= \frac{16000 \cdot 4^3}{4} + 2^{13} \cdot 10^6 - 2^{12} \cdot 10^6 > 2^{12} \cdot 10^6 = 1600^3.$$

Получили противоречие.

501. Докажем, что для всех натуральных n число $10^{81n} - 1$ делится на 729. Действительно, $10^{81n} - 1 = (10^{81})^n - 1^n = (10^{81} - 1) \cdot A$, а

$$10^{81} - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{81} = \underbrace{9\ldots9}_{9} \cdot \underbrace{1\underbrace{0\ldots0}_{8}1\underbrace{0\ldots0}_{8}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{8}1}_{8} =$$

$$= 9 \cdot \underbrace{1\ldots1}_{9} \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{8}1\underbrace{0\ldots0}_{8}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{8}1.$$

Второй сомножитель и третий сомножитель содержат по 9 единиц, поэтому суммы их цифр делятся на 9, т. е. и сами эти числа делятся на 9. Следовательно, $10^{81} - 1$ делится на $9^3 = 729$. Итак, мы доказали, что существует бесконечно много натуральных k таких, что $10^k - 1$ делится на 729, а это равносильно утверждению задачи.

502. Если данный треугольник равносторонний (точки O и I совпадают), то утверждение очевидно. Пусть точка O лежит между точками I и C (см. рис. 234). Проведем высоту CE. Заметим, что

$$\angle EIB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC \quad \text{и}$$

$$\angle ODB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC,$$

следовательно, $\angle OIB + \angle ODB = 180^\circ$, т. е. точки B, I, O и D лежат на одной окружности. Тогда $\angle IDB = \angle IOB$ (как вписанные, опирающиеся на дугу IB), но $\angle IOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$. Итак, $\angle IDB = \angle ACB$, поэтому $ID \parallel AC$.

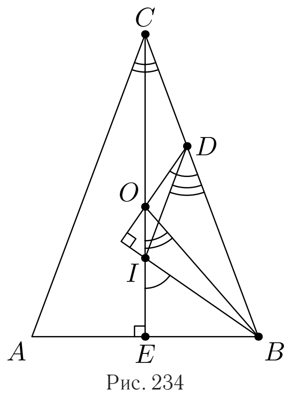


Рис. 234

В случае, когда точка I лежит между точками O и C (см. рис. 235, рис. 236) ход решения остается таким же.

503. Пусть в первой кучке n монет с весами $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, а во второй кучке m монет с весами $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_m$,

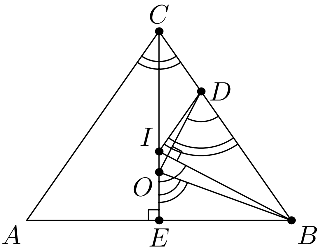


Рис. 235

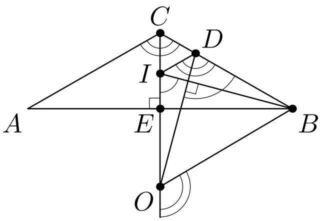


Рис. 236

причем $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_s \geqslant x \geqslant x_{s+1} \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_t \geqslant x \geqslant y_{t+1} \geqslant \ldots \geqslant y_m$ (если монет, вес которых не меньше x, вообще нет, то доказываемое утверждение очевидно). Тогда нужно доказать, что $xs + x_{s+1} + \ldots + x_n \geqslant xt + y_{t+1} + \ldots + y_m$. Так как $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_m = A$, то доказываемое неравенство преобразуется к виду

$$xs + (A - (x_1 + \ldots + x_s)) \geqslant xt + (A - (y_1 + \ldots + y_t)),$$

следовательно, оно равносильно такому:

$$x_1 + \ldots + x_s + x(t-s) \leqslant y_1 + \ldots + y_t,$$

которое мы и докажем.

Если $t \geqslant s$, то

$$x_1 + \ldots + x_s + x(t-s) = (x_1 + \ldots + x_s) + \underbrace{(x + \ldots + x)}_{t-s} \leqslant$$
$$\leqslant (y_1 + \ldots + y_s) + (y_{s+1} + \ldots + y_t),$$

так как $x_1 + \ldots + x_s \leqslant y_1 + \ldots + y_s$ (что немедленно вытекает из условия), а $y_{s+1} \geqslant x, \ldots, y_t \geqslant x$.

Если $t < s$, то $x_1 + \ldots + x_s + x(t-s) \leqslant y_1 + \ldots + y_t$ равносильно

$$x_1 + \ldots + x_s \leqslant y_1 + \ldots + y_t + \underbrace{(x + \ldots + x)}_{s-t}.$$

Последнее неравенство следует из того, что

$$x_1 + \ldots + x_s \leqslant y_1 + \ldots + y_s = (y_1 + \ldots + y_t) + (y_{t+1} + \ldots + y_s),$$

а $y_{t+1} \leqslant x, \ldots, y_s \leqslant x$.

504. Ответ. Нельзя.

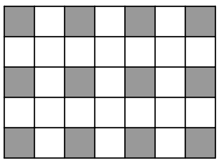


Рис. 237

Покрасим клетки прямоугольника в черный и белый цвета так, как показано на рис. 237. В черные клетки запишем число -2, а в белые — число 1. Заметим, что сумма чисел в клетках, покрываемых любым уголком, неотрицательна, следовательно, если нам удалось покрыть прямоугольник в k слоев, удовлетворяющих условию, то сумма S чисел по всем клеткам, покрытым уголками, неотрицательна. Но если сумма всех чисел в прямоугольнике равна s, то $S = ks = k(-2 \cdot 12 + 23 \cdot 1) = -k > 0$. Получим противоречие.

Замечание. Аналогично доказывается, что покрытия, удовлетворяющего условию задачи не существует, если прямоугольник имеет размеры $3 \times (2n+1)$ и 5×5. Прямоугольник 2×3 можно покрыть в один слой двумя уголками, прямоугольник 5×9 — в один слой пятнадцатью уголками, квадрат 2×2 — в три слоя четырьмя уголками. Комбинируя эти три покрытия, нетрудно доказать, что все остальные прямоугольники $m \times n$ $(m, n \geqslant 2)$ можно покрыть уголками, удовлетворяя условию.

10 класс

505. В силу равенства углов EAF и FDE четырехугольник $AEFD$ вписанный. Поэтому $\angle AEF + \angle FDA = 180°$. В силу равенства углов BAE и CDF имеем

$$\angle ADC + \angle ABC = \angle FDA + \angle CDF + \angle AEF - \angle BAE = 180°.$$

Следовательно, четырехугольник $ABCD$ вписанный. Поэтому $\angle BAC = \angle BDC$. Отсюда и $\angle FAC = \angle EDB$.

506. Лемма. *Если три фишки лежат на одной прямой и имеют целые координаты, то можно совместить любые две из них.*

Доказательство. Пусть наименьшее расстояние из трех попарных расстояний будет между фишками A и B, тогда сдвинем третью фишку C несколько раз на вектор $\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{BA}$ так, чтобы C попала на отрезок AB; после этого наименьшее из трех попарных расстояний уменьшится. Будем повторять эту операцию до тех пор, пока наименьшее из попарных расстояний не станет равным нулю (в силу целочисленности расстояний между точками, это рано или поздно произойдет). Если требуемые фишки совместились, то цель достигнута, иначе берем требующую совмещения фишку из этих двух совместившихся и переносим на оставшуюся. Лемма доказана.

Спроектируем фишки A, B, C, D на одну из осей. Проекции двигаются по тому же правилу, что и фишки, т. е., если фишка сдвигается на некоторый вектор, то ее проекция сдвигается на проекцию этого вектора. Совместим проекции фишек A и B, используя проекцию C в качестве третьей. Далее мы будем рассматривать фишки A и B как одну фишку X (движение X означает движение сначала фишки A, а затем фишки B на требуемый вектор; их проекции по-прежнему совмещены после такой операции). Совместим проекции X и C. Получим три фишки (A, B и C) с одинаковой проекцией, т. е. лежащие на одной прямой и имеющие целочисленные координаты. Среди них две фишки, требующие совмещения. Их можно совместить согласно лемме.

507. Ответ. $n = 2$.

Пусть $3^n = x^k + y^k$, где x, y — взаимно простые числа ($x > y$), $k > 1$, n — натуральное. Ясно, что ни одно из чисел x, y не кратно трем. Поэтому, если k четно, то x^k и y^k при делении на 3 дают в остатке 1, а значит, их сумма при делении на 3 дает в остатке 2, т. е. не является степенью 3.

Значит, k нечетно и $k > 1$. Поскольку k делится на 3 (см. решение задачи 499), положив $x_1 = x^{k/3}$, $y_1 = y^{k/3}$ можем считать, что $k = 3$. Итак, $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 3^n$, $x + y = 3^m$. Если $x + y = 3$, то $x = 2$, $y = 1$ (или наоборот), что дает решение $n = 2$.

Пусть $x + y \geqslant 9$. Тогда $x^2 - xy + y^2 \geqslant \dfrac{(x+y)^2}{4} > x + y$ (достаточно раскрыть скобки). Значит, $x^2 - xy + y^2$ делится на $x + y$ (так как оба числа — степени тройки), откуда $3xy = (x+y)^2 - (x^2 - xy + y^2)$ делится на $x + y$. Но x, y не делятся на 3, поэтому $3xy$ не может делиться на степень тройки, большую первой. Противоречие.

508. Можно считать, что $a_m > 0$, иначе умножим все числа последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_m$ на -1. Рассмотрим последовательность b_1, b_2, $\ldots$, b_n такую, что $b_i = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j i^j$, где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — произвольные действительные числа (т. е. b_i — значения многочлена степени $\leqslant n$ в первых n натуральных точках). Тогда из условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{n} c_j i^j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i c_j i^j = \sum_{j=0}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_i i^j = \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot 0 = 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 0. \qquad (*)$$

Предположим теперь, что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_m$ имеет k пар соседних чисел, имеющих противоположные знаки, и $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — индексы первых элементов в этих парах ($1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < m$). Пусть $k < n + 1$.

Положим $b_i = f(i) = (i - x_1)(i - x_2)\ldots(i - x_k)$, где $x_l = i_l + \frac{1}{2}$ ($l = 1, 2, \ldots, k$). Функция f меняет знак в точках $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и только в них, поэтому b_i и b_{i+1} имеют разные знаки тогда и только тогда, когда между ними есть некоторая точка $x_l = i_l + \frac{1}{2}$, т. е. если $i = i_l$ ($l = 1, 2, \ldots, k$). Мы получили, что в последовательностях $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ перемены знаков индексов происходят в одних и тех же парах индексов.

Учитывая, что $a_m > 0$ и $b_m > 0$, получаем, что знаки a_i и b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) совпадают, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i b_i > 0$, что противоречит $(*)$.

509. **Ответ.** Не могла.

Заметим, что если a и b — два натуральных числа и $a > b$, то НОД$(a, b) \leqslant b$ и $2\,$НОД$(a, b) \leqslant a$. Поэтому при $a \neq b$ $3\,$НОД$(a, b) \leqslant a + b$. Складывая 12 таких неравенств, соответствующих 12 ребрам куба, получаем, что требуемое условиям задачи равенство возможно только тогда, когда для каждого ребра НОД$(a, b) = \frac{a+b}{3}$. Но в этом случае наибольшее из чисел a и b вдвое больше наименьшего. Рассмотрим числа a, b на произвольном ребре; пусть, скажем, $a = 2b$. Рассмотрим числа c и d, стоящие на концах двух других ребер, выходящих из вершины с числом a. Каждое из них должно быть вдвое больше или вдвое меньше числа a. Если хотя бы одно вдвое меньше, оно равно b, если оба вдвое больше, то они равны между собой. Оба варианта противоречат условию, что и завершает доказательство.

510. **Ответ.** Сможет тот сержант, который дежурит третьим.

Назовем *циклом* три дежурства, идущие подряд. Чтобы не попасть на гауптвахту, третий сержант будет в последний день каждого цикла давать наряды в точности тем солдатам, которые получили за предыдущие два дня ровно по одному наряду (из третьего пункта приказа следует, что такие солдаты найдутся). При такой стратегии по окончании каждого цикла у каждого солдата будет либо два наряда, либо ни одного, причем количество вторых будет убывать. Стало быть, когда-то окажется, что все солдаты имеют по два наряда и на гауптвахту отправится первый сержант (или еще раньше отправится первый или второй).

511. Вершину многоугольника, наиболее удаленную от прямой, содержащей сторону a, будем обозначать далее через P_a. Выберем на плоскости произвольную точку O. Два вертикальных плоских угла, являющихся объединением всех прямых, проходящих через точку O и параллельных какому-либо отрезку P_aQ, где Q лежит на стороне a, назовем углами, соответствующими стороне a (см. рис. 238).

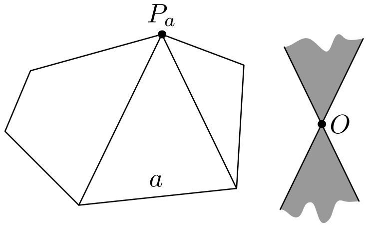


Рис. 238

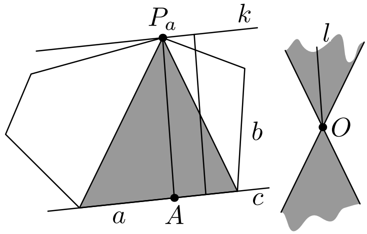


Рис. 239

Докажем сначала, что углы, соответствующие разным сторонам, не накладываются. Пусть некоторый луч l с вершиной O расположен (строго!) внутри одного из углов, соответствующих стороне a. Прямая, параллельная этому лучу и проходящая через P_a, пересекает сторону a в некоторой ее внутренней точке A. Проведем через P_a прямую k, параллельную прямой c, содержащей сторону a (см. рис. 239). Из выпуклости многоугольника и определения точки P_a следует, что многоугольник расположен в полосе с границами k и c. Более того, так как у многоугольника нет параллельных сторон, P_a — единственная точка этого многоугольника, лежащая на прямой k. Поэтому отрезок P_aA имеет максимальную длину среди всех отрезков, получаемых при пересечении многоугольника прямыми, параллельными лучу l (все остальные отрезки имеют длину, строго меньшую длины P_aA). Если бы луч l лежал внутри угла, соответствующего другой стороне b, то, повторив те же рассуждения, мы бы получили, что некоторый отрезок P_bB ($B \in b$), параллельный l, имеет максимальную длину среди всех отрезков, получаемых при пересечении многоугольника прямыми, параллельными l. Из единственности максимального отрезка получаем, что точки A и B совпадают, что противоречит тому, что стороны a и b разные. Таким образом, углы соответствующие разным сторонам, не накладываются.

Докажем теперь, что построенные нами углы покрывают всю плоскость. Пусть это не так. Тогда существует некоторый угол с вершиной в точке O, не покрытый ни одним из построенных нами углов. Возьмем внутри этого угла луч m, не параллельный ни одной из сторон и диагоналей многоугольника. Будем двигать прямую, параллельную m, и смотреть на длину отрезка, высекаемого на ней многоугольником. Ясно, что между моментами, когда на прямой оказывается вершина многоугольника, эта длина изменяется линейно. Тогда в некоторый момент мы получим отрезок максимальной длины, причем один из его концов P является вершиной многоугольника, а второй конец A лежит на некоторой стороне a. Проведем через точку P прямую c, параллельную прямой b, которая содержит сторону a. Если бы одна из сторон многоугольника, примыкающая к вершине P, не лежала бы в полосе с границами b и c, то можно было бы найти прямую, параллельную m и пересекающую многоугольник по большему, чем PA, отрезку (см. рис. 240). Следовательно, наш многоугольник лежит в

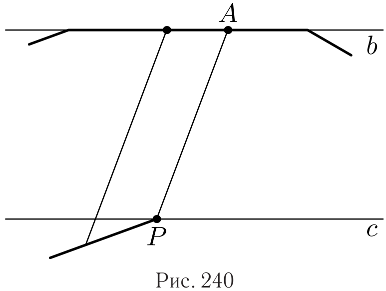


Рис. 240

полосе с границами b и c, откуда получаем, что P — наиболее удаленная от прямой b, содержащей сторону a, вершина многоугольника. А это значит, что луч m лежит в одном из углов соответствующих стороне a, что противоречит нашему выбору луча m. Таким образом, построенные нами углы покрывают всю плоскость и, так как они перекрываются, то сумма их величин равна 360°. Осталось заметить, что сумма углов, указанная в задаче, вдвое меньше, чем сумма построенных нами углов.

512. **Ответ.** Да, мог. Например, записав числа $1/4$, $1/2$, 1, 2, 5, 5^2, 5^4, 5^8, 5^{16}, 5^{32}.

Лемма 1.

1) *Если $a > 4$ и $a > b$, то трехчлен x^2+ax+b имеет два различных действительных корня.*

2) *Если $a < 4$ и $b > 0$, то хотя бы один из трехчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + bx + a$ не имеет действительных корней.*

Доказательство. Первое очевидно, ибо дискриминант $D = a^2 - 4b > 4a - 4b > 0$. Во втором случае также проверяется, что если $b \leqslant a$, то $b^2 - 4a < 0$, а если $b > a$, то $a^2 - 4b < 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $0 < a < b < c < d$ и оба трехчлена $x^2 + dx + a$ и $x^2 + cx + b$ имеют по два действительных корня. Тогда все четыре их корня попарно различны.*

Доказательство. Допустим противное: эти трехчлены имеют общий корень x_0. Пусть первый трехчлен имеет еще корень x_1, а второй — корень x_2. Очевидно, что числа x_0, x_1, x_2 отрицательны. Поскольку $d = -(x_0 + x_1) > c = -(x_0 + x_2)$, имеем $x_1 < x_2$. Умножая обе части последнего неравенства на отрицательное число x_0, получаем $x_1x_0 > x_2x_0$, т. е. $a > b$. Противоречие. Лемма доказана.

Покажем, что выбранные Знайкой 10 чисел подходят. Рассмотрим все Незнайкины числа, бо́льшие 4. Если их количество нечетно, добавим к ним еще одно (любое) Незнайкино число. Назовем эти числа *отмеченными*.

Добавим к отмеченным числа из набора 5, 5^2, 5^4, 5^8, 5^{16}, 5^{32} так, чтобы общее количество отмеченных чисел было равно 12, а если степеней пятерки не хватит, то добавим еще несколько любых Незнайкиных чисел. Из неиспользованных степеней пятерки составим трехчлены $x^2 + px + q$, у которых $p < q$, тогда их дискриминанты отрицательны и, следовательно, они не имеют действительных корней.

Запишем 12 отмеченных чисел в порядке возрастания: $n_1, n_2, \dots, n_{12}$. Теперь составим из них 6 трехчленов: $x^2 + n_{12}x + n_1, \dots, x^2 + n_7x + n_6$. По построению среди 12 отмеченных чисел не менее шести чисел больше 4. Поэтому по лемме 1 у каждого из этих трехчленов два различных действительных корня. По лемме 2 все эти корни попарно различны. Итак, имеем 12 попарно различных корней *отмеченных* трехчленов.

Составим трехчлен x^2+2x+1. Его единственный корень равен -1. Если это число встречается среди корней *отмеченных* трехчленов, то объявляем соответствующий трехчлен *плохим*. Если нет, объявляем *плохим* любой из *отмеченных* трехчленов. Выбираем плохой трехчлен, а из двух его коэффициентов и чисел $1/2$ и $1/4$ составляем (по лемме 1) два трехчлена, не имеющие действительных корней. Теперь различных действительных корней у составленных уже трехчленов ровно 11.

Возможно, осталось неиспользованными несколько Незнайкиных чисел, из которых все, кроме, быть может, одного, меньше 4 (одно может равняться 4). По лемме 1 составим из них трехчлены, не имеющие корней. Цель достигнута.

11 класс

513. **Ответ.** Нет.

Пусть $N = \overline{123\ldots321}$ — m-значное симметричное число, полученное выписыванием чисел от 1 до n (очевидно, $m > 18$), A и B — соответственно числа, составленные из первых и последних k цифр числа N, $k = \left[\frac{m}{2}\right]$. Тогда, если 10^p — наибольшая степень десятки, полностью вошедшая в A, то $n < 2\cdot 10^{p+1}$, т. е. n не более, чем $(p+2)$-значно. Кроме того, A содержит фрагмент $\underbrace{99\ldots9}_{p}1\underbrace{00\ldots0}_{p}1$, а значит, B — фрагмент $1\underbrace{00\ldots0}_{p}1\underbrace{99\ldots9}_{p}$, что, как легко видеть, невозможно.

514. Пусть n — число путников, обозначенных буквами $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Рассмотрим величину V_{ij} — скорость сближения P_i и P_j (для произвольных $1 \leqslant i, j \leqslant n$; если $i = j$, то $V_{ij} = 0$). Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной (путники удаляются друг от друга). Заметим, что в течение всего рассматриваемого периода времени V_{ij} не возрастает (а уменьшиться может только один раз — в результате встречи P_i и P_j или обгона одного из них другим).

По условию задачи в конце рассмотренного периода времени сумма всех попарных скоростей положительна:
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} V_{ij} > 0,$$
а поскольку $V_{ij} = V_{ji}$ (для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$), то
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} V_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} V_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ij} > 0.$$

Отсюда следует, что обязательно найдется путник P_j такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} V_{ij} > 0. \qquad (*)$$

А так как все V_{ij} не возрастали в течение всего периода времени, то и неравенство $(*)$ выполнялось в течение всего периода времени, откуда и вытекает утверждение задачи.

515. Пусть правильный $(n+1)$-угольник $B_1 \ldots B_{n+1}$ является сечением пирамиды $SA_1 \ldots A_n$, где $A_1 \ldots A_n$ — правильный n-угольник. Мы рассмотрим три случая: $n = 5$, $n = 2k-1\,(k > 3)$ и $n = 2k\,(k > 2)$.

Так как n-угольная пирамида имеет $(n+1)$ грань, то стороны сечения находятся по одной в каждой грани пирамиды. Поэтому без ограничения общности рассуждений можно считать, что точки $B_1, \ldots, B_{n+1}$ расположены на ребрах пирамиды так, как показано на рис. 241 и рис. 242 (в соответствии с указанными случаями).

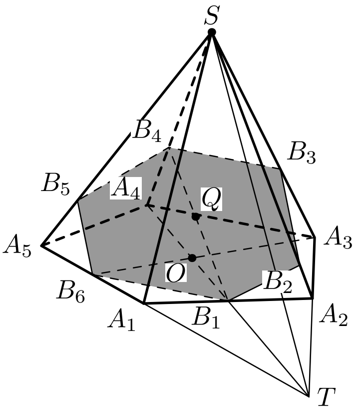


Рис. 241

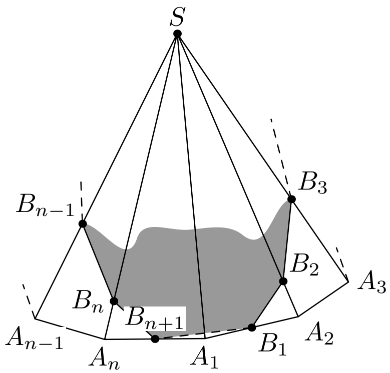


Рис. 242

1) $n = 5$. Так как в правильном шестиугольнике $B_1 \ldots B_6$ прямые B_2B_3, B_5B_6 и B_1B_4 параллельны, а плоскости A_2SA_3 и A_1SA_5 проходят через B_2B_3 и B_5B_6, то их линия пересечения ST ($T = A_1A_5 \cap A_2A_3$) параллельна этим прямым, т. е. $ST \parallel B_1B_4$. Проведем через прямые ST и B_1B_4 плоскость. Эта плоскость пересечет плоскость основания пирамиды по прямой B_1A_4, которая должна проходить через точку пересечения прямой ST с плоскостью основания, т. е. через точку T. Итак, прямые A_1A_5, A_4B_1 и A_2A_3 пересекаются в одной точке. Аналогично доказывается, что прямые A_1A_2, A_3B_6 и A_4A_5 пересекаются в одной точке. Из этого следует, что A_4B_1 и A_3B_6 — оси симметрии правильного пятиугольника $A_1 \ldots A_5$, значит, точка O их пересечения — центр этого пятиуголь-

ника. Заметим теперь, что если Q — центр правильного шестиугольника $B_1 \ldots B_6$, то плоскости SA_3B_6, SA_4B_1 и SB_2B_5 пересекаются по прямой SQ. Следовательно, прямые A_3B_6, A_4B_1 и A_2A_5 должны пересекаться в одной точке — точке пересечения прямой SQ с плоскостью основания пирамиды. Значит, диагональ A_2A_5 правильного пятиугольника $A_1 \ldots A_5$ должна проходить через его центр O, что неверно.

2) $n = 2k - 1$ $(k > 3)$. Аналогично первому случаю показывается, что так как в правильном $2k$-угольнике $B_1 \ldots B_{2k}$ прямые B_1B_2, $B_{k+1}B_{k+2}$ и B_kB_{k+3} параллельны, то прямые A_1A_2, $A_{k+1}A_{k+2}$ и A_kA_{k+3} должны пересекаться в одной точке или быть параллельными, что невозможно, так как в правильном $(2k-1)$-угольнике $A_1 \ldots A_{2k-1}$ прямые $A_{k+1}A_{k+2}$ и A_kA_{k+3} параллельны, а прямые A_1A_2 и $A_{k+1}A_{k+2}$ непараллельны.

3) $n = 2k$ $(k > 2)$. Аналогично предыдущему случаю, прямые A_1A_2, $A_{k+1}A_{k+2}$ и A_kA_{k+3} параллельны, следовательно, прямые B_1B_2, $B_{k+1}B_{k+2}$ и B_kB_{k+3} должны пересекаться в одной точке, что невозможно, так как $B_{k+1}B_{k+2} \parallel B_kB_{k+3}$, а прямые B_1B_2 и $B_{k+1}B_{k+2}$ непараллельны.

Замечание 1. При $n = 3$, 4 утверждение задачи неверно. Примерами могут служить правильный тетраэдр, имеющий сечение — квадрат, и правильная четырехугольная пирамида, все боковые грани которой являются правильными треугольниками, которая имеет сечение — правильный пятиугольник.

Замечание 2. Приведенное решение можно было бы изложить короче, если воспользоваться центральным проектированием и его свойством, утверждающим, что при центральном проектировании образами прямых, проходящих через одну точку (или параллельных), являются прямые, проходящие через одну точку (или параллельные). Достаточно спроектировать сечение пирамиды на плоскость основания с центром в вершине пирамиды.

516. См. решение задачи 508.

517. **Ответ.** Не существуют.

Пусть $a \geqslant b \geqslant c$ — числа, удовлетворяющие условиям задачи. Так как $a^2 - 1$ делится на b, числа a и b взаимно просты. Поэтому число $c^2 - 1$, которое по условию делится на a и на b, должно делиться и на их произведение, следовательно $c^2 - 1 \geqslant ab$. С другой стороны, $a \geqslant c$ и $b \geqslant c$, т. е. $ab \geqslant c^2$. Противоречие.

518. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, K — точка пересечения прямых BO и CD (см. рис. 243, рис. 244).

Из равенства острых углов BOE и DCA с перпендикулярными сторонами следует, что $\angle BOE = \angle KCE$ (CD — биссектриса) и, значит, точки

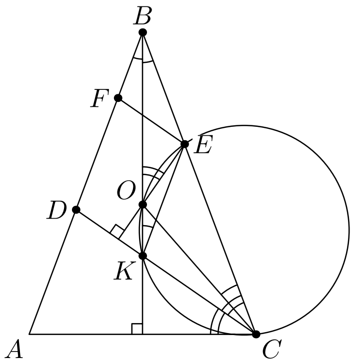


Рис. 243

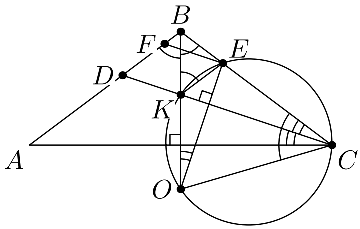


Рис. 244

K, O, E, C лежат на одной окружности (на рис. 243 $\angle KOE + \angle KCE = 180°$, на рис. 244 $\angle KOE = \angle KCE$, в случае совпадения точек K и O утверждение очевидно). Отсюда следует, что $\angle OKE = \angle OCE$ (на рис. 243 углы опираются на одну дугу), либо $\angle OKE + \angle OCE = 180°$ (рис. 244). Но $\angle OCE = \angle OBE$, так как $OB = OC$, значит, $\angle BKE = \angle KBE$, т. е. $BE = KE$. Кроме того, $\angle BKE = \angle KBE = \angle KBA$, поэтому $KE \parallel AB$, следовательно, $FEKD$ — параллелограмм и $DF = KE$. Итак, $DF = KE = BE$.

519. Ответ. Не существует.

Допустим противное: множество $\mathcal{M} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ удовлетворяет условию задачи. Пусть $m = \min\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|\}$, $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|\}$, из условия следует, что $M \geqslant m > 0$.

Рассмотрим многочлен $P(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, все коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_n$ и корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ которого принадлежат множеству $\mathcal{M}$. По теореме Виета $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{b_{n-1}}{b_n}$ и $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{b_{n-2}}{b_n}$, поэтому $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \left(-\dfrac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 - 2\,\dfrac{b_{n-2}}{b_n}$. Отсюда следует, что $nm^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \dfrac{b_{n-1}^2}{b_n^2} - 2\,\dfrac{b_{n-2}}{b_n} \leqslant \dfrac{M^2}{m^2} + 2\,\dfrac{M}{m}$, т. е. $n \leqslant \dfrac{M^2}{m^4} + 2\,\dfrac{M}{m^3} = A$. Получили противоречие: степень многочлена не может быть больше A.

Замечание. Условие отличия чисел от нуля существенно, иначе бы подходил набор $\{0, 1\}$.

520. Ответ. За пять вопросов.

Для нахождения искомого порядка $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ расположения чисел в строке необходимо, чтобы каждая из пар (a_i, a_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, 99$, встречалась хотя бы в одном из наборов, о которых задают вопросы, в противном случае для двух последовательностей $a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{100}$ и $a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_{100}$ все ответы будут одинаковы. Докажем, что после любых двух заданных вопросов может возникнуть ситуация, когда для охвата всех пар соседних чисел (еще не охваченных) потребуется задать еще не менее трех вопросов. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_{50}$ — порядок расположения чисел, про которые задан первый вопрос, $k'_1, k'_2, \ldots, k'_{50}$ — порядок расположения чисел, про которые задан второй вопрос. Построим набор $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, для которого мы не сможем, задав еще два вопроса, однозначно установить порядок расположения в нем чисел. Рассмотрим ситуацию, когда все числа, названные как в первом, так и во втором вопросе, оказались в ответах на одних и тех же местах.

В качестве искомого набора возьмем набор, у которого $k_i, k'_i \in \in \{a_{2i-1}, a_{2i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, 50$, и, кроме того, в каждой четверке $(a_{4m-3}, a_{4m-2}, a_{4m-1}, a_{4m})$, $m = 1, 2, \ldots, 25$, в первых двух вопросах не было сравнений соседних пар чисел из этой четверки. Покажем, что такой набор существует. Пусть X — множество чисел, не встречавшихся в первых двух вопросах. Возможны случаи: 1) $k_{2m-1} = k'_{2m-1}$, $k_{2m} = k'_{2m}$, 2) $k_{2m-1} = k'_{2m-1}$, $k_{2m} \neq k'_{2m}$, 3) $k_{2m-1} \neq k'_{2m-1}$, $k_{2m} \neq k'_{2m}$, 4) $k_{2m-1} \neq \neq k'_{2m-1}$, $k_{2m} = k'_{2m}$.

Для этих случаев построим четверки $(a_{4m-3}, a_{4m-2}, a_{4m-1}, a_{4m})$ следующим образом: 1) $(k_{2m-1}, *, *, k_{2m})$, 2) $(k_{2m-1}, *, k_{2m}, k'_{2m})$, 3) $(k_{2m-1}, k'_{2m-1}, k_{2m}, k'_{2m})$, 4) $(k_{2m-1}, k'_{2m-1}, *, k_{2m})$, где в качестве $*$ можно взять любое из чисел множества X, не встречавшееся в вопросах и при построении предыдущих четверок.

Тем самым показано, что после двух вопросов возможна (независимо от желания спрашивающего) ситуация, когда ни одна из пар (a_i, a_{i+1}) при i, не кратном 4, не охвачена. Каждое из 100 чисел входит при этом хотя бы в одну неохваченную пару, и, следовательно, должно фигурировать по крайней мере в одном из последующих вопросов.

Допустим, что в данной ситуации за два вопроса можно охватить все неохваченные пары; тогда каждое из 100 чисел должно фигурировать ровно в одном из таких вопросов. Рассмотрев четверки вида $(a_{4i-3}, a_{4i-2}, a_{4i-1}, a_{4i})$, $i = 1, 2, \ldots, 25$, заметим, что если одно из чисел такой четверки будет фигурировать в вопросе, то и остальные три тоже (иначе не все пары соседних чисел в этой четверке будут охвачены). Но тогда количество чисел в наборе, о котором задается вопрос, должно делиться на 4. Поскольку 50 не делится на 4, то имеем противоречие.

Итак, за 4 вопроса наверняка определить расположение чисел 1, 2, $\ldots$, 100 в строке нельзя. Покажем, как сделать это за 5 вопросов.

Первый вопрос задаем про набор $M_1 = \{1, 2, \ldots, 50\}$, второй — про набор $M_2 = \{51, 52, \ldots, 100\}$. Набор M_3 будет состоять из 25 самых левых чисел набора M_1 и 25 самых левых чисел набора M_2, а набор M_4 — из 25 самых правых чисел набора M_1 и 25 самых правых набора M_2. Ответ на вопрос о наборе M_3 определит, очевидно, числа $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$, а о наборе M_4 — числа $a_{76}, a_{77}, \ldots, a_{100}$. Пятым вопросом определяем расположение остальных 50 чисел в искомой строке.

1996–1997 г.

9 класс

521. Пусть $P(x) = ax^2+bx+c$. Тогда $(P(xy))^2-P(x^2)P(y^2) = (ax^2y^2+ + bxy + c)^2 - (ax^4 + bx^2 + c)(ay^4 + by^2 + c) = a^2x^4y^4 + b^2x^2y^2 + c^2 + + 2abx^3y^3 + 2acx^2y^2 + 2bcxy - a^2x^4y^4 - b^2x^2y^2 - c^2 - abx^2y^2(x^2 + y^2) - - ac(x^4 + y^4) - bc(x^2 + y^2) = abx^2y^2(2xy - x^2 - y^2) + ac(2x^2y^2 - x^4 - - y^4) + bc(2xy - x^2 - y^2) = -abx^2y^2(x - y)^2 - ac(x^2 - y^2)^2 - bc(x - y)^2$.

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ все три слагаемых в последнем выражении неположительны, откуда и следует неравенство $(P(xy))^2 \leqslant P(x^2)P(y^2)$.

Замечание. Утверждение задачи остается справедливым для произвольного многочлена с неотрицательными коэффициентами.

522. Пусть O — центр поворота, R — наибольшее из расстояний от точки O до вершин многоугольника, A_1 — одна из вершин, такая, что $OA_1 = R$. Если A_1 переходит при повороте в вершину A_2, A_2 — в A_3, A_3 — в A_4, то, очевидно, $A_1A_2A_3A_4$ — квадрат с центром в точке O; этот квадрат, очекидно, лежит в M. Отношение радиусов его вписанного и описанного кругов равно $\sqrt{2}$, при этом первый лежит в M, а второй содержит M по определению R, что и требовалось.

Замечание. Справедливо следующее утверждение: если выпуклый многоугольник M переходит в себя при повороте на угол α ($\alpha < 180°$), то найдутся два круга с отношением радиусов, равным 2, один из которых содержит M, а другой содержится в M. Попробуйте доказать его самостоятельно.

523. Для удобства вместо боковой поверхности параллелепипеда $a\times b\times c$ рассмотрим боковую поверхность цилиндра высоты c и длиной окружности основания $2(a + b)$, разбитую на единичные «квадраты» линиями, параллельными окружностям оснований и образующими. (Для того чтобы превратить «квадраты» в квадраты, их следует разогнуть.)

Проведем плоскость через ось симметрии цилиндра и через центры единичных «квадратов» в каком-нибудь столбце S ширины 1 и высоты c на поверхности цилиндра. Докажем, что никакая оклейка прямоугольниками, состоящими из четного числа единичных квадратов, удовлетворяющая условию задачи, не симметрична относительно этой плоскости. Действительно, в противном случае столбец S оказался бы покрыт прямоугольниками нечетной ширины. Площадь (а, значит, и высота) каждого из этих прямоугольников четна, что противоречит нечетности высоты столбца S.

Итак, все способы оклейки можно разбить на пары переходящих друг в друга оклеек (при симметрии относительно указанной плоскости), значит, их число четно.

524. **Ответ.** Всем, кроме, быть может, одного.

Ясно, что мудрец, стоящий в колонне последним, может спастись только случайно, ведь его колпака не видит никто из мудрецов. Но он может спасти всех остальных, сообщив им четность числа белых колпаков, надетых на них (по договоренности он скажет «белый», если это число нечетно и «черный» в противном случае). Теперь мудрецы должны вычислять и называть цвета своих колпаков по порядку от предпоследнего к первому: сначала предпоследний, видя колпаки впереди стоящих и зная четность числа белых колпаков (среди колпаков впереди стоящих и своего), легко определит цвет своего колпака и назовет его; затем мудрец, стоящий перед ним, зная цвета всех тех же колпаков, кроме своего (передние он видит, а про задний только что услышал), по четности может определить цвет своего колпака и назвать его. Остается продолжать описанную процедуру до тех пор, пока первый мудрец не определит цвет своего колпака.

525. **Ответ.** Нет.

Допустим противное: такие b и c нашлись. Тогда, если k и l — корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$, а m и n — корни уравнения $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$, то по теореме Виета

$$\begin{aligned} k+l &= -b, && (1)\\ kl &= c, && (2)\\ 2(m+n) &= -b-1, && (3)\\ 2mn &= c+1. && (4) \end{aligned}$$

Из (4) видно, что c — целое нечетное число. Поэтому из (2) числа k и l оба нечетные, а сумма их (равная $-b$) — целое четное число. Но тогда число $(-b-1)$ нечетно и равенство (3) невозможно. Противоречие.

526. Объединим учеников в группы по фамилиям и в группы по именам (возможны группы, состоящие из одного человека — например, ученик без однофамильцев). Каждый войдет в две группы — по фамилии и по имени. Из условия задачи следует, что в классе ровно одиннадцать групп.

Действительно, есть группы, состоящие из 1, 2, …, 11 человек, поэтому групп не меньше одиннадцати, но $1 + 2 + \ldots + 11 = 66 = 2 \cdot 33$, т. е. мы уже сосчитали каждого ученика дважды, значит, больше групп нет.

Рассмотрим группу из одиннадцати человек (скажем, однофамильцев). Остальных групп, и, в частности групп тезок, не более десяти. Поэтому какие-то двое из одиннадцати входят в одну группу тезок, т. е. у них одинаковы и имя, и фамилия.

527. Пусть прямые AD и AE пересекают прямую BC в точках F и H соответственно (см. рис. 245). Достаточно доказать, что DE — средняя линия треугольника AFH. Треугольник MBN равнобедренный ($BM = BN$) и $MN \| AH$, поэтому $AMNH$ — равнобедренная трапеция, т. е. $NH = AM$. Аналогично доказывается, что $FN = AK$. Так как $AK = AM$, то из полученных равенств следует, что $FN = NH$, т. е. N — середина FH. Тогда D — середина AF, а E — середина AH.

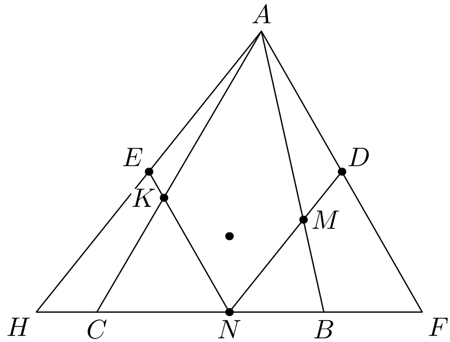


Рис. 245

528. **Ответ.** 106.

Пример расстановки, для которой $S = 106$, приведен на рис. 246.

46	55	47	54	48	53	49	52	50	51
60	41	59	42	58	43	57	44	56	45
36	65	37	64	38	63	39	62	40	61
70	31	69	32	68	33	67	34	66	35
26	75	27	74	28	73	29	72	30	71
80	21	79	22	78	23	77	24	76	25
16	85	17	84	18	83	19	82	20	81
90	11	89	12	88	13	87	14	86	15
6	95	7	94	8	93	9	92	10	91
100	1	99	2	98	3	97	4	96	5

Рис. 246

Докажем теперь, что $S \geqslant 106$ для любой расстановки чисел в таблице. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если в прямоугольнике 2×10 отмечено $n \leqslant 9$ попарно несоседних клеток, то число (неотмеченных) клеток прямоугольника, соседних с отмеченными, больше n.*

Доказательство. В каждом из 10 прямоугольничков 1×2, длинные стороны которых параллельны коротким сторонам прямоугольника 2×10, отмечено не более одной клетки. Если одна клетка в таком прямоугольничке отмечена, то другая — неотмеченная, соседняя с отмеченной. Тем самым уже имеем n таких клеток, а поскольку $n \leqslant 9$, то (при $n \geqslant 1$) найдется, очевидно, и клетка, принадлежащая прямоугольничку 1×2 без отмеченных клеток, граничащая с отмеченной клеткой соседнего прямоугольничка 1×2. Следовательно, общее число неотмеченных клеток, соседних с отмеченными, больше n. Лемма доказана.

Допустим, что $S \leqslant 105$ для некоторой расстановки чисел. Стерев все числа в таблице, будем вписывать их на прежние места, начиная с числа 100 в порядке убывания.

Выделим в таблице пять неперекрывающихся горизонтальных полос 10×2 клетки и пять неперекрывающихся вертикальных полос 2×10 клеток. Зафиксируем число n_0, после вписывания которого впервые либо в каждой горизонтальной, либо в каждой вертикальной полосе окажется не меньше одного вписанного числа; соответствующий момент назовем *критическим*. Пусть уже вписаны 33 числа от 100 до 68, но есть пустые горизонтальная и вертикальная полосы. Те 64 клетки таблицы, которые не входят в эти полосы, можно разбить на 32 прямоугольничка 1×2; хотя бы в одном из них окажутся два вписанных числа с суммой, не меньшей, чем $68 + 69 > 105$. Отсюда следует, что $n_0 \geqslant 68$, и все числа — несоседние.

Заметим, что в критический момент в каждую из полос вписано меньше 10 чисел (если бы нашлась, например, горизонтальная полоса, в которую вписано ровно 10 чисел, то перед вписыванием числа n_0 в ней было бы не меньше 9 чисел, в силу чего в каждой из вертикальных полос было бы минимум по одному числу, что противоречит определению числа n_0). Поэтому к полосам того направления, в которых в критический момент оказалось хотя бы по одному числу, можно применить лемму.

Поскольку в критический момент в таблицу вписано $101 - n_0$ чисел, из леммы следует, что у клеток, куда они вписаны, есть не менее $(101 - n_0) + 5 = 106 - n_0$ пустых соседних. Нам предстоит, таким образом, вписать в таблицу число, которое не меньше, чем $106 - n_0$, причем рядом с числом, которое не меньше, чем n_0. Сумма этих двух чисел будет не меньше, чем $106 - n_0 + n_0 = 106$, что противоречит нашему предположению о том, что $S \leqslant 105$.

10 класс

529. Ответ. $(\pm 1; 0)$; $(\pm 4; 3)$; $(\pm 4; 5)$.

Правая часть неотрицательна, так как равна квадрату, следовательно, $y \geqslant 0$, откуда левая часть не меньше $(2y - 1)^2$, так как модуль разности

y^2 и любого квадрата целого числа (если $y \geqslant 0$ и квадраты различны) не меньше $|2y-1|$. Имеем $(2y-1)^2 \leqslant 1+16y$, откуда $y \leqslant 5$. Итак, правая часть может принимать значения 1, 17, 33, 49, 65, 81, из них квадратами являются только 1, 49, 81.

Рассмотрим 3 случая:

1) $\begin{cases} y=0, \\ (x^2)^2=1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y=3, \\ (x^2-9)^2=49, \end{cases}$ откуда $\left\{ \begin{array}{l} y=3, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=16, \\ x^2=2, \end{array} \right. \end{array} \right.$ т. е. $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=5, \\ (x^2-25)^2=81, \end{cases}$ откуда $\left\{ \begin{array}{l} y=5, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=34, \\ x^2=16, \end{array} \right. \end{array} \right.$ т. е. $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=5. \end{cases}$

530. Докажем утверждение от противного. Пусть есть раскраска, при которой отсутствует пара параллельных линий с одинаковым числом черных клеток. Будем называть *весом* линии количество черных клеток на ней. Пусть есть горизонталь веса n. Тогда n вертикалей и n диагоналей каждого направления должны иметь веса $1, 2, \ldots, n$, так как все они пересекают эту горизонталь. Тогда и n горизонталей имеют веса $1, 2, \ldots, n$, так как все они пересекают вертикаль веса n.

Циклически переставим горизонтали и вертикали так, чтобы нижняя горизонталь и левая вертикаль имели вес n (свойства раскраски при этом не изменятся). Пронумеруем горизонтали снизу вверх от 0 до $n-1$, а вертикали — от 0 до $n-1$ слева направо.

Каждая диагональ пересекает по разу горизонталь и вертикаль веса n; поэтому диагонали веса 1 должны проходить через клетку их пересечения — клетку $(0,0)$. Итак, все клетки (i,i) и $(n-i,i)$, $i>0$, не закрашены.

Если n нечетно, то в каждом столбце, кроме 0, получаем не менее двух незакрашенных клеток, и столбца веса $n-1$ не найдется.

Если $n=2m$, то столбец m и строка m должны иметь вес $n-1$ (в любой из остальных строк и любом из остальных столбцов есть хотя бы две незакрашенные клетки). Тогда в них закрашены все клетки, кроме (m,m), и мы не сможем найти столбца веса 1.

Если с самого начала отсутствует горизонталь веса n, то есть горизонталь веса 0, и мы можем провести те же рассуждения, поменяв ролями закрашенные и незакрашенные клетки.

531. ***Первое решение.*** Пусть N_1 — точка, симметричная точке N относительно K (см. рис. 247). Тогда $\triangle KCN_1 = \triangle KDN$, поэтому $CN_1 = ND$ и $\angle N_1CK = \angle NDK = \pi - \angle ABN$. Заметим еще, что $\angle MCK = \pi - \angle ABM$. Складывая полученные равенства, находим, что

$\angle N_1CM = \angle MBN$. Кроме того, из условия следует, что $CM = MB$ и $BN = ND$ (т. е. и $BN = CN_1$). Значит, $\triangle MCN_1 = \triangle MBN$, откуда $MN_1 = MN$. Отрезок MK — медиана в равнобедренном треугольнике MNN_1, поэтому $\angle MKN = 90°$.

Второе решение. Это решение позволяет отказаться от дополнительного условия в задаче (о том, что точки C и D лежат по разные стороны от A), которое было задано лишь затем, чтобы избежать разбора различных случаев. Рассмотрим композицию поворотов $R_M^\beta \circ R_N^\alpha$, где $\alpha = \angle DNB$, $\beta = \angle BMC$ (углы предполагаются ориентированными). Заметим, что $\alpha + \beta = \pm 180°$, поэтому $R_M^\beta \circ R_N^\alpha = Z_X$ — центральная симметрия относительно некоторой точки X. Но

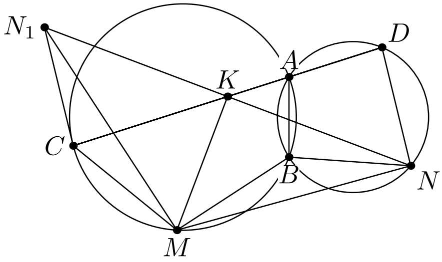


Рис. 247

$$Z_X(D) = (R_M^\beta \circ R_N^\alpha)(D) = R_M^\beta(B) = C,$$

поэтому X — середина отрезка CD, т. е. совпадает с точкой K. Если $N_1 = Z_K(N)$, то $N_1 = (R_M^\beta \circ R_N^\alpha)(N) = R_M^\beta(N)$, т. е. $\triangle NMN_1$ равнобедренный и $\angle MKN = 90°$.

Замечание. Задача имеет много других решений. Например, можно воспользоваться подобием треугольников MEK и KFN, где E и F — середины отрезков BC и BD соответственно. Эти треугольники имеют две пары взаимно перпендикулярных сторон: EK и FN, ME и KF; следовательно, перпендикулярны и их третьи стороны.

532. Заметим, что количество сторон нашего многоугольника четно, так как его горизонтальные и вертикальные стороны чередуются.

Лемма. *Если $2k$-угольник можно разбить на прямоугольники, то его можно разбить на не более чем $k-1$ прямоугольник.*

Доказательство. Сумма углов многоугольника $S = (2k-2)\cdot 180°$, и все углы в нем, очевидно, по $90°$ или по $270°$. Если все по $90°$, то это прямоугольник. Пусть найдется угол A в $270°$. Продолжим одну из его сторон внутрь многоугольника до пересечения с контуром. Многоугольник разобьется на две части, причем сумма внутренних углов частей не превосходит суммы внутренних углов многоугольника (продолжение стороны отрезает от угла A угол в $90°$, который попадает в одну из частей, и угол в $180°$, который лежит на стороне другой части, поэтому исчезает; в то же время дополнительно в этих частях могут возникнуть только два угла по $90°$ там, где продолжение стороны дошло до контура многоугольника). Заметим, что общее количество углов в 270° уменьшилось. Если они еще остались, будем повторять операцию с частями. В конце мы получим n частей без углов 270°, т. е. n прямоугольников с общей суммой углов $S = 360^\circ \cdot n \leqslant (2k-2) \cdot 180^\circ$, откуда $n \leqslant k-1$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что в нашем многоугольнике число вершин больше 200, иначе его можно разбить на 99 прямоугольников. Разобьем его на m треугольников и рассмотрим сумму их углов: $S = 180^\circ m$. Найдем теперь S, учитывая, что углы треугольников входят в состав углов многоугольника. Каждый угол многоугольника дает вклад не менее 90° (из угла 270° может быть вычтено 180°, если его вершина лежит на стороне какого-нибудь треугольника), поэтому $S = 180^\circ \cdot m > 200 \cdot 90^\circ$, откуда $m > 100$, что и требовалось доказать.

Замечание. Оценка в задаче является точной: объединение клеток квадрата 100×100, кроме клеток, лежащих выше главной диагонали, дает пример многоугольника, который главной диагональю разбивается на 101 треугольник.

533. Ответ. Не существуют.

Предположим противное. Если у многочлена $kx^2 + lx + m$ с целыми коэффициентами два целых корня x_1 и x_2, то m и l делятся на k, потому что $x_1x_2 = \frac{m}{k}$, а $x_1 + x_2 = -\frac{l}{k}$. Из чисел a и $a+1$ одно четное. Без потери общности можно считать, что четное — a. Тогда b и c тоже четные. Отсюда $(b+1)$ и $(c+1)$ нечетные. Пусть y_1 и y_2 — целые корни уравнения $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$. Тогда $y_1y_2 = \dfrac{c+1}{a+1}$ и $y_1 + y_2 = -\dfrac{b+1}{a+1}$ — нечетные числа. Получили противоречие: сумма и произведение двух целых чисел не могут одновременно быть нечетными.

534. ***Первое решение.*** Пусть L — точка пересечения прямых KO и MN, а прямая, проходящая через L параллельно AC, пересекает AB и BC в точках A_1 и C_1 соответственно (см. рис. 248).

Покажем, что $A_1L = LC_1$. Действительно, $\angle BA_1L = \angle MOL$ как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Отсюда четырехугольник A_1MLO — вписанный, и $\angle MLA_1 = \angle MOA_1 = \alpha$. Аналогично $\angle C_1LN = \angle C_1ON = \alpha$. Тогда $\triangle OMA_1 = \triangle ONC_1$, откуда $OA_1 = OC_1$. Значит, $\triangle A_1OC_1$ — равнобедренный, и его высота OL является и медианой. Итак, $A_1L = LC_1$. Но тогда точка L, очевидно, лежит на медиане BB_1, т. е. L совпадает с D из условия задачи.

Второе решение (см. рис. 249). Проведем через точку D отрезок C_1A_1 с концами на AB и BC параллельно AC. Тогда $C_1D = DA_1$, так как, по условию, D лежит на медиане угла B.

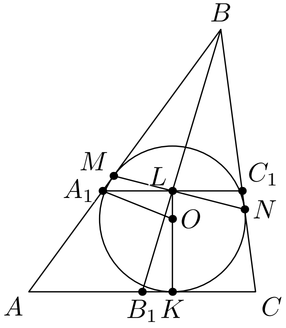


Рис. 248

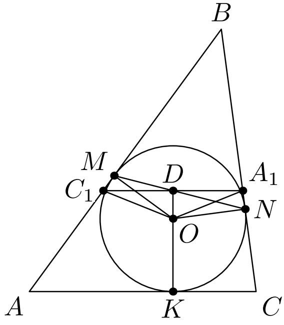


Рис. 249

Заметим, что $\angle MDC_1 = \angle A_1DN$ как вертикальные, и $\angle C_1MD = 180^\circ - \angle BMD = 180^\circ - \angle A_1ND$ ($BM = BN$ как касательные). Отсюда

$$\frac{S_{DMC_1}}{S_{DNA_1}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot MD\cdot C_1D\cdot \sin\angle MDC_1}{\frac{1}{2}\cdot ND\cdot A_1D\cdot \sin\angle NDA_1} = \frac{MD}{ND}.$$

Кроме того,

$$\frac{S_{DMC_1}}{S_{DNA_1}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot MD\cdot MC_1\cdot \sin\angle C_1MD}{\frac{1}{2}\cdot ND\cdot NA_1\cdot \sin\angle A_1ND} = \frac{MD}{ND}\cdot\frac{MC_1}{NA_1},$$

значит $MC_1 = NA_1$. Следовательно, $\triangle OMC_1 = \triangle ONA_1$ (так как $OM = ON$). Отсюда $OC_1 = OA_1$, значит, OD — высота $\triangle OA_1C_1$. Таким образом, $OD \perp AC$ ($A_1C_1 \| AC$), но и $OK \perp AC$, значит, O лежит на DK.

535. Ответ. $m = n = l = 2$.

Положим $d = \text{НОД}(m, n, l)$. Пусть $m = dm_1$, $n = dn_1$, $l = dl_1$. Тогда $d(m_1 + n_1) = d^2d_{mn}^2$, где $d_{mn} = \text{НОД}(m_1, n_1)$; откуда $m_1 + n_1 = d\cdot d_{mn}^2$. Складывая это равенство с двумя аналогичными, получаем:

$$2(m_1 + n_1 + l_1) = d\cdot(d_{mn}^2 + d_{ml}^2 + d_{nl}^2). \tag{1}$$

Покажем, что d взаимно просто с суммой $m_1 + n_1 + l_1$. В самом деле, если у d и этой суммы есть общий делитель $d_1 > 1$, то он будет общим делителем всех чисел m_1, n_1 и l_1 (так как сумма любых двух из них делится на d). Но тогда произведение $d\cdot d_1$ — общий делитель чисел m, n и l, что противоречит определению числа d. Следовательно, d является делителем числа 2 (равенство (1)), откуда $d \leqslant 2$. Заметим, что числа d_{mn}, d_{nl}, d_{ml} попарно взаимно просты (иначе у чисел m_1, n_1, l_1 нашелся бы общий делитель, не равный 1). Поэтому $m_1 = d_{mn}\cdot d_{ml}\cdot m_2$, $n_1 = d_{mn}\cdot d_{nl}\cdot n_2$, $l_1 = d_{nl}\cdot d_{ml}\cdot l_2$, где m_2, n_2, l_2 — натуральные числа. В таких обозначениях первое из исходных уравнений приобретает такой вид:

$$d_{mn} \cdot d_{ml} \cdot m_2 + d_{mn} \cdot d_{nl} \cdot n_2 = d \cdot d_{mn}^2,$$

$$\text{т. е.} \quad d_{ml} \cdot m_2 + d_{nl} \cdot n_2 = d \cdot d_{mn}.$$

Не умаляя общности, мы можем считать, что число d_{mn} — наименьшее из чисел d_{mn}, d_{ml} и d_{nl}. Имеем:

$$d_{ml} \cdot m_2 + d_{nl} \cdot n_2 \geqslant d_{ml} + d_{nl} \geqslant 2d_{mn} \geqslant d \cdot d_{mn}$$

(так как $d \leqslant 2$). Итак, все неравенства являются на самом деле равенствами, отсюда $m_2 = n_2 = 1$, $d = 2$ и $d_{ml} = d_{mn} = d_{nl}$. Но числа d_{ml}, d_{mn}, d_{nl} попарно взаимно просты, следовательно, они равны 1, и мы нашли единственное решение $m = n = l = 2$.

536. Обозначим через a_i количество камней в клетке с номером i. Тогда последовательность $A = (a_i)$ задает конфигурацию — расположение камней по клеткам. Пусть α — корень уравнения $x^2 = x + 1$, бóльший 1. Назовем весом конфигурации A число $w(A) = \sum a_i\alpha^i$. Покажем, что разрешенные действия не меняют веса. Действительно, $\alpha^{n+1} - \alpha^n - \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha^2-\alpha-1) = 0$, $\alpha^{n+1}-2\alpha^n+\alpha^{n-2} = \alpha^{n-2}(\alpha-1)(\alpha^2-\alpha-1) = 0$.

Докажем индукцией по k — числу камней, что любая последовательность действий завершается. При $k = 1$ это верно. Пусть при числе камней, меньшем k, утверждение верно. Рассмотрим процесс, начинающийся с конфигурации $A = (a_i)$ с $\sum a_i = k$. Наибольший номер непустой клетки при разрешенных действиях не уменьшается, но и расти бесконечно он не может — он не может превысить числа n, при котором $\alpha^n > w(A)$. Значит, с какого-то момента наибольший номер непустой клетки перестает изменяться, и с камнями, попавшими в эту клетку, уже ничего не происходит. Выбросим эти камни, и применим предположение индукции к оставшимся.

В конечной конфигурации в каждой клетке не более одного камня, и нет двух непустых клеток подряд. Докажем, что любые две конфигурации $A = (a_i)$ и $B = (b_i)$ с такими свойствами имеют разные веса. Пусть n — наибольший номер, при котором $a_i \neq b_i$; пусть, для определенности, $a_n = 1$, $b_n = 0$. Выбросим из A и B все камни с номерами, большими n (они в A и B совпадают). Для оставшихся конфигураций A' и B' имеем:

$$w(A') \geqslant \alpha^n;$$

$$w(B') < \alpha^{n-1} + \alpha^{n-3} + \alpha^{n-5} + \ldots = \alpha^{n-1}\,\frac{1}{1-\alpha^{-2}} = \alpha^n.$$

Таким образом, для любой конфигурации есть только одна конечная с таким же весом; только к ней и может привести процесс.

11 класс

537. См. решение задачи 529.

538. **Ответ.** 99 мудрецов.

Все 100 мудрецов гарантированно спастись не могут, поскольку цвет колпака у последнего мудреца никто из них не видит.

Покажем, как можно спасти 99 мудрецов.

Белому, синему и красному цветам сопоставим числа 0, 1 и 2 соответственно. В первую минуту мудрец, стоящий позади всех, должен выкрикнуть цвет, соответствующий остатку от деления на 3 суммы всех чисел, сопоставленных цветам колпаков мудрецов, стоящих впереди. Тогда мудрец, стоящий непосредственно перед ним, сможет вычислить цвет своего колпака, так как видит колпаки всех 98 мудрецов, стоящих впереди; этот цвет он и должен выкрикнуть во вторую минуту. В третью минуту мудрец, стоящий в колонне 98-м, вычисляет, основываясь на информации, полученной из двух предыдущих выкриков и видя колпаки 97 стоящих впереди, цвет своего колпака, выкрикивает его, и т. д.

539. См. решение задачи 531.

540. Пусть PQ — любое горизонтальное ребро одного из кубиков. Обозначим через C_{PQ} вертикально расположенный прямоугольник, нижняя сторона которого — PQ, а верхняя лежит на поверхности куба. Пусть n_{PQ} — число пересечений данной ломаной с прямоугольником C_{PQ}. Ребро PQ покрасим в белый цвет, если n_{PQ} четно, и в черный, если n_{PQ} нечетно. Все остальные, т. е. вертикальные ребра кубиков, покрасим в белый цвет.

Докажем теперь, что приведенная раскраска удовлетворяет условию задачи.

Пусть $PQRS$ — вертикальная грань и PQ и RS — ее горизонтальные ребра. Если ломаная не пересекает $PQRS$, то прямоугольники C_{PQ} и C_{RS} пересекаются с ломаной в одних и тех же точках. Поэтому ребра PQ и RS покрашены в один цвет, и, следовательно, эта грань удовлетворяет требованию задачи. Если же ломаная пересекает прямоугольник $PQRS$, то n_{PQ} и n_{RS} отличаются на 1 и, следовательно, имеют разную четность. Поэтому ребра PQ и RS покрашены в разные цвета, что означает выполнение условия задачи и в этом случае.

Пусть теперь $PQRS$ — горизонтальная грань. Объединение прямоугольников C_{PQ}, C_{QR}, C_{RS} и C_{SP} есть боковая поверхность параллелепипеда, состоящего из кубиков, расположенных в точности над гранью $PQRS$. Замкнутая ломаная пересекает поверхность параллелепипеда четное число раз (сколько раз ломаная «заходит» внутрь параллелепипеда, столько раз она и «выходит» из него).

Заметим, что ломаная не пересекает верхнюю грань параллелепипеда. Если грань $PQRS$ не отмечена, то ломаная не пересекает ее. Тогда все точки пересечения ломаной с поверхностью параллелепипеда расположены на его боковой поверхности. В этом случае сумма $n_{PQ}+n_{QR}+n_{RS}+n_{SP}$ четна. Поэтому число сторон грани $PQRS$, отмеченных черным цветом, четно.

Если же грань $PQRS$ отмечена, то одна из точек пересечения ломаной с поверхностью параллелепипеда принадлежит $PQRS$. Тогда сумма $n_{PQ}+n_{QR}+n_{RS}+n_{SP}$ нечетна и, следовательно, нечетное число сторон грани $PQRS$ окрашено в черный цвет.

541. **Ответ.** Трехчленов, не имеющих корней, больше.

Пусть $m \leqslant n$ — целые корни уравнения $x^2+ax+b=0$. Тогда $m+n=-a$, $mn=b$, следовательно, $m,n<0$, $0<mn\leqslant 1997$, $|n|\leqslant|m|\leqslant 1997$. Рассмотрим уравнение $x^2-nx+mn=0$. Его коэффициенты — целые числа от 1 до 1997, т. е. оно принадлежит рассматриваемому множеству, но не имеет корней, так как $D=n^2-4mn=n(n-4m)<0$. Итак, любому уравнению с целыми корнями мы поставили в соответствие уравнение, не имеющее корней; при этом разным уравнениям сопоставлены разные. Кроме того, уравнения x^2+cx+d, где c четно, d нечетно и $D<0$, не представимы в виде $x^2-nx+mn=0$. Значит, уравнений, не имеющих корней, больше.

542. Для каждой из вершин многоугольника, лежащих по одну сторону от l, отметим отрезок, высекаемый на l прямыми, на которых лежат выходящие из нее стороны. Тогда условие задачи означает, что точка P лежит внутри многоугольника тогда и только тогда, когда она принадлежит нечетному числу отмеченных отрезков.

Но каждая из точек пересечения l со сторонами многоугольника будет концом ровно одного из отмеченных отрезков, а каждая из точек пересечения l с продолжением стороны многоугольника (лежащей по нужную сторону от l) — концом ровно двух отмеченных отрезков.

Следовательно, при движении точки P по прямой l четность количества содержащих ее отмеченных отрезков изменяется при каждом пересечении границы многоугольника. Осталось заметить, что, когда P расположена так, что все точки пересечения прямых с l находятся по одну сторону от нее, количество покрывающих ее отрезков равно нулю, и она лежит вне многоугольника. Отсюда и следует утверждение задачи.

543. ***Первое решение.*** Пусть O — центр сферы, O_1 — точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$, H — ортоцентр $\triangle ACD$, M — точка пересечения медиан $\triangle ABD$ и O_1, H, M — точки касания (см. рис. 250).

Точка O_1 — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Пусть эта окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Тогда $O_1A_1=O_1B_1=O_1C_1$, следовательно, прямоугольные треугольники OO_1A_1, OO_1B_1, OO_1C_1 равны, откуда $\angle OA_1O_1=\angle OB_1O_1=$

$= \angle OC_1O_1 = \varphi$. Кроме того, $O_1A_1 \perp BC$, поэтому по теореме о трех перпендикулярах, $OA_1 \perp BC$, т. е. φ — линейный угол двугранного угла с гранями BOC и BO_1C. С другой стороны, BOC — биссектор двугранного угла с гранями BDC и BAC (O — центр вписанной сферы), поэтому угол между гранями BDC и ABC равен 2φ. Аналогично, грани ADC и ADB наклонены к основанию ABC под углом 2φ. Отсюда следует, что проекция O' точки D на плоскость ABC равноудалена от AB, BC и CA и, учитывая то, что точки O' и C лежат по одну сторону от AB, O' и B — от AC, O' и A — от BC, получаем, что $O' = O_1$, т. е. DO_1 — высота тетраэдра.

Поскольку $AB \perp O_1C_1$ и $AB \perp DO_1$, то $AB \perp DO_1C_1$. Опустим из точки O перпендикуляры OH_1 и OM_1 на DB_1 и DC_1. Тогда $OH_1 \perp ADC$, так как $OH_1 \perp DB_1$ и $OH_1 \perp AC$ ($AC \perp DO_1B_1$). Значит, $H_1 = H$, т. е. $H \in DB_1$. Аналогично, $OM_1 \perp ADB$, т. е. $M_1 = M$, и, значит, $M \in DC_1$. Итак, прямая DM — одновременно медиана и высота $\triangle ADB$, значит, $AD = DB$. Тогда $AO_1 = BO_1$, следовательно, $AC = BC$ и точки C, O_1, C_1 лежат на одной прямой.

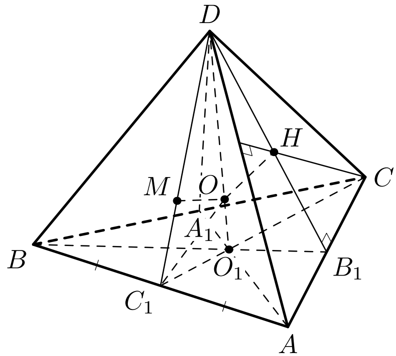


Рис. 250

По теореме о трех перпендикулярах $CO \perp AD$ ($OH \perp ADC$ и $CH \perp AD$), кроме того, $CO \perp AB$ ($AB \perp CDC_1$), поэтому $CO \perp ADB$. Но $OM \perp ADB$, значит, точка O лежит на CM. Отсюда следует, что M — центр окружности, вписанной в $\triangle ADB$ (основание конуса с вершиной C, описанного около сферы, — вписанная в $\triangle ADB$ окружность, поскольку $CO \perp ADB$). Рассмотрим $\triangle CDC_1$. В нем DO_1 и CM — высоты, C_1O — биссектриса, значит $C_1D = C_1C$, откуда $C_1O_1 : O_1C = C_1M : MD = 1 : 2$. Центры вписанных окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle ADB$ являются точками пересечения медиан, поэтому $\triangle ABC$ и $\triangle ADB$ — равносторонние.

Отсюда, учитывая то, что высота пирамиды попадает в центр основания ABC, получаем, что тетраэдр — правильный.

Второе решение. Сделаем развертку тетраэдра $ABCD$ (см. рис. 251). Пусть сфера касается грани ABC в точке O — центре вписанной окружности, грани ACD ($\triangle ACD_1$ на рис. 251) — в точке M пересечения медиан, грани BCD ($\triangle BCD_2$) — в точке H пересечения высот. По свойству касательных, проведенных к сфере из одной точки, $AM = AO$,

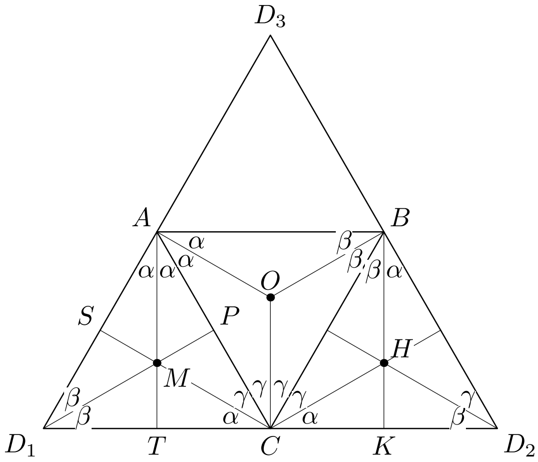


Рис. 251

$CM = CO$, поэтому треугольники AMC и AOC с общей стороной AC равны. Отсюда $\angle MAC = \angle OAC$ и $\angle MCA = \angle OCA$. Из аналогичных равенств для других пар углов получаем, что если $\angle OAC = \angle OAB = \alpha$, $\angle OBA = \angle OBC = \beta$ и $\angle OCB = \angle OCA = \gamma$, то $\angle CAM = \alpha$, $\angle CBH = \beta$, $\angle ACM = \angle BCH = \gamma$. Далее, из $\triangle ABC$: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, а из $\triangle BKC$: $\beta + \gamma + \angle HCK = 90°$, значит, $\angle HCK = \alpha$.

Отсюда $\angle KBD_2 = \alpha$, $\angle HD_2C = \beta$, $\angle HD_2B = \gamma$ (углы с перпендикулярными сторонами), и тогда $\angle MCD_1 = \angle HCD_2 = \alpha$, $\angle MD_1C = \angle HD_2C = \beta$. Теперь из $\triangle D_1PC$: $\angle D_1PC = 180° - (\alpha + \beta + \gamma) = 90°$, значит, медиана D_1P является и высотой $\triangle AD_1C$. Отсюда $AD_1 = D_1C$ и $\alpha = \gamma$ ($\angle MAC = \angle MCA$). Следовательно, $\triangle AD_1T = \triangle CD_1S$ и, значит, $\angle D_1AT = \angle D_1CS = \alpha$; кроме того, D_1P — биссектриса угла AD_1C. Мы получили, что медиана AT является и биссектрисой $\triangle D_1AC$, т. е. $\angle AD_1C = \angle ACD_1$, $2\beta = \gamma + \alpha = 2\alpha$. Итак, $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Отсюда следует, что грани ABC, ACD и BCD тетраэдра — правильные треугольники, т. е. $AB = BC = CA = AD = DC = BD$, значит, тетраэдр — правильный.

544. Занумеруем горизонтали и вертикали по порядку, начиная от края, и назовем *полями* клетки, стоящие на пересечении рядов с нечетными номерами. В частности, все клетки в углах — поля. Заметим, что дырка будет перемещаться только по полям.

Если поле A покрыто доминошкой, то одна из узких сторон доминошки граничит с другим полем B; проведем стрелку из центра A в центр B.

Заметим, что если B — дырка, то, сдвинув доминошку по стрелке, мы переместим дырку на A.

Проведем так стрелки из каждого поля (кроме дырки). Если есть путь по стрелкам из поля A на дырку, можно перегнать дырку на A, сдвинув сперва доминошку вдоль последней стрелки пути, затем — вдоль предпоследней, и т. д.

Путь по стрелкам либо приходит на дырку, либо зацикливается. Докажем, что доминошки, соответствующие циклу, охватывают многоугольник с нечетным числом клеток внутри.

Действительно, рассмотрим цикл как линию из стрелок. Если построить новую квадратную сетку с узлами в центрах полей, то цикл пройдет по линиям этой сетки и будет охватывать многоугольник, который сетка разбивает на квадраты со стороной 2. Докажем наше утверждение индукцией по числу квадратов. Для одного квадрата оно верно — если выложить домино по границе, внутри будет только одна клетка. Многоугольник же из k квадратов получается добавлением квадрата на границе многоугольника из $k-1$ квадрата, и нетрудно проверить, что при выкладывании границы доминошками внутри добавляется 2 или 4 клетки.

Итак, цикл должен охватывать многоугольник с нечетным числом клеток внутри. Но это невозможно, так как этот многоугольник должен быть заполнен целым числом доминошек, т. е. содержать четное число клеток, так как дырка исходно расположена на краю.

Значит, циклов нет, и существует путь по стрелкам, приходящий на дырку.

1997–1998 г.

9 класс

545. Абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения параболы и прямой $y = x$ удовлетворяют уравнению
$$x^2 + (p-1)x + q = 0.$$
По теореме Виета $x_1 + x_2 = 1 - p$. Аналогично получаем, что абсциссы x_3 и x_4 точек пересечения параболы и прямой $y = 2x$ связаны соотношением $x_3 + x_4 = 2 - p$.

Если $x_1 < x_2$, а $x_3 < x_4$, то проекция левой дуги равна $x_1 - x_3$, а правой — $x_4 - x_2$ (см. рис. 252). Разность их равна $(x_4 - x_2) - (x_1 - x_3) = (x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) = (2-p) - (1-p) = 1$.

546. Отметим углы параллелограммов, являющиеся частью углов многоугольника. Пусть в многоугольнике n сторон. Тогда сумма отмеченных углов равна $180° \cdot (n-2)$. К каждой стороне многоугольника примыка-

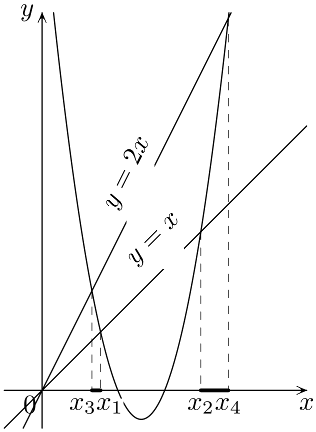


Рис. 252

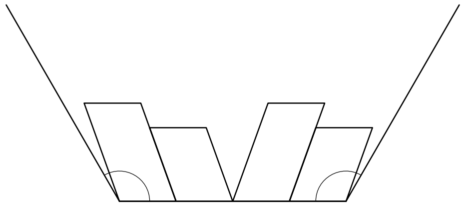


Рис. 253

ют стороной по два отмеченных угла (см. рис. 253), их сумма, очевидно, не менее 180°. Просуммировав такие пары по всем сторонам, получим не менее $180^\circ \cdot n$, т. е., по крайней мере на 360° больше, чем при подсчете другим способом. Избыток возникает за счет того, что некоторые углы посчитаны дважды, а именно те, которые примыкают сразу к двум сторонам. Поскольку каждый такой угол меньше 180°, то таких углов не менее трех. Но вершины таких углов как раз и являются хорошими вершинами многоугольника.

547. Ответ. Найдутся.

Подойдут, например, числа $a = 5555554445$, $b = 5554445555$, $c = 4445555555$. Убедимся в этом: $S(a+b) = S(11110000000) < 5$, $S(a+c) = S(10001110000) < 5$, $S(b+c) = S(10000001110) < 5$, $S(a+b+c) = S(15555555555) = 51 > 50$.

Как можно найти такие числа? Заметим, что $S(2(a+b+c)) = S((a+b)+(a+c)+(b+c)) \leqslant S(a+b)+S(a+c)+S(b+c) \leqslant 12$, т. е. число $n = 2(a+b+c)$ при делении на 2 должно резко увеличивать свою сумму цифр. Такое возможно, если в числе много единиц, тогда в частном появится много пятерок. Возьмем, например, $n = 31111111110$, тогда $S(n) = 12$, а $S\left(\frac{n}{2}\right) = 51$. Разложим n на три слагаемых с суммой цифр 4 и меньших $\frac{n}{2}$: $n = 11110000000 + 10001110000 + 10000001110$, а затем решим систему уравнений $a+b = 11110000000$, $a+c = 10001110000$, $b+c = 10000001110$.

548. Ответ. Верно.

Занумеруем всевозможные начальные положения, т. е. пары (лабиринт, положение ладьи) — их конечное число. Составим программу Π_1

обхода всех полей для первого начального положения. Предположим теперь, что начальным было положение № 2. Применим программу Π_1, и если ладья обошла не все поля, допишем в конце несколько команд, чтобы обойти оставшиеся поля. Получим программу Π_2. Применим программу Π_2 к ладье в 3-м начальном положении, снова допишем программу и т. д.

549. Ответ. За 24 часа.

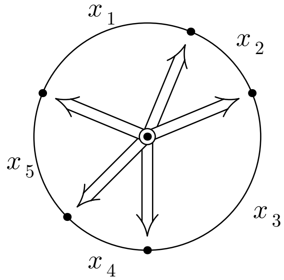


Рис. 254

Отметим на одном циферблате положения часовых стрелок всех часов. Циферблат разобьется на 5 секторов. Занумеруем их по кругу (см. рис. 254). Пусть часовая стрелка проходит секторы за время x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 соответственно (некоторые из этих чисел, возможно, нулевые). Заметим, что если мы станем устанавливать на всех часах время, соответствующее положению внутри сектора, то каждая часовая стрелка пройдет через начало сектора. Это значит, что суммарное время перевода окажется заведомо больше, чем если бы мы устанавливали все часы на начало сектора.

Обозначим через S_i суммарное время, необходимое для установки всех часов на начало i-го сектора. Ясно, что время перевода отдельной стрелки является суммой некоторых x_j. Например, время перевода на начало первого сектора равно x_5 для пятых часов и $x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ для вторых. Тогда

$$S_1 = (x_2+x_3+x_4+x_5)+(x_3+x_4+x_5)+(x_4+x_5)+x_5 = x_2+2x_3+3x_4+4x_5.$$

Остальные S_i выражаются аналогично. Тогда

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = (1 + 2 + 3 + 4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \\ = 10 \cdot 12 = 120 \text{ часов.}$$

Поэтому наименьшая сумма не превосходит $120 : 5 = 24$ часа. С другой стороны, если все секторы одинаковы (например, часы показывают 12 ч, 2 ч 24 мин, 4 ч 48 мин, 7 ч 12 мин и 9 ч 36 мин), то все S_i равны 24 часам, поэтому менее, чем 24 часами не обойтись.

550. Проведем через точку E прямую, параллельную AB. Пусть она пересекает BL и AC в точках P и Q соответственно. Поскольку QE и EL параллельны сторонам AB и BC соответственно, то по теореме Фалеса $\frac{MQ}{MA} = \frac{ME}{MB} = \frac{ML}{MC}$, поэтому $\frac{MQ}{ML} = \frac{MA}{MC} = 1$. Аналогично, поскольку $MD \| PQ$, то $\frac{MQ}{ML} = \frac{DP}{DL} = 1$, т. е. ED — это медиана в треугольнике PEL. Однако из параллельности EP и EL сторонам AB и BC соответственно следует равенство углов: $\angle EPL = \angle ABL$, $\angle ELP = \angle LBC$, но $\angle ABL = \angle LBC$, поэтому $\angle EPL = \angle ELP$. Тем самым, треугольник

LEP — равнобедренный, и медиана ED является высотой, что и требовалось.

551. Ответ. $\left[\frac{3N}{4}\right]$ звена (здесь $[x]$ — целая часть числа x).

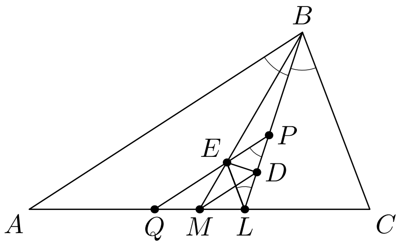


Рис. 255

Заметим, что в каждой паре звеньев, бывших соседями, но переставших ими быть, по крайней мере одно звено должно быть раскрыто. Это же верно для пары несоседних звеньев, которые должны стать соседями.

Если разбить звенья на группы так, чтобы любые два звена в группе являлись или впоследствии стали соседними (но не то и другое вместе), то из каждой такой группы может остаться нераскрытым не более одного звена. Такой группой, например, являются 4 звена, которые в старой цепочке следовали в порядке 1–2–3–4, а в новой должны быть в порядке 2–4–1–3. Другие примеры: в старой 1–2–3, в новой 1–3 (а 2 с ними не связано), или в старой 1–2, а в новой они не связаны.

Разбив мысленно цепочку на четверки, с возможным остатком в 1, 2 или 3 звена, и потребовав такой порядок, при котором четверки и остаток изменяются указанным образом, заказчица обеспечит раскрытие не менее $\left[\frac{3N}{4}\right]$ звеньев (лишнее звено из остатка прицепляется с другого конца).

С другой стороны, раскрыв в исходной цепочке каждое второе звено, ювелир мысленно разобьет вторую цепочку на части, где в сумме не менее половины всех звеньев. В каждой части надо раскрыть не более половины звеньев, поэтому не менее четверти звеньев можно оставить нераскрытыми.

552. Одновременно с операциями на доске будем вести запись в тетради. Но вместо каждого числа x, появляющегося на доске, будем писать в тетради число $\frac{ab}{x}$ (a и b — исходные числа). Когда на доске пара чисел (x, y), где $x > y$, заменяется на пару $\left(x, \dfrac{xy}{x-y}\right)$, в тетради происходит замена

$$\left(\frac{ab}{x}, \frac{ab}{y}\right) \to \left(\frac{ab}{x}, \frac{ab(x-y)}{xy}\right) = \left(\frac{ab}{x}, \frac{ab}{y} - \frac{ab}{x}\right),$$

т. е., как в алгоритме Евклида, большее число заменяется на разность. Следовательно, на каком-то шаге мы запишем в тетрадь пару чисел, равных НОД(a, b). В это же время оба числа на доске станут равными $\dfrac{ab}{\text{НОД}(a,b)}$, т. е. НОК$(a, b)$.

10 класс

553. Из рис. 16 следует, что $a > 0$. Если $y = p$ и $y = q$ — уравнения заданных прямых, то абсциссы точек A, D и E — корни $x_1 < x_2 < x_3$ уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d - p = 0$, а точек B, C и F — корни $X_1 < X_2 < X_3$ уравнения $aX^3 + bX^2 + cX + d - q = 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = X_1 + X_2 + X_3$. Отсюда $x_2 - X_2 = (X_1 - x_1) + (X_3 - x_3)$, что и требовалось доказать.

554. Обозначим через F_1 и F_2 данные многоугольники. Предположим, что они имеют общую внутреннюю точку. Возможны два случая.

1) Один многоугольник содержится внутри другого, скажем, F_1 лежит внутри F_2. Пусть A — одна из вершин F_1. Тогда, как легко видеть, найдутся три вершины P, Q, R многоугольника F_2 такие, что треугольник PQR содержит A (случай, когда A лежит на стороне треугольника PQR, легко приводит к противоречию). При этом хотя бы один из углов PAQ, QAR, RAP больше $90°$. Пусть, для определенности, $\angle PAQ \geqslant°$. Тогда имеем: $1 \geqslant PQ^2 \geqslant AP^2 + AQ^2$. Получаем, что, вопреки условию, один из отрезков AP и AQ не больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$ — противоречие.

2) Сторона одного многоугольника пересекает сторону другого. Пусть, например, сторона AB многоугольника F_1 пересекает сторону PQ многоугольника F_2. Пусть $APBQ$ — выпуклый четырехугольник (случай, когда среди точек A, B, P, Q найдутся три, лежащие на одной прямой, легко рассматривается). Хотя бы один из его углов, скажем, PAQ, не меньше $90°$. Тогда $1 \geqslant PQ^2 \geqslant AP^2 + AQ^2$, следовательно, один из отрезков AP и AQ не больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Получаем противоречие.

555. 1. Докажем, что стороны треугольника $K_aK_bK_c$ параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC. Пусть $AC > AB$. Имеем $\angle POL = \angle K_aOL$ и $\angle POB = \angle ROB$ (см. рис. 256), поэтому $\angle K_aOR = 2\angle LOB$. Угол LOB внешний в треугольнике AOB, значит $\angle K_aOR = 2(\alpha/2 + \beta/2) = \alpha + \beta$. Случай $AC < AB$ разбирается аналогично. Подобными же рассуждениями получаем, что $\angle K_bOR = \alpha + \beta$. Следовательно, точки K_a и K_b симметричны относительно прямой OR, поэтому прямые K_aK_b и AB параллельны.

Итак, соответствующие стороны треугольников $M_aM_bM_c$ и $K_aK_bK_c$ параллельны (M_a, M_b, M_c — середины сторон треугольника), поэтому эти треугольники гомотетичны. Центр этой гомотетии является общей точкой прямых M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c.

2. Пусть прямая M_aK_a вторично пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точке T. Будем считать, что $AC > AB$. Докажем, что описанная вокруг треугольника TK_aL окружность проходит через осно-

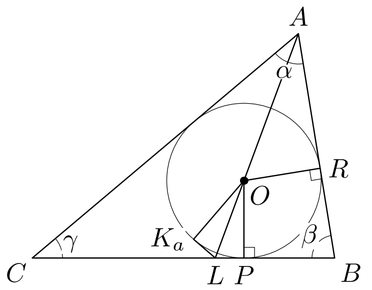


Рис. 256

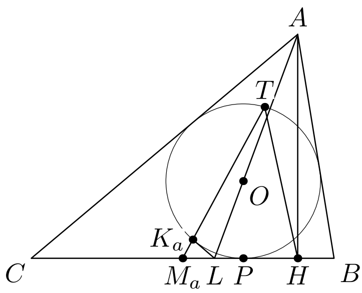


Рис. 257

вание H высоты треугольника ABC. Для этого достаточно проверить выполнение равенства $M_aL \cdot M_aH = M_aP^2$, так как $M_aP^2 = M_aK_a \cdot M_aT$ (см. рис. 257).

Это можно сделать, выразив длины отрезков M_aP, M_aL и M_aH через стороны треугольника ABC. Мы докажем его, пользуюсь известными свойствами точки P' касания со стороной BC соответствующей вневписанной окружности треугольника: точка P' симметрична P относительно M_a и отрезок AP' пересекает вписанную окружность в точке, диаметрально противоположной точке P. Поэтому прямые AP' и M_aO параллельны (O — центр вписанной окружности, см. рис. 258).

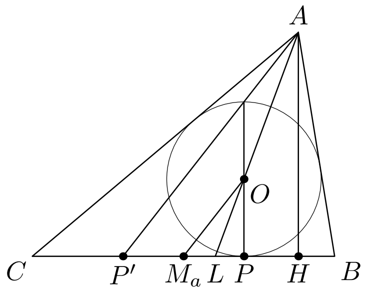


Рис. 258

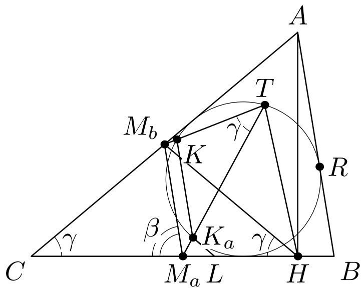


Рис. 259

Пользуясь параллельностью прямых AH и OP, равенством $M_aP' = M_aP$ и теоремой Фалеса, получаем $\frac{M_aP}{M_aL} = \frac{M_aP'}{M_aL} = \frac{OA}{OL} = \frac{PH}{LP} = \frac{PM_a + PH}{M_aL + LP} = \frac{M_aH}{M_aP}$, что и требовалось.

Так как четырехугольник TK_aLH вписанный, углы M_aTH и M_aLK_a равны. Угол M_aLK_a легко выражается через углы треугольника ABC: $\angle M_aLK_a = 180^\circ - 2\angle ALB = \beta - \gamma$ (см. рис. 259). Рассмотрим теперь четырехугольник M_bTHM_a. Заметим, что $\angle HCA = \angle CHM_b = \gamma$ (треугольник CM_bH — равнобедренный), $\angle CM_aM_b = \beta$. Поэтому $\angle M_aM_bH = \beta - \gamma$, значит M_aTHM_b — вписанный ($\angle M_aTH = \angle M_aM_bH$) и, следовательно, $\angle M_aTM_b = M_aHM_b = \gamma$.

Обозначим через K точку пересечения отрезка TM_b со вписанной окружностью. Так как вписанный в окружность угол K_aTK равен γ, а дуга RK_a вписанной окружности равна $\alpha + \beta$ (это было доказано ранее), точки K_a и K симметричны относительно прямой OR. Но точки K_a и K_b, как отмечено ранее, также симметричны относительно этой прямой. Значит точки K и K_b совпадают, что означает, что прямые M_aK_a и M_bK_b пересекаются в точке T вписанной окружности.

Замечание. Из доказанного следует известная **теорема Фейербаха**: окружность девяти точек (т. е. окружность $M_aM_bM_c$) и вписанная окружность касаются (точкой касания является центр гомотетии T).

556. Предположим противное. Тогда найдется такое n ($n > 1$), что любой набор из $n-1$ выделенного подмножества имеет общий элемент и существует n выделенных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, не имеющих общего элемента. Исключим из набора $A_1, A_2, \ldots, A_n$ множество A_i. Оставшиеся имеют общий элемент, который мы обозначим через x_i. Заметим, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Каждое из множеств A_i содержит все элементы множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, кроме x_i, поэтому, если из множеств A_i исключить элементы множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то в каждом из них останется $2k - n + 1$ элемент (в частности, $n \leqslant 2k+1$). Следовательно, объединение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ состоит не более чем из $n + n(2k - n + 1) = n(2k + 2 - n)$ элементов. Максимальное значение выражения $n(2k + 2 - n)$ равно $(k+1)^2$. Но тогда, по условию задачи, все A_i должны иметь общий элемент. Противоречие.

557. **Ответ.** Нельзя.

Допустим, что можно, и рассмотрим способ добиться этого за наименьшее количество действий. Пусть a_k, b_k — числа, получавшиеся из 19 и 98 после k-го действия, s — число действий. Тогда $a_s = b_s = m$ и $a_{s-1} \neq b_{s-1}$ (так как мы рассматриваем оптимальный способ). Действия, проведенные над a_{s-1} и b_{s-1}, различны. Значит, $m = n^2$ и на $(s-1)$-м шаге мы имели числа $a_{s-1} = n$ и $b_{s-1} = n^2 - 1$ (или наоборот; на дальнейшее решение это не влияет). Общее количество s действий не больше, чем $n - 18$, так как на $s-1$ шаге мы получили n, а каждый шаг увеличивает числа по крайней мере на 1. Тогда $n^2 - 1$ могло получиться только последовательным прибавлением единиц, так как от ближайшего квадрата $(n-1)^2$ до $n^2 - 1$ будет $2n - 2$ единицы. Следовательно, $b_1 > (n-1)^2$, поэтому все числа $b_1, \ldots, b_{s-1}$ не являются полными квадратами. Поэтому $b_s \leqslant 100$, с другой стороны $a_s = a_{s-1}^2 \geqslant 19^2$. Противоречие.

558. Переписав выражение $((x * y) * z) * t$ двумя способами, получим равенство $(x + y + z) * t = (x * y) + z + t$. Подставив в него $x = y = 0$, имеем $z * t = z + t + C$, где $C = 0 * 0$. Тогда $(x * y) * z = (x + y + C) + z + C = x + y + z$, откуда $C = 0$.

559. Будем говорить, что три вершины n-угольника ($n > 3$), через которые проходит описанная окружность, образуют отмеченный треугольник. Докажем, что все отмеченные треугольники образуют *триангуляцию* многоугольника, т. е. разбиение многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники. Это следует из следующих свойств 1) и 2) отмеченных треугольников.

1) Никакие два отмеченных треугольника не имеют общей внутренней точки. Действительно, если $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — различные отмеченные треугольники, а S_1 и S_2 — сооответствующие описанные окружности, то точки A_1, B_1, C_1 расположены на дуге окружности S_1, лежащей внутри S_2, а точки A_2,B_2, C_2 — на дуге окружности S_2, лежащей внутри S_1 (см. рис. 260) и утверждение очевидно. Рассуждения не меняются, если одна или две вершины наших треугольников совпадают.

2) Если ABC — отмеченный треугольник и AB — диагональ n-угольника, то к стороне AB примыкает еще один отмеченный треугольник. В самом деле, рассмотрим вершины n-угольника, лежащие с точкой C по разные стороны от AB. Среди этих вершин выберем такую вершину D, что угол ADB наименьший (из условия, что никакие четыре вершины не лежат на одной окружности, следует единственность такой вершины). Легко понять, что окружность, проходящая через точки A, B и D, будет описанной для n-угольника, соответственно треугольник ABD отмеченный.

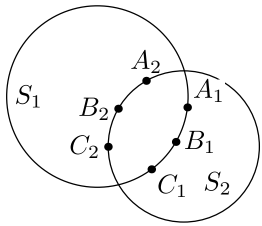


Рис. 260

Далее будем называть отмеченный треугольник *граничным* (соответственно *внутренним*), если соответствующая описанная окружность граничная (внутренняя). Пусть Г — число граничных треугольников, В — число внутренних, П — число оставшихся отмеченных треугольников (назовем их *простыми*). Каждая из n сторон n-угольника принадлежит одному из треугольников, причем граничным треугольникам принадлежат по две стороны, простым — по одной, а внутренним — ни одной. Отсюда получим соотношение:

$$2\Gamma + \Pi = n. \tag{1}$$

Так как любая триангуляция состоит из $n - 2$ треугольников, то

$$\Gamma + \Pi + \text{В} = n - 2. \tag{2}$$

Вычитая (2) из (1), получаем Г − В = 2, что и требовалось.

560. **Ответ.** Удачная расстановка единственна — все числа равны $+1$.

Первое решение. Докажем индукцией по n следующее утверждение: если в таблице из 2^n-1 столбцов и k строк ($k+1$ не делится на 3) расставлены числа ±1 так, что выполняется условие задачи, то все числа таблицы равны $+1$. При $n=1$ имеем один столбец высоты k. Пусть в нем стоят числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — по порядку сверху вниз. Тогда $a_1 = a_2$ (условие задачи для первой клетки), $a_2 = a_1a_3$, следовательно $a_3 = 1$, $1 = a_3 = a_2a_4$, следовательно $a_4 = a_2 = a_1$. И так далее. Получаем, что все числа, стоящие в клетках с номером, кратным трем, равны 1, а все остальные равны a_1. Поскольку $k+1$ не делится на 3, то возможны две ситуации:

1) $a_{k-1} = a_1$, $a_k = 1$;

2) $a_{k-1} = 1$, $a_k = a_1$.

Но a_k равен произведению своих соседей, т. е. $a_k = a_{k-1}$. Следовательно, $a_1 = 1$, и столбец состоит из одних единичек. Для доказательства индуктивного перехода введем следующие обозначения. Если A, B — две таблицы одинакового размера, то пусть $A \cdot B$ — таблица, в каждой клетке которой записано произведение чисел из тех же клеток таблиц A и B. $\overline{A}$ будет обозначать таблицу, полученную из A зеркальной симметрией: первый столбец меняется с последним, второй — с предпоследним и так далее. Нетрудно видеть, что если таблицы A и B удовлетворяют условию, то это же можно сказать о таблицах $A \cdot B$ и $\overline{A}$. Таблицу, в которой стоят только единицы, будем обозначать $\mathbf{1}$.

Докажем, что если в таблице размера $k \times (2^{n+1}-1)$ расставлены числа согласно условию, то расстановка симметрична: $A = \overline{A}$. Это равносильно тому, что $A \cdot \overline{A} = \mathbf{1}$. В таблице $A \cdot \overline{A}$ весь центральный столбец (с номером 2^n) состоит из единиц, так как центральные столбцы у A и $\overline{A}$ одинаковы. Следовательно, если мы рассмотрим отдельно часть таблицы $A\cdot\overline{A}$ слева от центрального столбца, то числа в этой меньшей таблице расставлены согласно условию. Размер ее — $k \times (2^n - 1)$, так что по предположению индукции, все числа в ней — единицы. То же касается и правой части $A\cdot\overline{A}$. Итак, $A\cdot\overline{A} = \mathbf{1}$. Это значит, что для любого числа из центрального столбца таблицы A числа слева и справа от него одинаковы, поэтому само оно равно произведению своих верхнего и нижнего соседей. Как мы доказали в базе индукции, из этого следует, что центральный столбец заполнен единицами. Теперь снова рассмотрим часть таблицы A слева от центрального столбца. Применяя предположение индукции, убеждаемся, что в ней стоят только единицы. Правая часть симметрична левой, поэтому и она состоит из единиц. Переход индукции доказан. Для всех таблиц размера $k \times (2^n-1)$ (где $k+1$ не делится на 3) единственность расстановки доказана. Если $k = 2^n - 1$, то $k + 1 = 2^n$, поэтому доказано и утверждение задачи.

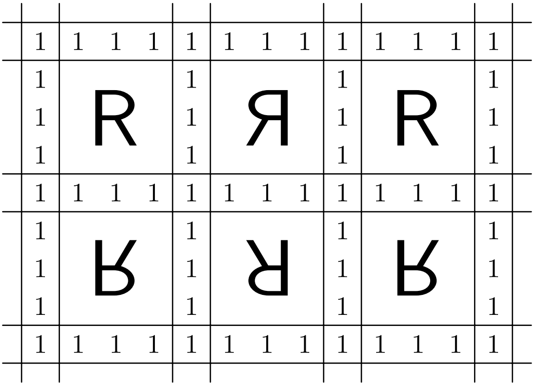


Рис. 261

Второе решение. Пусть R — удачная расстановка в таблице $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$. Расставим числа на клетчатой плоскости, как показано на рис. 261 (симметрия буквы R означает, что там стоит таблица R, отраженная соответствующим образом). Тогда расстановка на всей плоскости удовлетворяет нашим условиям (т. е. любое число есть произведение его четырех соседей) и, кроме того, она 2^{n+1}-периодична, т. е. при сдвиге на 2^{n+1} вверх или вправо она переходит в себя. Докажем индукцией по n, что любая 2^n-периодичная перестановка состоит из единиц.

		a_{13}		
	a_{22}	a_{23}	a_{24}	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
	a_{42}	a_{43}	a_{44}	
		a_{53}		

Рис. 262

База при $n = 0$ очевидна: $a = a^4$, где a — число в клетке. Пусть $n \geqslant 1$. Рассмотрим фрагмент таблицы, показанный на рис. 262. Имеем: $a_{23} = a_{13}a_{22}a_{24}a_{33}$, $a_{32} = a_{22}a_{31}a_{33}a_{42}$, $a_{34} = a_{24}a_{33}a_{35}a_{44}$, $a_{43} = a_{33}a_{42}a_{44}a_{53}$, откуда $a_{33} = a_{23}a_{32}a_{34}a_{43} = a_{13}a_{31}a_{35}a_{53}a_{22}^2a_{24}^2a_{42}^2a_{44}^2a_{33}^4 = a_{13}a_{31}a_{35}a_{53}$, т. е. то же соотношение верно для «разреженной» таблицы, состоящей из чисел, находящихся в пересечениях нечетных строк с нечетными столбцами. Эта таблица 2^{n-1}-периодична, поэтому по предположению индукции она состоит из единиц.

Абсолютно аналогично, остальные три «разреженных» подтаблицы состоят из единиц, что и требовалось.

11 класс

561. См. решение задачи 553.

562. ***Первое решение.*** Случай правильного $\triangle ABC$ очевиден. Пусть $AB \neq AC$ (см. рис. 263). Обозначим через O, I центры описанной и вписанной окружностей. Тогда $IA_1 \perp BC$; $OA_2 \perp BC$ так как O и A_2 лежат на серединном перпендикуляре к BC. Следовательно, $OA_2 \| IA_1$ и OA_2IA_1 — трапеция.

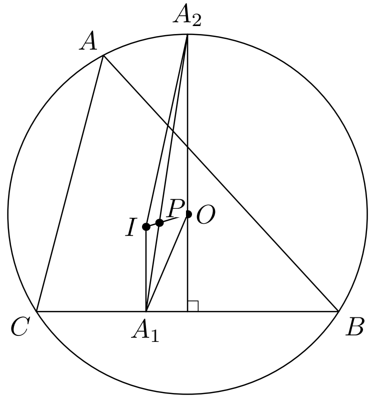


Рис. 263

Точка P пересечения диагоналей этой трапеции делит OI в отношении $OP : PI = OA_2 : IA_1 = R : r$, где R, r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей. Проведя аналогичные рассуждения для трапеций OB_2IB_1, OC_2IC_1 (если $\triangle ABC$ — равнобедренный, то одна из них вырождается в отрезок) получаем, что отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 делят OI в отношении $R : r$ и проходят через одну точку P.

Второе решение. Касательная l_A в точке A_2 к описанной окружности параллельна BC. Рассмотрев касательные l_B, l_C в точках B_2, C_2, аналогично получим: $l_B \| AC$, $l_C \| AB$. Поэтому треугольник ABC гомотетичен треугольнику, образованному прямыми l_A, l_B, l_C. При этой гомотетии A_1 переходит в A_2, B_1 — в B_2, C_1 — в C_2. Поэтому прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекутся в центре гомотетии.

563. Пусть ABC — один из треугольников семейства S. Его высоту примем за единицу. Так как треугольники из S попарно пересекаются, то они лежат в некоторой полосе ширины 2, параллельной стороне AB. Аналогично, взяв полосы, параллельные BC и CA, рассмотрим их пересечение — это будет шестиугольник H с углами по $120°$ и расстояниями между противоположными сторонами, равными 2. У такого шестиугольника длины сторон чередуются, обозначим их a и b (см. рис. 264).

Пусть вначале $a \leqslant b$, тогда все треугольники из S содержат центр фигуры H (см. рис. 264).

Если же $a > b$, то рассмотрим прямые l_X, l_Y, l_Z, параллельные сторонам шестиугольника и равноудаленные от них. В качестве искомых точек

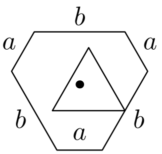


Рис. 264

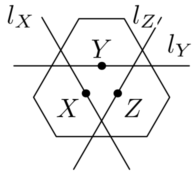


Рис. 265

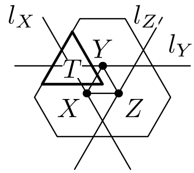


Рис. 266

X, Y и Z возьмем середины отрезков, высекаемых сторонами на этих прямых (см. рис. 265).

Покажем, что любой треугольник T, $T \in S$, содержит какую-то точку из множества $M = \{X, Y, Z\}$.

Заметим, что T пересекает любую из прямых l_X, l_Y и l_Z (см. рис. 265), так как иначе T лежит в полосе меньшей ширины, чем его высота. Предположим противное: T не содержит точек X, Y или Z, тогда без ограничения общности можно считать, что T пересекает l_X выше и левее X, а l_Y — левее Y (см. рис. 266). Так как $T \sim \triangle XYZ$, то легко видеть, что правая нижняя вершина T лежит в $\triangle XYZ$, а значит, T не пересекает l_Z — противоречие.

564. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, ребрами — авиалинии. По условию получится связный граф, степени вершин которого равны трем.

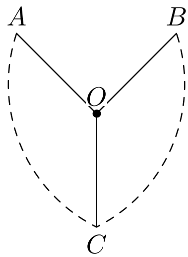


Рис. 267

Предположим, что в графе, степени вершин которого не превосходят трех, есть два пересекающихся (по вершине) цикла (см. рис. 267). Тогда рассмотрим вершину O, в которой они «разветвляются». Эта вершина, очевидно, имеет степень три. Удалим эту вершину и три выходящих из нее ребра OA, OB, OC. Нетрудно заметить, что граф сохранил связность, так как существует путь, соединяющий вершины A, B и C.

Рассмотрим полученный граф. Если в нем есть два пересекающихся цикла, то повторим операцию. И так далее. Очевидно, что никакие две удаленные вершины не соединены ребром в исходном графе, так как мы удаляли только вершины степени три, а после каждой операции степени вершин, соседних с удаленной, уменьшались, т. е. они не могут стать равными трем.

Предположим, что в связном графе n вершин и не менее чем $\frac{4}{3} \cdot n$ ребер. Докажем, что в таком графе обязательно есть два пересекающихся цикла. Предположим, что это не так. В силу связности графа, в нем можно выделить дерево с n вершинами. Будем «возвращать» в граф оставшиеся после выделения дерева ребра. Добавление каждого ребра увеличивает количество циклов по крайней мере на один. Однако, если какое-либо ребро добавит не менее двух циклов, они будут пересекающимися, что противоречит нашему предположению. С другой стороны, каждый цикл содержит не менее трех вершин, и никакая вершина не входит в два цикла. Кроме того, дерево с n вершинами содержит ровно $n-1$ ребро. Следовательно, ребер не более, чем $(n-1)+\frac{n}{3}<\frac{4n}{3}$. Противоречие.

Пусть $N=1998$ — количество вершин в исходном графе, тогда исходное количество ребер равно $\frac{3}{2}N$. За каждую операцию выкидывания вершины количество вершин уменьшается на одну, а количество ребер уменьшается на три. Предположим, что было сделано x операций. Тогда стало $N-x$ вершин и $\frac{3}{2}N-3x$ ребер. До тех пор, пока выполняется неравенство $\frac{3}{2}N-3x\geqslant\frac{4}{3}(N-x)$, вершины удалять можно. Решив это неравенство, получаем $x\leqslant\frac{N}{10}$, т. е. можно удалить $\left[\frac{1998}{10}\right]+1=200$ вершин.

Отсюда и следует утверждение задачи.

565. Ответ. $r_{1998}=1997{,}5$.

Пусть r_n — радиус n-й окружности, $S_n=r_1+r_2+\ldots+r_n$. Тогда уравнение $(n+1)$-й окружности имеет вид:
$$x^2+(y-(2S_n+r_{n+1}))^2=r_{n+1}^2.$$
Условие касания означает то, что уравнение $y+(y-(2S_n+r_{n+1}))^2=r_{n+1}^2$ имеет один корень, тогда его дискриминант $D=(2r_{n+1}-1)^2-8S_n=0$, т. е. $r_{n+1}=\frac{\sqrt{8S_n}+1}{2}$, так как $r_{n+1}>0$. Отсюда $r_2=\frac{3}{2}$, $r_3=\frac{5}{2}$. По индукции легко проверить, что $r_{n+1}=n+\frac{1}{2}$. Действительно, если $r_{n+1}=n+\frac{1}{2}$ при $n\leqslant k$, то
$$r_{k+1}=\frac{\sqrt{8\left(\frac{1}{2}+\ldots+\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)}+1}{2}=\sqrt{2\left(\frac{k(k+1)}{2}-\frac{k}{2}\right)}+\frac{1}{2}=$$
$$=k+\frac{1}{2}=(k+1)-\frac{1}{2}.$$

566. Ответ. Да.

Пусть набор $N=\{a_1,\ldots,a_n\}$ состоит из чисел, удовлетворяющих данному условию U. Тогда набор $N_1=\{b_1,\ldots,b_n,b_{n+1}\}$, где $b_1=a_1$, $\ldots$, $b_n=a_n$, $b_{n+1}=0$ также удовлетворяет U. Прибавим к каждому b_i число $c=(b_2-b_1)^2\cdot(b_3-b_1)^2\cdot\ldots\cdot(b_{n+1}-b_n)^2$. Получим набор N_2, состоящий из натуральных чисел и также удовлетворяющий U, так как $((b_i+c)-(b_j+c))^2=(b_i-b_j)^2$ и $(b_i+c)(b_j+c)=b_ib_j+c(b_j+b_j+c)$ — делится на $(b_i-b_j)^2$.

Поэтому, взяв в качестве исходного набор $N = \{1, 2\}$, последовательным применением указанной выше процедуры мы получим набор N_2, состоящий из трех, набор N_4 — из четырех, $\ldots$, N_{2n-4} — из n чисел.

567. Рассмотрим множества M центров сфер диаметра 1, лежащих в данном тетраэдре T. Так как M — множество точек, удаленных от всех граней T не менее, чем на $1/2$, то M — это тетраэдр с гранями, параллельными граням тетраэдра T, т. е. M и T гомотетичны. Центры вписанных сфер обоих тетраэдров совпадают, поэтому коэффициент k гомотетии равен $\frac{r-1/2}{r}$, где r — радиус сферы, вписанной в T.

С другой стороны, две сферы единичного диаметра не пересекаются, поэтому расстояние между их центрами не меньше 1, значит, длина одного из ребер тетраэдра M, содержащего эти центры, не меньше 1. Отсюда следует, что $k \geqslant \frac{1}{100}$ (длины ребер тетраэдра T не больше 100), т. е. $1 - \frac{1}{2r} \geqslant \frac{1}{100}$, откуда $2r \geqslant \frac{100}{99} > 1,01$. Итак, диаметр сферы, вписанной в T, больше 1,01, т. е. в качестве искомой можно выбрать сферу, вписанную в T.

568. Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ — все возможные расположения фигуры Φ в прямоугольнике. Утверждение задачи можно переформулировать так: можно взять фигуры Φ_i такой неотрицательной толщины d_i, $i = 1, \ldots, k$ (d_i рационально), что суммарная толщина всех фигур Φ_i над каждой клеткой прямоугольника будет равна 1.

Предположим, что это утверждение неверно. Покажем, что тогда существует такое заполнение клеток прямоугольника числами, при котором сумма всех чисел положительна, а сумма чисел в клетках, закрываемых фигурой при любом ее положении, неположительна.

Введем обозначения: индексом j, $j = 1, \ldots, m \cdot n$, будем нумеровать клетки прямоугольника, индексом i, $i = 1, \ldots, k$, — положения фигуры Φ на прямоугольнике.

Положим $P_{ij} = 1$, если j-я клетка закрыта фигурой Φ_i, $P_{ij} = 0$, если не закрыта. Тогда набору чисел $\{d_i\}$ соответствует заполнение клеток прямоугольника числами $\theta_j = 1 - \sum\limits_i d_i P_{ij}$, характеризующими уклонение покрытия прямоугольника фигурами от равномерного. По нашему предположению, все числа θ_j не могут быть равными нулю.

Выберем числа $d_j \geqslant 0$ так, чтобы величина $|\theta|$ уклонения была минимальна, где $|\theta|^2 = \sum\limits_j \theta_j^2$. Покажем, что получившиеся числа θ_j и образуют искомое заполнение клеток прямоугольника[1].

[1] Почему существует набор $\{d_i\}$, для которого $|\theta|$ — минимален?

После раскрытия скобок получаем

Заменим одно число d_i на $d_i' = d_i + x$, $x \geqslant -d_i$. Тогда $\theta_j' = \theta_j - xP_{ij}$, следовательно $|\theta'|^2 = \sum\limits_j \theta_j'^2 = \sum\limits_j \theta_j^2 - 2x\sum\limits_j \theta_j P_{ij} + x^2 \sum\limits_j P_{ij}^2$, т. е. $|\theta'|^2 = y(x) = ax^2 - 2b_i x + c$. Здесь $a = \sum\limits_j P_{ij}^2 = \sum\limits_j P_{ij} = N$, где N — число клеток в фигуре, $c = |\theta|^2$. Квадратный трехчлен $y = y(x)$, заданный на множестве $x \geqslant -d_i$, принимает наименьшее значение при $x = 0$ в случае $b_i = 0$, если $d_i > 0$, и в случае $b_i \leqslant 0$, если $d_i = 0$. Таким образом, предположив, что $|\theta|$ минимален на наборе $\{d_i\}$, мы получаем, что если $d_i > 0$, то $b_i = \sum\limits_j \theta_j P_{ij} = 0$, а если $d_i = 0$, то $b_i \leqslant 0$. Значит, сумма чисел, закрываемых фигурой Φ_i (это как раз $\sum\limits_j \theta_j P_{ij}$) — неположительна; с другой стороны, сумма всех чисел в прямоугольнике положительна, так как она равна $\sum\limits_j \theta_j$, а $\sum\limits_j \theta_j = \sum\limits_j \theta_j^2$. Действительно, $\sum\limits_j \theta_j^2 = \sum\limits_j \theta_j \left(1 - \sum\limits_i d_i P_{ij}\right) = \sum\limits_j \left(\theta_j - \sum\limits_i d_i(\theta_j P_{ij})\right) = \sum\limits_j \theta_j - \sum\limits_{i, d_i > 0} \sum\limits_j \theta_j P_{ij} = \sum\limits_j \theta_j$, так как при $d_i > 0$ $b_i = 0$.

1998–1999 г.

9 класс

569. **Ответ.** 9.

Заметим, что $9A = 10A - A$. При вычитании этих чисел столбиком ни в одном разряде, кроме младшего, не приходится занимать единицу из следующего разряда. Таким образом, сумма цифр разности равна разности суммы цифр чисел $10A$ и A (которые равны) плюс 9.

$$|\theta|^2 = \sum_j \left(1 - \sum_i d_i P_{ij}\right)^2 = \sum_i d_i^2 \sum_j P_{ij}^2 + \sum_{i,k} M_{ik} d_i d_k + m \cdot n - 2\sum_i d_i \sum_j P_{ij},$$

где $M_{ik} \geqslant 0$. Таким образом,

$$|\theta|^2 = N\sum_i (d_i - 1)^2 + \sum_{i,k} M_{ik} d_i d_k + m \cdot n - N,$$

где N — число клеток в фигуре. Отсюда следует, что, если $d_i > 2$ для некоторого i, то $|\theta|^2 \geqslant N\left((d_i - 1)^2 - 1\right) + m \cdot n > m \cdot n$, в то время как $|\theta|^2 = m \cdot n$, если все $d_i = 0$. Итак, функция $|\theta|^2$ — многочлен второй степени, заданный на множестве $0 \leqslant d_1, \ldots, d_{m \cdot n} \leqslant 2$, т. е. на $(m \cdot n)$-мерном кубе. Многочлен достигает своего наименьшего значения на кубе. Точка минимума имеет рациональные координаты, так как это многочлен второй степени и его коэффициенты — целые числа, т. е. координаты этой точки — решение линейной системы уравнений с целыми коэффициентами.

570. Рассмотрим некоторый путь, соединяющий некоторые два города, возможно включающий в себя некоторые закрытые после кризиса рейсы. Покажем, что в этом пути любой закрытый рейс можно заменить последовательностью незакрытых. Пронумеруем авиакомпании числами от 1 до N. В одной из авиакомпаний сохранились все рейсы: предположим, что в первой. Тогда в любой другой авиакомпании закрыли по одному рейсу. Рассмотрим только рейсы первой и второй авиакомпаний: из каждого города выходит по одному рейсу этих авиакомпаний. Следовательно, все города разбиваются на циклы. В одном из этих циклов закрыли один рейс. Очевидно, можно пролететь остальными рейсами этого цикла, следовательно, мы можем «обойти» любой закрытый рейс. Отметим, что мы при этом не используем рейсы других авиакомпаний, следовательно, аналогично можно обойтись без остальных закрытых рейсов.

571. Из точки I проведем касательную IK к окружности S_1 так, чтобы луч IK пересекал меньшую дугу A_0C (см. рис. 268). Аналогичным образом проведем касательную IL к окружности S_2.

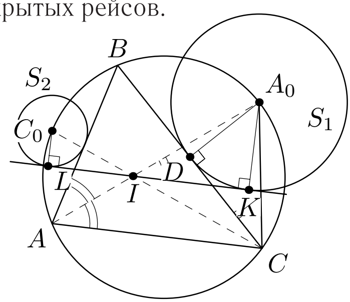


Рис. 268

Биссектриса AI угла BAC делит дугу BC на 2 равных дуги. Поэтому точки A, I, A_0 лежат на одной прямой. Аналогично, на одной прямой лежат точки C, I и C_0. Из равенств

$$\angle ICA_0 = \angle C_0CA_0 = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{C_0BA_0} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{C_0B} + \overset{\frown}{BA_0}\right),$$

$$\angle A_0IC = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC_0} + \overset{\frown}{A_0C}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{C_0B} + \overset{\frown}{BA_0}\right)$$

следует, что $\angle A_0IC = \angle ICA_0$ и $A_0I = A_0C$.

Далее, пусть D — середина отрезка BC, тогда S_1 касается BC в точке D.

В прямоугольных $\triangle A_0KI$ и $\triangle A_0DC$ катеты A_0K и A_0D равны и $A_0I = A_0C$ по доказанному выше. Следовательно, $\triangle A_0KI = \triangle A_0DC$. Отсюда $\angle A_0IK = \angle A_0CD = \angle A_0CB$. Но $\angle A_0CB = \angle A_0AB$ (теорема о вписанном угле) и $\angle A_0AB = \angle A_0AC$. Значит, $\angle A_0IK = \angle A_0AC$, следовательно прямая IK параллельна AC. Аналогично, $IL \| AC$, следовательно L, I, K лежат на одной прямой, параллельной AC.

572. **Ответ.** Можно.

Лемма. *Пусть дан набор простых чисел $p_1, \ldots, p_n$. Тогда можно за несколько перекрашиваний добиться того, что поменяют цвет* *те и только те числа, которые делятся на все простые числа набора.*

Доказательство. (формула включения–исключения). Для каждого непустого поднабора наших простых чисел перекрасим числа, не взаимно простые с произведением всех чисел этого поднабора. Число, делящееся на все числа набора, перекрашивалось при каждом таком перекрашивании, всего перекрашиваний было $2^n - 1$, следовательно, числа, делящиеся на все числа набора, перекрашены. Пусть некоторое число k не делится хотя бы на одно из чисел набора, например, на p_1. Тогда оно не перекрашивалось, когда мы перекрашивали числа, не взаимно простые с p_1. Остальные непустые поднаборы чисел можно разбить на пары следующим образом: поднабору, не содержащему p_1, в пару ставится поднабор, полученный из него добавлением p_1. При этом число k перекрашивается или при обоих перекрашиваниях пары, или ни при одном. Поэтому число k не будет перекрашено.

Лемма доказана.

Первое решение. Для каждого набора простых чисел, произведение которых не больше 1 000 000, перекрасим числа, делящиеся на все эти простые числа. По лемме такая операция возможна. Докажем, что любое число k при этом будет перекрашено. Пусть k имеет m различных простых делителей, тогда оно перекрашивалось при $2^m - 1$ операции, т. е. нечетное число раз.

Второе решение. Назовем два числа эквивалентными, если у них совпадают наборы простых делителей. Заметим, что при наших операциях классы эквивалентности перекрашиваются целиком. Будем говорить, что один класс больше другого, если все простые делители второго класса являются делителями первого. Из леммы следует, что мы можем перекрасить любой класс, перекрасив вместе с ним только большие классы.

Сначала перекрасим минимальные классы (класс называется *минимальным*, если он не больше никакого другого класса). Исключим их из рассмотрения. Среди оставшихся некоторые классы станут после такого исключения минимальными. При необходимости перекрасим их и тоже исключим. И так далее.

Поскольку классов конечное число, процесс закончится.

573. **Ответ.** $n(n+1)$.

Общее количество отрезков длины 1 равно $3 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$. Все отрезки, параллельные двум сторонам большого треугольника, не образуют треугольников, так как любой треугольник состоит из отрезков, параллельных всем трем сторонам. Следовательно, $\frac{2}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$ отрезков длины 1 отметить можно.

Докажем, что большее количество отрезков отметить нельзя.

Заштрихуем треугольники со стороной 1, как показано на рис. 269. Треугольники содержат все отрезки длины 1, причем каждый отрезок принадлежит ровно одному треугольнику. Для того чтобы не образовался ни один из заштрихованных треугольников, в каждом из них можно отметить не более двух отрезков. Значит, количество выделенных отрезков не превышает $\frac{2}{3}$ от их общего числа.

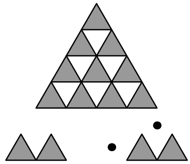


Рис. 269

574. При $n = 1$ неравенство обращается в равенство $0 = 0$. При $n > 1$ докажем, что сумма дробных частей на каждом промежутке между двумя последовательными квадратами удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=m^2}^{m^2+2m} \{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{2m+1}{2}. \qquad (1)$$

Из неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным получаем

$$\sqrt{m^2+a} + \sqrt{m^2+2m-a} \leqslant \sqrt{2(2m^2+2m)} < 2m+1 \text{ при } 0 \leqslant a \leqslant m.$$

Следовательно,

$$\left\{\sqrt{m^2+a}\right\} + \left\{\sqrt{m^2+2m-a}\right\} \leqslant 1. \qquad (2)$$

Просуммировав эти неравенства при $a = 0, 1, \ldots, m-1$ и неравенство $\left\{\sqrt{m^2+m}\right\} \leqslant \frac{1}{2}$ (получаемое делением на 2 обеих частей (2) при $a = m$), приходим к неравенству (1).

Суммируя неравенство (1) по всем m от 1 до $n-1$, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}.$$

Остается заметить, что $\left\{\sqrt{n^2}\right\} = 0$.

575. Заметим, что $\angle BCF = 180^\circ - \angle BEF = \angle AEF$, аналогично $\angle EAF = \angle FDC$, значит $\triangle AEF \sim \triangle DCF$. Пусть K и L — середины отрезков AE и CD соответственно. Тогда $\angle AKF = \angle FLB$ как углы между медианой и основанием в подобных треугольниках, поэтому точки B, K, F, L лежат на одной окружности. Но, так как серединные перпендикуляры к отрезкам AE и CD пересекаются в точке O, то точки K и L лежат на окружности с диаметром BO. Но тогда и точка F лежит на этой окружности, и $\angle BFO$ — прямой.

576. **Ответ.** Выигрывает Петя.

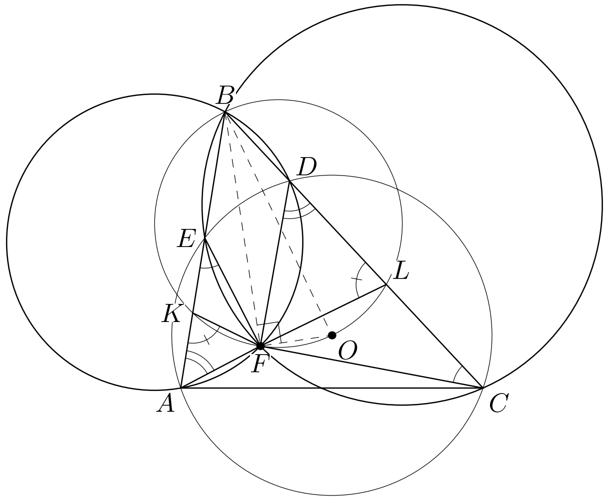


Рис. 270

Мысленно разобьем контакты на четыре одинаковых группы: A, B, C и D. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Петя будет отвечать на любой ход Васи так, чтобы для каждого номера k от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходило поровну проводов. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию проигрышная ситуация впервые случится после Васиного хода.

Опишем подробно Петину стратегию. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например, провод A_iA_j, то Петя перережет провода B_jB_j, C_iC_j и D_jD_j. Если Вася перерезает провод между проводами из разных групп и с разными номерами, например, провод A_iB_j, то Петя в ответ перережет провода A_jB_i, C_iD_j и C_jD_i. Если же Вася перерезал провод между контактами из разных групп с одинаковыми номерами, например, провод A_kB_k, то Петя перережет провод C_kD_k. Заметим, что из описанной стратегии Пети следует, что провода, которые он собирается резать, не будут отрезаны до его хода. Поэтому Петя всегда сможет разрезать требуемые провода.

Отметим, что каждый раз после хода Пети от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходит поровну проводов; при этом от одного из них столько же проводов отходило уже после Васиного хода. Поэтому ситуация, когда от одного контакта отрезан последний провод, случится впервые после Васиного хода. Так как количество проводов конечно, проиграет Вася.

10 класс

577. Пусть Винни и Пятачок вначале кладут свои орехи во вторую и третью банки, не смотря на ходы Кролика, до тех пор, пока в одной из банок не станет 1998 орехов. После этого тот, кто должен класть орехи в эту банку (пусть, например, это Винни) начинает класть их в I. При этом он уже положил во II банку не менее 999 орехов, значит, в III орехов тоже не менее 999 (туда их клал Пятачок). После этого Пятачок продолжает класть в III банку орехи, пока там не станет 1998 — это произойдет не более, чем через 500 ходов, так как в III банку также приходится класть орехи Кролику, чтобы не проиграть. После этого Пятачок также может класть орехи в I банку, так как там не более 500 орехов, положенных Винни, а Кролик вынужден будет положить орех во II или III, где их уже по 1998.

578. **Ответ.** $a_1 = a_2 = \ldots = 2$.

Пусть для каких-то двух членов последовательности a_k и a_{k+1} их НОД равен 1. Тогда $НОД(a_k, a_{k+1}) = НОД(a_k + a_{k+1}, a_{k+1}) = НОД(a_{k+2}, a_{k+1})$, т. е. для всех последующих членов последовательности НОД тоже будет равен 1. При этом, начиная с k-го члена, последовательность превращается в последовательность $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, которая неограниченно возрастает, что невозможно.

Тогда
$$a_{k+2} \leqslant \frac{a_{k+1} + a_k}{2} \leqslant \max\{a_{k+1}, a_k\}$$
и $\max\{a_{k+1}, a_k\}$ не возрастает. Следовательно, когда-то он стабилизируется: $\max\{a_{k+1}, a_k\} = \max\{a_{k+2}, a_{k+1}\} = \max\{a_{k+3}, a_{k+2}\} = d$. Если при этом $a_{k+1} \neq a_k$, то $a_{k+2} < d$, $a_{k+3} < d$, что невозможно. Поэтому $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = d$, откуда $d = 2$. Но тогда
$$\frac{a_{k-1} + 2}{НОД(a_{k-1}, 2)} = 2,$$
откуда $a_{k-1} = 2$, и последовательность состоит только из двоек.

579. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры малых окружностей (см. рис. 271). Так как $\angle KO_1M = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$, а $\angle KLM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$, то $\angle KO_1M + \angle KLM = 180^\circ$, и O_1 является серединой дуги KM вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Аналогично O_2 и O_3 лежат на этой окружности и являются серединами дуг KL и LM. Используя результат задачи 571, заключаем, что построенные касательные проходят через центр окружности, вписанной в треугольник KLM, что и требовалось доказать.

580. Будем различать два типа ходов — внутренние и внешние, в зависимости от того, куда ставится фишка, делающая ход: внутрь исходного квадрата $n \times n$ клеток, или вне его.

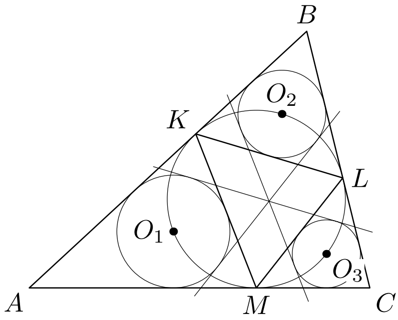


Рис. 271

Пусть получена позиция, где дальнейшие ходы невозможны, причем сделано k внутренних ходов и l внешних.

Ясно, что никакие две фишки не находятся в соседних клетках; поэтому в исходном квадрате $n \times n$ не менее чем $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ клеток пусты. Действительно, нетрудно понять, что квадрат разрезается на «доминошки» (в случае четной стороны) или «доминошки» и одну угловую клетку (в случае нечетной), а в каждой «доминошке» есть хотя бы одна пустая клетка. Так как каждый внутренний ход увеличивал количество пустых клеток не более, чем на 1, а каждый внешний — не более, чем на 2, то имеем неравенство

$$k + 2l \geqslant \left[\frac{n^2}{2}\right]. \qquad (1)$$

Предположив теперь, что n четно, разобьем исходный квадрат на $\frac{n^2}{4}$ четырехклеточных квадратиков и заметим, что на каждый квадратик пришлось не менее двух ходов, в которых участвовали (делали ход или снимались с доски) фишки, стоявшие в клетках этого квадратика. Поскольку в каждом внутреннем ходе участвовали фишки не более, чем двух квадратиков, а в каждом внешнем — не более, чем одного, то

$$2k + l \geqslant 2\,\frac{n^2}{4}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем $k + l \geqslant \frac{n^2}{3} \geqslant \left[\frac{n^2}{3}\right]$, т. е. утверждение задачи в этом случае верно.

Легко видеть, что оно верно также при $n = 1$ и при $n = 3$.

В случае $n = 2m + 1$, где $m > 1$, в «кресте», образованном третьей сверху горизонталью и третьей слева вертикалью, выделим $2m$ «доминошек», а остальную часть исходного квадрата разобьем на m^2 четырехклеточных квадратиков. В каждом внутреннем ходе участвовать могли фишки, принадлежащие не более чем двум из $m^2 + 2m$ рассматриваемых фигур, а в каждом внешнем — не более чем одной. Имеем неравенство

$$2k + l \geqslant 2m^2 + 2m, \qquad (3)$$

поскольку фишки каждого из квадратиков участвовали не менее, чем в двух ходах, а фишки каждой «доминошки» — по крайней мере в одном.

Из (1) и (3) следует, что $3(k+l) \geqslant 4m^2 + 4m = n^2 - 1$. Если здесь $n^2 \equiv 0 \pmod 3$, то, очевидно, $3(k+l) \geqslant n^2$ и $k + l \geqslant \frac{n^2}{3} = \left[\frac{n^2}{3}\right]$, в противном случае $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ и $k + l \geqslant \frac{n^2-1}{3} = \left[\frac{n^2}{3}\right]$. Тем самым утверждение задачи полностью доказано.

Замечание. Можно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n количество ходов будет больше, чем $n^2\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$. Один из методов доказательства заключается в следующем.

Предположим противное. Рассмотрим «каемку» нашего квадрата ширины 2, «каемку» квадрата, получающегося выкидыванием первой, и т. д., всего $k = [n\varepsilon/8]$ каемок. Заметим, что внутри последней каемки содержится хотя бы $n^2(1 - \varepsilon/2)^2 > n^2(1 - \varepsilon/4)$ клеток. Тогда за максимум $n^2\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ ходов из нашего квадрата ушло хотя бы $\left[\frac{n^2}{2}\right] \geqslant \frac{1}{2}\, n^2(1 - \varepsilon)$ фишек; значит, было хотя бы $\frac{1}{2}\,\varepsilon n^2$ ходов, на которых количество фишек в нем уменьшалось на 2; эти ходы вели из первой каемки вовне, и не затрагивали квадрата внутри первой каемки.

Тогда за не более чем $n^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\varepsilon\right)$ ходов из следующего по величине квадрата ушло хотя бы $\frac{1}{2}\,n^2(1-\varepsilon)$ фишек; значит, было хотя бы εn^2 ходов, на которых количество фишек в нем уменьшалось на 2; эти ходы вели из второй каемки вовне. Аналогично, из третьей каемки вовне вело хотя бы $2\varepsilon n^2$ ходов, ..., из k-й каемки — $2^{k-2}\varepsilon n^2$ ходов. Однако при больших n $2^{k-2}\varepsilon n^2 = 2^{[n\varepsilon/8]-2}\varepsilon n^2 > n^2$, т. е. ходов гораздо больше, чем предполагалось. Противоречие.

581. Заметим, что $44n$ есть сумма 4 экземпляров числа n и 4 экземпляров числа $10n$. Если складывать эти числа поразрядно, то в каждом разряде окажется сумма учетверенной цифры из этого же разряда числа n и учетверенной цифры из следующего разряда. Если при этом не происходит никаких переносов, то каждая цифра числа n складывается 8 раз, и сумма цифр во всех разрядах оказывается равной 800. При переносах же сумма цифр, очевидно, уменьшается (так как из одного разряда вычитается 10, а к другому прибавляется только 1). Поэтому в ситуации условия задачи переносов не происходит. Это означает, в частности, что любая цифра числа n не превосходит 2. Тогда при умножении n на 3 просто умножается на 3 каждая его цифра, а, значит, и сумма цифр. Поэтому сумма цифр числа $3n$ равна 300.

582. Задача является частным случаем задачи 575, когда точки E и D совпадают с точкой B (точка K в данной задаче — это точка F задачи 575).

583. Вначале докажем, что

$$x + y^2 \geqslant x^2 + y^3. \qquad (1)$$

Допустим противное: $x + y^2 < x^2 + y^3$, тогда, складывая это неравенство с неравенством $x^3+y^4 \leqslant x^2+y^3$, получим $(x+x^3)+(y^2+y^4) < 2x^2+2y^3$, что противоречит неравенствам

$$x + x^3 \geqslant 2x^2 \quad \text{и} \quad y^2 + y^4 \geqslant 2y^3.$$

Из (1) получаем

$x+y^2 \geqslant x^2+y^3 \geqslant x^3+y^4$, откуда $2x+2y^2 \geqslant x^2+y^3+x^3+y^4$. Замечая, что $(1+x^2)+(1+y^4) \geqslant 2x+2y^2 \geqslant x^2+y^3+x^3+y^4$, получаем неравенство $2+x^2+y^4 \geqslant x^2+y^3+x^3+y^4$, равносильное требуемому.

584. Возьмем граф на 12 вершинах, которые соответствуют людям, две его вершины соединены, если люди незнакомы.

Если в этом графе нет циклов нечетной длины, то его вершины можно разбить на две части, в каждой из которых вершины не будут соединены (см., например, лемму к задаче 224 окружного тура), и поэтому найдутся 6 попарно знакомых.

Предположим теперь, что в графе есть циклы нечетной длины. Рассмотрим нечетный цикл минимальной длины. Пусть его длина равна:

а) 3. Тогда, если среди 9 человек, не входящих в этот цикл, есть два незнакомых, то среди оставшихся 7 человек из каждых 4 найдутся три знакомых. Таким образом, в подграфе на 7 вершинах каждые два ребра имеют общую вершину. Любое третье ребро обязано проходить через эту вершину, иначе среди 4 человек не найдутся трех знакомых. Поэтому все ребра имеют общую вершину, и, удаляя эту вершину, мы получаем 6 попарно знакомых.

б) 5. Тогда, как и выше, среди оставшихся 7 из каждых 4 найдутся 3 знакомых, и среди этих 7 найдутся 6 знакомых.

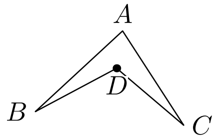


Рис. 272

в) 7. Тогда среди 5 человек, не входящих в этот цикл, все попарно знакомы. Если есть человек из цикла, знакомый со всеми этими 5, то все доказано. В противном случае, каждый из цикла не знаком с кем-то из оставшихся. Так как $7 > 5$, то найдется человек A из оставшихся, не знакомый с двумя из цикла B, C. Из того, что мы взяли нечетный цикл минимальной длины, следует, что эти два незнакомых из цикла должны быть «незнакомы через одного D» (см. рис. 272). Но тогда D знаком со всеми из пяти оставшихся, потому что удаляя из цикла D и заменяя на A, мы получаем снова цикл длины 7, а в дополнении к циклу длины 7 все попарно знакомы.

г) Цикла длины 9 не может быть по условию задачи.

д) Цикл длины 11. Тогда, как и выше при рассмотрении циклов длины 7, мы видим, что оставшийся человек может быть не знаком максимум с двумя из цикла. Но тогда в цикле легко найти 5 человек, знакомых между собой и с оставшимся. (Например, взяв идущих через одного по циклу и знакомых с оставшимся.)

11 класс

585. **Ответ.** Нет.

Предположим, что такие 19 чисел существуют и сумма цифр каждого из чисел равна $S = 9k + n$, $n \in \{0, 1, \ldots, 8\}$. Тогда все эти числа имеют остаток n при делении на 9, и имеет место сравнение $19n = 18n+n \equiv 1999 \pmod 9$, откуда $n \equiv 1 \pmod 9$, т.е $n = 1$.

1) Пусть $k = 0$, т.е $S = 1$. Рассмотрим 5 наименьших натуральных чисел с суммой цифр, равной 1. Это числа 1, 10, 100, 1000 и 10000. Но даже их сумма больше 1999.

2) Пусть $k = 1$, т. е. $S = 10$. Рассмотрим 19 наименьших натуральных чисел чисел с суммой цифр, равной 10. Это числа 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, 172, 181, 190. Их сумма равна $1990 < 1999$. Следующее натуральное число с суммой цифр, равной 10, есть 208, что по крайней мере на 18 больше любого из первых 19 чисел, и значит, сумма будет не менее $1990 + 18 = 2008 > 1999$.

3) Пусть $k \geqslant 2$, т. е. $S \geqslant 19$. Но наименьшее число с суммой цифр не меньше 19 есть 199, а сумма любых 19 таких чисел будет заведомо больше 1999.

Таким образом, мы получили, что 19 чисел, удовлетворяющих условию, не существует.

586. Предположим противное, т. е. существует такая расстановка целых чисел, что для любого отрезка AB с серединой C выполняется неравенство $c < \frac{a+b}{2}$, где a, b, c — соответственно числа, стоящие в точках A, B и C. Пусть A, B, C, A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$, — соответственно точки -1, 1, 0, $-\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^n}$ числовой прямой, a, b, c, a_n, b_n — целые числа, записанные в этих точках. Тогда, по предположению, $c < \frac{a+b}{2}$, $a_1 < \frac{a+c}{2}$, $a_2 < \frac{a_1+c}{2}$, и т. д. Отсюда следует, что $\max\{a, c\} > a_1$, так как $a_1 < \frac{a+c}{2} \leqslant \frac{\max\{a,c\} + \max\{a,c\}}{2} = \max\{a, c\}$. Аналогично, $\max\{a_1, c\} > a_2$, $\max\{a_2, c\} > a_3, \ldots$, и $\max\{b, c\} > b_1$, $\max\{b_1, c\} > b_2, \ldots$. Таким образом, если $a_m > c$, то $c < a_m \leqslant a_{m-1} - 1 \leqslant \ldots \leqslant a - m$, что при $m \geqslant a - c$ невозможно; поэтому при $m \geqslant \max\{1, a - c, b - c\}$ получаем $a_m \leqslant c$, $b_m \leqslant c$, откуда $a_m + b_m \leqslant 2c$, что противоречит нашему предположению.

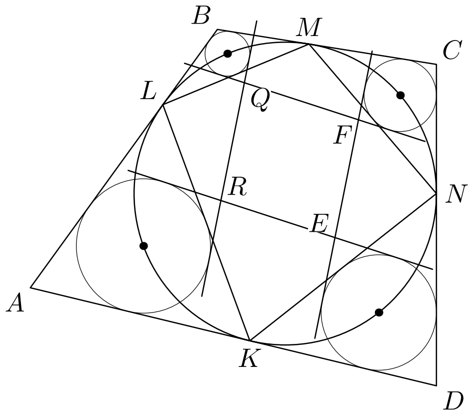


Рис. 273

587. Введем обозначения (см. рис. 273). Как было показано в решении задачи 571, $RQ \| KM \| EF$, $RE \| LN \| QF$. Значит, образовавшийся четырехугольник — параллелограмм. Используя то, что касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны и $AB + CD = AD + BC$, получаем $RQ + EF = RE + QF$, так как $(RQ + EF) - (RE + QF) = (a_{12} + a_{34}) - (a_{23} + a_{41})$, где a_{ij} — длина общей внешней касательной к окружностям S_i и S_j.

Значит, $RQFE$ — ромб.

588. См. решение задачи 580.

589. Набор натуральных чисел, удовлетворяющий условию задачи, условимся называть *хорошим*.

Пусть существует *хороший* набор. Ясно, что если (a, b, c, d) — *хороший* набор, то и $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \frac{d}{k}\right)$ — тоже *хороший* набор, где $k = \text{НОД}(a, b, c, d)$. Поэтому в дальнейшем считаем, что

$$\text{НОД}(a, b, c, d) = 1. \qquad (1)$$

Пусть одно из данных чисел, например a, имеет нечетный простой делитель p. Тогда суммы $b + c$, $c + d$, $b + d$ и, следовательно, сами числа b, c и d делятся на p (ибо, например, $2d = (b+d)+(c+d)-(b+c)$), что противоречит условию (1). Значит, числа a, b, c, d — степени двойки. Упорядочив данные числа в порядке возрастания, получим $a = 2^m$, $b = 2^n$, $c = 2^r$, $d = 2^s$, где $0 = m \leqslant n \leqslant r \leqslant s$, $r \geqslant 1$ (иначе $m = n = r = 0$, значит, $a = b = c$).

Тогда число $(a + c)^2 = (1 + 2^r)^2$ — нечетно и не может делиться на четное число bd. Противоречие.

590. Пусть каждый из многоугольников A, B, C можно отделить от двух других. Докажем, что их нельзя пересечь одной прямой. Предположим противное: X, Y, Z — соответственно точки многоугольников A, B, C, лежащие на одной прямой. Тогда одна из точек, например Y, лежит на прямой между X и Z. Следовательно, B нельзя отделить от A и C, так как в противном случае точку Y, лежащую между двумя другими X и Z, нужно отделить от этих точек одной прямой, что невозможно.

В обратную сторону утверждение можно доказать двумя способами. Пусть многоугольники нельзя пересечь одной прямой.

1) Рассмотрим треугольники с вершинами $X \in A$, $Y \in B$, $Z \in C$. Пусть из всех таких треугольников наименьшую высоту из вершины Y имеет треугольник $X_0Y_0Z_0$ (кстати, почему треугольник с наименьшей высотой существует?). Тогда прямая, перпендикулярная высоте и проходящая через середину высоты, не пересекает многоугольники B, A и C, так как, в противном случае, существовал бы треугольник с меньшей высотой, выходящей из Y_0.

2) Рассмотрим две внешние касательные к многоугольникам A и C. Тогда они не могут пересекать B. Если мы сдвинем немного ту, которая лежит ближе к B, в направлении к многоугольнику B, то получим прямую, отделяющую B от A и C.

591. Проведем плоскость, параллельную касательной плоскости, пересекающую ребра AB, AC и AD в точках B_1, C_1 и D_1 соответственно. В плоскости ABC получим конфигурацию, изображенную на рис. 274. Заметим, что $\angle ABC = \angle CAM$ (по теореме об угле между касательной и хордой), а $\angle CAM = \angle AC_1B_1$ (как накрест лежащие при параллельных и секущей), т. е. $\angle ABC = \angle AC_1B_1$. Следовательно, $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ACB$. Откуда

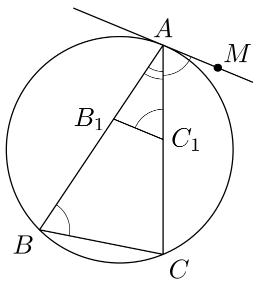


Рис. 274

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{AC_1}{AB}\,.$$

Аналогично,

$$\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AC_1}{AD} = \frac{AD_1}{AC}$$

$$\text{и}\quad \frac{B_1D_1}{BD} = \frac{AD_1}{AB} = \frac{AB_1}{AD}\,.$$

Из этих равенств вытекает, что

$$\frac{C_1D_1}{AB\cdot CD} = \frac{AD_1}{AB\cdot AC} = \frac{B_1D_1}{AC\cdot BD} = \frac{AB_1}{AD\cdot AC} = \frac{B_1C_1}{AD\cdot BC}$$

Значит, $\triangle A_1B_1C_1$ равносторонний тогда и только тогда, когда $AB\cdot CD = AC\cdot BD = AD\cdot BC$.

Осталось заметить, что углы, образуемые указанными в условии линиями пересечения, соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$.

592. **Ответ.** Выигрывает Петя.

Разобьем контакты на четыре одинаковых группы A, B, C и D. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Мысленно покрасим в черный цвет провода между контактами с *разными* номерами, и в белый цвет — между контактами с одинаковыми номерами.

Петя будет отвечать на любой ход Васи так, чтобы для каждого номера k от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходило поровну черных проводов, и если у одного из контактов больше нет белых проводов, то их не было бы и у других контактов с таким же номером. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию проигрышная ситуация впервые случится после Васиного хода.

Опишем подробно Петину стратегию. Сначала рассмотрим случай, когда Вася режет черный провод. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например, провод A_iA_j, то Петя перережет провода B_iB_j, C_iC_j и D_iD_j. Если Вася перерезает провод между проводами из разных групп и с разными номерами, например, провод A_iB_j, то Петя в ответ перережет провода A_jB_i, C_iD_j и C_jD_i. Такие ходы Петя может сделать, так как из возможности отрезать *один* провод от некоторого контакта следует возможность отрезать по одному проводу от вершин с таким же номером.

Остается рассмотреть случай, когда Вася перерезал белый провод, т. е., провод между контактами из разных групп, но с одинаковыми номерами. Рассмотрим четыре контакта A_k, B_k, C_k и D_k. Первоначально любые два из них соединены белым проводом. После того, как Вася перерезал первый из этих проводов, например, провод A_kB_k, Петя перережет два провода так, чтобы между этих контактов осталось три провода, имеющие один общий конец (например, Петя может перерезать провода B_kC_k и C_kA_k, после чего останутся провода A_kD_k, B_kD_k и C_kD_k, что подтверждает возможность такого хода). Если же Вася когда-нибудь перережет один из этих трех проводов, то от одного из контактов A_k, B_k или C_k он отрежет последний провод к контактам с этим же номером k, следовательно, от этого контакта будет отходить еще какой-то черный провод. Значит, и от трех других контактов с номером k будут отходить черные провода, следовательно, Петя может перерезать два оставшихся белых провода между контактами с номером k, что он и сделает.

Отметим, что каждый раз после хода Пети описанное выше условие выполняется. Следовательно, Петя всегда сможет сделать ход, и, так как количество проводов конечно, проиграет Вася.

1999–2000 г.

9 класс

593. Ответ. $a+b+c=-3$.

Если $x_1^2+ax_1+1=0$ и $x_1^2+bx_1+c=0$, то $(a-b)x_1+(1-c)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=\dfrac{c-1}{a-b}$.

Аналогично, из равенств $x_2^2+x_2+a=0$ и $x_2^2+cx_2+b=0$ следует $x_2=\dfrac{a-b}{c-1}$ (очевидно, $c\neq 1$), т. е. $x_2=\dfrac{1}{x_1}$.

С другой стороны, по теореме Виета $\dfrac{1}{x_1}$ — корень первого уравнения. Значит, x_2 — общий корень уравнений $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=$ $=0$, откуда $(a-1)(x_2-1)=0$. Но при $a=1$ эти уравнения не имеют действительных корней. Значит, $x_2=1$, тогда $x_1=1 \Rightarrow a=-2$, $b+c=$ $=-1$.

594. Узнав наибольший общий делитель чисел $X+1$ и 2, Саша определит четность X. Если X оказалось четным, то второй вопрос будет о наибольшем общем делителе $X+2$ и 4, а если нечетным, то о наибольшем общем делителе $X+1$ и 4. Таким образом, Саша узнает остаток от деления X на 4. Вообще, пусть, задав k вопросов ($k\leqslant 5$), Саша определил остаток r_k от деления X на 2^k. Тогда $(k+1)$-м вопросом он узнает наибольший общий делитель $X+2^k-r_k$ и 2^{k+1} (заметим, что $0<2^k-$ $-r_k<2^{k+1}\leqslant 64<100$). Если $(X+2^k-r_k, 2^{k+1})=2^{k+1}$, то остаток от деления X на 2^{k+1} равен 2^k+r_k, а если $(X+2^k-r_k, 2^{k+1})=2^k$, то этот остаток равен r_k.

Итак, задав 6 вопросов, Саша узнает остаток от деления X на 64. Ясно, что чисел с таким остатком при делении на 64 в пределах первой сотни не более 2. Если их все же 2 — скажем, a и $a+64$, то Петя может задать вопрос «Чему равен наибольший общий делитель $X+3-r$ и 3?», где r — остаток от деления a на 3. Ясно, что если $X=a$, то ответ — 3, а если $X=a+64$, то 1. Итак, седьмым вопросом число X определится однозначно.

Замечание. Можно заметить, что первые шесть вопросов Саша употребил на отыскание последних шести цифр двоичной записи числа X.

595. Пусть M' и N' — точки пересечения серединных перпендикуляров к BC и AB с прямыми AB и BC соответственно. Тогда $\angle ABC=$ $=\angle N'AB=\angle M'CB$, поэтому точки A, M', C, N' лежат на одной окружности. Далее, $\angle AM'C = \angle ABC + \angle M'CA = 2\angle ABC = \angle AOC$, так что O лежит на той же окружности, а тогда эта окружность и есть ω_1, и $M = M'$, $N = N'$. Теперь, поскольку дуга $\overset{\frown}{MN}$ этой окружности равна $2\angle ABC$, то симметричная ей относительно MN окружность (с центром L) описана около $\triangle BMN$.

Тогда $\angle LBN = \frac{\pi}{2} - \angle BMN = \frac{\pi}{2} - \angle BCA$, что и требовалось.

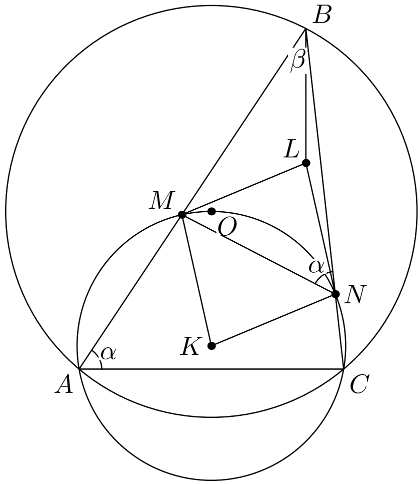


Рис. 275

596. Предположим, что существует граф, степени всех вершин которого более двух, но длина любого цикла в этом графе делится на 3. Рассмотрим такой граф G с наименьшим числом вершин. Очевидно, в этом графе существует цикл Z, пусть этот цикл последовательно проходит по вершинам $A_1, A_2, \ldots, A_{3k}$. Пусть существует путь S, соединяющий вершины A_m и A_n и не проходящий по ребрам цикла Z. Рассмотрим циклы Z_1 и Z_2, состоящие из пути S и двух «половинок» цикла Z. Поскольку длины обоих этих циклов делятся на 3, нетрудно заметить, что длина пути S делится на 3. В частности, из доказанного утверждения следует, что никакая вершина X, не входящая в цикл Z, не может быть соединена ребрами с двумя разными вершинами цикла Z. Кроме того, ребра, выходящие из вершин цикла Z, отличные от ребер этого цикла, все различны.

Объединим все вершины A_1, A_2, ..., A_{3k} цикла Z в одну вершину A, которую соединим ребрами со всеми вершинами, которые были соединены с вершинами цикла Z. Очевидно, в полученном графе G_1 меньше вершин, чем в графе G, и степень каждой вершины по-прежнему более двух. Из доказанного выше следует, что длина любого цикла в графе G_1 делится на 3. Мы получили противоречие: ведь в выбранном ранее графе G было минимальное количество вершин среди всех таких графов.

Таким образом, в любом графе, степени всех вершин которого более двух, существует цикл, длина которого не делится на 3. Остается лишь применить это утверждение для графа, вершины которого соответствуют городам, а ребра — дорогам.

597. Докажем по индукции, что при $n = 5m$ все числа от 1 до n выписаны на доску, $a_{5m} = 5m - 2$ и при всех $k \leqslant 5m$ выполняется равенство $a_{k+5} = a_k + 5$. База: $1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 3 \to 6$. Индуктивный шаг: так как при $n = 5m$ все числа от 1 до $5m$ уже выписаны и $a_{5m} = 5m - 2$, то следующие пять чисел выглядят так: $a_{5m+1} = 5m + 1$, $a_{5m+2} = 5m + 4$, $a_{5m+3} = 5m + 2$, $a_{5m+4} = 5m + 5$, $a_{5m+5} = 5m + 3$. Шаг индукции доказан.

Таким образом, числа, дающие при делении на 5 остатки 4, 1 и 0, появляются на доске после увеличения предыдущего числа на 3. Но только такие остатки и могут давать при делении на 5 квадраты натуральных чисел.

598. Заметим, что в конце никакие две разноцветные фишки не стоят ни в одной строке, ни в одном столбце. Действительно, если исходно черная фишка стояла в одном столбце с белой, то ее сняли в первый раз, а если после первого снятия белая фишка стоит в одной строке с черной, то ее сняли во второй раз.

Пусть в конце черные фишки стоят в a строках и b столбцах, тогда белые могут стоять не более, чем в $2n-a$ строках и $2n-b$ столбцах. Но тогда черных фишек не более ab, а белых не более $(2n-a)(2n-b)$. Поскольку

$$ab(2n-a)(2n-b) = a(2n-a)b(2n-b) \leqslant n^2 \cdot n^2 = n^4,$$

то либо черных, либо белых фишек осталось не более n^2.

599. Пусть окружность S_1 вторично пересекает CD в точке F. Будем считать для определенности, что E лежит между D и F (возможно, $F = E$). Из равенства $DA^2 = DF \cdot DE$ следует $DB^2 = DF \cdot DE$, а, значит, и окружность S_2 проходит через точку F (см. рис. 276). Теперь, поскольку $CA \cdot CM = CE \cdot CF = CB \cdot CN$, получаем $\dfrac{CM}{CN} = \dfrac{CB}{CA}$, откуда $\triangle CMN \sim \triangle CBA$, $\angle CMN = \angle CBA$, $\angle CNM = \angle CAB$. Проведем касательную к S_1 в точке M и отметим на ней две точки P и Q так, чтобы P оказалось по одну сторону с B от прямой AC, а Q — по другую. Очевидно, $\angle PMA = \angle BAM$. Но тогда $\angle QMC = \angle PMA = \angle CAB = \angle CNM$, а это означает, что окружность, проходящая через C и M и касающаяся S_1, проходит и через

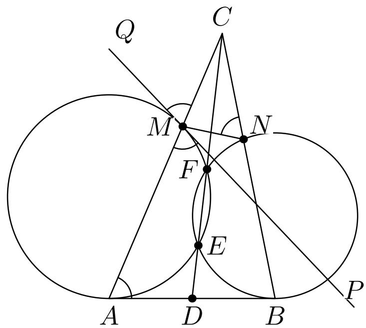


Рис. 276

N. Аналогично показывается, что окружность, проходящая через C и N и касающаяся S_2, проходит и через M.

600. Положим для удобства изложения $a_{n+100} = a_n$ при $n = 1, 2, \ldots, 100$. Заметим, что при описанной процедуре числа остаются взаимно простыми в совокупности.

Лемма. *Пусть a_1, a_2, ..., a_n и d — натуральные числа. Тогда существует натуральное число k такое, что* НОД$(a_1 + kd, a_i) \leqslant d$ *для любого i =2, 3, ..., n.*

Доказательство. Существует некоторое число, кратное $a_2a_3\ldots a_n$, — скажем, $la_2a_3\ldots a_n$, которое больше a_1. Тогда среди тех k, для которых $a_1 + kd > la_2a_3\ldots a_n$, существует наименьшее число k_0. Положим $a_1' = a_1 + k_0d$. Тогда $0 < a_1' - la_2a_3\ldots a_n \leqslant d$, и наибольший общий делитель a_1' и каждого из a_i не превосходит d. Лемма доказана.

Пусть теперь $M > 1$ — наибольший из попарных общих делителей чисел a_i. Докажем, что с помощью операций, описанных в условии, мы сможем заменить исходный набор чисел на набор, в котором все попарные общие делители меньше M. Действительно, так как числа a_1, a_2, ..., a_{100} взаимно просты в совокупности, найдутся два соседних числа a_i и a_{i+1}, первое из которых делится на M, а второе — нет. Тогда $d =$ НОД$(a_{i-1}, a_{i+1}) < M$. Применяя лемму, прибавим к a_i такое кратное d, чтобы наибольшие общие делители a_i' с каждым из остальных чисел стали не больше d. В полученном наборе по-прежнему все попарные наибольшие делители не превосходят M, а чисел, кратных M, меньше, чем в исходном. Повторяя при необходимости эту операцию, мы добьемся, что останется ровно одно число, кратное M, и тогда, очевидно, все попарные наибольшие общие делители станут меньше M.

Итак, если наибольший из попарных общих делителей чисел набора больше 1, его можно уменьшить. Поэтому его можно уменьшить до 1, что и требовалось.

10 класс

601. Ответ. $\frac{2^{1001}-2}{3} - 500$.

Уберем первое слагаемое — оно равно 0 — и вместо суммы остальных 1000 слагаемых рассмотрим сумму

$$\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^{1000}}{3}.$$

Это — сумма геометрической прогрессии, и она равна $\frac{2^{1001}-2}{3}$. Теперь заменим все ее слагаемые целыми частями. Заметим, что ни одно из этих слагаемых не является целым, а сумма любых двух последовательных слагаемых — целое число (потому что $\frac{2^k}{3} + \frac{2^{k+1}}{3} = \frac{3\cdot 2^k}{3} = 2^k$). Ясно, что если сумма двух нецелых чисел — целое число, то сумма их целых частей меньше суммы самих чисел на 1 ($[\alpha+\beta] = [[\alpha]+\{\alpha\}+[\beta]+\{\beta\}] = [\alpha] + [\beta] + [\{\alpha\}+\{\beta\}] = [\alpha]+[\beta]+[1] = [\alpha]+[\beta]+1$).

Поэтому при замене каждых двух последовательных членов нашей геометрической прогрессии целыми частями сумма уменьшается на 1, а так как в сумме всего 1000 слагаемых, то при замене целыми частями их всех она уменьшится на 500.

602. Пусть $t_i = x_i^{13} - x_i$. При $-1 < x_i \leqslant 0$ имеем $t_i \geqslant 0$; если же $0 < x_i < 1$, то $t_i < 0$. Неравенство, которое нужно доказать, перепишем в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i y_i < 0$. Без ограничения общности можно считать, что $y_1 > 0$ (поскольку $\sum(y_i+c)t_i = \sum y_i t_i + c\sum t_i = \sum y_i t_i$).

Пусть число kтаково, что $x_k \leqslant 0$, $x_{k+1} > 0$. Тогда $t_1, \ldots, t_k \geqslant 0$, $t_{k+1}, \ldots, t_n < 0$. Оценим сумму $\sum t_i y_i$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i y_i = \sum_{i=1}^{k} t_i y_i + \sum_{j=k+1}^{n} t_j y_j \leqslant$$
$$\leqslant y_k \sum_{i=1}^{k} t_i + y_{k+1} \sum_{j=k+1}^{n} t_j < y_{k+1} \sum_{i=1}^{n} t_i = 0.$$

Неравенство доказано.

603. Пусть H — ортоцентр $\triangle ABC$, а M — середина стороны AC. Выберем на отрезках AH и CH точки S и T такие, что $PS \perp AB$ и $TQ \perp BC$ (см. рис. 277). Обозначим через K точку пересечения перпендикуляров PS и QT. Поскольку $\angle BPK = \angle BQK = 90^\circ$, то четырехугольник $BPKQ$ вписанный. Покажем, что точки K и R совпадают.

Треугольник PBQ равнобедренный ($BP = BQ$), ибо $\angle HPB = \angle HQB$. Поэтому точка K лежит на биссектрисе угла B. Докажем, что она также лежит и на прямой HM. Действительно, пары (P, Q) и (S, T) — пары соответственных точек в подобных треугольниках AC_1H и CA_1H, поэтому

$$\frac{HS}{HT} = \frac{HA}{HC},$$

откуда $ST \parallel AC$. Поэтому середина отрезка ST лежит на прямой HM. Поскольку $HSKT$ — параллелограмм, то точка K лежит на прямой HM. Отсюда точка K является

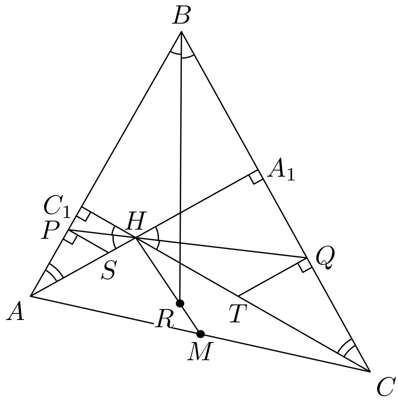


Рис. 277

точкой пересечения прямой HM с биссектрисой угла B. Таким образом точки K и R совпадают.

604. **Ответ.** Нельзя.

Пусть у нас есть гири A, B, C, D, E. Всего имеется $5! = 120$ различных способов упорядочивания весов этих гирь. А при условии $m(A) < m(B) < m(C)$ существует $\frac{5!}{3!} = 20$ различных способов упорядочивания весов. Поэтому если на какой-то вопрос получен отрицательный ответ, то этот вопрос может исключить не более 20 вариантов. Следовательно, первые пять вопросов могут исключить не более $20 \cdot 5 = 100$ вариантов. Каждый из следующих четырех вопросов может исключить (при одном из двух возможных вариантов ответа) не более половины из оставшихся вариантов. То есть после 6-го вопроса может остаться не менее 10 вариантов, после 7-го — не менее 5 вариантов, после 8-го — не менее 3, и, наконец, после 9-го вопроса может остаться по крайней мере 2 варианта. Таким образом, мы показали, что при любой последовательности из девяти задаваемых вопросов найдется последовательность ответов, которой удовлетворяют по крайней мере два варианта упорядочивания весов гирь.

605. **Ответ.** 7.

Пример множества из 7 элементов: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Докажем, что при $m \geqslant 8$ множество из m чисел $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ требуемым свойством не обладает. Не ограничивая общности можно считать, что $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_m$ и $a_4 > 0$ (ясно, что умножение на -1 наше свойство не меняет). Тогда $a_1 + a_2 > a_1 + a_3 > a_1 + a_4 > a_1$, т. е. ни одна из сумм $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$ и $a_1 + a_4$ множеству A не принадлежит. Кроме того, суммы $a_2 + a_3$ и $a_2 + a_4$ не могут одновременно принадлежать A, поскольку $a_2 + a_3 > a_2$, $a_2 + a_4 > a_2$ и $a_2 + a_3 \neq a_2 + a_4$. Получается, что по крайней мере для одной из троек (a_1, a_2, a_3) и (a_1, a_2, a_4) сумма любых двух ее элементов множеству A не принадлежит.

606. Предположим, что совершенное число равно $3n$, где n не кратно 3. Тогда все натуральные делители числа $3n$ (включая его самого) можно разбить на пары d и $3d$, где d не делится на 3. Следовательно, сумма всех делителей числа $3n$ (она равна $6n$) делится на 4. Отсюда n кратно 2. Далее заметим, что числа $\frac{3n}{2}$, n, $\frac{n}{2}$ и 1 будут различными делителями числа $3n$, их сумма равна $3n + 1 > 3n$, откуда следует, что число $3n$ не может быть совершенным. Противоречие.

607. Рассмотрим случай, когда точки Q и B_1 лежат по разные стороны от прямой BK, а точки P и B_1 лежат по разные стороны от прямой BM (см. рис. 278; остальные случаи рассматриваются аналогично). Прямые QK и PM пересекаются в точке N, так как точки Q и P являются образами точек K и M при гомотетии с центром N (касательная в точке K переходит в параллельную ей касательную с точкой касания в середине дуги AB; второе утверждение аналогично). Значит, $\angle KQB + \angle MPB = \pi$. Кроме того, $\angle KB_1B + \angle KQB = \pi$ и $\angle MB_1B + \angle MPB = \pi$. Следовательно, $\angle KB_1B + \angle MB_1B = \pi$, т. е. точка B_1 лежит на прямой KM. Далее, $\angle BQB_1 = \angle BKB_1 = \angle KNM = \angle B_1MB = \angle B_1PB$. А поскольку $\angle QBP + \angle QNP = \pi$, то получаем, что в четырехугольнике BPB_1Q два противоположных угла равны, а сумма двух смежных равна π, следовательно, BPB_1Q — параллелограмм.

608. Докажем утверждение задачи индукцией по количеству цветов n.

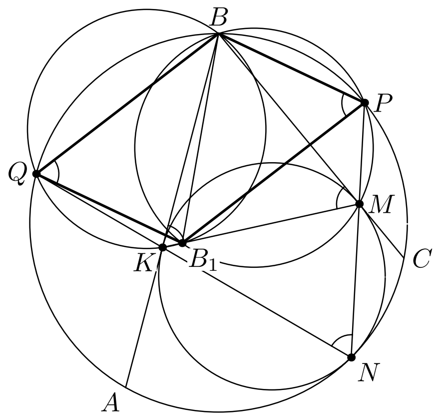


Рис. 278

База для $n = 2$. Рассмотрим самый левый квадрат K. Если он первого цвета, то все квадраты второго цвета имеют с ним общую точку, следовательно, каждый квадрат второго цвета содержит одну из двух правых вершин квадрата K, следовательно, все квадраты второй системы можно прибить двумя гвоздями.

Индуктивный переход. Пусть мы доказали утверждение задачи для n цветов, докажем для $(n + 1)$-го цвета. Рассмотрим все квадраты и выберем из них самый левый квадрат K. Пусть он покрашен в $(n + 1)$-ый цвет. Все квадраты, пересекающие K, содержат одну из двух его правых вершин, следовательно, их можно прибить двумя гвоздями. Уберем со стола все квадраты $(n + 1)$-го цвета и квадраты других цветов, пересекающие K. Остались квадраты n различных цветов. Если теперь выбрать n квадратов разных цветов, то среди них найдутся два пересекающихся (иначе добавим квадрат K и получим $n + 1$ попарно не пересекающихся квадратов разных цветов, что противоречит условию задачи). Таким образом, по индуктивному предположению, можно выбрать один из цветов i и прибить $2n - 2$ гвоздями все оставшиеся на столе квадраты этого цвета. Убранные квадраты цвета i пересекают самый левый квадрат K, следовательно, эти квадраты можно прибить, забив два гвоздя в правые вершины квадрата K.

11 класс

609. Положив $x = y = -z$, получаем $f(2x) + f(0) + f(0) \geqslant 3f(0)$, откуда $f(2x) \geqslant f(0)$.

С другой стороны, положив $x = z = -y$, получаем $f(0) + f(0) + f(2x) \geqslant 3f(2x)$, откуда $f(2x) \leqslant f(0)$. Итак, $f(0) \geqslant f(2x) \geqslant f(0)$, т. е. $f(2x) \equiv \mathrm{const} = C$. Легко проверить, что при любом $C \in \mathbb{R}$ функция $f(x) \equiv C$ удовлетворяет неравенству.

610. Предъявим такое разбиение. Выделим в i-е множество ($1 \leqslant i \leqslant 99$) все четные числа, дающие при делении на 99 остаток $i - 1$, а в сотое множество — все нечетные числа. Очевидно, что среди любых чисел a, b и c, удовлетворяющих уравнению $a + 99b = c$, четное количество нечетных. Если среди них два нечетных, то они из одного (сотого) множества, иначе — a и c из одного множества, так как они четные и дают одинаковые остатки от деления на 99.

611. Будем говорить «в» вместо «внутри или на границе».

Предположим противное. Рассмотрим пятиугольник минимальной площади S, для которого не выполняется утверждение задачи (так как площадь любого пятиугольника с вершинами в целых точках — число полуцелое, то такой найдется). Покажем, что все целые точки в треугольнике AC_1D_1, кроме A, лежат на C_1D_1. В самом деле, если в нем есть другая целая точка K, то площадь выпуклого пятиугольника $KBCDE$ меньше S, а «внутренний» пятиугольник в $KBCDE$ лежит в пятиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1$, что, очевидно, невозможно.

Через $\rho(M, PQ)$ будем обозначать расстояние от точки M до прямой PQ. Выберем из треугольников ABC, BCD, CDE, DEA и EAB треугольник наименьшей площади. Пусть это $\triangle ABC$. Тогда $\rho(A, BC) \leqslant \rho(D, BC)$ и $\rho(C, AB) \leqslant \rho(E, AB)$. Рассмотрим точку O такую, что $ABCO$ — параллелограмм (очевидно, эта точка целая). Тогда $\rho(O, BC) = \rho(A, BC)$ и $\rho(O, AB) = \rho(C, AB) \leqslant \rho(B_1, AB)$, поэтому точка O лежит в треугольнике AB_1C. Тогда из доказанного в предыдущем абзаце следует, что она лежит в пятиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1$, чего не может быть. Противоречие.

612. ***Первое решение.*** Для $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ обозначим через $[i, j]$ отрезок натурального ряда от i до j. Пусть

$$S(i, j) = \frac{a_i + a_{i+1} + \dots + a_j}{j - i + 1}.$$

Заметим, что из $S(i, j) > \alpha$ и $S(j + 1, l) > \alpha$ следует $S(i, l) > \alpha$.

Выделим в отрезке $[1, n]$ несколько отрезков $[p_i, q_i]$ по следующему принципу: i-й отрезок начинается с минимального числа p такого, что a_p превосходит α и не лежит в ранее построенных отрезках (если такого нет, то построение закончено); заканчивается он таким максимальным q, что при любом j из $[p_i, q]$ среднее чисел от a_{p_i} до a_j превосходит α. По построению $p_{i+1} > q_i + 1$.

Назовем натуральное число k *хорошим*, если $m_k > \alpha$. Докажем, что все хорошие числа лежат в построенных отрезках. Предположим противное и рассмотрим минимальное хорошее k, для которого это не так. Поскольку $m_k > \alpha$, то найдется $l \leqslant k$, для которого $S(l, k) > \alpha$. Так как любое число вне построенных отрезков не превосходит α, то отрезок $[l, k]$ пересекается с каким-то отрезком $[p_j, q_j]$. Пусть $[p_i, q_i]$ — самый правый отрезок, лежащий левее k. Если $k > q_i + 1$, то $S(q_i + 2, k) \leqslant \alpha$, откуда $S(l, q_i+1) > \alpha$, что противоречит выбору k. Поэтому $k = q_i + 1$. Из принципа выбора отрезков следует, что $l \neq p_i$ (иначе получаем противоречие с выбором q_i). Если $l > p_i$, то $S(p_i, l-1) > \alpha$, откуда $S(p_i, q_i+1) > \alpha$, чего не может быть. Если же $l < p_i$, то из $S(p_i, q_i + 1) \leqslant \alpha$ следует $S(l, p_i - 1) > \alpha$, т. е. $p_i - 1$ — хорошее число, не принадлежащее ни одному из отрезков $[p_j, q_j]$ и меньшее k, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, все хорошие k лежат в построенных отрезках.

Получается, что количество хороших чисел не превосходит $\sum(q_i - p_i + 1)$. Учитывая, что по построению отрезков $[p_i, q_i]$

$$\sum a_k \geqslant \sum_{k\in[p_i,q_i]} a_k > \alpha \cdot \sum(q_i - p_i + 1),$$

мы получаем утверждение задачи.

Второе решение. Пусть $b_i = a_1 + \dots + a_i$. Ясно, что $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Тогда

$$\frac{a_{l+1} + a_{k-m+2} + \dots + a_k}{m} = \frac{b_k - b_l}{k - l}.$$

Рассмотрим на координатной плоскости точки $B_0(0,0)$, $B_1(1, b_1)$, $B_2(2, b_2)$,…, $B_n(n, b_n)$. Тогда отношение $\dfrac{b_k - b_l}{k - l}$ будет равно тангенсу угла наклона прямой $B_l B_k$. Значит, условие $m_k > \alpha$ будет равносильно тому, что прямая, проходящая через B_k с углом наклона $\operatorname{arctg}\alpha$ (эту прямую назовем l_k) будет проходить выше хотя бы одной из точек B_l при $l < k$ (такую точку B_k будем называть *хорошей*). Выражение $\dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\alpha}$ будет равно b_n/α, и это будет расстояние между точкой $(n, 0)$ и точкой пересечения l_n с осью абсцисс.

Докажем индукцией по количеству точек n, что это расстояние больше числа хороших точек. База очевидна. Если точка B_n не хорошая, то выбросим ее, при этом число хороших точек не изменится, а отрезок уменьшится (так как $b_{n-1} \leqslant b_n$). Если же она хорошая, то пусть B_k — ближайшая (по оси абсцисс) точка, лежащая под l_n. Тогда выбросим все точки от B_{k+1} до B_n (они все хорошие), количество хороших точек уменьшится на $n-k$, а отрезок — больше, чем на $n-k$.

613. Доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\sin^{2n} x + (2^n - 2)\sin^n x\cos^n x + \cos^{2n} x \leqslant 1.$$

Возведем тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ в степень n, получим

$$1 = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x + n(\sin^2 x\cos^{2n-2} x + \cos^2 x\sin^{2n-2} x) + \\ + C_n^2(\sin^4 x\cos^{2n-4} x + \cos^4 x\sin^{2n-4} x) + \ldots \geqslant \\ \geqslant \sin^{2n} x + \cos^{2n} x + (2^n - 2)\sin^n x\cos^n x,$$

поскольку каждая скобка не меньше чем $2\sin^n x\cos^n x$, а сумма коэффициентов равна $\dfrac{2^n-2}{2}$.

614. Предположим, что совершенное число равно $7n$, где n не кратно 7. Тогда все натуральные делители числа $7n$ (включая его самого) можно разбить на пары d и $7d$, где d не делится на 7. Следовательно, сумма всех делителей числа $7n$ (она равна $14n$) делится на 8. Отсюда n кратно 4. Далее заметим, что числа $\frac{7n}{2}$, $\frac{7n}{4}$, n, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{4}$ и 1 будут различными делителями числа $7n$, их сумма равна $7n+1 > 7n$, откуда следует, что число $7n$ не может быть совершенным. Противоречие.

615. Пусть для определенности O лежит на продолжении отрезка AB за точку B (см. рис. 279). Обозначим P, Q точки пересечения KL с окружностью ω, M, N — точки касания сторон BC и AD с ω. Проведем касательные l_1, l_2 к ω в точках P, Q. Обозначим через α угол между касательной l_1 (или l_2) и хордой PQ.

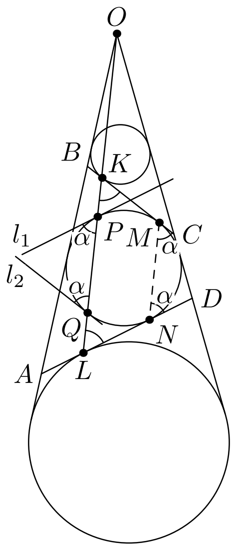


Рис. 279

При гомотетии с центром O, переводящей окружность ω_1 в ω, касательная BC в точке K перейдет в l_2; при гомотетии, переводящей окружность ω_2 в ω, прямая AD перейдет в l_1. Отсюда $BC \parallel l_2$, $AD \parallel l_1$ и, следовательно, $\angle LKC = \angle KLD = \alpha$. $\angle BMN = \angle ANM$ как углы между касательной и хордой. Отсюда получаем, что четырехугольник $KLNM$ — равнобокая трапеция и $\angle NMC = \angle MND = \alpha$. Итак, хорды PQ и MN окружности ω параллельны и стягивают равные дуги величиной 2α. Отсюда следует, что средняя линия нашей трапеции проходит через центр ω. Но середина KM совпадает с серединой BC (точки касания стороны треугольника со вписанной и вневписанной окружностью, как известно, симметричны относительно середины стороны), и также середина LN совпадает с серединой AD.

616. Предположим противное: пусть среди четырех клеток на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов есть две клетки одинакового цвета. Для удобства будем нумеровать цвета числами от 1 до 4. Назовем *горизонтальной* (*вертикальной*) *парой* две клетки разного цвета, лежащие в одной строке (одном столбце). Назовем *горизонтальным* (*вертикальным*) *совпадением* две клетки одинакового цвета, лежащие в одной строке (одном столбце). Разделим пары на 6 типов по цветам входящих в них клеток: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$.

Рассмотрим две произвольные строчки. Докажем, что существует не менее 25 вертикальных совпадений, лежащих в этих строчках. Из сделанного предположения следует, что любые две вертикальных пары с клетками в этих строчках должны иметь общий цвет. Легко заметить, что тогда в двух рассматриваемых строчках могут быть вертикальные пары не более, чем трех типов, причем возможны только два принципиально различных случая: все пары содержат один и тот же цвет (скажем, 1) или есть пары типов $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$ (или точно так же с другой тройкой цветов). Рассмотрим эти два случая.

Если все пары в наших двух строчках содержат клетку цвета 1, то всего пар не более, чем клеток цвета 1 в обеих строчках, т. е., не более 50. Значит, в рассматриваемых двух строчках не менее 50 совпадений.

Пусть есть пары типов $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$. В этом случае все клетки цвета 4 в наших строчках совпадают, и таким образом есть не менее 25 совпадений.

Итак, мы доказали, что в любой паре строчек не менее 25 вертикальных совпадений, аналогичный результат верен и для любой пары столбцов. Таким образом, всего в нашем квадрате есть не менее $2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} \cdot 25 = 25 \cdot 99 \cdot 100$ совпадений. Но так как в любой строке и в любом столбце по 25 клеток каждого цвета, количество совпадений равно $200 \cdot \frac{25 \cdot 24}{2} \cdot 4 = 24 \cdot 100^2$. Учитывая, что $25 \cdot 99 > 24 \cdot 100$, мы приходим к противоречию. Следовательно, есть две строки и два столбца, все клетки на пересечении которых окрашены в разные цвета.

2000–2001 г.

9 класс

617. **Ответ.** Эти суммы одинаковы.

Разобьем числа от n^2 до $(n+1)^2-1$ на две группы $A_n = \{n^2, n^2 + 1, \ldots, n^2+n\}$ и $B_n = \{n^2+n+1, n^2+n+2, \ldots, n^2+2n\}$. Для чисел группы A_n ближайшим квадратом является n^2, для B_n ближайшим является $(n+1)^2$ — квадрат другой четности. Суммы чисел в группах A_n и B_n обозначим $S(A_n)$ и $S(B_n)$ соответственно. Но из равенства $S(B_n) - S(A_n) = \big((n^2+n+1)-(n^2+1)\big) + \big((n^2+n+2)-(n^2+2)\big) + \ldots \ldots + \big((n^2+2n)-(n^2+n)\big) - n^2 = n\cdot n - n^2 = 0$ следует, что суммы чисел в группах A_n и B_n равны. Осталось заметить, что все множество чисел от 1 до 999 999 разбивается на непересекающиеся пары A_1 и B_1, A_2 и B_2, …, A_{999} и B_{999}.

618. Из условия следует, что $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)$, где $x_2 - x_1 > 2$ и $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x^2+Ax+B)$, так как $P(x_1) = Q(x_1) = 0$, $P(x_2) = Q(x_2) = 0$. Предположим, что $P(x) - Q(x) \geqslant 0$, т. е. $(x-x_1)(x-x_2)(x^2+Ax+B-1) \geqslant 0$ при всех x. Это выполняется только в том случае, когда $x^2+Ax+(B-1) = (x-x_1)(x-x_2)$, так как в точках $x = x_1$ и $x = x_2$ не будет происходить перемена знака многочлена $P(x) - Q(x)$ только при четной кратности корней $x = x_1$ и $x = x_2$. Значит, $A = -(x_1+x_2)$, $B - 1 = x_1x_2$, Поэтому дискриминант трехчлена $x^2 + Ax + B$ есть $D = (x_1+x_2)^2 - 4(x_1x_2+1) = (x_1-x_2)^2 - 4 > 0$. Но тогда $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ (корни x_3 и x_4 не совпадают с x_1 и x_2, так как x_3 и x_4 — корни трехчлена x^2+Ax+B, а x_1 и x_2 — нет; кроме того, $x_3 \neq x_4$, так как $D \neq 0$). Таким образом, $P(x)$ не может иметь в качестве промежутка отрицательных значений ровно интервал $I = (x_1; x_2)$. Противоречие. Значит, неравенство $P(x) - Q(x) \geqslant 0$ при некоторых x нарушается.

619. Пусть M — середина стороны CD, а L — середина стороны AD. Достроим параллелограмм $ABCD$ до треугольника BA_1C_1 так, чтобы отрезок AC был средней линией треугольника BA_1C_1 (см. рис. 280). Для этого через точку D проведем прямую, параллельную AC и обозначим через A_1 и C_1 точки пересечения этой прямой с продолжениями сторон BC и BA соответственно. Тогда четырехугольники ACA_1D и CAC_1D будут параллелограммами. Точки A, M и A_1 будут лежать на одной прямой, ибо в параллелограмме диагонали делятся точкой пересечения на равные части. Следовательно, в треугольнике AKA_1 угол K — прямой, поскольку точка M равноудалена от точек A, A_1 и K. Аналогично устанавливаем, что $\angle CKC_1 = 90°$. Таким образом,

$$\angle CKA_1 = 90° - \angle A_1KC_1 = \angle C_1KA.$$

Отрезки CN и KA_1 параллельны, ибо CN — средняя линия в треугольнике KBA_1. Аналогично параллельны отрезки AN и KC_1. Следовательно,

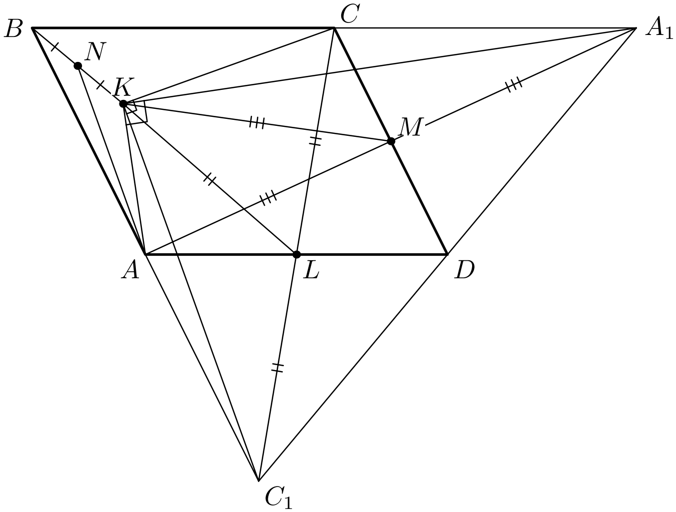


Рис. 280

$$\angle NCK = \angle CKA_1 = \angle C_1KA = \angle NAK.$$

620. Уберем вершину A_{2000} данного многоугольника $A_1A_2\ldots A_{2000}$. Назовем *средними* диагоналями многоугольника $A_1A_2\ldots A_{1999}$ отрезки, соединяющие вершины, номера которых отличаются на 999 или 1000. Рассмотрим все средние диагонали, их ровно 1999 штук. Заметим, что любые две из них пересекаются, из каждой вершины выходит ровно две средние диагонали. Поскольку $1999 > 2 \cdot 999$, то найдутся три одноцветные средние диагонали, они попарно пересекаются в трех разных точках. Эти точки пересечения и являются вершинами искомого треугольника.

621. Ответ. 500 или 501.

Рассмотрим любые четыре подряд идущие монеты. Докажем, что среди них ровно одна трехкопеечная. Предположим противное. Если среди этих монет не оказалось ни одной трехкопеечной, то однокопеечные и двухкопеечные монеты чередуются, что невозможно. Двух трехкопеечных монет тоже не может быть, поскольку между ними должно быть хотя бы три монеты. Таким образом, среди первых 2000 монет ровно 500 трехкопеечных. Следовательно, всего трехкопеечных монет может быть 501 или 500. Оба ответа возможны, например,

$$3121312131213\ldots31213 \quad \text{и} \quad 2131213121312\ldots21312.$$

622. Докажем, что в этой компании есть $n+1$ попарно знакомый человек. Очевидно, что есть двое знакомых, и если есть k попарно знакомых (где $k \leqslant n$), то по условию найдется отличный от них человек, знакомый со всеми этими k людьми. Отсюда следует, что найдутся $n+1$ попарно знакомых человек $A_1, \ldots A_{n+1}$.

Рассмотрим остальных n человек. По условию, существует отличный от них человек A_i, знающий их всех. Но тогда A_i знаком со всеми.

623. Пусть P и Q — середины сторон AB и BC соответственно, P_1, K_1, Q_1, M_1 — проекции точек P, K, Q, M на сторону AC (см. рис. 281). Тогда $P_1Q_1 = \frac{1}{2}AC$ и, по условию, $K_1M_1 = \frac{1}{2}AC$, поэтому $P_1Q_1 = K_1M_1$, следовательно, если точка K ближе к вершине B, чем точка P, то точка Q ближе к B, чем точка M. Из условия следует, что $OP \perp AB$, $OQ \perp BC \Rightarrow \angle POQ = \pi - \angle B$. Поэтому утверждение задачи равносильно равенству $\angle KOM = \angle POQ$, т. е., с учетом установленного расположения точек, подобию прямоугольных треугольников OPK и OQM.

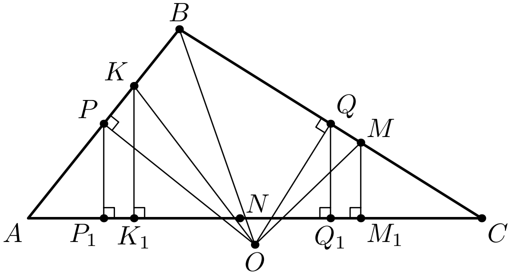


Рис. 281

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Тогда $PK = P_1K_1 : \cos\alpha$, $QM = Q_1M_1 : \cos\gamma$. Но $P_1Q_1 = K_1M_1 \Rightarrow P_1K_1 = Q_1M_1 \Rightarrow PK : QM = \cos\gamma : \cos\alpha$.

С другой стороны, $\angle AOB = 2\gamma \Rightarrow \angle BOP = \gamma \Rightarrow OP = R\cos\gamma$, где R — радиус описанной окружности. Аналогично $OQ = R\cos\alpha \Rightarrow OP : OQ = \cos\gamma : \cos\alpha = PK : QM$ и, значит, $\triangle OPK \sim \triangle OQM$.

624. **Ответ.** $n = p^m$, где p — простое число, $m \in \mathbb{N}$.

Предположим, что n не является степенью простого числа. Пусть p — наименьший простой делитель числа n. Представим n в виде $p^m \cdot k$, где p не делится на k. По условию число $l = p + k - 1$ является делителем n. Покажем, что l взаимно просто с k. Предположим противное. Если НОД$(l, k) > 1$, то НОД$(p-1, k) =$ НОД$(l-k, k) =$ НОД$(l, k) > 1$. Таким образом, число k имеет какой-то делитель d, $2 \leqslant d \leqslant p-1$. Противоречие с выбором числа p. Следовательно, $p + k - 1 = p^\alpha$. Ясно, что $\alpha \geqslant 2$, ибо $k > 1$. Таким образом, числа p^2 и k — взаимно простые делители числа n, т. е. $p^2 + k - 1$ — делитель числа n. При этом $p^2 + k - 1$ взаимно просто с k, поскольку в противном случае k имеет общий делитель с $p^2 - 1 = 2(p-1) \cdot \frac{p+1}{2}$, что снова противоречит выбору числа p. Следовательно, $p^2 + k - 1 = p^\beta$, где $\beta \geqslant 3$. Но тогда $p^\beta = p^2 + k - 1 = p^2 + (p + k - 1) - p =$

$= p(p+p^{\alpha-1}-1)$, что не делится на p^2. Противоречие, следовательно, $k = 1$. Нетрудно убедиться, что полученные числа удовлетворяют условию.

10 класс

625. См. решение задачи 617.

626. **Лемма.** *Пусть множества A и B на прямой являются объединениями m и n отрезков соответственно. Тогда $A \cap B$ — объединение не более $m+n-1$ отрезков.*

Доказательство. Ясно, что $A \cap B$ — тоже объединение отрезков. Пусть их количество равно k. Концы отрезков $A \cap B$ являются концами отрезков A или B. Следовательно, рассматривая концы отрезков $A \cap B$, получаем:

$$2k \leqslant 2m + 2n. \qquad (*)$$

Но при этом самый левый конец отрезка из всех концов A или B либо не принадлежит $A \cap B$, либо входит и в концы A и в концы B. Значит, правую часть $(*)$ можно уменьшить на 1. Аналогично, рассматривая самый правый конец A или B, мы уменьшаем правую часть $(*)$ еще на 1. Тогда

$$2k \leqslant 2m + 2n - 2$$

т. е.

$$k \leqslant m + n - 1.$$

Лемма доказана.

Теперь решим задачу: пересекая A_1 последовательно с A_2, A_3, $\ldots$, A_{100}, мы увидим, что количество отрезков в пересечении будет не более $100 + 100 - 1 = 199$, $199 + 100 - 1 = 298$, $\ldots$, $9802 + 100 - 1 = 9901$, что и требовалось доказать.

627. Обозначим внешнюю окружность через Ω, внутреннюю — ω, описанную окружность треугольника BKM — ω_1, их радиусы — R, r и r_1 соответственно. Пусть отрезок BN пересекает ω в точке P (см. рис. 282). Рассмотрим гомотетию H с центром в точке N, переводящую внутреннюю окружность во внешнюю. Тогда $H(P) = B$, $H(AB) = l$, где l — касательная к Ω, параллельная AB, т. е. проходящая через точку M. Следовательно, $H(K) = M$, т. е. точки N, K, M лежат на одной прямой. Тогда, по теореме синусов, $\dfrac{BK}{BN} = \dfrac{2r_1 \sin\alpha}{2R\sin\alpha} = \dfrac{r_1}{R}$, где $\alpha = \angle BMN$. Кроме того,

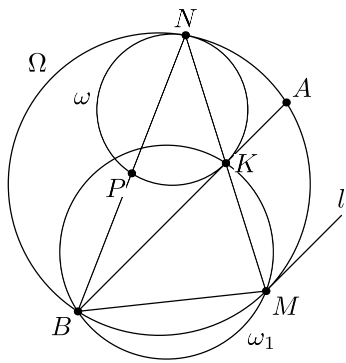


Рис. 282

$\dfrac{NP}{BN} = \dfrac{r}{R}$. Далее, $BK^2 = BP \cdot BN$ поэтому $\left(\dfrac{r_1}{R}\right)^2 = \left(\dfrac{BK}{BN}\right)^2 = \dfrac{BP}{BN} =$ $= 1 - \dfrac{NP}{BN} = 1 - \dfrac{r}{R}$. Отсюда следует, что отношение $\dfrac{r_1}{R}$ постоянно.

628. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра — дорогам. В этом графе между любыми двумя вершинами есть единственный путь, следовательно, в нем нет циклов (такой граф называется *деревом*). По условию, в этом графе есть 100 вершин, из которых выходит ровно одно ребро (такие вершины называются *висячими*) — пусть это вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Для каждой пары висячих вершин A_i и A_j существует единственный путь между ними, назовем количество ребер на этом пути *расстоянием* между этими вершинами и будем обозначать через $d(A_i, A_j)$. Из конечности числа способов разбить эти 100 вершин на 50 пар следует, что при одном из способов достигается максимум суммы расстояний между вершинами в парах. Соединим пары вершин при этом разбиении 50 *новыми* ребрами (остальные ребра будем называть *старыми*). Мы докажем, что после этого даже при удалении любого ребра сохраняется *связность* графа (т. е., возможность из любой вершины попасть в любую другую).

Предположим противное, пусть при удалении ребра между вершинами B и C граф распался на две части, которые не связаны между собой. Нетрудно заметить, что удаленное ребро было старым, в одной из полученных частей находится вершина B, а в другой — вершина C. Очевидно, в каждой части должна быть вершина, из которой выходит ровно одно старое ребро, и каждое новое ребро соединяет две вершины из одной части. Но тогда в одной из частей должно быть новое ребро, соединяющее вершины A_i и A_j, а в другой — соединяющее вершины A_k и A_m. Однако в этом случае нетрудно проверить, что

$$d(A_i, A_j) + d(A_k, A_m) < d(A_i, A_k) + d(A_j, A_m),$$

что противоречит максимальности суммы расстояний в выбранных парах. Следовательно, при удалении ребра BC возможность попасть из любой вершины в любую другую должна сохраниться.

629. По условию $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, следовательно, $P(Q(x)) = (Q(x) - x_1)(Q(x) - x_2)(Q(x) - x_3)$, где $Q(x) - x_i \neq 0, i = 1, 2, 3$, т. е. $D_i = 1 - 4(2001 - x_i) < 0$. Перемножив полученные неравенства $2001 - x_i > \frac{1}{4}$, получаем $P(2001) = (2001 - x_1)(2001 - x_2)(2001 - x_3) >$ $> \frac{1}{64}$.

630. Достаточно доказать, что сумма S горизонтальных проекций векторов, соединяющих центры клеток с большим числом с центрами клеток с меньшим числом, равна нулю. Аналогичными рассуждениями доказывается, что сумма вертикальных проекций векторов также равна нулю, откуда следует утверждение задачи.

Примем длину стороны клетки за 1, за положительное направление горизонтальной оси выберем направление слева направо. Будем перемещать числа внутри строк (при этом в одну клетку могут попадать несколько чисел) и следить за изменением суммы S проекций векторов. Заметим вначале, что сумма чисел в столбце магического квадрата составляет $1/n$ от суммы всех чисел, т. е. она равна $\frac{n(n^2+1)}{2}$. В клетку с числом k входит n^2-k и выходит $k-1$ векторов. Следовательно, если мы передвинем k на клетку влево, то сумма S меняется на $(k-1)-(n^2-k)=2k-1-n^2$. Последовательно передвинем n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые стояли в одном столбце, на одну клетку влево. При этом сумма S меняется на $(2a_1-1-n^2)+(2a_2-1-n^2)+\ldots+(2a_n-1-n^2)=2(a_1+a_2+\ldots+a_n)-n-n^3=n(n^2+1)-n-n^3=0$. Таким образом, последовательно переместив числа каждого столбца в самый левый столбец, получим, что сумма S не изменилась. Но в конце сумма S стала равна нулю, поскольку проекции всех векторов стали нулевые. Значит и в начале $S=0$.

631. Пусть окружность, проходящая через H, A_1, B_1, пересекает второй раз прямую CH в точке C_1'. Достаточно доказать, что C_1' совпадает с C_1.

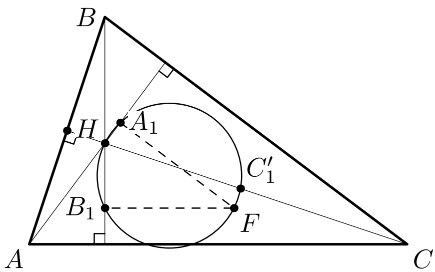


Рис. 283

Рассмотрим точку F, диаметрально противоположную точке H (см. рис. 283). Углы HA_1F, HB_1F и $HC_1'F$ — прямые, так как опираются на диаметр. Поэтому $A_1F \parallel BC$, $B_1F \parallel AC$, $C_1'F \parallel AB$. Отсюда следует равенство площадей $S_{BFC}=S_{BA_1C}$ (в треугольниках BFC и BA_1C основание общее, а высоты равны), аналогично $S_{CFA}=S_{CB_1A}$ и $S_{AFB}=S_{AC_1'B}$.

Заметим, что точка F лежит внутри треугольника ABC: поскольку A_1 и B_1 лежат на высотах, а не на их продолжениях, точка F лежит внутри угла ACB; если бы при этом F лежала вне треугольника ABC, то сумма площадей $S_{AFC}+S_{BFC}=S_{AB_1C}+S_{BA_1C}$ была бы больше площади S треугольника ABC в противоречие с условием; таком образом, C_1' лежит на высоте, а не на ее продолжении. Ввиду равенств $S=S_{AFB}+S_{BFC}+S_{CFA}=S_{AC_1B}+S_{BA_1C}+S_{CB_1A}$ получаем, что $S_{AC_1'B}=S_{AC_1B}$, откуда следует совпадение точек C_1 и C_1'.

632. **Ответ.** $n=p^k$, p — простое, или $n=12$.

Легко видеть, что указанные в ответе числа удовлетворяют условию задачи. Покажем, что других чисел, удовлетворяющих условию, не существует.

Случай нечетного n рассмотрен в задаче 624. Пусть n четно и не является степенью двойки; представим его в виде $n = 2^m \cdot k$, где $m \geqslant 1$, а $k > 1$ — нечетное число. Заметим, что $k + 2 - 1 = k + 1$ — делитель n. Поскольку НОД$(k+1, k) = 1$, $k + 1 = 2^\alpha$, $\alpha > 1$. Поэтому $2^2 + k - 1 = k + 3$ — тоже делитель n. Заметим, что $k + 3 = (k+1) + 2 = 2^\alpha + 2$ не делится на 2^2. Кроме того, НОД$(k+3, k) =$ НОД$(3, k) \leqslant 3$. Из этого заключаем, что $k + 3 \leqslant 2 \cdot 3 = 6$, и $k \leqslant 3$. Значит, $n = 2^m \cdot 3$. Но $m = 1$ не подходит; $m \geqslant 3$ также не подходит, так как в этом случае мы получили бы, что $2^3 + 3 - 1 = 10$ — также делитель n.

11 класс

633. Ответ. 97 средних чисел.

Заметим, что если число $k = m$ является средним, то число $k = 100 - m$ также является средним. Поэтому если число $k = 1$ не является средним, то число $k = 99$ также не является средним и количество средних чисел не больше 97 ($k \neq 100$). Если же число $k = 1$ является средним, то вес одной из гирек равен S и, следовательно, только $k = 99$ также является средним числом. Значит, количество средних чисел не превосходит 97.

Приведем пример набора из 100 гирек с весами $a_1, \ldots, a_{100}$ для которого все числа от 2 до 98 (всего 97 чисел) — средние. Пусть $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, 97$, — последовательные числа Фибоначчи и $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{98}$. Выберем $a_{100} = S - a_{99}$. Тогда суммарный вес всех гирек равен $2S$ и, в то же время, $a_{100} + a_{99} = a_{100} + a_{98} + a_{97} = a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{95} = a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{94} + a_{93} = \ldots = a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{94} + a_{92} + a_{90} + \ldots + a_6 + a_4 + a_2 + a_1 = S$. Следовательно, средними являются числа 2, 3, 4, ..., 51. Но тогда средними будут и числа $100 - 2 = 98$, $100 - 3 = 97, \ldots, 100 - 48 = 52$, т. е. все числа от 2 до 98 — средние.

634. См. решение задачи 627.

635. Для каждой из прямых, пересекающих все многоугольники набора P_1, проведем параллельную ей прямую через центр O некоторой окружности S. Обозначим через S_1 множество точек пересечения этих прямых с S. Определим аналогично для набора P_2 множество $S_2 \subset S$.

Покажем, что $S_1 \cup S_2 = S$. Спроектируем многоугольники наборов P_1 и P_2 на произвольную прямую l (см. рис. 284). Из условия следует, что при этом получатся два набора отрезков P_1' и P_2' таких, что любые два отрезка из разных наборов имеют общую точку.

Возьмем отрезок I, левый конец A которого является среди полученных отрезков самым правым. Пусть, например, I принадлежит P_1', тогда все отрезки P_2' содержат точку A. Следовательно, прямая m, проходящая через точку A перпендикулярно l, пересекает все многоугольники набора P_2. В силу произвольности выбора прямой l получаем, что $S_1 \cup S_2 = S$.

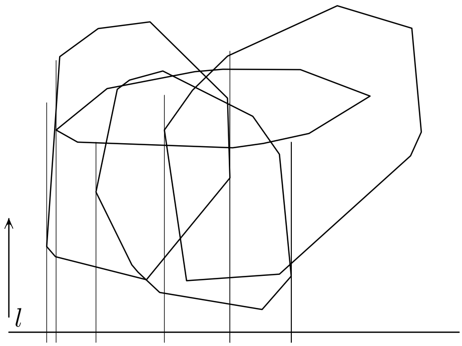


Рис. 284

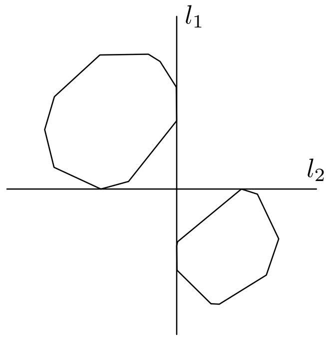


Рис. 285

Очевидно, все отрезки в P_1' имеют общую точку и все отрезки в P_2' имеют общую точку тогда и только тогда, когда точки окружности S, имеющие направление m, принадлежат как S_1, так и S_2.

Но если все отрезки из P_1' имеют общую точку и все отрезки из P_2' имеют общую точку, то любые два отрезка из $P_1' \cup P_2'$ имеют общую точку. Тогда все отрезки из $P_1' \cup P_2'$ имеют общую точку.

Следовательно, прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно l, пересекает все многоугольники наборов P_1 и P_2. Таким образом, утверждение задачи доказано, если $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$.

Покажем, что $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$. В самом деле, легко видеть, что множества S_1 и S_2 состоят из конечного числа замкнутых дуг окружности (например, если число элементов в P_1 не больше n, то дуг не больше $2C_n^2$, так как конец каждой дуги соответствует непересекающимся многоугольникам; см. рис. 285). Так как в каждом множестве есть пара непересекающихся многоугольников, то, отделяя эти многоугольники прямой, мы видим, что $S_1 \neq S$ и $S_2 \neq S$.

Если $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то $S_1 \cup S_2$ состоит из попарно непересекающихся замкнутых дуг. Возьмем конец одной дуги, тогда между ним и ближайшим концом дуги по часовой стрелке нет точек $S_1 \cup S_2$, что противоречит тому, что $S_1 \cup S_2 = S$.

636. **Ответ.** При n участниках.

Докажем, что при n участниках такое распределение баллов может существовать. Пример очевиден — пусть k-й участник ответит только на один k-й вопрос. Тогда, назначив стоимость вопросов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, жюри поставит k-го участника на место $n+1-a_k$.

Теперь докажем от противного, что не могло быть $n+1$ участников или более. Представим себе, что мы клонировали каждого участника, т. е. у нас есть неограниченное количество участников каждого из $n+1$ типов. Докажем, что если мы сможем составить из них две команды, разные по составу (хотя бы для одного типа число участников этого типа в первой команде не равно числу участников этого типа во второй команде), но имеющих одинаковые результаты (т. е. на каждый вопрос в первой команде ответило столько же человек, сколько во второй), то мы придем к противоречию.

Во-первых, можно считать, что участники каждого типа присутствуют не более, чем в одной команде: если в обеих командах есть по участнику одного типа, удалим их, составы команд останутся разными, а результаты — одинаковыми.

Пусть, без ограничения общности, в первой команде участников не меньше, чем во второй. Тогда нельзя назначить баллы за вопросы так, чтобы места всех участников первой команды были выше, чем места участников второй команды, ибо сумма баллов участников первой команды всегда равна сумме баллов участников второй команды.

Осталось доказать, что такие две команды найдутся. Для этого запишем систему линейных уравнений, i-е уравнение которой гласит, что разность числа участников первой и второй команды, ответивших на i-й вопрос есть ноль; j-й переменной здесь будет число участников j-го типа в команде (в первой, если переменная положительна, во второй, — если отрицательна). Это система из n однородных уравнений с $n+1$ переменной. Как известно, она имеет ненулевое решение, причем, поскольку все коэффициенты рациональны (а они нули или единицы), существует рациональное ненулевое решение. Поскольку уравнения однородны, решение можно домножить на константу. Домножим так, чтобы значения всех переменных стали целыми. Требуемые команды найдены.

637. ***Первое решение.*** Без ограничения общности можно считать, что $f(x) < 0$ при $x \in (x_1, x_2)$, $g(x) < 0$ при $x \in (x_3, x_4)$, где $x_2 < x_3$. Рассмотрим касательную к графику $y = \alpha f(x)$ в точке x_2 и касательную к графику $y = \beta g(x)$ в точке x_3. Подберем положительные α и β так, чтобы модули угловых коэффициентов этих касательных стали равными. Пусть касательная к $\alpha f(x)$ в точке x_2 имеет вид $y = ax + b_1$, касательная к $\beta g(x)$

в точке x_3 имеет вид $y = -ax + b_2$, $a > 0$. Эти касательные пересекаются в точке с ординатой $y_0 > 0$. Парабола, ветви которой направлены вверх, лежит выше касательной. Поэтому $\alpha f(x) + \beta g(x) > ax + b_1 - ax + b_2 = b_1 + b_2 = 2y_0 > 0$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть графики пересекаются в точке $P(x_0, y_0)$. Тогда $f(x) = y_0 + (x - x')(x - x_0)$, $g(x) = y_0 + (x - x'')(x - x_0)$, причем, если $x_0 < x_0$, то $x_0 < x''$. Действительно, если, скажем, $x' < x'' < x_0$, то на интервале (x', x_0) выполнено $f(x) < g(x)$, и в точках, в которых $g(x)$ отрицательно, $f(x)$ также отрицательно, что невозможно. Поэтому $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha + \beta)y_0 + (x - x_0)[(\alpha + \beta)x - (\alpha x' + \beta x'')] = (\alpha + \beta)y_0 + (\alpha + \beta)(x - x_0)^2 \geqslant (\alpha + \beta)y_0 > 0$, если выбрать α и β так, чтобы $(\alpha + \beta)x_0 = \alpha x' + \beta x''$, т. е. $\beta = \alpha \dfrac{x_0 - x'}{x'' - x_0}$. Это можно сделать, так как $x' < x_0 < x''$.

638. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b, т. е. $a = da_1$, $b = db_1$, где a_1 и b_1 взаимно просты. Тогда $da_1b_1(a_1 + b_1)$ делится на $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 = m$. Число $a_1 + b_1$ взаимно просто с числами a_1 и b_1 (в противном случае a_1 и b_1 имеют общий делитель), поэтому из равенств $m = a_1(a_1 + b_1) + b_1^2 = b_1(a_1 + b_1) + a_1^2$ следует, что m взаимно просто с числами a_1, b_1 и $a_1 + b_1$, поэтому d делится на m. Но тогда $d \geqslant m > a_1b_1$, следовательно $d^3 > ab$. Поэтому $|a - b| \geqslant d > \sqrt[3]{ab}$, что и требовалось доказать.

639. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра — дорогам. В задаче требуется покрасить вершины этого графа в $2001 - k$ цветов так, что никакие две вершины одного цвета не соединены ребром (такая раскраска называется *правильной*).

Рассмотрим вершину A наибольшей степени, пусть из этой вершины выходит s ребер ($s < 2000$). Обозначим через V множество из s вершин, соединенных с A, пусть W — множество из $2000 - s$ оставшихся вершин. Рассмотрим два случая.

1) Пусть в множестве W есть две соединенные ребром вершины B и C. Тогда рассмотрим множество U, состоящее из вершины A и всех вершин множества W, кроме C. В этом множестве $2000 - s$ вершин и любая не входящая в U вершина соединена ребром с одной из вершин множества U (либо с вершиной A, либо с B). Следовательно, $2000 - s \geqslant k$.

Остается заметить, что из каждой вершины выходит не более s ребер, следовательно, эти вершины можно по очереди покрасить в $s + 1$ цвет так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром (вершину нельзя красить в цвета ее соседей, которых не более, чем s, а в нашем распоряжении $s + 1$ цвет). Неравенство $s + 1 = 2001 - (2000 - s) \leqslant 2001 - k$ завершает доказательство задачи в этом случае.

2) Пусть никакие две вершины множества W не соединены ребром. Покрасим все эти вершины в цвет 1, в этот же цвет можно покрасить вершину A (она не соединена ребром ни с одной вершиной из W). Заметим, что в этом случае вершины из множества W должны быть соединены с вершинами из множества V (так как из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро). Это означает, что среди вершин множества V есть две не соединенные ребром (иначе в этом множестве есть вершина, из которой выходит более s ребер — к $s-1$ остальным вершинам множества V, к вершине A и к вершинам множества W). Так как среди s вершин множества V есть две не соединенные ребром, вершины этого множества можно покрасить в $s-1$ цвет. Таким образом, все вершины оказались раскрашены в s цветов и никакие две вершины не соединены ребром. Так как все s вершин из множества V соединены ребром с вершиной A, то $2001-s \geqslant k$, следовательно, $s = 2001-(2001-s) \leqslant 2001-k$, что и требовалось доказать.

640. Пусть ω — сфера из условия задачи, ω_1 — сфера, описанная около тетраэдра $SA_1B_1C_1$. Эти сферы пересекаются по окружности γ, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ (см. рис. 286).

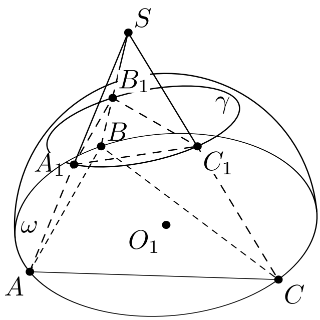


Рис. 286

Выберем на γ произвольно точку K_1, пусть K — вторая точка пересечения луча SK_1 со сферой ω. Рассмотрим сечение сфер ω и ω_1 плоскостью $\alpha = SAK$.

Пусть l — касательная к сечению сферы ω_1 плоскостью α, проведенная в точке S (см. рис. 287). Тогда $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = \pi - \angle A_1K_1K = \angle 3$, следовательно $\angle 1 = \angle 3$ и, значит, $AK \parallel l$. Поэтому если β — плоскость, касающаяся ω_1 в точке S, то $AK \parallel \beta$. Поэтому лучи, проведенные из точки S и пересекающие окружность γ, вторично пересекают сферу ω в точках, лежащих в одной плоскости τ. Точки A, B и C лежат в этой плоскости, следовательно τ проходит через точку O_1 — центр сферы ω.

Теперь рассмотрим множество плоскостей, касающихся ω в точках, принадлежащих γ. Они касаются некоторого конуса с вершиной в точке O (и образующими OA_1, OB_1, OC_1). Проведем плоскость через точки O, O_1 и S. В сечении получатся две пересекающиеся окружности (см. рис. 288), при этом

$$\angle SP_1P = \angle SQ_1Q = 90^\circ,$$

так как $O_1 \in PQ$. Но OP_1 и OQ_1 — касательные к окружности с центром O_1, поэтому

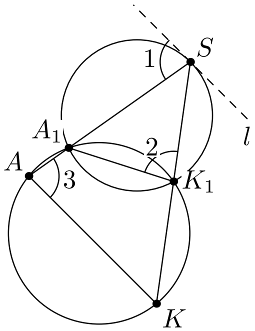


Рис. 287

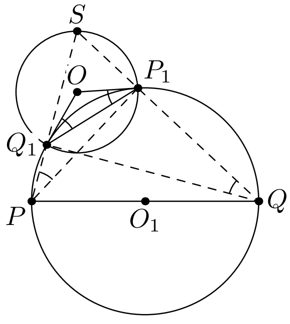


Рис. 288

$$\angle SPP_1 = \angle SQQ_1 = \angle OQ_1P_1 = \angle OP_1Q,$$

т. е. $\triangle Q_1OP_1$ — равнобедренный и $\angle Q_1OP_1 = 180^\circ - 2\cdot\angle OQ_1P_1 = 2(90^\circ - \angle SPP_1) = 2\cdot\angle Q_1SP_1$. Отсюда и из равенства $OP_1 = OQ_1$ следует, что O — центр окружности, описанной около $\triangle SP_1Q_1$. Но тогда $OS = OP_1 = OA_1 = OB_1 = OC_1$, т. е. O — центр сферы ω_1.

2001–2002 г.

9 класс

641. Ответ. Нельзя.

Числа от 1 до 2001 могут располагаться не более, чем в 2001 строке и 2001 столбце. Значит, найдутся строка и столбец, все числа в которых не меньше 2002. Но тогда произведение любых двух чисел из такой строки (столбца) больше 2002^2, т. е. для клетки, расположенной на пересечении таких строки и столбца, условие задачи не выполняется.

642. $\angle AO_1O_2$ — внешний для треугольника OAO_1. Поэтому $\angle AO_1O_2 = \angle AOO_1 + \angle OAO_1 = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle OAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle OBA = \frac{1}{2}\angle ABC$.

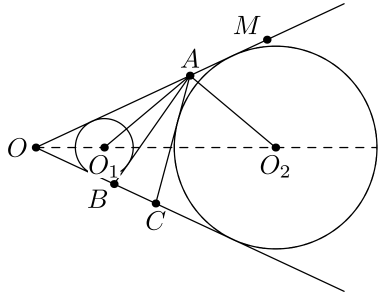


Рис. 289

Далее, пусть M — некоторая точка на продолжении отрезка OA за точку A. $\angle MAO_2$ — внешний для треугольника OAO_2.

Отсюда $\angle AO_2O_1 = \angle MAO_2 - \angle AOO_2 = \frac{1}{2}\angle MAC - \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\angle ACO$.

Таким образом, из равенства $O_1A = O_2A$ следует равенство углов AO_1O_2 и AO_2O_1, а значит, и углов ABC и ACB.

Тем самым, треугольник ABC — равнобедренный, $AB = AC$.

643. Рассмотрим три синих точки A, B, C и не синюю D. Тогда $S_{ABC} \leqslant S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}$. Просуммируем это неравенство по всем таким четверкам. При этом каждый «синий» треугольник считается 12 раз, а каждый «сине-сине-несиний» — 4 раза. Таким образом, сумма площадей «синих» треугольников хотя бы в 3 раза меньше суммы площадей «сине-сине-несиних». Итого: сумма площадей «синих» треугольников составляет не более четверти сумм площадей треугольников, хотя бы две вершины которых — синие. Аналогичное неравенство получим для двух других цветов. Так как рассмотренные группы не пересекаются, то и сумма площадей одноцветных треугольников составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников.

644. Ответ. 10.

Перейдем к графу, в котором головы — вершины, шеи — ребра, а удар по шеям, выходящим из головы A назовем *инвертированием* вершины A. Тогда если есть вершина X степени не больше 10, то достаточно инвертировать ее соседей, и она отделится, т. е. эта вершина не будет соединена с остальными вершинами графа. Если есть вершина, соединенная со всеми вершинами, за исключением n ($n \leqslant 9$), то нужно инвертировать сначала эту вершину, а затем те n вершин, с которыми она вначале не была соединена, и тогда эта вершина отделится. Если же для каждой вершины есть хотя бы 11 вершин, соединенных с ней, и хотя бы 10, не соединенных с ней, то всего вершин не меньше 22, и ребер не меньше $\frac{22 \cdot 11}{2} > 100$.

Приведем пример гидры, которую нельзя разрубить за 9 ударов: две группы по 10 голов и 100 шей, соединяющих все пары голов из разных групп. Заметим, что «состояние ребра» между вершинами A и B не изменилось (т. е. оно осталось, если было вначале, и не появилось, — иначе) тогда и только тогда, когда вершины A и B отрубали в сумме четное число раз. Поэтому порядок отрубания вершин неважен, и бессмысленно отрубать вершину два раза.

Пусть по нашей гидре нанесено не более 9 ударов. Тогда в каждой группе осталось по неотрубленной голове, и поэтому есть шея из одной группы в другую; более того, все неотрубленные головы образуют связное множество. С другой стороны, каждая неотрубленная голова связана со всеми отрубленными в своей группе. Поэтому, если в каждой части отрублено хотя бы по голове, то гидра осталась связной. Если же все отрубленные головы в одной части, то гидра тоже осталась связной: любая неотрубленная голова в этой части связана со всей другой частью и со всеми отрубленными.

645. Рассмотрим семь пар ладей, стоящих в соседних столбцах. Разности их координат по вертикали лежат на отрезке $[1, 7]$, поэтому либо две из них совпадают (и тогда расстояния в соответствующих парах тоже совпадают), либо среди них есть все числа от 1 до 7. В частности, есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по вертикали и на 1 по горизонтали (пара A). Аналогично, либо найдутся две пары в соседних строках с равным расстоянием, либо есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 1 по вертикали и на 2 по горизонтали (пара B). Тогда расстояния в парах A и B совпадают, а сами эти пары различны.

646. **Ответ.** $n = k - 1$.

Построим пример, показывающий, что при $n \geqslant k$ это невозможно. Пусть карты (сверху вниз) первоначально лежат так: сначала все нечетные (в произвольном порядке), потом четные, причем верхняя из них — карта $2n$. Тогда первые k ходов однозначно определены — нечетные карты перекладываются на свободные позиции; следующий ход, если $n > k$, невозможен, а если $n = k$, то можно лишь переложить карту $2n-1$ обратно в изначальную стопку, что бессмысленно, ибо мы вернулись к предыдущей позиции. Поэтому эту стопку переложить нельзя.

Пусть $n < k$. Покажем, как можно организовать процесс перекладывания. Разобьем все карты на пары $(1, 2), \ldots, (2n-1, 2n)$ и сопоставим каждой паре по незанятой ячейке (хотя бы одна ячейка не сопоставлена никакой паре; назовем ее свободной). Теперь каждую карту сверху красной ячейки попытаемся положить в «ее» ячейку. Это может не получиться, только если эта карта имеет номер $2i$, а карта $2i-1$ уже лежит в ячейке; но тогда можно переместить карту $2i$ в свободную ячейку, сверху положить карту $2i-1$, сопоставить этой ячейке нашу пару, а прежнюю сопоставленную назвать свободной. Таким образом, в результате мы получим карты, разложенные в ячейки по парам. Теперь, используя свободную ячейку, легко собрать их в колоду в правильном порядке.

647. Построим такие точки K и L, лежащие внутри угла AOC, что треугольники AKO и BMO, а также CLO и BNO соответственно равны (см. рис. 290). Тогда $KO = OM$, $LO = ON$ и $\angle KOL = \angle AOC - \angle MOB - \angle BON = \angle MON$, поэтому треугольники KOL и MON равны, следовательно, $KL = MN$. Тогда периметр треугольника BMN равен $BM + MN + NB = AK + KL + LC \geqslant AC$.

В других исходных конфигурациях задачи решение проходит аналогично, но треугольники, возможно, нужно откладывать в другую сторону (см. рис. 291, рис. 292, рис. 293).

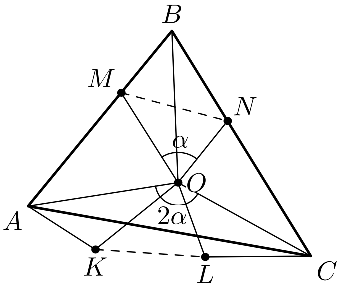


Рис. 290

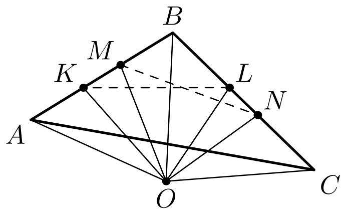


Рис. 291

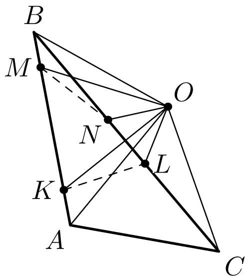


Рис. 292

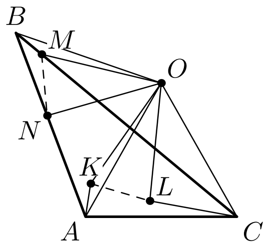


Рис. 293

648. Заметим, что среди выбранных чисел найдутся числа a и b, имеющие одинаковые остатки от деления на 2^{2n}. Докажем, что они — искомые.

Предположим, что $a^2 \vdots b$. Тогда и $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \vdots b$. Пусть $a = p \cdot 2^{2n} + r$, $b = q \cdot 2^{2n} + r$. Тогда $(p-q)^2 \cdot 2^{4n} \vdots b$, но поскольку b — нечетное, то $(p-q)^2 \vdots b$, откуда $|p-q| > 2^n$ и $\max(a,b) = \max(p,q) \cdot 2^{2n} + r > 2^{3n}$, что невозможно по условию.

10 класс

649. Из условия следует, что R и один из многочленов P и Q — третьей степени. Пусть, например, R и Q — третьей степени, P — второй. Поменяв, если это нужно, знаки многочленов на противоположные, можно считать, что коэффициенты при x^3 у R и Q положительны. Тогда из равенства $P^2 = R^2 - Q^2 = (R+Q)(R-Q)$, где $R+Q$ — третьей степени, следует, что $R-Q$ — первой степени, т. е. $R - Q = t(x - x_1)$, $t > 0$ (коэффициент при x^4 у P^2 положителен).

Тогда $P \vdots x - x_1$, поэтому и $R + Q \vdots x - x_1$, и так как $R - Q \vdots x - x_1$, то $R \vdots x - x_1$, $Q \vdots x - x_1$, т. е. $R = (x-x_1)R_1$, $Q = (x-x_1)Q_1$, где R_1 и Q_1 — квадратичные функции с положительными коэффициентами при x^2. Пусть $P = a(x-x_1)(x-x_2)$. Из равенства

$$a^2(x-x_2)^2 = (R_1+Q_1)(R_1-Q_1)$$

следует, что $R_1 - Q_1 = t = \mathrm{const} > 0$. Значит, $R_1 = Q_1 + t$, поэтому

$$a^2(x - x_2)^2 = (2Q_1 + t) \cdot t,$$

т. е. $Q_1 = \frac{a^2}{2t}(x - x_2)^2 - \frac{t}{2}$ — трехчлен, имеющий два действительных корня. Тогда Q имеет три действительных корня.

650. Запишем $MB^2 = MA \cdot MD = \frac{1}{2} MD^2$, $KA^2 = KB \cdot KC = \frac{1}{2} KC^2$.

Отсюда, используя теорему синусов, получаем: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AK}{KC} = \frac{\sin\angle ACK}{\sin\angle CAK}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BM}{MD} = \frac{\sin\angle BDM}{\sin\angle DBM}$. Но $\sin\angle ACK = \sin\angle BDM$, поскольку $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Следовательно, $\sin\angle CAK = \sin\angle DBM$. Это означает, что имеются следующие две возможности.

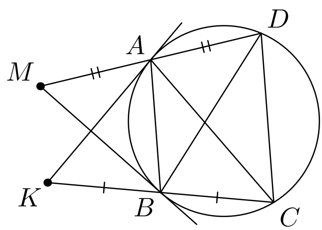


Рис. 294

1) $\angle CAK = \angle DBM$. В этом случае треугольники CAK и BDM подобны по двум углам. Кроме того, AB является общей медианой к соответственным сторонам этих треугольников. Значит, треугольники CAK и DBM подобны с коэффициентом подобия 1, т. е. эти треугольники равны. Следовательно, $AD = MD/2 = KC/2 = BC$. Таким образом, $ABCD$ — вписанная трапеция, $AB \parallel CD$.

2) $\angle CAK + \angle DBM = 180°$. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle CAK = \angle CDA$, $\angle DBM = \angle DCB$. Значит, $\angle CDA + \angle DCB = 180°$, откуда следует, что $AD \parallel BC$.

651. Пусть x — наибольшее целое число, квадрат которого не превосходит n: $x^2 \leqslant n < (x+1)^2$. Так как n — целое, $n - x^2 \leqslant 2x \leqslant 2\sqrt{n}$. Пусть, далее, y — наименьшее натуральное число, квадрат которого больше $n - x^2$: $(y-1)^2 \leqslant n - x^2 < y^2$. Тогда $y = (y-1)+1 \leqslant \sqrt{n - x^2} + 1 \leqslant \sqrt{2\sqrt{n}} + 1 = \sqrt{2}\sqrt[4]{n} + 1$. Ясно, что $m = x^2 + y^2 > n$, т. е. m представимо в виде суммы двух квадратов и $m - n > 0$.

С другой стороны,

$$m - n = x^2 + y^2 - n = y^2 - (n - x^2) \leqslant y^2 - (y-1)^2 = 2y - 1 \leqslant 2\sqrt{2}\sqrt[4]{n} + 1.$$

Осталось заметить, что при $n > 10\,000$

$$2\sqrt{2}\sqrt[4]{n} + 1 < 3\sqrt[4]{n}.$$

652. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра — дорогам, существовавшим в стране до начала всех преобразований. По условию, над этим графом несколько раз подряд проделывается следующая операция: удаляются все ребра некоторого простого цикла, а все вершины этого цикла соединяются с новой вершиной. Докажем, что в графе, получившемся после окончания всех преобразований, все вершины исходного графа будут иметь степень 1. Поскольку таких вершин ровно 2002, это даст нам полное решение задачи.

Рассмотрим произвольную вершину v, принадлежащую исходному графу. По условию, при удалении этой вершины (и всех выходящих из нее ребер) из исходного графа образуется связный граф. Докажем, что это свойство сохраняется после применения к графу описанной в условии операции.

Рассмотрим произвольный граф G и вершину u этого графа, при удалении которой образуется связный граф. Пусть после применения к графу G описанной в условии операции образовался граф G'. Рассмотрим произвольный путь в графе G, не проходящий через u. В графе G' некоторые ребра этого пути могут быть удалены, но их концы должны быть соединены с новой вершиной (обозначим ее w). Таким образом, заменив минимальный участок пути, содержащий все удаленные ребра, на пару ребер, соединяющих концы этого участка с вершиной w, мы получим путь в графе G', имеющий те же концы и не проходящий через u. Это означает, что если мы удалим из графа G' вершину u, то для любых двух вершин получившегося графа мы можем найти соединяющий их путь. Для старых (отличных от w) вершин этот путь получается описанным выше способом из пути, соединяющего их в графе, образовавшемся при удалении u из графа G, а вершина w должна быть соединена ребром хотя бы с одной из старых вершин, которая соединена путями со всеми остальными вершинами данного графа. Таким образом, при удалении вершины u из графа G' также образуется связный граф.

Из доказанного следует, что после всех преобразований при удалении из получившегося графа вершины v образуется связный граф. Тогда, если степень вершины v в получившемся графе больше 1, то между двумя соединенными с v вершинами есть не проходящий через v путь. Этот путь вместе с вершиной v и двумя выходящими из нее ребрами образует в получившемся графе простой цикл, что по условию невозможно. Таким образом, степень вершины v в этом графе равна 1.

653. Рассмотрим равенство $(a+b+c)^2 = 9$. Тогда
$$ab + bc + ca = \frac{9 - a^2 - b^2 - c^2}{2}.$$
Следовательно, нужно доказать, что
$$2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} + a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 9.$$
Для этого заметим, что $2\sqrt{a} + a^2 \geqslant 3a$. Действительно, согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, $2\sqrt{a} +$

$+ a^2 = \sqrt{a} + \sqrt{a} + a^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^3} = 3a$. Тогда $2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{a} + a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3(a + b + c) = 9$.

654. См. решение задачи 646.

655. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности с соответствующими сторонами $\triangle ABC$ (см. рис. 295). Проведем через A_1 прямую a_1, параллельную биссектрисе угла A. Так как $\triangle AB_1C_1$ равнобедренный, то биссектриса угла A перпендикулярна B_1C_1, поэтому проведенная через A_1 прямая, будучи перпендикулярной B_1C_1, является высотой $\triangle A_1B_1C_1$.

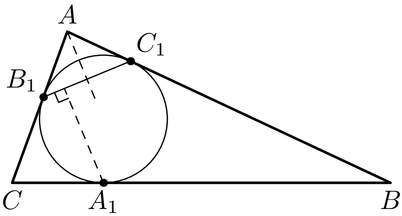


Рис. 295

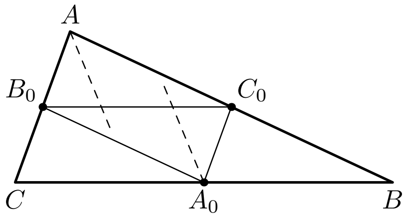


Рис. 296

Пусть A_0, B_0 и C_0 — середины соответствующих сторон $\triangle ABC$ (см. рис. 296). Так как $\triangle ABC$ и $\triangle A_0B_0C_0$ гомотетичны с коэффициентом $-\frac{1}{2}$, то биссектрисы углов A и A_0 параллельны. Обозначим точку пересечения биссектрис $\triangle A_0B_0C_0$ через S.

Как известно, точки A_1 и A' равноудалены от середины своей стороны (то же верно для точек B_1 и B', C_1 и C').

Рассмотрим симметрию относительно точки S. При этой симметрии прямая a_1, перейдет в прямую a. Таким образом, при этой симметрии каждая из высот $\triangle A_1B_1C_1$ перейдет в одну из прямых a, b и c, следовательно, эти прямые пересекутся в точке, симметричной ортоцентру $\triangle A_1B_1C_1$ относительно центра S окружности, вписанной в серединный треугольник $A_0B_0C_0$.

656. Предположим противное. Заметим, что через любую точку пересечения двух прямых проходит красная прямая. Рассмотрим синюю прямую l; пусть A, B — две наиболее удаленные друг от друга точки пересечения l с красными прямыми, m и n — красные прямые, проходящие через A и B; C — точка пересечения m и n. Тогда через C проходит синяя прямая p, которая пересекает l в какой-то точке D отрезка AB, иначе A и B — не наиболее удаленные (см. рис. 297).

Рассмотрим все четверки прямых l', m', n', p', расположенных как l, m, n, p (l', p' — одного цвета; m', n' — другого; m', n', p' пересекаются в одной точке; точка пересечения p' и l' лежит между точками пересечения l' с m' и n'), и рассмотрим среди них такую, в которой прямые l', m', n' обра-

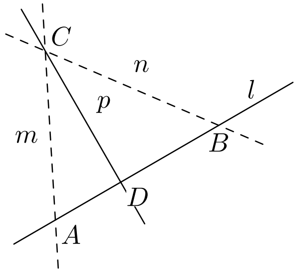


Рис. 297

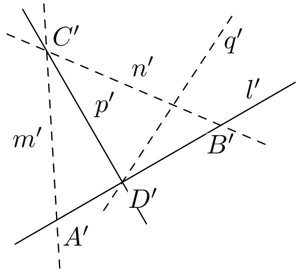


Рис. 298

зуют треугольник наименьшей площади (см. рис. 298). Тогда через точку D' проходит прямая q', одноцветная с m'. Она пересекает либо отрезок $B'C'$, либо $A'C'$ (пусть, для определенности, $B'C'$). Тогда прямые n', l', p', q' образуют конфигурацию с треугольником меньшей площади. Противоречие.

Замечание. Найти хотя бы одну пару прямых l, m, n, p можно бы было и по-другому: взять какую-нибудь четверку прямых l, m, n, p нужных цветов (так, чтобы m, n, p пересекались в одной точке) и проективным преобразованием добиться того, чтобы точка D пересечения p и l лежала между A и B.

11 класс

657. См. решение задачи 649.

658. ***Первое решение.*** Рассмотрим любые 3 точки A, B и C, не лежащие на одной прямой (если все точки будут лежать на одной прямой, то утверждение задачи очевидно). Пусть T_1 — система координат, в которой эти точки имеют целые координаты. Рассмотрим любую из оставшихся точек, назовем ее D. Пусть T_2 — система координат, в которой точки B, C, D имеют целые координаты. Поскольку квадрат длины отрезка BC в T_1 и T_2 будет целым, то отношение квадратов единиц измерения T_1 и T_2 — рациональное число. Но скалярное произведение векторов $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ в T_2 — целое, значит, в T_1 оно рационально, поскольку произведение длин этих векторов в T_1 будет рационально относиться к произведению их длин в T_2, а косинус угла не изменится. Аналогично, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$ рационально. Пусть $\overrightarrow{BC}$ в T_1 — это (x, y), $\overrightarrow{BA}$ — это (z, t), $\overrightarrow{BD}$ — это (p, q). Тогда $px + qy = m$ и $pz + qt = n$ — рациональны, откуда $p = \frac{mt - ny}{xt - yz}$, $q = \frac{nx - mz}{xt - yz}$ — рациональные числа (поскольку $xt - yz \neq 0$, так как A, B, C не лежали на одной прямой). Следовательно, точка D в T_1 имеет рациональные координаты. Тогда, выбрав другую единицу измерения, можно координаты всех точек сделать целыми.

Второе решение. Как и в первом решении, можно считать, что в нашем множестве найдутся точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Докажем, что $\operatorname{tg}\angle BAC$ — либо рациональное число, либо не существует. Рассмотрим координаты этих точек в системе, соответствующей тройке A, B, C. Если $x_A = x_B$ (случай $x_A = x_C$ аналогичен), то $\operatorname{tg}\angle BAC = \pm\frac{x_C - x_A}{y_C - y_A}$ рационален (или не существует). Если же $x_B \neq x_A$ и $x_C \neq x_A$, то числа $p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ и $q = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$ рациональны. Но $p = \operatorname{tg}\alpha$, $q = \operatorname{tg}\beta$, где α и β — углы, образуемые лучами AB и AC с положительным направлением оси Ox, поэтому из формулы $\operatorname{tg}\angle CAB = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{p-q}{1+pq}$ следует рациональность $\operatorname{tg}\angle BAC$ (или тангенс не существует, если $pq = -1$). Аналогично, рациональными являются тангенсы углов всех треугольников с вершинами в данных точках. Рассмотрим систему координат с центром A и единичным вектором по оси Ax, равным $\overrightarrow{AB}$. Для любой точки D нашего множества $\operatorname{tg}\angle DAB$ и $\operatorname{tg}\angle DBA$ рациональны, поэтому уравнения прямых AD и BD имеют рациональные коэффициенты. Тогда и точка D имеет рациональные координаты. Изменив масштаб, мы получим целочисленные координаты у всех точек.

659. ***Первое решение.*** Достаточно доказать это неравенство при $0 < x < \frac{\pi}{4}$ (при $x = \frac{\pi}{4}$ оно очевидно, при $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ получается заменой $y = \frac{\pi}{2} - x$). При $k \geqslant 2$ имеем

$$\begin{aligned}\cos^k x - \sin^k x &= (\cos^k x - \sin^k x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \\ &= (\cos^{k+2} x - \sin^{k+2} x) + \sin^2 x\cos^2 x(\cos^{k-2} x - \sin^{k-2} x) \geqslant \\ &\geqslant \cos^{k+2} x - \sin^{k+2} x.\end{aligned}$$

Поэтому неравенство сводится к случаю $n = m + 1$, за исключением $n = 3$. Кроме того,

$$\frac{\cos^n x - \sin^n x}{\cos^{n-1} x - \sin^{n-1} x} \leqslant \frac{\cos^k x - \sin^k x}{\cos^{k-1} x - \sin^{k-1} x}$$

при $n \geqslant k > 1$. Действительно, приведя к общему знаменателю, получаем неравенство

$$\sin^{k-1} x\cos^{k-1} x(\cos^{n-k} x - \sin^{n-k} x)(\cos x - \sin x) \geqslant 0,$$

которое очевидно. Поэтому неравенство сводится к случаям $n = 3$, $m = 1$ и $n = 2$, $m = 1$. Докажем их:

$$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) \leqslant \frac{3}{2}(\cos x - \sin x),$$

поскольку $\cos x\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$;

$$\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \leqslant \frac{3}{2}(\cos x - \sin x),$$

ибо $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\bigl(x + \frac{\pi}{4}\bigr) \leqslant \frac{3}{2}$.

Второе решение. Опять же, неравенство достаточно доказать для $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Рассмотрим $f(y) = \cos^y x - \sin^y x$, где $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $y \geqslant 0$. Имеем: $f(0) = 0$, $f(y) > 0$ при $y > 0$, $f(y) \to 0$ при $y \to \infty$. Далее,

$$f'(y) = \cos^y x \ln\cos x - \sin^y \ln\sin x = \cos^y x(\ln\cos x - \operatorname{tg}^y x \ln\sin x),$$

поэтому $f'(y)$ имеет единственный корень при $y > 0$, так как функция $g(y) = \operatorname{tg}^y x$ монотонна. Из $f(2) = f(2)(\cos^2 x + \sin^2 x) = f(4)$ следует, что $f'(2) > 0$, $f'(4) < 0$. Отсюда, при $n > m \geqslant 3$ получаем неравенство

$$|\sin^n x - \cos^n x| \leqslant |\sin^m x - \cos^m x|.$$

Если же $m \leqslant 2$, то из соотношений $f(1) \leqslant f(2) \leqslant f(3) \geqslant f(n)$ при $n > 3$ видно, что достаточно доказать неравенство $3f(1) \geqslant 2f(3)$, которое следует из $\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2} \leqslant \frac{1}{2}$, поскольку $f(3) = f(1)(1 + \sin x\cos x) \leqslant \frac{3}{2} f(1)$.

660. Сначала докажем, что если с любой площади выходит не более двух улиц, то площади можно покрасить в 13 цветов так, чтобы ни с какой площади нельзя было попасть на площадь того же цвета, проехав менее трех улиц. Для этого рассмотрим следующий вспомогательный ориентированный граф: его вершинами будут площади, а ориентированными ребрами будут соединены пары площадей, между которыми в нашем городе есть путь, проходящий не более, чем по двум улицам. Легко видеть, что в этом графе из каждой вершины выходит не более 6 ребер. Нужно доказать, что вершины этого графа можно раскрасить в 13 цветов правильным образом.

Это утверждение легко доказывается индукцией по числу вершин. Действительно, в случае, если вершин не больше 13, утверждение очевидно. Далее, легко видеть, что если в ориентированном графе из каждой вершины выходит не более 6 ребер, то существует вершина, в которую входит не более 6 ребер. Удалив из графа эту вершину, мы получим граф, удовлетворяющий нашему условию и содержащий меньшее число вершин. По индуктивному предположению, мы можем раскрасить вершины этого графа в 13 цветов, после чего удаленную вершину мы также можем покрасить в один из цветов, так как она соединена не более, чем с 12 вершинами.

Теперь для каждого цвета разделим все площади данного цвета на 78 типов, в зависимости от того, на площади каких цветов ведут улицы, выходящие с данной площади. Поскольку других цветов 12, для каждого цвета есть 12 вариантов, в которых обе улицы ведут на площади одного цвета, и $\frac{12\cdot 11}{2} = 66$ вариантов, в которых они ведут на площади разных цветов. Итого, 78 вариантов. Таким образом, мы можем разбить все площади на $78 \cdot 13 = 1014$ районов.

Докажем, что полученное разбиение подходит. Пусть в районе A есть площади a_1 и a_2, а в районе B — площади b_1 и b_2 такие, что из a_1 выходит улица, ведущая на b_1, а из b_2 — на a_2. Тогда, поскольку площади b_1 и b_2 принадлежат одному району, из них выходят улицы, ведущие на площади одних и тех же цветов. Это означает, что из b_1 выходит улица, ведущая на площадь того же цвета, что и a_2, а следовательно, того же цвета, что и a_1. Таким образом, мы получили путь длины 2 между площадями одного цвета, что невозможно. Полученное противоречие завершает решение задачи.

661. **Ответ.** 10010.

Пусть для натурального числа n имеют место указанные представления:

$$n = a_1 + \ldots + a_{2002} = b_1 + \ldots + b_{2003}.$$

Воспользуемся тем, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{2002}$ дает такой же остаток при делении на 9, что и сумма цифр; обозначим этот остаток через r $(0 \leqslant r \leqslant 8)$, а соответствующий остаток для чисел $b_1, \ldots, b_{2003}$ — через s $(0 \leqslant s \leqslant 8)$.

Тогда числа $n - 2002r$ и $n - 2003s$ кратны 9, а значит, и число $(n - 2002r) - (n - 2003s) = 2003s - 2002r = 2003(r + s) - 4005r$ кратно 9. Число $4005r$ также кратно 9, а число 2003 — взаимно просто с 9; отсюда следует, что число $r + s$ кратно 9.

Если при этом $r = s = 0$, то $n \geqslant 9 \cdot 2003$ (поскольку $b_1, \ldots, b_{2003}$ делятся на 9). Если же $r \neq 0$, то $r + s = 9$, и потому имеет место по крайней мере одно из неравенств: $r \geqslant 5$ или $s \geqslant 5$; для числа n получаются неравенства $n \geqslant 5 \cdot 2002$ или $n \geqslant 5 \cdot 2003$ соответственно.

А так как $10010 = 5 \cdot 2002 = 4 \cdot 2002 + 2002 \cdot 1$, и числа 4 и 2002 имеют одинаковую сумму цифр, то число 10010 — искомое.

662. Будем считать, что K лежит в $\triangle AOD$ (все остальные случаи разбираются аналогично).

Пусть L' — точка, симметричная L относительно BC (см. рис. 299). Тогда

$$\angle L'BO = \angle OBC - \angle L'BC = \angle OBC - \angle LBC,$$

но $\angle OBC = \angle OAD$, так как $ABCD$ — вписанный, следовательно,

$$\angle L'BO = \angle OAD - \angle KAD = \angle OAK = \angle OBK,$$

так как $ABOK$ — вписанный. Значит, $\angle L'BO = \angle OBK$. Аналогично, $\angle L'CO = \angle OCK$.

Далее, $\angle BKO = \angle BAO = \angle CDO = \angle CKO$, так как четырехугольники $ABCD$, $ABOK$ и $CDKO$ — вписанные.

Теперь рассмотрим четырехугольник $BL'CK$ (см. рис. 300). Пусть N — точка пересечения CK и BL', M — точка пересечения BK и CL'.

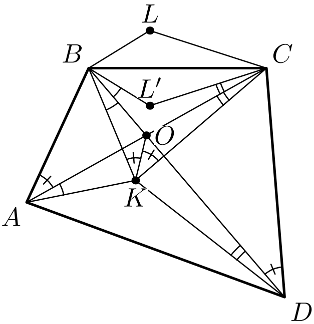


Рис. 299

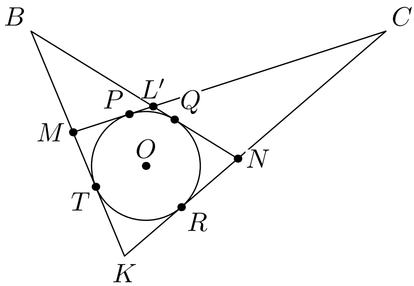


Рис. 300

Так как CO — биссектриса $\angle MCK$, BO — биссектриса $\angle NBK$, а KO — биссектриса $\angle MKN$, то O равноудалена от сторон четырехугольника $ML'NK$ и является центром вписанной в него окружности. Пусть P, Q, R, T — точки касания этой окружности со сторонами ML', $L'N$, NK и KM соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} CK + BL' &= (CR + KR) + (BQ - L'Q) \\ &= CP + KT + BT - L'P = (KT + BT) + (CP - L'P) \\ &= KB + CL'. \end{aligned}$$

Значит, $CK + BL = KB + CL$, и четырехугольник $BLCK$ является описанным, что и требовалось доказать.

663. См. решение задачи 656.

664. Положим

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{A(n)}{B(n)},$$

где $A(n)$ и $B(n)$ взаимно просты.

Заметим, что $B(n) > n/2$ (действительно, наибольшая степень двойки, не превосходящая n, является делителем ровно одного из чисел $1, 2, \ldots, n$ и потому является делителем знаменателя суммы $S(n)$).

Предположим, что при всех $n \geqslant n_0$ число $A(n)$ является степенью простого. Пусть $p > n_0 + 5$ — простое число. Тогда $A(p-1) \vdots p$ (слагаемые суммы $S(p-1)$ разбиваются на пары, для каждой из которых числитель суммы делится на p). Следовательно, $A(p-1) = p^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Далее, докажем, что числитель $A(p^n - 1)$ также кратен p (и, стало быть, является степенью p) при всех натуральных n.

Проведем индукцию по n.

База доказана.

Переход от $n-1$ к n. Имеем: $S(p^n-1) = S(p^{n-1}-1)/p + S'$, где $S' = \sum\limits_{d \leqslant p^n-1,\, p \not\vdots d} \frac{1}{d}$ (первое слагаемое как раз равно сумме слагаемых со знаменателями, делящимися на p). Сумма S' разбивается на несколько (а именно, p^{n-1}) сумм вида $\sum\limits_{i=1}^{p-1} \frac{1}{pl+i}$, $l = 0, 1, \ldots, p^{n-1}-1$. Каждая из них имеет числитель, делящийся на p, что устанавливается как и для $S(p-1)$. Осталось убедиться, что числитель дроби $S(p^{n-1}-1)/p$ делится на p. Действительно, $A(p^{n-1}-1) = p^s$ в силу индуктивного предположения, причем $s > 1$ (вспомним, что $B(p^{n-1}-1) \geqslant p^{n-1}/2 \geqslant p/2$, а $S(p^{n-1}-1) \geqslant S(n_0+4) \geqslant S(4) > 2$).

Положим $H_p(n) := S(p^n-p) - S(p^n-1) = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \frac{1}{-p^n+i}$. Если $n > k$, то числитель дроби $H_p(n)$ делится на p^k, но не на p^{k+1} (ибо $H_p(n) - S(p-1)$ — дробь, числитель которой делится на p^n). Отсюда получаем, что оба числителя $A(p^n-1)$ и $A(p^n-p)$ делятся на p, но один из них не делится на p^{k+1}. Значит, одна из дробей $S(p^n-1)$ и $S(p^n-p)$ не превосходит $\frac{2p^k}{(p^n-p)} < 1$ при $n = k+2$ — противоречие.

2002–2003 г.

9 класс

665. Возьмем три различных числа $a, b, c \in M$. Из рациональности чисел $a^2 + b\sqrt{2}$, $b^2 + a\sqrt{2}$, $c^2 + a\sqrt{2}$, $c^2 + b\sqrt{2}$ следует рациональность чисел $a^2 + b\sqrt{2} - (b^2 + a\sqrt{2}) = (a-b)(a+b-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(a\sqrt{2} - b\sqrt{2})(a\sqrt{2} + b\sqrt{2} - 2)$ и $c^2 + a\sqrt{2} - (c^2 + b\sqrt{2}) = a\sqrt{2} - b\sqrt{2}$, т. е. числа $a\sqrt{2} + b\sqrt{2}$. Значит, $a\sqrt{2} = \frac{1}{2}(a\sqrt{2} + b\sqrt{2} + a\sqrt{2} - b\sqrt{2})$ рационально.

666. Заметим, что $\angle LAK = \angle BAK + \angle BAL = 1/2(\angle BO_2A + \angle BO_1A) = \angle BO_2O_1 + \angle BO_1O_2 = 180^\circ - \angle LBK$, поэтому четырехугольник $ALBK$ — вписанный. Но тогда $\angle BO_2O_1 = \angle BAL = \angle BKL$, следовательно $O_1O_2 \parallel KL$.

667. Достаточно доказать следующее утверждение: если любой белый отрезок пересекается хотя бы с k черными, то найдется черный, пересекающийся со всеми белыми.

Предположим противное. Выберем для каждого черного отрезка белый, не пересекающийся с ним. Такой белый отрезок лежит либо левее соответствующего черного, либо правее его. Следовательно, есть хотя бы k черных отрезков, для каждого из которых «его» белый отрезок лежит по одну и ту же сторону от него (пусть, для определенности, левее). Для каждого из этих черных отрезков его левый конец лежит правее правого конца соответствующего ему белого отрезка. Тогда, если мы выберем из правых концов белых отрезков самый левый, то он будет лежать левее хотя бы k левых концов черных отрезков, т. е. этот белый отрезок не будет пересекаться ни с одним из этих k отрезков. Противоречие.

668. **Ответ.** $a_{2003} = 10p$.

Пусть в записи числа $1/n$ есть предпериод A из m цифр и период B из k цифр. Тогда из формулы суммы геометрической прогрессии имеем

$$\frac{1}{n} = \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^m(10^k-1)} = \frac{A(10^k-1)+B}{10^m(10^k-1)}$$

Следовательно, $10^m(10^k-1) \vdots n$. Наоборот, пусть m, k — наименьшие числа такие, что $10^m(10^k-1) \vdots n$ (т. е. m есть максимальная из степеней двойки и пятерки, на которые делится n, а k — минимальное число такое, что $(10^k-1) \vdots \frac{n}{\text{НОД}(n, 10^m)}$), и пусть $C = \frac{10^m(10^k-1)}{n}$. Положим $A = \left[\frac{C}{10^k-1}\right]$, $B = C - A(10^k-1)$. Тогда $B < 10^k-1$, $A < 10^m$, и дробь $1/n$ имеет предпериод A (с нулями, дополняющими его до m цифр) и период B (аналогично), ибо m и k были выбраны минимальными.

Из условия на p следует, что $p \neq 2$, $p \neq 5$ и p не может быть числом, в десятичной записи которого присутствуют только нули и единицы. Последнее следует из того, что сумма цифр такого числа должна равняться 300, и, значит, оно не простое. Мы докажем, что последовательность $\{a_n\}$ будет периодической с периодом 2. Период обыкновенной дроби $1/p$ равен $(10^n-1)/p$, где n — наименьшее натуральное число, для которого $(10^n-1) \vdots p$. Таким образом, $a_2 = 2(10^n-1)/p$. Докажем, что $a_3 = 10p$. Поскольку a_2 делится на 2, но не делится ни на 2^2, ни на 5, период обыкновенной дроби $1/a_2$ будет равен $(10^{k+1}-10)/a_2$, где k — наименьшее натуральное число, для которого $(10^{k+1}-10) \vdots a_2 = 2(10^n-1)/p$ (в обозначениях первого абзаца $A = 0$, так как $a_2 > 10$ ($a_2 \vdots 18$), поэтому $B = C$). Следовательно, k является наименьшим натуральным числом, для которого

$$(10^k-1)p \vdots 10^n - 1. \qquad (*)$$

Покажем, что в этом случае $k = n$. Сначала установим, что $n \vdots k$. Предположим противное, тогда $n = kq + r$, где $0 < r < k$. Заметим, что

$$(10^{kq}-1)p \vdots (10^k-1)p \vdots (10^n-1) \quad \text{и} \quad (10^n-1) \vdots (10^n-1).$$

А значит,

$$10^{kq}(10^r-1)p = ((10^n-1)p - (10^{kq}-1)p) \vdots (10^n-1).$$

Стало быть, $(10^r-1)p \vdots (10^n-1)$, что невозможно, ибо k было наименьшим числом, удовлетворяющим условию $(*)$. Поэтому, $n = km$ и $(10^k -$

$-1)p \,\vdots\, (10^{mk}-1)$. Отсюда заключаем, что $p \,\vdots\, (10^{k(m-1)} + 10^{k(m-2)} + \ldots$ $\ldots + 10^k + 1)$. Но p — простое число, следовательно, если $m \neq 1$, то $p = 10^{k(m-1)} + 10^{k(m-2)} + \ldots + 10^k + 1$, что невозможно, ибо p не может быть числом из нулей и единиц. Итак, мы установили, что $k = n$, а значит $a_3 = (10^{n+1} - 10)/a_2 = 10p$. Для завершения решения осталось лишь заметить, что периоды чисел $1/p$ и $1/(10p)$ равны.

669. Переформулируем задачу на языке графов. Нам дан полный граф с N вершинами, ребра которого покрашены в два цвета. Требуется доказать, что мы можем выделить в этом графе цикл, проходящий через все вершины, состоящий не более чем из двух одноцветных частей. Доказательство проведем по индукции. Для полного графа с тремя вершинами утверждение очевидно. Пусть доказываемое утверждение верно для $N = k$. Рассмотрим полный граф с $k+1$ вершиной. Удалим из рассмотрения одну вершину M с выходящими из нее ребрами. Для оставшегося графа с k вершинами по предположению индукции существует цикл, проходящий через все вершины, состоящий не более чем из двух одноцветных частей. Возможны два случая.

1) Все ребра цикла окрашены в один цвет. Занумеруем вершины цикла по порядку $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Тогда, удалив ребро A_1A_2 и соединив вершину M с вершинами A_1 и A_2, мы получим цикл, состоящий не более чем из двух одноцветных частей.

2) Не все ребра цикла окрашены в один цвет. Пусть изменение цвета происходит в вершинах A_1 и A_m, т. е. в цикле есть две одноцветные части: $A_1A_2\ldots A_m$ (первого цвета) и $A_mA_{m+1}\ldots A_1$ (второго цвета). Тогда посмотрим на цвет ребра A_mM. Если это ребро первого цвета, то цикл $A_1A_2\ldots A_mMA_{m+1}\ldots A_1$ — искомый, если же оно второго цвета, то искомым будет цикл $A_1A_2\ldots A_{m-1}MA_m\ldots A_1$.

То есть в любом случае мы получили требуемый цикл с $k+1$ вершиной.

670. ***Первое решение.*** Воспользуемся следующими неравенствами: $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} \geqslant \dfrac{4}{a+2b+c}$, $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geqslant \dfrac{4}{b+2c+a}$, $\dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b} \geqslant \dfrac{4}{c+2a+b}$, которые следуют из очевидного неравенства $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{4}{x+y}$ для положительных x, y. Сложив эти 3 неравенства, получим неравенство $\dfrac{2}{a+b} + \dfrac{2}{b+c} + \dfrac{2}{c+a} \geqslant \dfrac{4}{a+2b+c} + \dfrac{4}{b+2c+a} + \dfrac{4}{c+2a+b}$, которое после сокращения на 2 и замены в знаменателях дробей $a+b+c$ на 1 превратится в доказываемое неравенство.

Второе решение. Не умаляя общности, можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c$, тогда $1 - c^2 \geqslant 1 - b^2 \geqslant 1 - a^2$ и, следовательно,

$$\frac{1}{1-a^2} \geqslant \frac{1}{1-b^2} \geqslant \frac{1}{1-c^2}\,.$$

Заметим, что
$$\frac{1}{1-a}-\frac{2}{1+a}=\frac{3a-1}{1-a^2}\,.$$
Таким образом, нужно доказать неравенство
$$\frac{3a-1}{1-a^2}+\frac{3b-1}{1-b^2}+\frac{3c-1}{1-c^2}\geqslant 0.$$
Поскольку сумма числителей равна 0, неравенство будет доказано, если мы заменим знаменатели на равные таким образом, что каждая дробь при этом не увеличится. Если $a\geqslant b\geqslant \frac{1}{3}\geqslant c$, то заменим все знаменатели на $1-c^2$, в результате отрицательное слагаемое не изменится, а положительные не увеличатся. Если $a\geqslant \frac{1}{3}\geqslant b\geqslant c$, то заменим все знаменатели на $1-b^2$, тогда положительное и одно из отрицательных слагаемое только уменьшатся, а второе отрицательное слагаемое останется неизменным.

671. **Ответ.** Нельзя.

Рассмотрим любой квадрат A размером 200×200 клеток. Пусть он будет угловым квадратом некоторого квадрата B размером $200t\times 200t$ клеток, где t — некоторое натуральное число, на которое не делится сумма чисел в квадрате A. Разобьем фигуру $B\setminus A$ на прямоугольники размером $200\times 200(t-1)$. В каждом из этих прямоугольников по условию сумма чисел будет делиться на t, в квадрате B — тоже, значит, и в квадрате A сумма чисел будет делиться на t, что невозможно в силу выбора t.

672. Рассмотрим окружности ω_1 и ω_2, построенные на диагоналях AC и BD как на диаметрах. Пусть BB_1, CC_1, AA_1, DD_1 — высоты в треугольниках BPC и APD, соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на ω_1, B_1 и D_1 — на ω_2). Тогда точки A, D_1, A_1, D лежат на одной окружности, поэтому $H_1A\cdot H_1A_1=H_1D\cdot H_1D_1$, т. е. H_1 лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2. Аналогично, H_2 также на ней лежит, следовательно, эта радикальная ось есть прямая H_1H_2. Обозначим через M и N середины диагоналей AC и BD соответственно. Так как точка X по условию лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2, то $XM^2-CM^2=XN^2-DN^2$. Но треугольники XAC и XBD подобны, так как $\angle XAQ=\angle XBQ$, $\angle XCQ=\angle XDQ$, следовательно эти разности квадратов должны относиться как квадрат коэффициента подобия или рав-

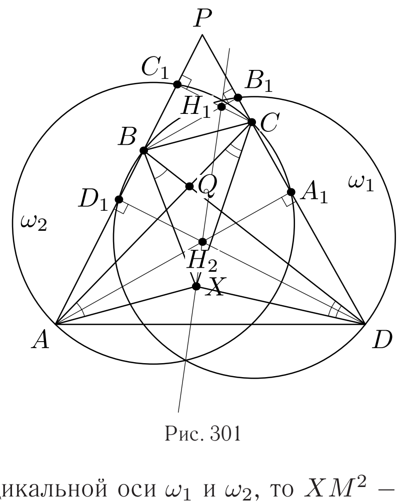


Рис. 301

няться 0. Во втором случае получаем, что $\angle AXC = \angle BXD = 90°$, но тогда прямые AB и CD будут перпендикулярны (так как одна из них будет получаться из другой поворотной гомотетией с углом $90°$ и центром X), что противоречит различности точек H_1 и H_2. Значит, треугольники AXC и BXD будут равны. Но тогда равны будут и треугольники AYC и DYB, так как они подобны (по причинам, аналогичным подобию треугольников AXC и BXD) и имеют равные соответственные стороны ($AC = BD$). Значит, степени точки Y относительно окружностей ω_1 и ω_2 равны (так как $YM = YN, MC = ND$), поэтому она лежит на той же радикальной оси.

10 класс

673. Возьмем четыре различных числа $a, b, c, d \in M$. Из рациональности чисел $d^2 + ab$ и $d^2 + bc$ следует рациональность $bc - ab$, откуда $a^2 + ab = a^2 + bc - (bc - ab) \in \mathbb{Q}$. Аналогично, $b^2 + ab \in \mathbb{Q}$. Поэтому для произвольных различных $a, b \in M$ число $q = \frac{a}{b} = \frac{a^2+ab}{b^2+ab} \in \mathbb{Q}$. Тогда $a = qb \Rightarrow a^2 + ab = b^2(q^2 + q) = l \in \mathbb{Q}, b = \sqrt{\frac{l}{q^2+q}} = \sqrt{\frac{m}{k}}, m, k \in \mathbb{N}$. Значит, число $b\sqrt{n}$, где $n = mk$, рационально. Тогда $c\sqrt{n} = \frac{c}{b} \cdot b\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ для любого $c \in M$.

674. Не умаляя общности, можно считать, что $\angle ABO \geqslant \angle BAO$, тогда

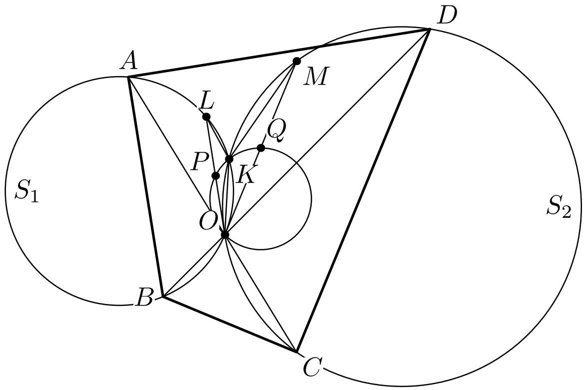


Рис. 302

$ABOL$ и $DCOM$ — равнобокие трапеции (см. рис. 302). Заметим, что LO — касательная к S_2, поскольку $\angle LOD = \angle ABD = \angle OCD$; аналогично OM — касательная к S_1. Тогда $\angle KMO = \angle KOL, \angle KLO = \angle KOM$. Значит, треугольники KOM и KLO подобны. Но тогда подобны и треугольники KOP и KMQ. Отсюда $\angle KPO = \angle KQM = \pi - \angle KQO$. Значит, четырехугольник $KPOQ$ — вписанный.

675. ***Первое решение.*** Рассмотрим ребро l, соединяющее вершины с числами x_i и x_j. Обозначим через $k_i(l)$ число вершин, из которых нельзя пройти в вершину x_i при удалении ребра l. Аналогично, число вершин, из которых нельзя пройти в вершину x_j при удалении ребра l, обозначим $k_j(l)$. Ясно, что $1 \leqslant k_i(l), k_j(l) \leqslant n-1$, $k_i(l)+k_j(l)=n$. Кроме того, для каждого i сумма $\sum\limits_l k_i(l)$ равна $n-1$ (сумма берется по всем ребрам l, выходящим из x_i), так как из вершины x_i можно пройти по ребрам дерева в каждую из оставшихся $n-1$ вершин единственным несамопересекающимся путем.

Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, для данного ребра l получим:

$$\frac{k_i(l)}{\sqrt{n-1}}\,x_i^2+\frac{k_j(l)}{\sqrt{n-1}}\,x_j^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{k_i(l)k_j(l)}{n-1}}|x_ix_j| \geqslant 2x_ix_j. \qquad (*)$$

Последнее неравенство верно, так как $k_i(l)k_j(l) = \frac{(k_i(l)+k_j(l))^2-(k_i(l)-k_j(l))^2}{4} \geqslant \frac{n^2-((n-1)-1)^2}{4} = n-1.$

Сложив неравенства $(*)$ по всем ребрам, получим требуемое неравенство.

Второе решение. Будем проводить операции, не изменяющие чисел в вершинах и не уменьшающие сумму S чисел на ребрах. Достаточно доказать неравенство по окончании этих операций.

Вначале заменим числа в вершинах на их модули, т. е. далее считаем, что $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$.

Выберем наибольшее из чисел x_i, пусть это число x_1. Если нашлась вершина с числом x_i, $i \not\equiv 1$, из которой выходит ровно одно ребро l, ведущее в вершину x_j, $j \neq 1$, то произведем *перестройку*: удалим ребро l, и соединим ребром вершины с числами x_i и x_1. Полученный граф остается деревом, так как количество ребер не изменилось и по-прежнему из любой вершины можно пройти по ребрам в любую другую. После перестройки сумма S изменяется на $x_ix_1-x_ix_j \geqslant 0$. Производим перестройки, пока это возможно. Поскольку при каждой перестройке число ребер, выходящих из вершины с числом x_1, увеличивается, через конечное число шагов мы придем к ситуации, когда невозможно сделать перестройку. В этой ситуации вершина с числом x_1 соединена ребром с каждой из оставшихся $n-1$ вершин. В самом деле, предположим, что некоторая вершина не соединена ребром с вершиной x_1. Пройдем в нее из x_1 по ребрам (не проходя дважды по одному ребру) и продолжим этот путь, пока это возможно. Ясно, что концом этого пути может являться вершина, из которой выходит ровно одно ребро, причем не в вершину с числом x_1. Но это означает, что можно произвести перестройку, — противоречие.

Таким образом, для конечной ситуации $S = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots$ $\ldots + x_1x_n$. Исходное неравенство верно, поскольку $\sqrt{n-1}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = \left(\frac{x_1^2}{\sqrt{n-1}} + \sqrt{n-1}x_2^2\right) + \left(\frac{x_1^2}{\sqrt{n-1}} + \sqrt{n-1}x_3^2\right) + \ldots$ $\ldots + \left(\frac{x_1^2}{\sqrt{n-1}} + \sqrt{n-1}x_n^2\right) \geqslant 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \ldots + 2x_1x_n$.

676. Нам понадобятся две леммы:

Лемма 1. *Если два треугольника T_1 и T_2 гомотетичны с положительным коэффициентом и треугольник T_2 пересекает каждую прямую, содержащую сторону треугольника T_1, то T_2 содержит T_1.*

Доказательство. Очевидно.

Лемма 2. *Для любого конечного множества точек M и треугольника T найдется треугольник T', гомотетичный T с положительным коэффициентом, содержащий M и содержащий на каждой своей стороне какую-то точку из M.*

Доказательство. Рассмотрим какой-то треугольник, положительно гомотетичный T и содержащий M. Если какая-то его сторона не пересекается с M, уменьшим его гомотетией с центром в противоположной этой стороне вершине и добьемся, чтобы сторона пересеклась с M и треугольник все еще содержал M. Повторяя это для каждой стороны, получим требуемое.

Заметим, что в условии предыдущей леммы любой положительно гомотетичный T треугольник, содержащий M, содержит также и T' по лемме 1.

Теперь перейдем к решению задачи. Применим лемму 2 к T и X. Получим треугольник, обозначим его для определенности ABC. На сторонах BC, AC и AB есть соответственно три точки x_A, x_B и x_C из множества X, среди которых могут быть совпадающие.

Если ABC не превосходит T по размерам, доказательство очевидно закончено. Иначе рассмотрим три треугольника AB_AC_A, A_BBC_B и A_CB_CC, положительно гомотетичные ABC с центрами в его вершинах и равные исходному T. Обозначим подмножества множества X

$$X_A = X \setminus \triangle AB_AC_A \quad X_B = X \setminus \triangle A_BBC_B \quad X_C = X \setminus \triangle A_CB_CC.$$

Докажем еще одну лемму:

Лемма 3. *Если какой-то треугольник T', получающийся из T параллельным переносом, содержит точки x_A и x_B, то он не может пересекать множество X_C. Аналогично для других пар точек и соответствующего им множества.*

Доказательство. Предположим противное. Так как T' содержит x_A и x_B, то одна из этих точек лежит по одну сторону с C относительно $A_C B_C$, иначе длина стороны T' больше $A_C B_C$.

Тогда можно заметить, что T' пересекает все прямые сторон $A_C B_C C$, а значит содержит $A_C B_C C$. Так как эти треугольники равны, то они совпадают, но тогда T' не может пересекать X_C.

Теперь применим лемму 2 к треугольнику T и множествам X_A, X_B, X_C, получим треугольники T_A, T_B, T_C, причем на их сторонах можно выбрать точки $\{x_{AB}, x_{AC}, x_A\}$, $\{x_{BA}, x_{BC}, x_B\}$, $\{x_{CA}, x_{CB}, x_C\}$ соответственно (некоторые из них могут совпасть), лежащие в соответствующих множествах X_A, X_B, X_C.

К точкам x_A, x_B, x_C, x_{AB}, x_{AC}, x_{BA}, x_{BC}, x_{CA}, x_{CB} применим условие задачи. Они содержатся в треугольниках T_1 и T_2, являющихся параллельными переносами T.

Какие-то две из первых трех точек содержатся в одном из этих треугольников, без ограничения общности $x_A, x_B \in T_1$. Тогда по лемме 3 треугольник T_1 не пересекает множество X_C и все три точки x_C, x_{CA}, x_{CB} содержатся в другом треугольнике T_2. Отсюда следует, что множество X_C содержится в T_2 по лемме 1; значит, треугольники $A_C B_C C$ и T_2 покрывают все множество X.

677. См. решение задачи 669.

678. Условие эквивалентно тому, что начиная с некоторого n число a_n не делится на 5. Докажем это.

Покажем, что найдутся 2 соседних члена последовательности, не делящихся на 5. Предположим противное. Тогда для любого n либо a_{n+1} получается из a_n делением на 5, либо a_{n+2} получается из a_{n+1} делением на 5. Заметим, что всегда $a_{k+1} \leqslant \sqrt{5} a_k$, поэтому $a_{n+2} \leqslant a_n \cdot \sqrt{5}/5 < a_n$. Это означает, что последовательность натуральных чисел $a_1, a_3, a_5, \ldots$ строго монотонно убывает, — противоречие.

Итак, доказано, что найдутся a_k и a_{k+1}, не делящиеся на 5. Докажем, что a_{k+2} также не делится на 5. Так же последовательно получим, что $a_{k+3}, a_{k+4}, \ldots$ не делятся на 5, откуда следует решение задачи. По условию $a_{k+1} = [\sqrt{5} a_k]$, $a_{k+2} = [\sqrt{5} a_{k+1}]$. Положим $a_k = m$, тогда $a_{k+1} = \sqrt{5} m - \alpha$, где $0 < \alpha < 1$. Далее, $a_{k+2} = [\sqrt{5}(\sqrt{5} m - \alpha)] = 5m + [-\sqrt{5}\alpha]$. Но поскольку $0 < \sqrt{5}\alpha < 3$, получаем, что $5m - 3 \leqslant a_{k+2} < 5m$, т. е. a_{k+2} не делится на 5.

679. ***Первое решение.*** В случае $BC \parallel KM$ (т. е. $AB = AC$) утверждение задачи очевидно. Пусть $BC \nparallel KM$.

Пусть R — радиус описанной окружности, I_A и r_A — соответственно центр и радиус окружности ω_a.

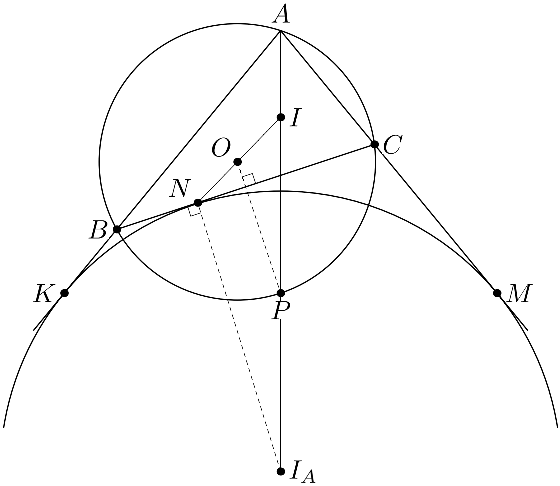


Рис. 303

Поскольку $AK = AM$, прямая AP является биссектрисой угла KAM, следовательно, P — середина дуги BC (см. рис. 303).

Заметим, что $\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90^\circ$, поскольку BI и CI — внутренние биссектрисы, а BI_A и CI_A — внешние биссектрисы треугольника ABC. Отсюда следует, что четырехугольник I_ABIC вписан в окружность с диаметром II_A. Центр этой окружности лежит на пересечении серединного перпендикуляра к BC и прямой II_A (биссектрисе угла BAC), т. е. находится в точке P. Поэтому $PI = PI_A = PB = 2R\sin\angle BAP$. Так как $\angle AKI_A = \angle APK = 90^\circ$, то $\angle I_AKP = \angle BAP$, и ввиду теоремы синусов $2R\sin\angle BAP = PI_A = I_AK\sin\angle BAP = r_A\sin\angle BAP$. Отсюда $2R = r_A \Rightarrow I_AN = 2PO$. Отрезок PO параллелен I_AN (так как они оба перпендикулярны BC), проходит через середину P отрезка II_A и равен $\frac{I_AN}{2}$, поэтому PO — средняя линия треугольника II_AN, поэтому O — середина отрезка IN.

Второе решение. Как и в первом решении, предполагаем $BC \nparallel KM$.

Обозначим через I_A, I_B, I_C соответствующие центры вневписанных окружностей, а через X — середину отрезка MN. Серединные перпендикуляры к отрезкам KM и MN являются биссектрисой угла A и внешней биссектрисой угла C соответственно. Поэтому точки P и X лежат на II_A и I_AI_B соответственно. Как показано в первом решении, точка P — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC и является серединой II_A. PX — средняя линия треугольника KMN, поэтому $PX \parallel KN \parallel II_B$, а поскольку P — середина II_A, PX — средняя линия треугольника I_BI_AI. Поскольку $XN \perp I_AI_B$, точка N лежит на серединном перпендикуляре к I_BI_A (аналогично и к I_AI_C), откуда $NI_B = NI_A = NI_C$. Тогда N — центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$. Заметим, что он лежит на прямой Эйлера этого треугольника, которая также проходит через его ортоцентр I и центр окружности девяти точек O.

680. **Ответ.** 209.

Приведем пример, показывающий, что $N \leqslant 209$. Разделим таблицу на два прямоугольника 20×10 по вертикали. В первом прямоугольнике расставим числа от 1 до 200 по строкам в возрастающем порядке (в первой строке — от 1 до 10, во второй — от 11 до 20 и т. д.). Во втором расставим так же числа от 201 до 400. Тогда максимальная разность между числами в любой строке равна $210 - 1 = 209$, а в любом столбце $191 - 1 = 190$. Поэтому $N \leqslant 209$.

Покажем, что $N = 209$ подходит. Рассмотрим два множества чисел: от 1 до 91 и от 300 до 400. Отметим все строки и столбцы, в которых есть числа первого множества, красным, а второго — синим. Покажем, что красным отмечено не менее 20 линий (т. е. строк или столбцов), а синим — не менее 21 (тогда какая-то линия будет отмечена и красным, и синим, и в ней максимальная разность чисел будет не меньше, чем $300 - 91 = 209$, что и требовалось).

Пусть красным отмечено i строк и j столбцов. Тогда все первое множество находится в клетках их пересечения, поэтому $ij \geqslant 91$. Отсюда $i + j \geqslant 2\sqrt{ij} \geqslant 2\sqrt{91} > 19$. Аналогично, для второго множества сумма числа строк и столбцов $i + j \geqslant 2\sqrt{101} > 20$.

11 класс

681. ***Первое решение.*** Без ограничения общности можно считать $\alpha - \beta \geqslant 0$, $\gamma - \tau \geqslant 0$. Положим $a = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $b = \frac{\alpha-\beta}{2}$, $c = \frac{\gamma+\tau}{2}$, $d = \frac{\gamma-\tau}{2}$, тогда условие задачи перепишется в виде

$$\sin ax \cos bx = \sin cx \cos dx,$$

где $a > b \geqslant 0$, $c > d \geqslant 0$.

Наименьший положительный корень x_0 левой части — число $\frac{\pi}{a}$ или $\frac{\pi}{2b}$, а правой — $\frac{\pi}{c}$ или $\frac{\pi}{2d}$. Если $a = c$, то $\cos bx = \cos dx$ и, значит, $b = d$. Из этих равенств следует требуемое.

Пусть $x_0 = \frac{\pi}{a}$. Если $\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2d}$, то $a = 2d$, и из равенства функций $\sin 2dx \cos bx = \sin cx \cos dx$ следует

$$2 \sin dx \cos bx = \sin cx.$$

Приравнивая наименьшие положительные корни левой и правой частей, получаем $c = d$ (что невозможно) либо $c = 2b$. В последнем случае $\sin bx = \sin dx$, так что $b = d$. Тогда $\sin ax = \sin cx$, т. е. $a = c$. Так же $a = c$ и $b = d$ в случае $\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{c}$. Наконец, в случае $\frac{\pi}{2b} = \frac{\pi}{2d}$ также получаем $b = d$ и $a = c$.

Второе решение.

$$\sin\alpha x + \sin\beta x = \sin\gamma x + \sin\tau x \qquad (1)$$

Продифференцируем данное равенство и положим $x = 0$:

$$\alpha\cos\alpha x + \beta\cos\beta x = \gamma\cos\gamma x + \tau\cos\tau x \Rightarrow \alpha + \beta = \gamma + \tau.$$

Возьмем третью производную и подставим $x = 0$:

$$-\alpha^3\cos\alpha x - \beta^3\cos\beta x = -\gamma^3\cos\gamma x - \tau^3\cos\tau x \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3 + \tau^3.$$

Мы получили систему

$$\begin{cases}\alpha + \beta = \gamma + \tau,\\ \alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3 + \tau^3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \gamma^2 - \gamma\tau + \tau^2,\\ \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \gamma^2 + 2\gamma\tau + \tau^2\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha\beta = \gamma\tau,\\ \alpha + \beta = \gamma + \tau\end{cases} \Rightarrow$ пары (α, β) и (γ, τ) совпадают, что и требовалось.

682. См. решение задачи 674.

683. Предположим что $f \neq g$. Пусть

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

и

$$g(x) = d_k x^k + d_{k-1}x^{k-1} + \ldots + d_1 x + d_0.$$

Поскольку $0 \leqslant c_i \leqslant m < b$, в b-ичной системе счисления число $f(b)$ будет записываться как $\overline{c_n c_{n-1}\ldots c_1 c_0}$. Если все коэффициенты многочлена g также меньше b, то из единственности записи числа $f(b) = g(b)$ в b-ичной системе счисления мы можем заключить, что коэффициенты многочленов f и g совпадают, а значит, $f = g$. Пусть i — наименьший номер, для которого $d_i > b$. Тогда $d_i = bq + r$. Рассмотрим вместо многочлена g новый многочлен g_1, у которого коэффициент d_i заменен на r, а коэффициент d_{i+1} — на $d_{i+1} + q$. Тогда $g_1(b) = g(b)$ не изменится, а $g_1(a) < g(a)$, ибо

$$d_i a^i + d_{i+1}a^{i+1} = (bq + r)a^i + d_{i+1}a^{i+1} >$$
$$> (aq + r)a^i + d_{i+1}a^{i+1} = ra^i + (d_{i+1} + q)a^{i+1}.$$

Далее продолжим эту процедуру со следующим номером i. На каждом шаге i увеличивается хотя бы на 1, и всегда не больше n, поэтому не более чем через n шагов процесс остановится и мы придем к некоторому многочлену g_j, у которого все коэффициенты будут целыми неотрицательными и меньшими b. Тогда по единственности записи числа $f(b) = g_j(b)$ в b-ичной системе счисления следует, что многочлены f и g_j совпадают, но это невозможно, ибо $f(a) = g(a) > g_j(a)$. Противоречие.

684. Назовем *палиндромом* слово, читающееся одинаково справа налево и слева направо. Докажем индукцией по n, что через n минут слово на любой полоске можно будет разрезать на два палиндрома (один из которых, возможно, пустой). Тогда, если эти палиндромы переставить местами, получится то же слово, записанное в обратном порядке.

При $n = 0, 1$ это, очевидно, верно. Пусть $n > 1$. Без ограничения общности можно считать, что на первом ходу Боря приписал к своему слову А слева, т. е. после первого хода написаны слова А и АБ. Посадим Антона и Валю в этот момент за полоски, на которых написаны буквы А и В, и попросим их повторять действия Ани и Бори (т. е. если Аня приписывает к началу Борино слово, то Антон приписывает Валино, и т. п.). Получившийся процесс длится $n-1$ минуту. Тогда в конце процесса слова Антона и Вали можно разрезать на два палиндрома каждое, а если в них заменить каждую букву В на последовательность АБ, то получатся слова Ани и Бори.

Докажем, что если к палиндрому из букв А и В приписать в конце А и заменить каждую букву В на АБ, то получится палиндром. Действительно, пусть перед первой В стояло x_0 букв А, между первой и второй — x_1, $\ldots$, после последней, k-й буквы В — x_k букв А. Тогда $x_i = x_{k+1-i}$ при любом $1 \leqslant i \leqslant k$. В измененном слове перед первой буквой Б будет $x_0 + 1$ букв А, между первой и второй — $x_1 + 1, \ldots$, после последней, k-й буквы Б — $x_k + 1$ букв А. Поскольку $x_i + 1 = x_{k+1-i} + 1$, то полученное слово также будет палиндромом.

Пусть, скажем, Антоново слово из букв А и В разрезается на палиндромы S и T. Пусть S' и T' — слова, полученные заменой В на АБ. Если слово T' непусто, то S'А и T'А — палиндромы, слово T' начинается с А ($T'\text{А} = \text{А}T''\text{А}$), и поэтому T'' — тоже палиндром. Тогда Анино слово разрезается на палиндромы S'А и T''. Если же слово T' пусто, то $S' = \text{А}S''$ (S'' — палиндром) является требуемым разбиением. Доказательство для Бориного слова аналогично.

685. В силу рациональности коэффициентов многочлена, можно считать, что он приведенный. Из теоремы Виета следует, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то $2p = a+b+c = A$, $ab+bc+ba = B$, $abc = C$ рациональны. Тогда из формулы Герона $S^2 = p\cdot(p^3 - Ap^2 + Bp - C)$ следует рациональность S^2. (Действительно, если $f(x) = 0$ —данное кубическое уравнение, то $\frac{S^2}{p} = f(p)$, так как $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.)

Из равенств $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$ следует, что h_a, h_b, h_c — корни уравнения

$$\left(x^2 - \frac{4S^2}{a^2}\right)\left(x^2 - \frac{4S^2}{b^2}\right)\left(x^2 - \frac{4S^2}{c^2}\right) = 0,$$

имеющего рациональные коэффициента в силу тождеств $\frac{4S^2}{a^2} + \frac{4S^2}{b^2} + \frac{4S^2}{c^2} = \frac{4S^2}{C^2}(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = \frac{4S^2}{C^2}(B^2 - 2AC)$, $\frac{16S^4}{a^2b^2} + \frac{16S^4}{b^2c^2} + \frac{16S^4}{c^2a^2} = \frac{16(S^2)^2}{C^2}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{16(S^2)^2}{C^2}(A^2 - 2B)$, $\frac{64S^6}{a^2b^2c^2} = \frac{64(S^2)^3}{C^2}$.

686. См. решение задачи 671.

687. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра — дорогам. Выберем в этом графе самый длинный путь S, пусть вершины A и B — концы этого пути. Из условия задачи следует, что в пути S не более 99 вершин. Отметим, что концы пути S — вершины A и B — не могут быть смежны с вершинами не из S (иначе путь можно удлинить). А в случае, когда вершины A и B смежны и наш путь замыкается в цикл, никакая вершина пути S по аналогичным причинам не может быть смежна с вершиной не из S.

1) Рассмотрим случай, когда в S не более 98 вершин. В этом случае рассмотрим любые две вершины Y_1 и Y_2, не входящие в путь S, и концы пути A и B. Среди этих четырех вершин должны быть проведены хотя бы два ребра. Так как ни A, ни B не могут быть смежны с вершинами не из S, то концы пути A и B соединены ребром.

Таким образом, путь S замыкается в цикл, и тогда ни одна из вершин пути S не смежна с вершиной не из S. Рассмотрим четверку из любых двух вершин X_1 и X_2 пути S и любых двух вершин Y_1 и Y_2, не входящих в S. Так как между этими четырьмя вершинами проведено хотя бы два ребра, то одно из них соединяет X_1 и X_2, а другое — Y_1 и Y_2. Таким образом, в рассматриваемом случае все вершины пути S попарно смежны и все вершины не из S также попарно смежны. Отсюда очевидно следует утверждение задачи.

2) Рассмотрим случай, когда вне пути S лежит ровно одна вершина. Пусть это вершина D. Если D не смежна ни с одной из вершин пути S, то рассмотрим D и любые три вершины пути S. Поскольку среди этих четырех вершин проведено хотя бы два ребра, то среди любых трех вершин пути S проведено хотя бы два ребра. Следовательно, для любой вершины из S есть не более одной не смежной с ней вершины пути S. Поскольку 99 вершин пути S нельзя разбить на пары не соединенных ребром, то в S должна быть вершина, смежная со всеми остальными вершинами S. Эта вершина в паре с D удовлетворяет утверждению задачи.

Если концы максимального пути A и B смежны, то, как мы доказали, вершина D не смежна ни с одной из вершин пути S, а этот случай уже разобран.

Остается рассмотреть последний случай, когда концы пути S не смежны и вершина D смежна хотя бы с одной из вершин пути S. Рассмотрим вершины A, B, D и произвольную четвертую вершину Z (естественно, лежащую на пути S). Так как A, B, и D попарно не смежны, то Z смежна хотя бы с двумя вершинами из A, B, и D. Пусть D смежна с вершиной X пути S. Одна из соседних с X вершин пути S не является концом пути. Можно считать, что это первая вершина Y, лежащая на пути из X в B по ребрам S. Если Y смежна с D, то, пройдя от A к X по пути S, далее по ребрам XD и DY и затем по пути S от Y к B, мы обойдем все вершины нашего графа ровно по одному разу, что невозможно по условию. Если же Y не смежна с D, то, как мы доказали, эта вершина смежна и с A, и с B. Тогда пройдем по ребру DX, далее по пути S от X к A, по ребрам AY и YB, и затем по пути S от его конца B до вершины, соседней с Y на пути S, — получился путь, проходящей по каждой вершине нашего графа ровно один раз, которого по условию не существует. Следовательно, и этот случай не возможен.

Таким образом, мы рассмотрели все случаи и в тех из них, которые возможны, убедились в справедливости утверждения задачи.

688. ***Первое решение.*** Обозначим вершины получающегося тетраэдра A_2, B_2, C_2 и D_2. Тогда тетраэдры $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ гомотетичны, причем эта гомотетия переводит центр вписанной сферы тетраэдра $ABCD$ в центр описанной сферы тетраэдра $A_2B_2C_2D_2$. Покажем, что она переводит центр вписанной сферы тетраэдра $ABCD$ в центр описанной сферы тетраэдра $ABCD$.

Заметим, что точка A_2 — радикальный центр трех точек: B, C, D и вписанной в тетраэдр $ABCD$ сферы, поскольку является точкой пересечения трех радикальных плоскостей (именно эти плоскости рассматриваются в задаче). В связи с этим точка A_2 равноудалена от вершин B, C и D. Поэтому, прямая, проходящая через A_2 перпендикулярно плоскости BCD, проходит через центр описанной сферы $ABCD$. Именно эта прямая является образом при гомотетии прямой, проходящей через A_1 перпендикулярно BCD. Точка пересечения таких прямых — центр вписанной сферы $ABCD$ — переходит таким образом в центр описанной сферы $ABCD$. Что и требовалось.

Второе решение. Пусть O, O_A, O_B, O_C, O_D — центры описанных сфер тетраэдров $ABCD$, $BCDI$, $ACDI$, $ABDI$, $ABCI$ соответственно (I — центр вписанной в $ABCD$ сферы). Покажем, что O — центр описанной сферы тетраэдра $O_AO_BO_CO_D$. Действительно, отрезки OO_A, OO_B, O_AO_B перпендикулярны плоскостям BCD, ACD, ICD соответственно, причем плоскость ICD составляет равные углы с плоскостями BCD и ACD; поэтому $\triangle OO_AO_B$ равнобедренный, $OO_A = OO_B$. Остальные равенства получаются аналогично. Тогда тетраэдры $A_1B_1C_1D_1$ и $O_AO_BO_CO_D$ гомотетичны.

Отложим от точки O_A вектор $\overrightarrow{O_AA_2} = \overrightarrow{IA_1}/2$, аналогично получаются точки B_2, C_2, D_2. Тогда, поскольку плоскости $A_1B_1C_1$ и $O_AO_BO_C$ параллельны, то плоскость $A_2B_2C_2$ также им параллельна; кроме того, поскольку $O_AO_BO_C$ — серединный перпендикуляр к DI, а расстояние между $A_2B_2C_2$ и $O_AO_BO_C$ вдвое меньше расстояния между I и $A_1B_1C_1$, то $A_2B_2C_2$ — плоскость, данная в условии. Но тогда из равенства $OA_2 = OO_A + \frac{IA_1}{2}$ и аналогичных равенств следует требуемое.

2003–2004 г.

9 класс

689. Назовем целочисленную точку *узлом*. Если на каждой вертикальной прямой все узлы одного цвета, то выберем любой узел (пусть он цвета 1). Проведем через него две перпендикулярные прямые, идущие под углом 45° к вертикали и выберем на этих прямых точки цветов 2 и 3 (это возможно, поскольку существуют вертикали этих цветов). Полученный треугольник будет искомым. Аналогично, если все горизонтали одного цвета.

Пусть есть вертикаль v, на которой присутствуют ровно два цвета (скажем, 1 и 2). Тогда выберем любой узел C цвета 3, узел A на v, находящийся с C на одной горизонтали (пусть узел A цвета 1) и узел B цвета 2 на v.

Если же есть вертикаль v, на которой встречаются все три цвета, то выберем горизонталь h, на которой не все точки одного цвета. Пусть точка A их пересечения имеет цвет 1, тогда выберем на h точку B цвета, отличного от 1 (скажем, цвета 2), а на v точку C третьего цвета.

690. Обозначим через O центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$. Поскольку внешняя и внутренняя биссектрисы угла перпендикулярны, $OA \perp NK$, $OB \perp KL$. Высота AK_1 треугольника ABK перпендикулярна BK, поэтому $AK_1 \parallel OB$. Аналогично, $BK_1 \parallel OA$. Следовательно, $AOBK_1$ — параллелограмм, и точка K_1 получается из точки A параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AK_1} = \overrightarrow{OB}$. Таким же образом, точка L_1 получается из точки C параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OB}$. Поэтому $\overrightarrow{K_1L_1} = \overrightarrow{AC}$.

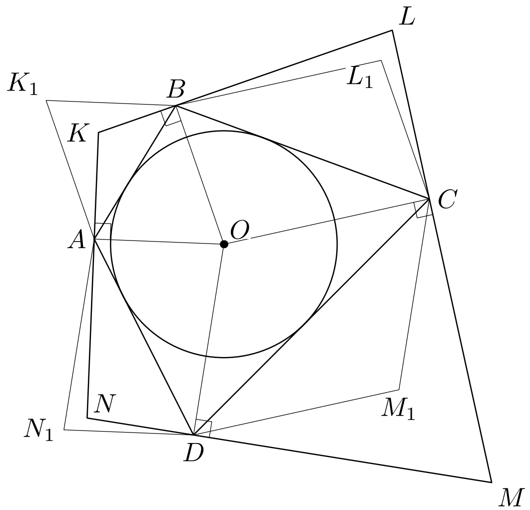


Рис. 304

Также получаем, что $\overrightarrow{N_1M_1} = \overrightarrow{AC}$, откуда следует, что $K_1L_1M_1N_1$ — параллелограмм.

691. Ответ. За 4005 вопросов.

Занумеруем коробочки (и соответственно шарики в них) числами от 1 до 2004 и будем вопрос обозначать парой номеров коробочек. Будем называть небелые шарики черными.

Покажем, что за 4005 вопросов можно найти два белых шарика. Зададим вопросы $(1, 2)$, $(1, 3)$, $\ldots$, $(1, 2004)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $\ldots$, $(2, 2004)$. Если все ответы положительны, то первый и второй шарики белые (пусть, например, первый — черный; тогда есть еще хотя бы один черный шарик, который вместе с первым составляет черную пару). Если же хотя бы один ответ отрицателен (скажем, на вопрос, включающий первый шарик), то первый шарик черный; тогда белыми являются ровно те шарики, про которые (в паре с черным первым) ответ был положительным, и в этом случае мы найдем даже все белые, которых хотя бы два.

Пусть существует алгоритм, позволяющий гарантированно найти два белых шарика за меньшее число вопросов. Будем отвечать на все вопросы положительно. Тогда максимум после 4004 вопросов игрок сможет указать на какие-то (для определенности, первую и вторую) коробочки и заявить, что в них шарики белые. При этом какого-то из вопросов вида $(1, n)$ или $(2, n)$ (скажем, вопроса $(1, k)$) задано не будет, ибо таких вопросов всего 4005. Положим теперь в 1-ю и k-ю коробочку черные шарики, а во все остальные — белые. Тогда все наши ответы будут верны, а указанный игроком первый шарик окажется черным. Противоречие.

692. Уменьшим каждое слагаемое следующим образом:

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>$$
$$>\frac{1}{1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\ldots+x_1x_2\ldots x_{n-1}}+$$
$$+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3+\ldots+x_2x_3\ldots x_n}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1+\ldots+x_nx_1x_2\ldots x_{n-2}}.$$

Домножая числитель и знаменатель в первом слагаемом на x_n, во втором — на x_nx_1, $\ldots$, в n-м — на $x_nx_1x_2\ldots x_{n-1}$ и учитывая, что $x_1x_2\ldots x_n=1$, получаем

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>$$
$$>\frac{x_n}{x_n+x_nx_1+x_nx_1x_2+\ldots+x_1\ldots x_n}+$$
$$+\frac{x_nx_1}{x_nx_1+x_nx_1x_2+\ldots+x_nx_1\ldots x_{n-1}+x_n}+$$
$$+\frac{x_nx_1x_2}{x_nx_1x_2+x_nx_1x_2x_3+\ldots+x_nx_1\ldots x_{n-1}+x_n+x_nx_1}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{x_nx_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_nx_1\ldots x_{n-1}+x_n+x_nx_1+\ldots+x_nx_1\ldots x_{n-2}}=1.$$

693. **Ответ.** Существуют.

Мы будем искать такие числа в виде $m=a^2$, $n=b^3$, $p=c^2$, $q=d^3$, где a, b, c, d — натуральные. Тогда условие переформулируется так: $a+b=c+d$, $a^2+b^3=c^2+d^3$, т. е. $a-c=d-b$, $(a-c)(a+c)=(d-b)(d^2+bd+b^2)$. Зафиксируем такие b и d, что $b=d-1>2004$. Тогда условиям удовлетворяет пара $c=\dfrac{d^2+bd+b^2-1}{2}$, $a=\dfrac{d^2+bd+b^2+1}{2}$; эти числа целые, поскольку b и d разной четности. Кроме того, $a>c>b^2>d>b>2004$.

Замечание. Можно показать, что для *любой* четверки чисел, удовлетворяющей условию, числа $\sqrt{m}$, $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt{p}$, $\sqrt[3]{q}$ целые.

694. **Ответ.** Всегда.

Построим граф, вершины которого соответствуют телефонам, а ребра — проводам. Рассмотрим наименьший набор вершин данного графа такой, что среди соединяющих эти вершины ребер присутствуют ребра всех четырех цветов. Удалим из этого набора произвольную вершину. Поскольку набор был наименьший, среди ребер, соединяющих оставшиеся вершины, присутствуют уже не все цвета. Если среди этих ребер присутствуют ребра ровно трех цветов, то искомый набор найден. В противном случае среди ребер, выходящих из удаленной вершины в другие вершины нашего набора, присутствуют как минимум два цвета, которые исчезнут после удаления этой вершины. Рассмотрим два ребра этих цветов, выходящие из удаленной вершины в другие вершины набора. Тогда ребро, соединяющее их концы, должно иметь цвет, отличный от цветов этих двух ребер. Таким образом, в графе нашелся треугольник, все ребра которого имеют попарно различные цвета. Это означает, что требуемый набор вершин можно выбрать всегда.

695. **Ответ.** 51 хорошая пара.

Пример: сначала расставим числа подряд, а затем поменяем местами числа 2 и 3, 4 и 5, …, 98 и 99. В полученной расстановке $1, 3, 2, 5, 4, \ldots, 99, 98, 100$ хорошими парами являются в точности пары $(1, 3)$, $(3, 2)$, $(5, 4)$, $(7, 6), \ldots, (97, 96)$, $(99, 98)$, $(98, 100)$.

Докажем, что хороших пар не менее 51. Заметим, что среди любых двух пересекающихся пар хотя бы одна — хорошая. Действительно, пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — такие подряд идущие числа, что пары (a_2, a_3) и (a_3, a_4) не являются хорошими. Не умаляя общности, можно считать, что $a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5$. С другой стороны, пара (a_3, a_4) не является хорошей, значит, $a_1 > a_2 > a_5$, пара (a_2, a_3) не является хорошей, значит, $a_5 > a_4 > a_1$. Тогда $a_1 > a_2 > a_5 > a_4 > a_1$, что невозможно, значит, либо пара (a_2, a_3), либо пара (a_3, a_4) — хорошая. Поэтому хороших пар уже не менее 50, причем ровно 50 их может быть, только если хорошие и не хорошие пары чередуются. Но если рассмотреть число 100, то следующая за ним пара — хорошая: $100 > (a_k < a_{k+1}) > a_{k+2} < a_{k+3}$. Так же хорошей является и пара, предшествующая числу 100, а значит, чередование невозможно.

696. Так как D и E лежат на сторонах, то $\angle ABC$ — наибольший угол треугольника; поэтому $\angle AOC = 2\angle ABC \geqslant 120°$, и точки O и T лежат по разные стороны от AC.

Пусть прямые ME и MD пересекают AB и BC соответственно в точках X и Y (см. рис. 305). Из остроугольности очевидно следует, что X и Y лежат на продолжениях отрезков BA и BC за точки A и C соответственно. Заметим, что $\angle DXM = 180° - \angle ABE - \angle BEM = 180° - 2\angle ABC$, аналогично $\angle EYM = 180° - 2\angle ABC$, поэтому четырехугольник $DEYX$ вписанный и $\angle BED = \angle BXY$.

Далее, $\angle ATM = 2\angle ACO$ (так как точки O, M, T, очевидно, лежат на серединном перпендикуляре к AC и T — центр описанной окружности

$\triangle AOC$). Тогда $\angle ATM = 2(90° - \angle MOC) = 2(90° - \angle ABC)$, так как O — центр описанной окружности $\triangle ABC$. Поэтому $\angle ATM = 180° - 2\angle ABC = \angle AXM$, откуда $AMTX$ — вписанный. Так как $\angle AMT = 90°$, то $\angle AXT = 90°$. Аналогично $\angle CYT = 90°$. Тогда четырехугольник $BXTY$ также вписанный, и $\angle TBY = \angle TXY = 90° - \angle BXY$. Получаем $\angle BED + \angle TBE = \angle BXY + (90° - \angle BXY) = 90°$, что и требовалось.

10 класс

697. См. решение задачи 689.

698. **Ответ.** За 2003 вопроса.

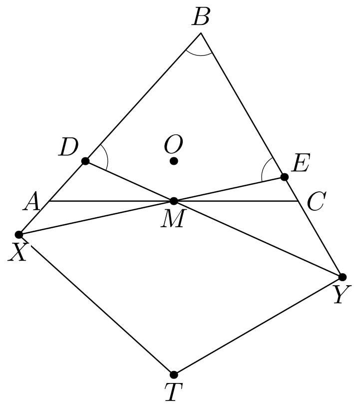


Рис. 305

Занумеруем коробочки (и соответственно шарики в них) числами от 1 до 2004 и будем вопрос обозначать парой номеров коробочек. Будем называть небелые шарики черными.

Покажем, что за 2003 вопроса можно найти белый шарик. Зададим вопросы $(1, 2)$, $(1, 3)$, …, $(1, 2004)$. Если все ответы положительны, то первый шарик белый (иначе есть еще хотя бы один черный шарик, и первый вместе с ним составит черную пару). Если же хотя бы один ответ отрицателен, то первый шарик черный; тогда белыми являются ровно те шарики, про которые (в паре с черным первым) ответ был положительным, и в этом случае мы найдем даже все белые.

Пусть существует алгоритм, позволяющий гарантированно найти белый шарик за меньшее число вопросов. Будем отвечать на все вопросы положительно. Тогда максимум после 2002 вопросов игрок сможет указать на какую-то (для определенности, первую) коробочку и заявить, что в ней шарик белый. При этом какого-то из вопросов вида $(1, n)$ (скажем, вопроса $(1, 2)$) задано не будет, ибо таких вопросов всего 2003. Положим теперь в 1-ю и 2-ю коробочку черные шарики, а во все остальные — белые. Тогда все наши ответы будут верны, а указанный игроком шарик окажется черным. Противоречие.

699. Если $ABCD$ — трапеция (скажем, $AB \parallel CD$), то прямые $L'L$ и $N'N$ имеют общую точку пересечения с серединным перпендикуляром к AB, на котором лежат K, K', M и M'. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые BC и AD — в точке F (см. рис. 306). Заметим, что K' и M' лежат на биссектрисе угла CFD (так как они равноудалены от прямых BC и AD). Пусть эта биссектриса пересекает AB и CD в точках P и Q соответственно.

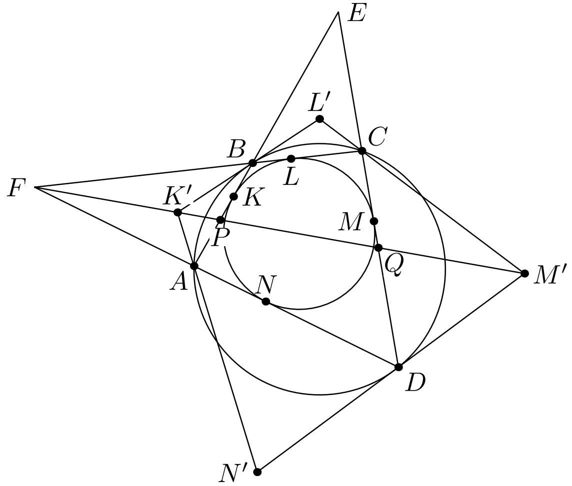


Рис. 306

Тогда, так как $ABCD$ — вписанный и FP — биссектриса угла CFD, то $\angle FAP = \angle FCQ$ и $\angle PFA = \angle CFQ \Rightarrow \angle FPA = \angle FQC \Rightarrow \angle EPQ = \angle EQP$, т. е. биссектриса угла AED является высотой равнобедренного треугольника EPQ; поскольку L' и N' лежат на этой биссектрисе, то $K'M' \perp L'N'$. Но биссектриса угла AED перпендикулярна KM, откуда $KM \parallel K'M'$; аналогично $LN \parallel L'N'$. Прямая KL перпендикулярна биссектрисе угла ABC, а значит, параллельна биссектрисе внешнего угла B, следовательно, $K'L' \parallel KL$ (аналогично, $L'M' \parallel LM$). Тогда у треугольников KLM и $K'L'M'$ соответствующие стороны параллельны, а значит, они гомотетичны. Заметим, что при этой гомотетии K переходит в K', а M — в M', и так как параллельные прямые переходят в параллельные, то прямые KN и MN переходят в $K'N'$ и $M'N'$ соответственно, значит, N переходит в N'; следовательно, четырехугольники $KLMN$ и $K'L'M'N'$ гомотетичны. Получаем, что KK', LL', MM, NN' проходят через центр гомотетии, т. е. через одну точку.

700. См. решение задачи 692.

701. Предположим противное. Полагая $m = n = 1$, получаем $a_1 + a_1 = a_1$, т. е. $a_1 = 0$. Поэтому все остальные члены ненулевые. Пусть $a_2 = p/q$, $a_3 = r/s$. Из условия следует, что $a_{m^k} = ka_m$; поэтому $a_{2^{qr}} = qr \cdot p/q = pr = ps \cdot r/s = a_{3^{ps}}$, но $2^{qr} \neq 3^{ps}$. Противоречие.

702. Предположим, что утверждение задачи неверно; скажем, из города X нельзя добраться до Y по городам республики (X, Y — города республики). Обозначим через A множество всех городов республики, до которых можно добраться из X по городам республики (включая сам город X), а через B — множество всех остальных ее городов (оно непусто, так как содержит Y). Тогда города республики разбились на две группы так, что все дороги между городами группы A и группы B направлены от B к A.

Обозначим количество городов в группах A и B через a и b соответственно, $a + b = 668$. Пусть в A городов не меньше, чем в B, т. е. $a \geqslant 334 \geqslant b$. В B есть город Z, из которого выходит не менее $\frac{b-1}{2}$ дорог в города из B. Кроме того, из Z выходит a дорог к городам группы A. Всего дорог, выходящих из Z, получается не менее $a + \frac{b-1}{2} = \frac{a+(a+b)-1}{2} = \frac{a+667}{2} \geqslant \frac{1001}{2} > 500$. Противоречие.

Случай, когда в B больше городов, чем в A, рассматривается аналогично путем выбора города из A, в который входит не менее $\frac{a-1}{2}$ дорог из городов из A.

703. ***Первое решение.*** Пусть O —центр симметрии многоугольника, A, B, C — вершины T, A', B', C' — соответствующие вершины T'; пусть $\triangle ABC$ при симметрии относительно O переходит в $\triangle A_0B_0C_0$ (лежащий в M). Если $O = P$, утверждение очевидно. Пусть d — луч прямой OP с вершиной в P, не содержащий O. Тогда d пересекает одну из сторон ABC, скажем, AB.

Рассмотрим параллелограмм ABA_0B_0, лежащий в M. Прямая OP высекает в нем отрезок, симметричный относительно O; тогда отрезок $A'B'$ пересекается с этой прямой во внутренней точке K параллелограмма (см. рис. 307). Теперь, поскольку $A'B' \parallel AB \parallel A_0B_0$, то одна из точек A' и B' лежит в этом параллелограмме (или на его границе), иначе $A'B' > AB$, что неверно.

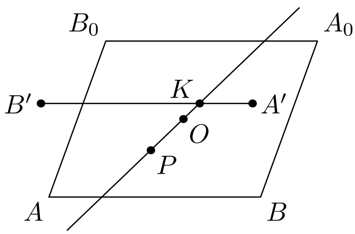


Рис. 307

Второе решение. Докажем простую лемму: если на плоскости дан треугольник XYZ и точка S, то треугольник XYZ покрывается треугольниками SXY, SYZ, SZX.

Действительно, прямые XY, YZ, ZX разбивают плоскость на 7 частей (см. рис. 308). Если S лежит в части 1, то $\triangle XYZ = \triangle SXY \cup \triangle SYZ \cup \triangle SZX$; если S лежит в части 2, то $\triangle XYZ \subset \triangle SYZ$ (рассмотрения для частей 3, 4 аналогичны); если S лежит в части 5, то $\triangle XYZ \subset \triangle SXY \cup \triangle SZX$ (рассмотрения для частей 6, 7 аналогичны).

Перейдем к решению задачи. Обозначим через O центр симметрии многоугольника M, через A, B, C — вершины треугольника T, а через A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB соответственно.

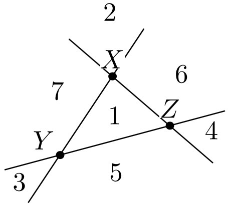


Рис. 308

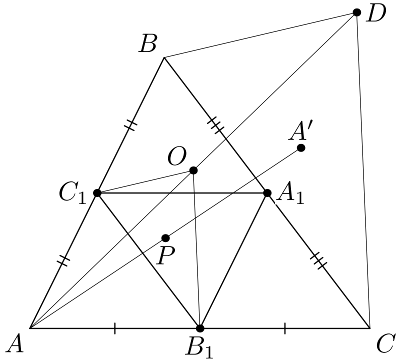


Рис. 309

Рассмотрим многоугольник V_A, являющийся выпуклой оболочкой точек O, A, B_1, C_1. Заметим, что V_A покрывает $\triangle AB_1C_1$. Определим также V_B и V_C как выпуклые оболочки четверок O, B, C_1, A_1 и O, C, A_1, B_1. При этом V_B покрывает $\triangle BA_1C_1$, V_C покрывает $\triangle CA_1B_1$. Кроме того, $V_A \supset \triangle OB_1C_1$, $V_B \supset \triangle OC_1A_1$, $V_C \supset \triangle OA_1B_1$. Отсюда, применяя лемму, получаем, что объединение V многоугольников V_A, V_B, V_C покрывает $\triangle A_1B_1C_1$. Итак, V покрывает объединение треугольников AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1, $A_1B_1C_1$, т. е. V покрывает $\triangle ABC$. Это означает, что один из многоугольников V_A, V_B, V_C содержит точку P, пусть, для определенности, $P \in V_A$ (см. рис. 309).

Пусть A' — вершина треугольника T', т. е. точка, симметричная точке A относительно P; пусть D — точка, симметричная точке A относительно O. При гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $k = 2$ точка P перейдет в A', O перейдет в D, C_1 перейдет в B, B_1 перейдет в C. Следовательно, многоугольник V_A перейдет в выпуклую оболочку U точек D, A, C, B, причем точка A' содержится в U. Так как $A, B, C \in M$ и M симметричен относительно O, то $D \in M$. Поскольку M — выпуклый, $U \subset M$. Значит, $A' \in M$, что и требовалось.

704. **Ответ.** Существует.

Приведем пример такого числа. Пусть $n = 13 \cdot 11\ldots1 = 144\ldots43$, количество единиц мы подберем позже. Если переставить единицу и тройку, то получится число $344\ldots41 = 31 \cdot 11\ldots1$. При этом, если наше число из одних единиц делится на $13 \cdot 31 = 403$, то простыми делителями обоих чисел будут в точности его простые делители. Осталось показать, что существует такое число из хотя бы 1000 единиц.

Рассмотрим числа 1, 10^{1000}, 10^{2000}, …, $10^{403\cdot 1000}$. Два из них (скажем, 10^{1000m} и 10^{1000n}, где $m < n$) имеют одинаковые остатки от деления на 403. Тогда $10^{1000n} - 10^{1000m} = 10^{1000m}(10^{1000(n-m)} - 1)$ делится на 403, а поскольку 403 и 90 взаимно просты, то на 403 делится и $\dfrac{10^{1000(n-m)} - 1}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{1000(n-m)}$, что и требовалось.

11 класс

705. См. решение задачи 689.

706. Пусть M — середина отрезка I_AI_B. Поскольку биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны, $AI_A \perp AI_B$. В прямоугольном треугольнике AI_AI_B середина M гипотенузы I_AI_B равноудалена от вершин, поэтому $MA = I_AI_B/2$. Аналогично, $MB = I_AI_B/2$. Тогда M — центр окружности, описанной около AI_BI_AB, поэтому $\angle AI_AB = \angle AMB/2$. Заметим, что $\angle AI_AB = (180^\circ - \angle ABC)/2 - \angle BAC/2 = \angle ACB/2$, поэтому $\angle AMB = \angle ACB$, и точки A, B, C и M лежат на одной окружности Ω. Поскольку $AM = BM$, точка M является серединой дуги ACB этой окружности.

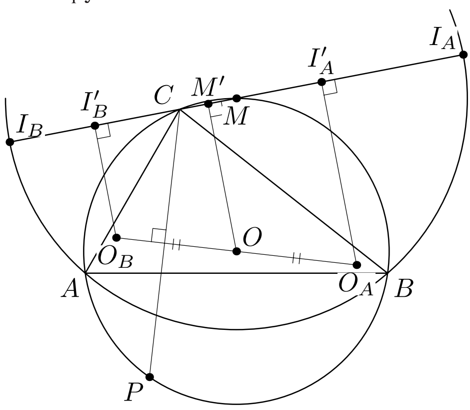


Рис. 310

Пусть I'_A, I'_B, M' — середины отрезков CI_A, CI_B, CM соответственно (см. рис. 310). Точки I'_A, I'_B, M' являются проекциями соответственно точек O_A, O_B, O на прямую I_AI_B (здесь O_A, O_B, O — центры описанных окружностей треугольников I_ACP, I_BCP, ABC). Точки O_A, O_B, O лежат на серединном перпендикуляре l к отрезку CP. Поэтому для решения задачи достаточно доказать, что M' является серединой отрезка $I'_AI'_B$. Но это верно, поскольку M — середина I_AI_B, а тройка точек I'_A, I'_B, M'

получается из тройки I_A, I_B, M путем гомотетии с центром C и коэффициентом $1/2$.

707. Предположим противное. Рассмотрим многочлены $P(x)$, $Q(x)$, для которых наше утверждение неверно и степень $P(x)$ — наименьшая из возможных. Обозначим степени $P(x)$ и $Q(x)$ через n и k соответственно. Заметим, что при домножении многочленов на ненулевые константы условие не меняется, поэтому будем считать $P(x)$ и $Q(x)$ приведенными. Ясно, что $n > 0$, иначе можно положить $S(x) = P(x) = 1$.

Лемма. *n делится на k.*

Доказательство. *Старшей компонентой* $\overline{T(x,y)}$ многочлена от двух переменных $T(x,y)$ будем называть сумму всех составляющих его одночленов, сумма степеней при x и y у которых максимальна (так, у многочлена $x^3 + 3xy^2 + x - 2y^2$ старшей компонентой является $x^3 + 3xy^2$). Заметим, что $\overline{T_1(x,y)T_2(x,y)} = \overline{T_1(x,y)} \cdot \overline{T_2(x,y)}$. Тогда

$$x^n - y^n = \overline{P(x) - P(y)} = \overline{R(x,y)} \cdot \overline{Q(x) - Q(y)} = \overline{R(x,y)}(x^k - y^k),$$

т. е. многочлен $x^n - y^n$ делится на $x^k - y^k$. Если $n = qk + r$ — результат деления n на k с остатком, то

$$x^n - y^n = x^r(x^{qk} - y^{qk}) + y^{qk}(x^r - y^r) =$$
$$= x^r(x^k - y^k)(x^{k(q-1)} + x^{k(q-2)}y^k + \ldots + y^{k(q-1)}) + y^{qk}(x^r - y^r),$$

поэтому $F(x,y) = y^{qk}(x^r - y^r)$ делится на $x^k - y^k$. Однако его степень по x меньше, чем k, поэтому такое может быть лишь тогда, когда она равна нулю, т. е. $r = 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим многочлены $P_1(x) = P(x) - Q^{n/k}(x)$ и $Q(x)$. Для них условие задачи выполнено:

$$P_1(x) - P_1(y) =$$
$$= \Big(R(x,y) - (Q^{n/k-1}(x) + Q^{n/k-2}(x)Q(y) + \ldots$$
$$\ldots + Q^{n/k-1}(y))\Big)(Q(x) - Q(y)).$$

Кроме того, степень у $P_1(x)$ меньше, чем степень $P(x)$; поэтому $P_1(x) = S_1(Q(x))$ для некоторого многочлена $S_1(x)$. Тогда, положив $S(x) = S_1(x) + x^{n/k}$, получаем противоречие с выбором $P(x)$, так как $P(x) = P_1(x) + Q^{n/k}(x) = S(Q(x))$.

708. **Ответ.** $\frac{2003 \cdot 2002}{2} + 1 = 2005004$.

Докажем, что сумма не может быть меньше. Переставив, если нужно, столбцы, будем далее считать, что числа в первой строке стоят в неубывающем порядке. Пусть a_i — i-е число первой строки. Рассмотрим сумму

$$S = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + (a_3 - 1) + (a_4 - 2) + \ldots + (a_i - (i-2)) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{2003} - 2001) + (a_{2004} - 2001).$$

Заметим, что сумма вычитаемых чисел как раз равна $\frac{2003 \cdot 2002}{2} + 1$; поэтому достаточно доказать, что $S \geqslant 0$. Обозначим i-е слагаемое в нашей сумме через d_i. Если в этой сумме нет отрицательных членов, все очевидно. Ясно, что $a_{2004} \geqslant 2001$, $a_2 \geqslant a_1 \geqslant 1$, т. е. $d_1, d_2, d_{2004} \geqslant 0$.

Пусть $d_i < 0$, т. е. $a_i \leqslant i - 3$. Тогда в i первых столбцах содержатся только числа от 1 до i, следовательно, там содержатся все такие числа. Отсюда следует, что $a_i = i - 3$, $a_{i+1} \geqslant i + 1$, и $d_i + d_{i+1} > 0$. Таким образом, для любого отрицательного d_i сумма его со следующим членом положительна, поэтому, объединив такие слагаемые в пары, получаем сумму неотрицательных слагаемых, что и требовалось.

Осталось привести пример таблицы, для которой оценка достигается:

1	1	1	2	3	4	$\cdots$	k	$\cdots$	1998	1999	2000	2001	2001
1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$k+2$	$\cdots$	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$k+2$	$\cdots$	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$k+2$	$\cdots$	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$k+2$	$\cdots$	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$k+2$	$\cdots$	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$k+2$	$\cdots$	2000	2002	2002	2003	2004
2	3	4	5	6	7	$\cdots$	$k+3$	$\cdots$	2001	2002	2003	2003	2004
2	3	4	5	6	7	$\cdots$	$k+3$	$\cdots$	2001	2002	2003	2004	2004

(два первых и четыре последних столбца устроены несколько иначе, чем остальные).

709. Пусть $A_1 \leqslant 1$. Достаточно доказать, что $A_{n+1} < A_n$ при любом $1 \leqslant n \leqslant 29$.

Имеем $A_n \geqslant A_1 A_n$. Перемножая A_1 и A_n и раскрывая скобки, видим, что $A_1 A_n = A_{n+1} + S_n$, где S_n — сумма всех слагаемых полученной суммы, в которых встречается квадрат одного из x_i. Тогда $S_n > 0$, откуда следует требуемое.

710. Предположим противное. Выберем прямую, не ортогональную ни одному из векторов нашего множества. Тогда проекции хотя бы N векторов на нее направлены в одну сторону; обозначим их $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N$. Введем на этой прямой направление так, что эти векторы направлены в отрицательную сторону, и выберем N векторов $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_N$ так, что алгебраическая проекция s их суммы максимальна (ясно, что из условия 2) $s > 0$). При этом, если некоторые из этих векторов совпали с векторами $\vec{e}_i$, то проекции всех векторов, кроме $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_N$, направлены в отрицательную сторону; тогда мы обозначим через $\vec{e}_i$ какие-то N векторов, отличных от $\vec{f}_i$, $i = 1, \ldots, N$.

Для N векторов $\vec{f_i}$ найдутся векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{N-1}$ такие, что $\vec{f_1} + \ldots + \vec{f_N} = -(\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_{N-1})$. Хотя бы один из векторов $\vec{e}_i$ не совпадает ни с одним из $\vec{a}_j$ (пусть это $\vec{e}_1$), при этом алгебраическая проекция суммы $\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_{N-1} + \vec{e}_1$ отрицательна и больше s по модулю. Тогда для векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{N-1}, \vec{e}_1$ существуют N векторов, сумма которых равна $-(\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_{N-1} + \vec{e}_1)$, т. е. алгебраическая проекция суммы которых больше s. Противоречие с выбором векторов $\vec{f_i}$.

711. Индукция по k. Если $k = 0$, утверждение тривиально: авиалиний нет.

Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра — авиалиниям. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_k$ — группы ребер, соответствующие авиалиниям первой, второй, …, k-й авиакомпаний. Нетрудно понять, что для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ группа E_i — либо треугольник, либо «ёж» — несколько ребер с одним концом. Если какая-то группа E_i — ёж с центром в вершине A, то удалим A и все выходящие из нее ребра. В оставшемся графе ребра принадлежат $k-1$ авиакомпании, его вершины мы разобьем на $k+1$ группу так, чтобы вершины из одной группы не были соединены ребром, а вершина A составит $(k+2)$-ю группу.

Остается рассмотреть случай, когда все группы $E_1, \ldots, E_k$ — треугольники. Тогда всего в графе $3k$ ребер. Разобьем вершины графа на минимальное возможное количество групп так, что никакие две вершины одной группы не смежны (т. е. не соединены ребром). Пусть это группы $B_1, \ldots, B_n$, причем $n \geqslant k+3$. Отметим, что для любых двух групп B_i и B_j существует ребро между вершиной из B_i и вершиной из B_j, иначе можно объединить эти две группы в одну. Таким образом, всего в графе хотя бы $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ребер. Отметим, что $\dfrac{n(n-1)}{2} \geqslant \dfrac{(k+3)(k+2)}{2} > 3k$, — противоречие, завершающее решение задачи.

712. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, в котором $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, причем $a \leqslant b \leqslant c$. Без ограничения общности можно считать, что шестиугольное сечение $KLMNPQ$ расположено так, что $K \in AD$, $L \in AB$, $M \in BB_1$, $N \in B_1C_1$, $P \in C_1D_1$, $Q \in D_1D$ (см. рис. 311).

В шестиугольнике $KLMNPQ$ пары противоположных сторон параллельны (как прямые пересечения плоскости с парой параллельных плоскостей). Расстояние между параллельными прямыми QK и MN не меньше, чем расстояние между гранями ADD_1A_1 и BCC_1B_1, которое равно a.

Аналогично, расстояние между парами параллельных сторон KL и NP, LM и PQ не меньше длины одного из ребер параллелепипеда, и, следовательно, не меньше a.

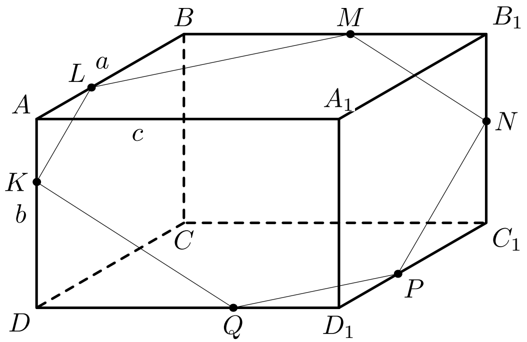


Рис. 311

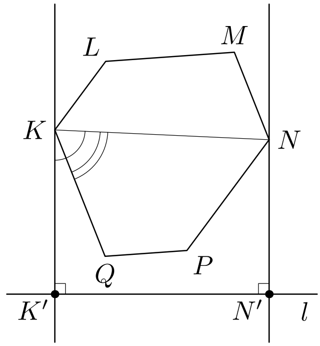


Рис. 312

Докажем, что проекция шестиугольника $KLMNPQ$ на любую прямую, лежащую в плоскости этого шестиугольника, не меньше, чем a. Поскольку противоположные стороны шестиугольника $KLMNPQ$ параллельны, его проекция на некоторую прямую l будет совпадать с проекцией одного из отрезков KN, LP, MQ. Пусть, для определенности, проекция на l совпадает с отрезком $K'N'$, где K' и N' — проекции точек K и N соответственно. Можно предполагать, что K', N', P и Q лежат по одну сторону от KN (этого можно добиться параллельным сдвигом l). Тогда один из углов $K'KN$, $N'NK$ — не тупой, пусть, например, $\angle K'KN$ не тупой (см. рис. 312). Тогда $K'N' = KN \sin\angle K'KN \geqslant KN \sin\angle QKN$. Но $KN \sin\angle QKN$ — это расстояние между прямыми QK и MN, поэтому $K'N' \geqslant KN \sin\angle QKN \geqslant a$.

Пусть шестиугольник $KLMNPQ$ помещен в прямоугольник П со сторонами, равными d_1, d_2. Тогда каждая из сторон d_1, d_2 не меньше, чем длина проекции $KLMNPQ$ на прямые, параллельные сторонам П. Отсюда по доказанному

$$d_1 \geqslant a, \quad d_2 \geqslant a. \tag{1}$$

Заметим, что при проекции на плоскость ADD_1A_1 отрезок LP переходит в отрезок AD_1 (см. рис. 311), поэтому $LP \geqslant AD_1 = \sqrt{b^2+c^2}$. С другой стороны, LP содержится в П, поэтому длина LP не превосходит длины диагонали $\sqrt{d_1^2+d_2^2}$ прямоугольника П. Получаем, что

$$d_1^2 + d_2^2 \geqslant b^2 + c^2. \tag{2}$$

Если бы каждая из сторон d_1, d_2 была меньше b, то мы получили бы противоречие неравенству (2). Поэтому одна из сторон d_1, d_2 не меньше b, другая сторона не меньше a в силу (1). Следовательно, в Π можно поместить прямоугольник со сторонами a, b, равный грани $ABCD$.

2004–2005 г.

9 класс

713. Построим биссектрису угла C и рассмотрим точку A', симметричную A относительно этой биссектрисы. Так как $CP = CQ$, то построенная биссектриса является серединным перпендикуляром к отрезку PQ. Значит, четырехугольник $PQA'A$ — равнобокая трапеция или прямоугольник, следовательно, A' лежит на описанной окружности $\triangle APQ$ при любом положении точек P и Q, удовлетворяющем условию.

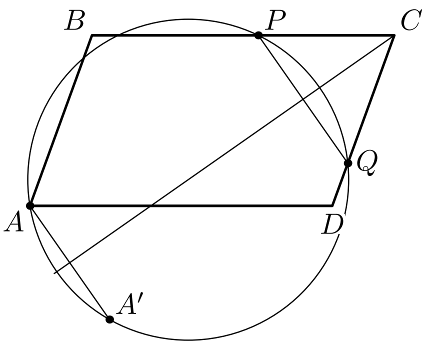


Рис. 313

714. **Ответ.** Верно.

Предположим, что Олег не сможет выбрать две требуемые клетки. Заменим все числа на их остатки при делении на 4. Тогда в таблице стоит по 121 чисел 0, 1, 2 и 3. Разобьем таблицу на 121 табличку 2×2. В каждой такой табличке может стоять не более одного нуля и не более одной двойки. Но так как количество табличек равно количеству нулей и количеству двоек, то в каждой табличке стоит ровно один ноль и ровно одна двойка. Заметим, что в каждой табличке два оставшихся числа оба должны быть либо единицами, либо тройками. Но тогда количество единиц четно, однако их 121 — противоречие.

715. Преобразуем условие:

$$\frac{a_1^2}{a_1 - 1} > S \iff a_1^2 > (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - 1) \iff$$

$$\iff a_1 + a_2 + a_3 > a_1(a_2 + a_3) \iff \frac{1}{a_2 + a_3} > \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Сложив это неравенство с двумя аналогичными, получаем

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = 1,$$

что и требовалось.

716. Ответ. Может.

Лемма. *Пусть за x рублей Вася смог выложить в нужном порядке на стол некоторые $N-1$ карточку, где $N \leqslant 3^k$. Тогда он сможет добавить к выложенным карточкам еще одну, потратив при этом еще не более k рублей, т. е. затратив всего не более $x+k$ рублей.*

Доказательство. * леммы проведем индукцией по числу k. База $k=1$ очевидна. Пусть для всех $N \leqslant 3^{k-1}$ лемма доказана. Первый рубль Вася потратит на то, чтобы правильно выложить на стол N-ю карточку и карточки A и B, уже лежащие на местах $\left[\frac{N}{3}\right]$ и $\left[\frac{2N}{3}\right]$. Тогда N-я карточка попадет в одну из трех частей, на которые другие две карточки разбивают уже выложенную на стол последовательность. Но карточки A и B разбивают лежащую на столе последовательность из $N-1$ карточки на куски размером не более чем по $3^{k-1}-1$ карточек, а значит Васе осталось определить место карточки с номером N среди не более чем $3^{k-1}-1$ карточек, потратив не более чем $k-1$ рубль, а это можно сделать по предположению индукции. Таким образом, лемма доказана.

Теперь, используя лемму, подсчитаем Васины затраты на выкладывание всех 365 карточек. На выкладывание первых трех карточек Вася потратит 1 рубль. На добавление к ним карточек с номерами от 4 до 9 (всего 6 карточек) Вася потратит не более 2 рублей на каждую карточку. На карточки с 10 по 27 не более 3 рублей на каждую, с 28 по 81 не более 4 рублей, с 82 по 243 не более 5 рублей и наконец на карточки с номерами от 244 до 365 не более 6 рублей на каждую. Итого, Вася сможет выложить все карточки на стол в нужном порядке, потратив не более чем $1+6\cdot 2+$ $+18\cdot 3+54\cdot 4+162\cdot 5+122\cdot 6=1845<2000$ рублей. Таким образом, Вася сможет потратить не более 2000 рублей.

717. ***Первое решение.*** Утверждение верно, если все числа — рациональны. Пусть наше множество содержит иррациональное число a. Тогда каждое из остальных чисел имеет вид либо $p-a$, либо $\frac{p}{a}$, где p — рационально. Покажем, что чисел вида $p-a$ не больше двух. Пусть $b_1=p_1-a$, $b_2=p_2-a$, $b_3=p_3-a$, тогда $b_1+b_2=(p_1+p_2)-2a$ — не рационально, значит, $b_1\cdot b_2=p_1p_2-a(p_1+p_2)+a^2$, а также $b_1\cdot b_3$, $b_2\cdot b_3$ — рациональны. Отсюда $A_3=a^2-a(p_1+p_2)$, $A_2=a^2-a(p_1+p_3)$, $A_1=a^2-a(p_2+p_3)$ — рациональны, значит, $A_3-A_2=a(p_3-p_2)$ — рационально, что возможно только при $p_3=p_2$, т. е. $b_3=b_2$ — противоречие.

Значит, чисел второго вида больше двух, пусть $c_1=\frac{q_1}{a}$, $c_2=\frac{q_2}{a}$, $c_3=$ $=\frac{q_3}{a}$ — такие числа. Сумма $c_1+c_2=\frac{q_1+q_2}{a}$ может быть рациональной только при $q_2=-q_1$. Но $q_3\neq q_2$, значит, сумма $c_1+c_3=\frac{q_1+q_3}{a}$ —

иррациональна. Тогда число $c_1 \cdot c_3 = \frac{q_1 q_3}{a^2}$ — рационально, откуда a^2 — рационально.

Второе решение. Рассмотрим произвольные 6 чисел из нашего набора. Поставим этим 6 числам в соответствие граф следующим образом: у него шесть вершин, соответствующих нашим шести числам; вершины соединены синим ребром, если сумма соответствующих чисел рациональна, и соединены красным ребром, если произведение соответствующих чисел рационально. Хорошо известно, что в таком графе найдется одноцветный треугольник. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Нашелся синий треугольник, т. е. нашлись три числа x, y, z такие, что $x+y$, $x+z$, $y+z$ рациональны. Но тогда, например, $(x+y)+(x+z)-(y+z) = 2x$ рационально. То есть числа x, y, z рациональны. Тогда рассмотрим любое из оставшихся чисел t. Из рациональности любого из чисел xt и $x+t$ следует рациональность числа t (все числа по условию отличны от нуля). То есть все числа набора рациональны.

2. Нашелся красный треугольник. То есть нашлись три числа x, y, z такие, что xy, xz, yz рациональны. Но тогда, например, число $\frac{(xy)(xz)}{yz} = x^2$ рационально. То есть числа x^2, y^2, z^2 рациональны. Если хотя бы одно из чисел x, y, z рационально, то аналогично предыдущему случаю получаем рациональность всех чисел набора. Пусть теперь $x = m\sqrt{a}$, где a рационально, $m = \pm 1$. Так как $xy = m\sqrt{ay} = b$ — рационально, то $y = \frac{b}{m\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{ma} = c\sqrt{a}$, где $c \neq m$ — рационально. Тогда рассмотрим любое из оставшихся чисел t. Если xt или yt — рационально, то аналогично предыдущему $t = d\sqrt{a}$, где d — рационально, т. е. t^2 — рационально.

Если же $x+t$ и $y+t$ — рациональны, то $(y+t)-(x+t) = (m-c)\sqrt{a}$ — рационально. Но $(x+t)-(y+t) = (m-c)\sqrt{a}$ — иррационально. Противоречие.

То есть мы получили, что либо все числа набора рациональны, либо квадраты всех чисел набора рациональны, что и требовалось.

Замечание. Утверждение задачи верно при любом $n \geqslant 5$.

718. Ответ. 1003.

Если $x_1 \leqslant x_2$ — корни уравнения, то $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ и $x_1 + x_2 = S(A)$, $x_1 x_2 = S(B)$, поэтому $(x_1+1)(x_2+1) = S(B) + S(A) + 1 = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{2005} + 1 = 2^{2006}$. Значит, $x_1 + 1 = 2^k$, $x_2 + 1 = 2^{2006-k}$, где k может принимать значения $1, 2, \ldots, 1003$.

Наоборот, пусть x_1, x_2 — числа такого вида, тогда они являются корнями уравнения $x^2 - px + q = 0$, где $p = 2^k + 2^{2006-k} - 2$, $q = 2^{2006} - 1 - p$. Но число p имеет единственное разложение в сумму различных степеней двойки (двоичное разложение), и в этом разложении степени двойки не превосходят 2^{2005}, а двоичное разложение q содержит 1 на тех местах, где у числа p — нули, так как $p+q=2^{2005}-1$. Итак, для каждого k такого, что $1\leqslant k\leqslant 1003$, существует единственное разбиение (A,B), дающее указанные корни x_1 и x_2.

719. Пусть, для определенности, точка D лежит на дуге BC, не содержащей точки A (см. рис. 314). Обозначим через H точку пересечения высот треугольника ABC, а через H_A и H_B — вторые точки пересечения прямых AH и BH с окружностью.

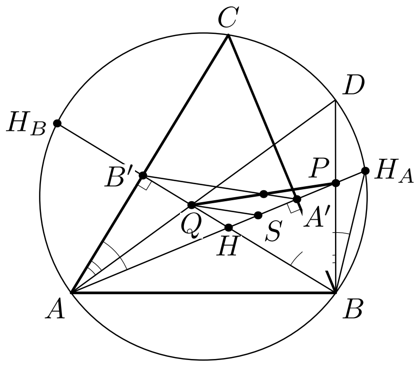


Рис. 314

Углы CBH_A и CAH_A равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Далее, $\angle CAA' = \angle CBB' = 90^\circ - \angle ACB$. Следовательно, прямоугольные треугольники $AB'H$, $BA'H$ и $BA'H_A$ имеют по равному острому углу, и поэтому подобны. Кроме того, треугольники $BA'H$ и $BA'H_A$ имеют общий катет, и значит равны, отсюда $HA' = H_AA'$.

Так как $\angle B'AQ = \angle CAD = \angle CBD = \angle A'BP$, то отрезки AQ и BP являются соответствующими в подобных треугольниках $AB'H$ и $BA'H_A$, следовательно, $\dfrac{B'Q}{B'H} = \dfrac{A'P}{A'H_A}$. Построим на высоте AA' точку S такую, что $QS \parallel A'B'$. Из теоремы Фалеса вытекает, что отношение $\dfrac{A'S}{A'H}$ равно $\dfrac{B'Q}{B'H} = \dfrac{A'P}{A'H_A}$. По доказанному $HA' = H_AA'$, значит, $A'S = A'P$, и $A'B'$ — средняя линия треугольника PQS, т. е. делит пополам сторону PQ.

720. Разобьем всех сидящих за столом на 50 пар соседей и назовем людей в любой паре *знакомыми*. Тогда достаточно разбить их на две группы (по одному представителю от страны в группе) так, чтобы в каждой группе не оказалось знакомых. Покажем, как это можно сделать.

Выберем любого представителя страны 1, поместим его в первую группу, второго представителя этой же страны поместим во вторую группу, его знакомого (представителя, скажем, i-й страны) — снова в первую, второго представителя i-й страны — во вторую и т. д. Этот процесс завершится, когда очередной знакомый уже распределен; это возможно только если этот знакомый — изначальный представитель первой страны, тогда он помещен в первую группу, что от него и требовалось.

Если еще остались нераспределенные люди, осталось повторить процесс, начиная с любого нераспределенного человека.

10 класс

721. **Ответ.** 11.

$$1 = \frac{4-2}{4-2}, \quad 3 = \frac{8-2}{4-2}, \quad 5 = \frac{16-1}{4-1} = \frac{2^5-2}{2^3-2},$$
$$7 = \frac{16-2}{4-2}, \quad 9 = 2^3+1 = \frac{2^6-1}{2^3-1} = \frac{2^7-2}{2^4-2},$$
$$2 = 2\cdot 1 = \frac{2^3-2^2}{2^2-2}, \quad \ldots, \quad 10 = 2\cdot 5 = \frac{2^6-2^2}{2^3-2}.$$

Предположим, что $11 = \frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$. Не уменьшая общности, положим $a > b$, $c > d$. Обозначим $m = a-b$, $n = c-d$, $k = b-d$. Получаем
$$11(2^n-1) = 2^k(2^m-1).$$
Так как в левой части целое нечетное число, то $k = 0$. Заметим, что $n = 1$ не подходит. Если же $m > n > 1$, то 2^m-1 и 2^n-1 дают остаток 3 при делении на 4. Значит, левая и правая части дают соответственно остатки 1 и 3 при делении на 4. Противоречие.

Замечание. Можно прийти к противоречию по другому. Из алгоритма Евклида следует, что 2^m-1 делится на 2^n-1 без остатка, тогда и только тогда, когда m делится на n. Значит, надо доказать, что $11 \neq 1 + 2^n + 2^{2n} + \ldots$. Но последнее очевидно, поскольку 11 не равно ни одному из чисел $1+2$, $1+2+4$, $1+4$, $1+8$.

722. Пусть в верхней строке стоят числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Переставим столбцы так, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Тогда в нижней строке стоят соответственно $b_1 = 1-a_1$, $b_2 = 1-a_2$, $\ldots$, $b_n = 1-a_n$; ясно, что $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Если $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \frac{n+1}{4}$, то вычеркнем все числа нижней строки. Иначе найдем минимальный номер k такой, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_k > \frac{n+1}{4}$, вычеркнем в верхней строке числа $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$, а в нижней — $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$. По выбору k имеем $a_1 + \ldots + a_{k-1} \leqslant \frac{n+1}{4}$. Остается доказать, что $b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n \leqslant \frac{n+1}{4}$.

Поскольку $a_k \geqslant \frac{a_1 + \ldots + a_k}{k} > \frac{n+1}{4k}$, имеем
$$b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n \leqslant (n+1-k)b_k = (n+1-k)(1-a_k) <$$
$$< (n+1-k)\left(1 - \frac{n+1}{4k}\right) = \frac{5}{4}(n+1) - \left[\frac{(n+1)^2 + (2k)^2}{4k}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{5}{4}(n+1) - \frac{2(n+1)(2k)}{4k} = \frac{n+1}{4}.$$

723. **Ответ.** За 1003 вопроса.

Пусть было задано N вопросов. Ясно, что каждая карточка участвует хотя бы в одном вопросе, иначе число на ней мы не определим. Пусть есть k карточек, участвующих ровно в одном вопросе. Тогда в одном вопросе не может встретиться двух таких карточек. Действительно, если бы две таких карточки участвовали в одном вопросе, то, поменяв местами числа на этих карточках, мы не изменим ответов на вопросы; поэтому невозможно установить, какое число на которой из них написано. Следовательно, $k \leqslant N$. Остальные карточки участвовали хотя бы в двух вопросах. Теперь, просуммировав для каждой карточки количество вопросов, в которых она участвовала, получим утроенное количество вопросов. Поэтому $3N \geqslant k+2(2005-k) = 4010-k \geqslant 4010-N$, откуда $2N \geqslant 2005$, $N \geqslant 1003$.

Приведем способ узнать числа за 1003 вопроса. Отложим одну карточку, а остальные разобьем на 334 группы по 6 карточек. В каждой группе занумеруем карточки числами от 1 до 6 и зададим три вопроса: $(1, 2, 3)$, $(3, 4, 5)$ и $(5, 6, 1)$. Тогда числа на карточках 1, 3, 5 встречаются в двух ответах (для разных карточек — в разных парах) и поэтому однозначно определяются, а числа на карточках 2, 4, 6 — оставшиеся числа в каждом из ответов. Так за $\frac{2004}{6} \times 3 = 1002$ вопроса мы узнаем числа на 2004 карточках. Осталось спросить про отложенную карточку вместе с любыми двумя уже известными.

724. Пусть B_0, C_0 — середины сторон AC, AB соответственно, ω_A — третья вневписанная окружность, P и Q — точки пересечения ω'_B и ω'_C. Положим $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Обозначим через I_A, I_B, I_C, I'_B, I'_C центры окружностей ω_A, ω_B, ω_C, ω'_B, ω'_C соответственно. Обозначим через D, E, F точки касания ω_A, ω_B, ω_C и сторон BC, CA, AB; через E', F' — точки касания ω'_B, ω'_C и сторон CA, AB; через X, Y — точки касания ω_A и продолжений сторон AB, BC соответственно (см. рис. 315).

Известно, что AD делит пополам периметр треугольника ABC (это следует из того, что $CD = \frac{a+c-b}{2}$). Поэтому достаточно показать, что (1) A лежит на PQ; (2) $AD \perp I'_B I'_C$.

1) Ясно, что E и E' симметричны относительно B_0. Следовательно, $AE' = CE = \frac{b+c-a}{2}$. Аналогично, $AF' = \frac{b+c-a}{2}$. Получаем, что касательные к ω'_B и ω'_C, проведенные из точки A, равны. Поэтому A лежит на радикальной оси PQ окружностей ω'_B и ω'_C.

2) Из симметрии следует, что $AI'_B C I_B$ — параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{I'_B C} = \overrightarrow{AI_B}$. Аналогично, $AI'_C B I_C$ — параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{BI'_C} = \overrightarrow{I_C A}$. Построим такую точку T, что $BI'_C T C$ — параллелограмм. Получаем: $\overrightarrow{I'_C T} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{I'_B T} = \overrightarrow{I'_B C} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{AI_B} + \overrightarrow{I_C A} = \overrightarrow{I_C I_B}$.

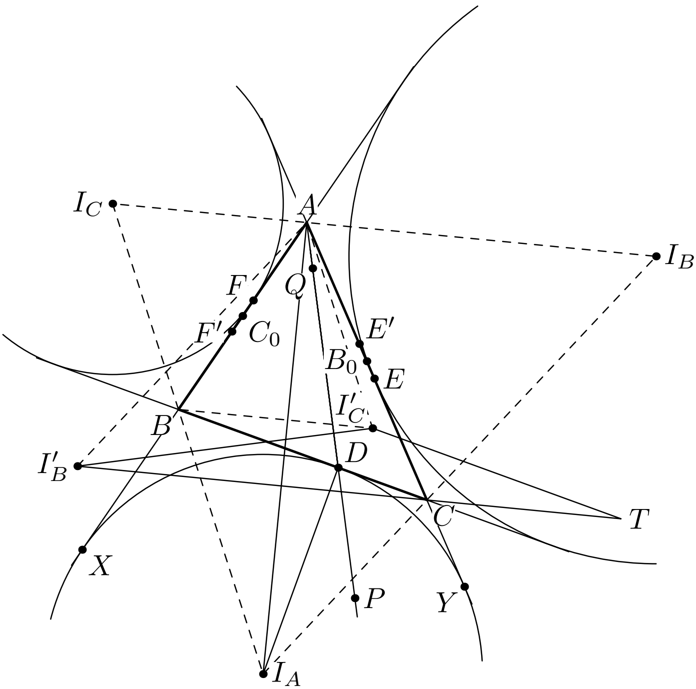


Рис. 315

Так как AI_A и I_BI_C являются внутренней и внешней биссектрисами угла BAC, то $AI_A \perp I_BI_C$. Аналогично, $BI_B \perp I_CI_A$, $CI_C \perp I_AI_B$. Следовательно, $I_AB = I_AI_B \cos\angle I_BI_AI_C$, $I_AC = I_AI_C \cos\angle I_BI_AI_C$. Это означает, что $\triangle I_ABC \sim \triangle I_AI_BI_C$. Заметим, что I_AD и I_AA — соответствующие высоты в подобных треугольниках I_ABC и $I_AI_BI_C$. Отсюда следует, что $\frac{I_AD}{I_AA} = \frac{BC}{I_BI_C}$.

Рассмотрим треугольники $I'_BI'_CT$ и ADI_A. Имеем: $I'_BT \parallel I_BI_C \perp I_AA$, $I'_CT \parallel BC \perp I_AD$, $\frac{I'_CT}{I'_BT} = \frac{BC}{I_BI_C} = \frac{I_AD}{I_AA}$. Отсюда следует, что треугольники I_BI_CT и I_ADA подобны, и их соответствующие стороны перпендикулярны. Итак, $I'_BI'_C \perp AD$.

Замечание. Вместо части (2) можно доказать, что D лежит на PQ следующим образом.

Пусть ω — вписанная окружность треугольника ABC. Нетрудно видеть, что ω касается AB и AC соответственно в точках F', E'. Обозначим через I центр ω, через D' — точку касания ω и BC. Обозначим через r,

r_B, r_C соответственно радиусы окружностей ω, ω_B, ω_C. В окружности ω проведем диаметр SD' (см. рис. 316).

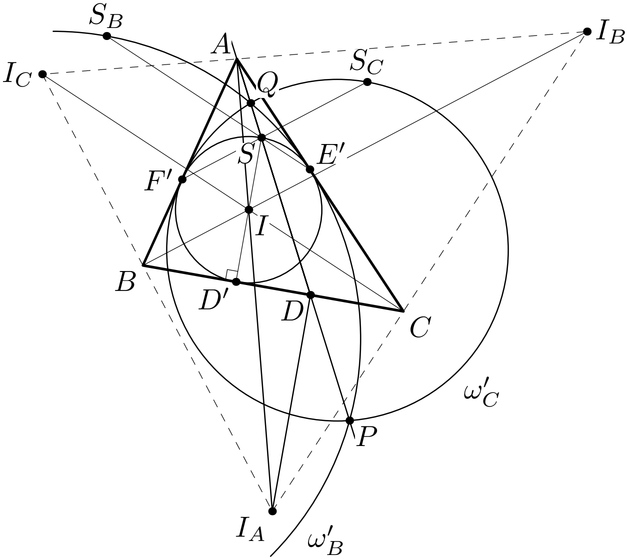


Рис. 316

Гомотетия с центром A, переводящая ω_A в ω, переводит D в S. Поэтому, достаточно доказать, что $S \in PQ$.

Гомотетия с центром E' и коэффициентом $\frac{r_B}{r}$ переводит ω в ω'_B. Обозначим через S_B образ точки S при этой гомотетии. Также, обозначим через S_C образ точки S при гомотетии с центром F', переводящей ω в ω'_C. Достаточно показать, что $E'S \cdot SS_B = F'S \cdot SS_C$. Заметим, что $E'S \cdot SS_B = E'S \cdot (E'S_B - E'S) = E'S \cdot (\frac{r_B}{r} E'S - E'S) = \frac{r_B - r}{r} E'S^2$. Аналогично, $F'S \cdot SS_C = \frac{r_C - r}{r} F'S^2$. Чтобы завершить решение, установим, что

$$(r_B - r)E'S^2 = (r_C - r)F'S^2. \qquad (1)$$

Четырехугольник $F'SE'D'$ вписанный, поэтому $\angle SE'F' = \angle SD'F' = \frac{\pi}{2} - \angle BD'F' = \frac{\angle B}{2}$.

Аналогично, $\angle SF'E' = \frac{\angle C}{2}$. По теореме синусов

$$\frac{E'S}{F'S} = \frac{\sin\frac{\angle C}{2}}{\sin\frac{\angle B}{2}}. \qquad (2)$$

Четырехугольник BCI_BI_C вписанный, поэтому $\angle II_CI_B = \angle IBC = \frac{\angle B}{2}$. Аналогично, $\angle II_BI_C = \frac{\angle C}{2}$. Заметим, что

$IB = \dfrac{ID'}{\sin\frac{\angle B}{2}} = \dfrac{r}{\sin\frac{\angle B}{2}}$, и также $I_BB = \dfrac{r_B}{\sin\frac{\angle B}{2}}$. Получаем $I_BI = I_BB - IB = \dfrac{r_B - r}{\sin\frac{\angle B}{2}}$. Аналогично, $I_CI = \dfrac{r_C - r}{\sin\frac{\angle C}{2}}$. Из теоремы синусов

$$\frac{I_BI}{I_CI} = \frac{\dfrac{r_B - r}{\sin\frac{\angle B}{2}}}{\dfrac{r_C - r}{\sin\frac{\angle C}{2}}} = \frac{\sin\frac{\angle B}{2}}{\sin\frac{\angle C}{2}}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем (1).

725. Ответ. 16.

Заметим, что если в строке a ладей, то в ней есть $(a-1)$ пара ладей, которые бьют друг друга. Но тогда количество пар ладей, бьющих друг друга по горизонтали, не меньше, чем число ладей минус число горизонталей, т. е. не меньше 8. Аналогично, количество пар ладей, бьющих друг друга по вертикали, не меньше 8.

Пример для 16 ладей получается, если, например, расставить по 8 ладей на главных диагоналях.

726. См. решение задачи 719.

727. Далее в решении латинские буквы обозначают целые числа.

Лемма 1. *Если* $a = \text{НОД}(t+1, t^2-t+1)$, *то* $a = 1$ *либо* $a = 3$.

Доказательство. Поделив с остатком $t^2 - t + 1$ на $t+1$, получаем $t^2 - t + 1 = (t-2)(t+1) + 3$. Из полученного равенства видим, что если d — общий делитель $t^2 - t + 1$ и $t + 1$, то d — делитель числа 3.

Аналогично, из равенства $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)(t+1) + 5$ выводится

Лемма 2. *Если* $b = \text{НОД}(t+1, t^4 - t^3 + t^2 - t + 1)$, *то* $b = 1$ *либо* $b = 5$.

Имеем $t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1) = 2x^2$, где $t = y^5$. Так как число $t^2 - t + 1$ всегда нечетно, то из леммы 1 следует, что либо $t + 1 = 2u^2$, $t^2 - t + 1 = v^2$, либо $t + 1 = 6u^2$, $t^2 - t + 1 = 3v^2$. Далее, при $x > 1$ имеем $t > 1$, отсюда $(t-1)^2 < t^2 - t + 1 < t^2$, и равенство $t^2 - t + 1 = v^2$ выполняться не может. Получаем $t + 1 = y^5 + 1 = 6u^2$. С другой стороны, $(y^5 + 1) - (y^3 + 1) = y^3(y-1)(y+1)$ делится на произведение $(y-1)y(y+1)$, и поэтому делится на 3. Таким образом, $y^3 + 1$ делится на 3, значит $y^3 = 3m - 1$.

Далее, положим $z = y^3 = 3m - 1$, тогда $z^5 + 1 = (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 2x^2$. Если $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ делится на 5, то все доказано. В противном случае из леммы 2 следует, что сомножители в левой части равенства взаимно просты. Поскольку $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ нечетно, получаем, что $z + 1 = 2u^2$, $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = v^2$. Но так как

$z = 3m - 1$, то число в левой части последнего равенства при делении на 3 дает остаток 2, а число в правой части — остаток 0 или 1 — противоречие.

728. Идея решения состоит в следующем. Если соединить центры соседних черных клеток отрезками, то объединение проведенных отрезков разбивает плоскость на области. Из четности степеней вершин следует, что области можно покрасить в два цвета (желтый и синий) так, чтобы области, граничащие по отрезку, имели разные цвета. Далее, покрасим зеленым в синих областях клетки с четной абсциссой, а в желтых — с нечетной. Остальные клетки покрасим красным.

Проведем формальные рассуждения. Введем координаты так, чтобы центры клеток были целочисленными, и будем считать, что окрашены не клетки, а их центры. Вначале окрасим все белые точки «в полоску», т. е. так, чтобы зеленые точки имели четную абсциссу, а красные — нечетную. Пусть граф Γ имеет в качестве вершин множество V всех черных точек, а в качестве ребер — множество всех отрезков E, соединяющих соседние черные точки. Заметим, что степень каждой вершины в Γ четна.

Начнем движение по ребрам из какой-то вершины. Войдя в вершину по некоторому ребру, мы сможем выйти по другому ребру, поэтому когда-нибудь придем в вершину, в которой уже были. Тем самым, в графе найден простой цикл C. Ребра C ограничивают на плоскости многоугольник. Изменим цвет у всех красных и зеленых точек, лежащих внутри цикла C. Далее, перейдем к рассмотрению графа Γ', получаемого из Γ удалением всех ребер цикла C. В графе Γ' степень каждой вершины четна, поэтому снова найдем простой цикл, произведем перекрашивание, удалим ребра цикла, и т. д. Действуем так до тех пор, пока в соответствующем графе есть ребра.

Докажем, что полученная в конце этого процесса раскраска удовлетворяет условию.

Если у черной точки P четыре белых соседа, то при каждом перекрашивании они находились либо все внутри многоугольника, либо все — вне, а значит перекрашивались одинаковое число раз. Тогда у P по два красных и зеленых соседа, поскольку так было в начальной раскраске.

Пусть у черной точки P два белых соседа K и L, и два черных соседа M и N.

Пусть K и L лежат в одной горизонтали или в одной вертикали. Тогда K и L находились в разных частях плоскости относительно цикла только при перекрашивании точек внутри цикла, содержащего путь MPN. Таким образом, количество перекрашиваний точек K и L отличается на 1. Так как в начальной раскраске K и L одноцветны, то в конечной — разноцветны.

Если же K и L — соседи по диагонали, то при каждом перекрашивании они находились либо обе внутри многоугольника, либо обе — вне, и значит одна из них зеленая, другая — красная, как это было вначале.

11 класс

729. Ответ. 49.

Положим $f(x) = |x - a_1| + \ldots + |x - a_{50}| - |x - b_1| - \ldots - |x - b_{50}|$ и перепишем исходное уравнение в виде $f(x) = 0$. Пусть $c_1 < c_2 < \ldots < c_{100}$ — все числа из множества $\{a_1, \ldots, a_{50}, b_1, \ldots, b_{50}\}$, упорядоченные по возрастанию. На каждом из 101 промежутка $[-\infty, c_1]$, $[c_1, c_2], \ldots, [c_{99}, c_{100}], [c_{100}, +\infty)$, функция $f(x)$ линейна. Заметим, что на первом и последнем из этих промежутков $f(x) = m = (a_1 + \ldots + a_{50}) - (b_1 + \ldots + b_{50})$ и $f(x) = -m$ соответственно, при этом $m \neq 0$, так как количество корней конечно.

Пойдем по числовой оси слева направо. Вначале угловой коэффициент функции $f(x)$ равен 0. Всякий раз, когда мы проходим одну из точек c_i, он за счет смены знака при раскрытии соответствующего модуля изменяется на ± 2. Таким образом, он всегда равен четному целому числу и не может поменять знак, не обратившись перед этим в 0. Значит, угловые коэффициенты на любых двух соседних промежутках либо оба неотрицательны, либо оба неположительны, т. е. функция $f(x)$ на объединении этих промежутков либо неубывающая, либо невозрастающая. Стало быть, если число ее корней конечно, то на каждом из 50 отрезков $[c_1, c_3], \ldots, [c_{97}, c_{99}], [c_{99}, c_{100}]$ она имеет не более одного корня. Кроме того, на крайних интервалах значения имеют разные знаки, и в каждом корне знак функции меняется. Следовательно, количество корней нечетно и не превышает 49.

Нетрудно проверить, что если роль a_i будут играть числа 1, 4, 5, 8, $\ldots$, 97, 100, а роль b_i — числа 2, 3, 6, 7, $\ldots$, 94, 95, 98, $99\frac{1}{10}$, то уравнение $f(x) = 0$ будет иметь ровно 49 корней.

730. См. решение задачи 723.

731. Через точки касания вневписанных окружностей A' и C' проведем перпендикуляры к соответствующим сторонам треугольника. Они пройдут через центры вневписанных окружностей (I_1 и I_3) и пересекутся в некоторой точке O (см. рис. 317). Так как I_1 и I_3 находятся на внешней биссектрисе угла B, то $\angle ABI_3 = \angle CBI_1$. Из рассмотрения прямоугольных треугольников $I_1A'B$ и $I_3C'B$ следует, что $\angle BI_1A' = \angle BI_3C'$, значит, $\triangle OI_1I_3$ — равнобедренный.

Обозначим середину отрезка I_1I_3 через P. Поскольку $OI_1 = OI_3$, $OP \perp I_1I_3$. Рассмотрим окружность с диаметром OB. На ней лежат точ-

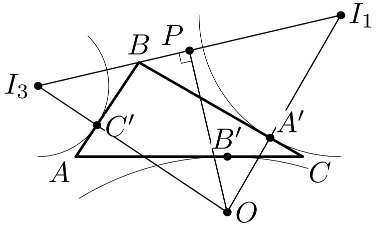


Рис. 317

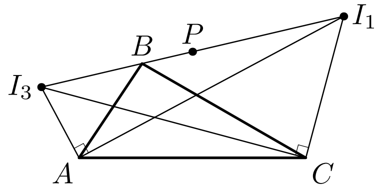


Рис. 318

ки A', C' и P, т. е. это окружность, описанная около $\triangle BA'C'$. Теперь достаточно доказать, что P лежит на описанной окружности $\triangle ABC$. Из этого будет следовать, что $P = B_1$, и $\triangle A_1B_1C_1$ — серединный треугольник для $I_1I_2I_3$, значит, его стороны параллельны внешним биссектрисам $\triangle ABC$. Но внешние биссектрисы параллельны сторонам треугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами $\triangle ABC$ (стороны этих треугольников перпендикулярны внутренним биссектрисам).

Проведем из вершин A и C биссектрисы внутренних и внешних углов $\triangle ABC$ (см. рис. 318). Как известно, две биссектрисы одного угла перпендикулярны. Следовательно, точки I_1, C, A, I_3 лежат на окружности с диаметром I_1I_3 и с центром в точке P. Рассмотрим центральный угол этой окружности — $\angle API_3$. Он опирается на дугу I_3A, не нее же опирается вписанный угол $\angle I_3CA = \frac{1}{2}\angle C$. Значит, $\angle I_3PA = 2\angle I_3CA = \angle C$. Из этого следует, что $\angle BPA = \angle BCA$, т. е. точки A, B, P, C лежат на одной окружности.

Замечание. Окружность, проходящая через A, B, C, P, является окружностью девяти точек для треугольника $I_1I_2I_3$.

732. Имеем $(z-1)(z+1) = x^y$, НОД$(z-1, z+1) = 1$ при нечетном x, НОД$(z-1, z+1) = 2$ при четном x. В первом случае $z-1 = u^y$, $z+1 = v^y$, где $u, v \in \mathbb{N}$; отсюда $v^y - u^y = 2$. Но, поскольку $v > u$, $y > 1$, имеем $v^y - u^y = (v-u)(v^{y-1} + \ldots + u^{y-1}) \geqslant (v-u)(2^{y-1}+1) \geqslant 3$. Противоречие: $2 \geqslant 3$. Значит, число x четно. В этом случае одно из чисел $z-1$ и $z+1$ делится на 2 и не делится на 4, а второе делится на 2^{y-1} и не делится на 2^y. Таким образом, $A = 2u^y$, $B = 2^{y-1}v^y$ (u, v — нечетные натуральные числа), где A и B равны, в некотором порядке, числам $z-1$ и $z+1$ (при этом $AB = x^y$). Получили $|2u^y - 2^{y-1}v^y| = 2$, $|u^y - 2^{y-2}v^y| = 1$. Отсюда, при некотором выборе знака, $u^y \pm 1 = 2^{y-2}v^y$.

Заметим, что $u > 1$. В самом деле, если $u = 1$, то $A = 2$, $A = z-1$, $z = 3$, $x = 2$ — противоречит условию. Кроме того, число y нечетно, в противном случае, если $y = 2n$, $z^2 - (x^n)^2 = 1$, что невозможно.

Лемма 1. *Пусть $a \geqslant 2$, p — нечетное простое число. Тогда число $a^p - 1$ имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем числа $a - 1$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение

$$a^p - 1 = (a-1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a^2 + a + 1) = (a-1)b.$$

Докажем вначале, что числа $a - 1$ и b не могут иметь общего делителя q, отличного от 1 и от p. Действительно, если $a - 1$ делится на q, то и $a^m - 1$ делится на q при любом натуральном m. Значит, $b = ql + p$, где l — некоторое целое число. Поэтому b делится на q лишь при $q = 1$ или p.

Таким образом, для завершения доказательства леммы осталось рассмотреть случай, когда $b = p^n$ и $a - 1$ делится на p. Докажем, что этот случай невозможен. Поскольку $b > p$, достаточно доказать, что b не делится на p^2. Докажем это. Если $a = p^\alpha k + 1$, где k не делится на p, то

$$a^p = (p^\alpha k + 1)^p = 1 + p^{\alpha+1}k + p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot p^{2\alpha}k^2 + \ldots = \\ = 1 + p^{\alpha+1}k + p^{\alpha+2}d,$$

где d целое. Отсюда $a^p - 1 = p^{\alpha+1}(k + pd)$. Поскольку k не делится на p, то очевидно, что b делится на p и не делится на p^2. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $a \geqslant 2$, p — нечетное простое число и выполнено хотя бы одно из неравенств $a \neq 2$ и $p \neq 3$. Тогда $a^p + 1$ имеет простой делитель, не являющийся делителем числа $a + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение

$$a^p + 1 = (a+1)(a^{p-1} - a^{p-2} + \ldots + a^2 - a + 1) = (a+1)b.$$

Докажем вначале, что числа $a + 1$ и b не могут иметь общего делителя r, отличного от 1 и от p. Действительно, если $a + 1$ делится на r, то и $a^k + 1$ делится на r при любом нечетном k; если же $k = 2m$, то $a^k - 1$ делится на $a^2 - 1$, которое, в свою очередь, делится на r. Значит, $b = rl + p$, где l — некоторое целое число. Поэтому b делится на r лишь при $r = 1$ или p.

Таким образом, для завершения доказательства леммы осталось рассмотреть случай $b = p^n$, $a + 1$ делится на p. Докажем, что этот случай невозможен. Докажем вначале, что, как и в доказательстве леммы 1, $b > p$. Имеем $b \geqslant a^2 - a + 1 \geqslant a + 1 \geqslant p$. Из условий леммы следует, что среди неравенств этой цепочки есть строгие. С другой стороны, как и в доказательстве леммы 1, можно получить, что число b не делится на p^2, что и завершает доказательство леммы.

Из доказанных лемм следует, что правая часть равенства $u^y \pm 1 = 2^{y-2}v^y$ имеет не менее $q + 1$ различных простых делителей. Поскольку НОД$(u, 2v) = 1$, $u > 1$, получаем отсюда неравенство задачи.

Замечание. Фактически мы доказали следующее, более сильное, чем утверждение задачи,

Предложение. Пусть число y разлагается в произведение n отличных от 1 натуральных чисел. Тогда x имеет не менее $n+2$ различных простых делителей.

733. **Ответ.** Не существует.

Возьмем произвольно $x_1 \neq 0$ и положим $y_1 = \frac{1}{x_1}$. Тогда $f^2(x_1 + y_1) \geqslant f^2(x_1) + 2f(1) + f^2(y_1) \geqslant f^2(x_1) + a$, где $a = 2f(1) > 0$. Будем далее выбирать $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$, $y_n = \frac{1}{x_n}$, $n \geqslant 2$. Тогда $f^2(x_n + y_n) \geqslant f^2(x_n)+a = f^2(x_{n-1}+y_{n-1})+a \geqslant f^2(x_{n-1})+2a \geqslant \ldots \geqslant f^2(x_1) + na$. Ясно, что последовательность $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$, $f(x_n)$, $\ldots$ неограничена.

734. **Ответ.** Нельзя.

Предположим, что это возможно. Заметим, что два из рассматриваемых параллелепипедов пересекаются тогда и только тогда, когда их проекции на все три оси координат пересекаются.

Рассмотрим 4 пары параллелепипедов: P_1 и P_2, P_4 и P_5, P_7 и P_8, P_{10} и P_{11}. Если взять параллелепипеды из разных пар, то они пересекаются, значит их проекции на любую ось пересекаются. Паре параллелепипедов из одной пары поставим в соответствие ось координат (одну из осей, если таковых несколько), на которую проекции этих параллелепипедов не пересекаются. Поскольку пар 4, а осей — 3, найдутся две пары (скажем, P_1 и P_2, P_4 и P_5), которым сопоставлена одна и та же ось Ox.

Пусть отрезки S_1, S_2, S_4, S_5 — проекции P_1, P_2, P_4, P_5 соответственно на ось Ox (пусть A_i — левые концы отрезков S_i, а B_i — правые). Известно, что отрезки в парах S_1 и S_2, S_4 и S_5 не пересекаются, а в любых других парах — пересекаются. Не ограничивая общности, можем считать, что $A_1 < B_1 < A_2 < B_2$ и $A_4 < B_4 < A_5 < B_5$. Так как S_1 пересекается с S_5, то $A_5 < B_1$. Но тогда $B_4 < A_2$, и отрезки S_2 и S_4 не пересекаются. Противоречие.

Замечание. Ответ в соответствующей задаче для 10 параллелепипедов также отрицательный, а для 9 параллелепипедов — положительный.

735. Пусть X и Y — середины AB и CD соответственно, AB и CD пересекаются в точке P (пусть для определенности P — точка пересечения лучей AB и DC) (см. рис. 319).

Предположим, что O — точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$. Тогда O — середина отрезка XY, так как середины сторон четырехугольника — вершины параллелограмма. Далее, PO — биссектриса и медиана в треугольнике XPY, поэтому он равнобедрен-

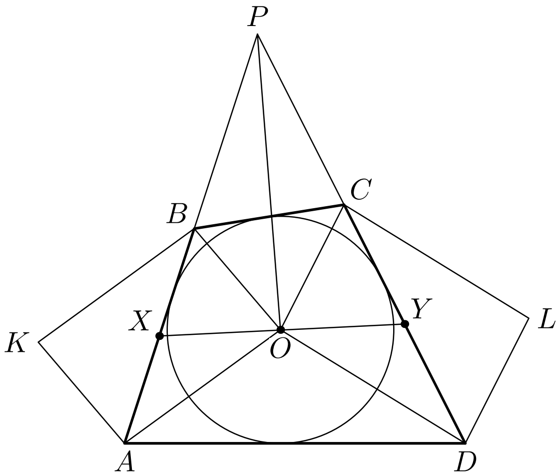


Рис. 319

ный и $\angle BXO = \angle CYO$. Кроме того, $\angle XBO + \angle YCO = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCD) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BPC) = \angle PXY = \angle XBO + \angle XOB$, поэтому $\angle YCO = \angle XOB$, и треугольники OXB и CYO подобны. Следовательно, $\frac{OB}{OC} = \frac{XB}{YO}$. Аналогично, $\frac{OA}{OD} = \frac{XA}{YO} = \frac{XB}{YO}$, откуда следует $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

Пусть теперь $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Заметим, что $\angle AOB + \angle COD = (180^\circ - \angle OAB - \angle OBA) + (180^\circ - \angle OCD - \angle ODC) = 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA) = 180^\circ$. Поэтому, если достроить треугольники OAB и OCD до параллелограммов $OAKB$ и $OCLD$, то эти параллелограммы будут подобны (поскольку $\frac{OA}{AK} = \frac{OA}{OB} = \frac{DO}{OC}$). Тогда треугольники OXB и CYO также подобны, поскольку они соответствуют друг другу при подобии параллелограммов. Отсюда $\angle XOB = \angle OCY = \angle OCB$ и $\angle COY = \angle XBO = \angle OBC$. Следовательно, $\angle XOB + \angle BOC + \angle COY = \angle OCB + \angle BOC + \angle OBC = 180^\circ$, т. е. точка O лежит на прямой XY. Аналогично, O лежит на прямой, соединяющей середины двух других сторон четырехугольника, что и требовалось.

736. Лемма. *Пусть есть n непересекающихся пар знакомых — представителей n стран по двое от страны. Тогда можно разбить их на 2 группы, в каждой из которых по одному представителю от страны и нет знакомых.*

Доказательство. Выберем любого представителя страны 1, поместим его в первую группу, второго представителя этой же страны поместим во вторую группу, его знакомого (представителя, скажем, i-й страны)

— снова в первую, второго представителя i-й страны — во вторую и т. д. Этот процесс завершится, когда очередной знакомый уже распределен; это возможно только если этот знакомый — изначальный представитель первой страны, тогда он помещен в первую группу, что от него и требовалось.

Если еще остались нераспределенные люди, осталось повторить процесс, начиная с любого нераспределенного человека. Лемма доказана.

Теперь разобьем четырех представителей страны X на двух представителей страны X' и двух — страны X'', и так поступим со всеми странами. Разобьем всех сидящих на 50 пар сидящих рядом и объявим людей из одной пары знакомыми. Тогда, в силу леммы, можно разбить этих людей на две группы по 50 человек, среди которых нет знакомых и есть по одному представителю «новых» стран (или по 2 представителя «старых»). Но тогда в каждой группе вместе с любым человеком присутствует не более одного его соседа. Тогда мы можем в каждой группе разбить людей на пары знакомых так, чтобы соседи оказались знакомыми, и снова применить лемму, разбив нашу группу на 2 подгруппы, без знакомых, т. е. без соседей.

2005–2006 г.

9 класс

737. Ясно, что ломаная пересекает диагональ. Пусть A — одна из вершин ломаной, лежащая на диагонали. Будем двигаться по ломаной, пока не попадем в первый раз снова в вершину B, лежащую на диагонали. Из симметрии, если двигаться по ломаной из A в другую сторону, то B также окажется первой вершиной на диагонали, в которую мы попадем. При этом ломаная уже замкнется, поэтому через остальные 13 центров клеток на диагонали ломаная не проходит.

Раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы диагональ была черной. Заметим, что на нашей ломаной белые и черные клетки чередуются, поэтому их количества равны. В исходном же квадрате черных клеток на одну больше. Поскольку клетки диагонали черные, и ломаная не проходит через 13 из них, то она не проходит и через 12 белых клеток. Итого, длина ломаной не более $15^2 - 13 - 12 = 200$.

738. Рассмотрим какое-нибудь натуральное число $n > 1000000$. Покажем, что условию будет удовлетворять четверка чисел $-n$, $n+1$, $n(n+1)+1$, $n(n+1)(n(n+1)+1)+1$. Действительно, применив трижды соотношение $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)}$, получаем

$$\frac{1}{-n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)+1}+\frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)+1}=$$
$$=-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)+1}+\frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)+1}=$$
$$=-\frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)+1}=$$
$$=-\frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)(n(n+1)(n(n+1)+1)+1)},$$

что и требовалось.

739. Ответ. 117.

Заметим, что $2006 = 17 \cdot 118$; поэтому найдутся 2 цвета, в которые покрашены в сумме не менее $2 \cdot 118 = 236$ точек.

Докажем индукцией по k, что через $2k-1$ точку двух цветов всегда можно провести $k-1$ непересекающуюся хорду с одноцветными концами. База очевидна. Пусть $k > 2$. Тогда среди точек возьмем две одноцветных, стоящих подряд. Соединим их хордой, выбросим и применим предположение индукции к оставшимся точкам.

Выбрав 235 точек двух цветов и применив данное утверждение, получаем, что 117 хорд Коля сможет провести всегда. Осталось привести пример, когда больше хорд провести нельзя.

Пусть на окружности стоит $17k$ точек. Пусть Петя покрасит каждую точку в цвет, соответствующий остатку от деления на 17 ее номера. Докажем индукцией по k, что через эти точки можно провести не более $k-1$ хорды с выполнением условия. База очевидна, докажем переход. Пусть проведено некоторое количество хорд. Рассмотрев две соединенные точки A и B на минимальном расстоянии друг от друга, получим такую хорду AB, что на одной из дуг, на которые она делит окружность, нет концов других проведенных хорд. Теперь сотрем хорду AB и уберем с окружности все точки этой дуги, включая один из концов хорды. Мы получили исходную раскраску $17l$ точек при $l < k$. Они соединены не более, чем $l-1$ хордой, поэтому изначально хорд было не больше $l-1+1 \leqslant k-1$, что и требовалось.

740. Пусть M — вторая точка пересечения ω со стороной AC. Докажем, что четырехугольник $ATLC$ — вписанный. Действительно, заметим, что при гомотетии с центром A, переводящей окружность ω в описанную окружность треугольника ABC, прямая MK переходит в прямую CB, а следовательно, они параллельны (см. рис. 320). Тогда получаем, что $\angle AMK = \angle ACB = \angle ACT$, но из вписанности четырехугольника $AMLK$ имеем $\angle AMK = \angle ALK = \angle ALT$. Отсюда $\angle ACT = \angle ALT$, т. е. $ATLC$ — вписанный. Следовательно, $\angle CTA = \angle CLA$, но по свойству касательной $\angle CLA = \angle LKA$, т. е. $\angle CTA = \angle TKA$, и значит, $\angle BTA = \angle BKT$. Тогда треугольники BTA и BKT подобны по двум углам, откуда $BT^2 = BK \cdot BA$. С другой стороны, произведение $BK \cdot BA$ равно квадрату касательной к ω из точки B.

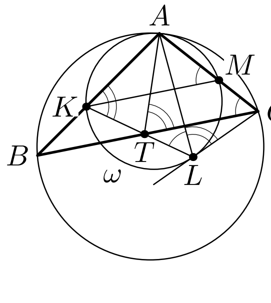


Рис. 320

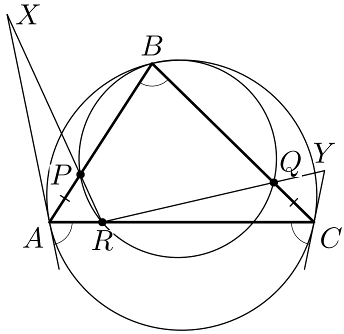


Рис. 321

741. Заметим, что $b_k = \frac{a_k}{c_k}$, где c_k — наименьший простой делитель a_k. Так как $b_9 > b_{10}$, то $b_9 > 1$ и $b_9 \geqslant c_9$. Отсюда $a_{10} > a_9 \geqslant c_9^2$. Но из неравенств $a_i < a_{i+1}$, $b_i > b_{i+1}$ следует, что $c_i < c_{i+1}$, т. е. $c_1 < c_2 < \ldots < c_{10}$. Значит, $c_9 \geqslant 23$, так как 23 — девятое по счету простое число. Поэтому $a_{10} > c_9^2 \geqslant 529 > 500$.

742. Сначала заметим, что поскольку $\angle ARP < \angle ARP + \angle QRC = \angle ABC$, то точка X лежит на луче RP (иначе $\angle ARP = \pi - \angle ARX > \angle RAX = \angle ABC$) (см. рис. 321). Тогда $\angle ACB = \angle XAB$ и $\angle APX = \angle RPB = \angle RQC$, и треугольники APX и CQR равны по стороне и двум углам. Следовательно, $PX = QR$. Аналогично, $PR = QY$, откуда и следует утверждение задачи.

743. **Ответ.** Выигрывает игрок, делающий второй ход.

Приведем выигрышную стратегию для второго. Первыми несколькими ходами он склеивает каждую клетку, примыкающую к границе квадрата со всеми ее соседями. На это потребуется не более $8 \cdot 99$ ходов, т. е. после этого будет склеено всего $16 \cdot 99$ пар сторон и, как следствие, не более $2 \cdot 16 \cdot 99 < \frac{10\,000}{2}$ доминошек окажутся склеенными с чем-нибудь еще. Следовательно, после этого еще останутся отдельные доминошки, и фигура не будет связной. Далее второй будет действовать произвольным образом, следя только за тем, чтобы не проиграть прямо нынешним ходом.

Пусть в некоторый момент ему не удастся сделать этого. Тогда все доминошки распадаются на две связных фигуры, причем все несклеенные отрезки — это граница между этими фигурами, так как любой другой отрезок можно склеить. При этом одна из этих фигур содержит все граничные клетки квадрата.

В границе внутренней фигуры четное число отрезков (если мы обойдем эту ломаную, то отрезков, по которым мы шли вверх и вниз, будет поровну; то же с отрезками вправо и влево). Подсчитаем изначальное число разрезанных сторон отрезков. Оно равно суммарному периметру всех доминошек, уменьшенному на периметр квадрата и деленному на 2 (так как каждый из остальных отрезков считался по два раза), т. е. $\frac{6 \cdot 5000 - 400}{2}$ — четному числу. Значит, к данному моменту склеено также четное число сторон, и ходить должен первый. Противоречие.

744. Обозначим через c_1 и c_2 корни уравнения $f(x) = 0$, а через x_1 и x_2 — корни уравнения $f(f(x)) = 0$, сумма которых равна -1. Множество корней последнего уравнения совпадает с объединением множеств корней уравнений $f(x) = c_1$ и $f(x) = c_2$. Если x_1 и x_2 являются корнями одного из последних двух уравнений, то их сумма, равная -1, будет по теореме Виета равна и $-a$, откуда $a = 1$. Можно считать, что $c_1 \geqslant c_2$. Но поскольку по теореме Виета $c_1 + c_2 = -1$, то $c_2 \leqslant -\frac{1}{2}$. Из условия следует, что дискриминант уравнения $f(x) = c_2$ неотрицателен, поэтому $1 - 4b + 4c_2 \geqslant 0$, откуда $b \leqslant -\frac{1}{4}$.

В противном случае, не умаляя общности, можно записать, что $x_1^2 + ax_1 + b = c_1$ и $x_2^2 + ax_2 + b = c_2$. Складывая последние два равенства, получим: $x_1^2 + x_2^2 + a(x_1 + x_2) + 2b = c_1 + c_2$. Поскольку $c_1 + c_2 = -a$ по теореме Виета, а $x_1 + x_2 = -1$ по условию, то последнее равенство после сокращения перепишется так: $x_1^2 + x_2^2 + 2b = 0$. Но тогда $b = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \leqslant -\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 = -\frac{1}{4}$.

10 класс

745. См. решение задачи 737.

746. В решении латинскими буквами везде обозначены натуральные числа.

По условию, $(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = y^3$, или $3x(x^2+2) = y^3$. Тогда y делится на 3, $y = 3z$ и $x(x^2+2) = 9z^3$. Очевидно, НОД$(x, x^2+2) \leqslant 2$.

Докажем, что случай НОД$(x, x^2+2) = 1$ невозможен. Действительно, в этом случае либо $x = 9u^3$ и $x^2 + 2 = v^3$, либо $x = u^3$, $x^2 + 2 = 9v^3$ при некоторых натуральных u, v. В первом случае получаем $81u^6 + 2 = v^3$, что невозможно, так как куб целого числа при делении на 9 дает остаток 0 или ± 1. Аналогично, второе равенство влечет, что $u^6 + 2 = 9v^3$, что невозможно по тем же причинам.

Итак, НОД$(x, x^2+2) = 2$, $x(x^2+2) = 9z^3$. Тогда x (и, следовательно, z) четно, поэтому $x(x^2+2)$ делится на 8. Поскольку x^2+2 не делится на 4, получаем, что x делится на 4, что и требовалось.

747. **Ответ.** 117.

См. решение задачи 739.

748. Обозначим через D и E точки касания ω со сторонами AB и AC, $DE \parallel BC$ из симметрии относительно биссектрисы угла BAC (см. рис. 322). Пусть при гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{AK}{AM}$ окружность ω переходит в окружность ω'. Окружность ω' проходит через точку K, а следовательно, и через L (из симметрии относительно биссектрисы угла BAC), а также ω' касается лучей AB и AC в некоторых точках D' и E'.

Из гомотетии следует, что $MD \parallel KD'$. Далее, по теореме о произведении отрезков касательных $BD^2 = BK \cdot BL = BD'^2$, откуда $BD = BD'$. По построению $BK = BP$, поэтому $DKD'P$ — параллелограмм, и значит, $PD \parallel KD'$. Отсюда вытекает, что точки M, D, P лежат на одной прямой. Аналогично, M, E и Q лежат на одной прямой. Треугольники MDE и MPQ гомотетичны с центром M, следовательно, их описанные окружности также гомотетичны, т. е. касаются в точке M.

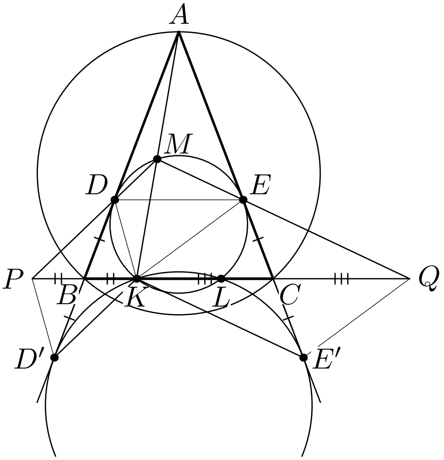


Рис. 322

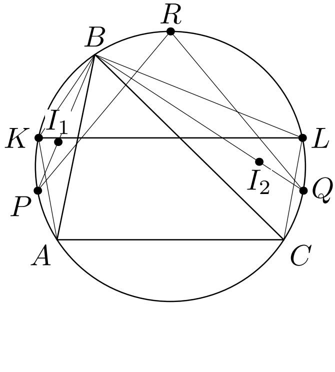


Рис. 323

749. См. решение задачи 741.

750. Если $AB = BC$, то утверждение задачи очевидно. Пусть для определенности $AB < BC$ (см. рис. 323). Обозначим через I_1, I_2 центры вписанных окружностей треугольников AKB и CLB соответственно, через P, Q — вторые точки пересечения прямых BI_1, BI_2 с описанной окружностью треугольника ABC, а через R — середину дуги ABC этой окружности. Тогда $PA = QC$ как хорды, стягивающие половины равных дуг. Так как $\angle PAI_1 = \angle PAK + \angle KAI_1 = \angle PBK + \angle BAI_1 = \angle ABI_1 + \angle BAI_1 = \angle AI_1P$, то треугольник AI_1P равнобедренный, и $PA = PI_1$. Аналогично $QC = QI_2$; следовательно, $PI_1 = QI_2$. Далее, $PR = QR$ как хорды, стягивающие равные дуги, а $\angle I_2QR = \angle I_1PR$ как углы, опирающиеся на одну дугу. Тогда треугольники RI_1P и RI_2Q равны по двум сторонам и углу между ними, откуда и следует утверждение задачи.

751. См. решение задачи 744.

752. Раскрасим клетки квадрата в черный и белый цвет в шахматном порядке. Каждая доминошка покрывает ровно одну черную клетку. Разобьем квадрат $3\,000 \times 3\,000$ на квадраты 6×6, и в каждом квадрате перекрасим черные клетки в 3 цвета как показано на рис. 324 или на рис. 325. Окрасим доминошки в первый, второй и третий цвета так, чтобы доминошка накрывала клетку своего цвета.

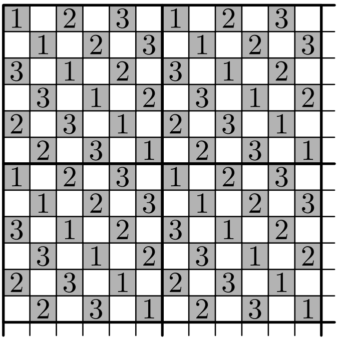


Рис. 324

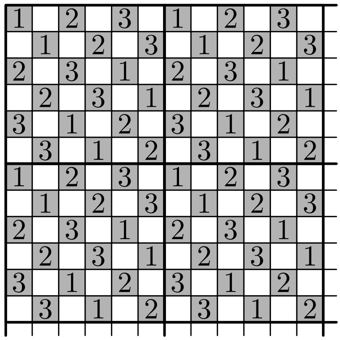


Рис. 325

В квадрате 6×6 поровну клеток каждого цвета, значит и в квадрате $3\,000 \times 3\,000$ тоже. Следовательно, доминошек каждого цвета поровну. Пусть две клетки одного цвета покрыты соседними доминошками. Легко видеть, что для наших раскрасок это возможно только если эти две клетки имеют общую вершину. Для данной клетки на рис. 1 имеется не более двух клеток того же цвета, имеющих с ней общую вершину, а на рис. 2 — не более одной такой клетки. Отсюда следует, что если использовать раскраску рис. 1, то для любой доминошки имеется не более двух соседних доминошек того же цвета, а если использовать раскраску рис. 2, то даже не более одной соседней доминошки того же цвета.

11 класс

753. При $x \geqslant 1$ имеем $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Отсюда $\sin\sqrt{x} \leqslant \sin x$. Далее, поскольку $0 < \sin x < 1$, имеем $\sin x < \sqrt{\sin x}$. Пусть $0 < x < 1$.

Перепишем неравенство: $\sin^2 t < \sin(t^2)$ при $0 < t < 1$. Так как $\sin^2 0 = \sin(0^2)$, то достаточно доказать $(\sin^2 t)' < (\sin(t^2))'$, или $2\sin t\cos t < 2t\cos(t^2)$. Поскольку $\frac{\pi}{2} > t > t^2 > 0$, то $\cos t < \cos(t^2)$. Перемножив это неравенство и $\sin t < t$, получим $\sin t\cos t < t\cos(t^2)$.

754. Заметим, что чисто периодическая дробь с периодом T после домножения на $10^T - 1$ становится целым числом. Домножим наши две дроби a и b на число $10^T - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{T}$. Получатся два новых рациональных числа $A = (10^T - 1)a$ и $B = (10^T - 1)b$. Числа $A + B = (10^T - 1)(a + b)$ и $AB = (10^T - 1)^2 ab$ целые, так как $a + b$ и ab — дроби с периодом T, становящиеся целыми при домножении на $10^T - 1$ и тем более на $(10^T - 1)^2$. Но два рациональных числа, сумма и произведение которых целые, являются корнями приведенного квадратного уравнения с целыми коэффициентами, т. е. сами являются целыми числами. Значит, a и b могут быть записаны в виде обыкновенных дробей со знаменателем $10^T - 1$, откуда и следует утверждение задачи.

755. **Ответ.** Выигрывает первый.

Первое решение. Разобьем все отмеченные точки на пары так, что любой отрезок с концами в точках одной пары — горизонтальный отрезок длины 1. Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Пусть первым ходом он соединит точки из какой-нибудь пары. Далее, если второй соединяет отрезком две точки какой-нибудь пары, то первый соединяет отрезком две точки другой пары (назовем эти два проведенных отрезка двойкой первого типа). Если же второй соединяет отрезком две точки из разных пар, то первый соединяет отрезком две оставшиеся точки из этих пар (назовем такие два отрезка двойкой второго типа). Заметим, что количество точек делится на 4, поэтому последний ход сделает второй. Первый будет делать ответные ходы до тех пор, пока не останется одна пара — эти две оставшиеся точки соединит отрезком второй игрок. Теперь заметим, что в двойке первого типа можно выбрать направления так, чтобы сумма двух векторов равнялась нулевому вектору, а двойке второго типа можно выбрать направления так, чтобы сумма двух векторов равнялась горизонтальному вектору длины 2 (любого из двух направлений). Теперь первому нужно так выбрать направления в двойках второго типа, чтобы суммарная длина всех векторов в этих двойках равнялась либо нулевому вектору, либо горизонтальному вектору длины 2. После этого останется только два отрезка длины 1 (первый ход первого игрока и последний ход второго), на которых первому игроку нужно выбрать направления так, чтобы сумма всех векторов равнялась нулевому вектору.

Второе решение. Будем считать, что большая сторона прямоугольника параллельна оси Ox, а меньшая — Oy, при этом левый нижний угол прямоугольника совпадает с началом координат.

Лемма 1. Пусть игроки провели все отрезки. Тогда, независимо от расстановки стрелок, проекция вектора суммы на каждую из осей будет иметь четную длину.

Доказательство. Рассмотрим проекцию вектора суммы на ось Ox. Для каждой точки в зависимости от направления вектора ее координата по оси Ox берется либо со знаком плюс, либо со знаком минус. Сумма координат (с соответствующими знаками) по оси Ox всех точек прямоугольника и даст проекцию вектора суммы на ось Ox. Однако пятьдесят из этих точек имеют координату 0, пятьдесят имеют координату 1, $\ldots$, пятьдесят имеют координату 69. То есть среди этих чисел четное количество нечетных. Это и означает, что соответствующая сумма будет четной. Аналогично проекция вектора суммы на ось Oy будет иметь четную длину. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть имеется набор отрезков с концами в целочисленных точках прямоугольника 49×69. Тогда можно так выбрать направления на этих отрезках, что проекция вектора суммы на ось Ox будет меньше 140, а на ось Oy — меньше 100.

Доказательство. Разобьем отрезки набора на четыре группы: параллельных оси Ox (группа A), параллельных оси Oy (группа B), тех, у которых правый конец выше левого (группа C), и тех, у которых правый конец ниже левого (группа D). Заметим, что если взять два отрезка из одной группы, то на них так можно выбрать направления, что по модулю координаты вектора их суммы будут не больше 69 по оси Ox и не более 49 по оси Oy (назовем такой вектор *коротким*). Также заметим, что если у набора векторов все направления поменять на противоположные, то вектор суммы изменит лишь знак.

Будем теперь проводить следующую процедуру. На каждом шаге будем выбирать пару отрезков из одной группы и заменять их соответствующим отрезком, который соответствует короткому вектору (новый отрезок может попасть в другую группу). Если в процессе получится отрезок нулевой длины, выкинем его. Заметим тогда, что если в полученном наборе мы можем расставить направления требуемым образом, то и в старом это было возможно.

Через некоторое число шагов мы придем к такой ситуации, что в каждой группе будет не более одного отрезка. Выбрав направления на отрезках из групп C и D, мы получим вектор, проекция которого на ось Ox будет меньше 140, а на ось Oy — меньше 100. Пусть обе его координаты неотрицательны. Если теперь на отрезках из групп A и B выбрать отрицательные направления, то у итогового вектора суммы проекция на ось Ox будет меньше 140, а на ось Oy — меньше 100.

Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Опишем стратегию первого игрока. Ему необходимо будет провести 140 горизонтальных отрезков длины 1 и 100 вертикальных отрезков длины 1 (назовем их *красными*). Тогда, после того как будут проведены все отрезки, на всех не красных отрезках по лемме 2 он так может выбрать направления, что проекция вектора суммы на ось Ox будет меньше 140, а на Oy — меньше 100. Теперь ему останется выбрать направления на красных отрезках так, чтобы проекция вектора суммы на каждую из осей будет равна нулю. Поскольку по лемме 1 проекция вектора суммы на каждую из осей будет иметь четную длину, он сможет это сделать и выиграет.

Покажем, как первому игроку провести требуемое количество красных отрезков. Выделим $25 \cdot 35 = 875$ квадратиков, каждый из которых содержит четыре отрезка длины 1 (см. рис. 326). Каждым своим ходом первый будет отмечать вертикальный или горизонтальный отрезок в одном из квадратиков. Для этого ему потребуется 240 ходов, каждым из которых первый тратит один квадратик. Заметим, что второй каждым своим ходом «портит» не более двух квадратиков. Таким образом, после каждого хода первого и второго используется не более трех квадратиков. Поскольку $240 \cdot 3 = 720 < 875$, первый сможет провести 240 красных отрезков нужных направлений, что и требовалось.

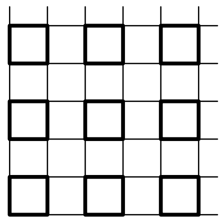


Рис. 326

756. Пусть биссектрисы AI, BI, CI пересекают описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Точки B_0 и C_0 являются соответственно серединами дуг AC и AB. Проведем через A прямую, параллельную B_0C_0, пересекающую биссектрисы в точках I_B и I_C (см. рис. 327). Имеем $\angle AIB_0 = \angle ABI + \angle BAI = \angle ABB_0 + \angle BAA_0 = \angle B_0BC + \angle CAA_0 = \angle B_0AI$, поэтому треугольник B_0AI равнобедренный ($B_0A = BI$). Аналогично, $C_0A = CI$, поэтому треугольники B_0AC_0 и B_0IC_0 равны. Далее, отрезок B_0C_0 является серединным перпендикуляром к AI, а AI — высота в треугольнике II_BI_C. Отсюда следует, что B_0C_0 — средняя линия треугольника I_BII_C. Получаем следующие равенства для радиусов описанных окружностей: $R(I_BII_C) = 2R(B_0IC_0) = 2R(B_0AC_0) = 2R(ABC)$.

Теперь достаточно доказать, что точки M и N лежат на описанной окружности треугольника I_BII_C. Заметим, что $\angle AI_BI = \angle C_0B_0I =$

$= \angle C_0B_0A = \angle C_0CA = \angle ICA$, значит точки A, I, C, I_B лежат на одной окружности, отсюда $B_1A \cdot B_1C = B_1I \cdot B_1I_B$. С другой стороны, $B_1A \cdot B_1C = B_1M \cdot B_1N$, так как точки A, M, C, N лежат на одной окружности. Следовательно, $B_1M \cdot B_1N = B_1I \cdot B_1I_B$, и точка I_B лежит на описанной окружности треугольника IMN. Аналогично, на ней лежит точка I_C, что и требовалось.

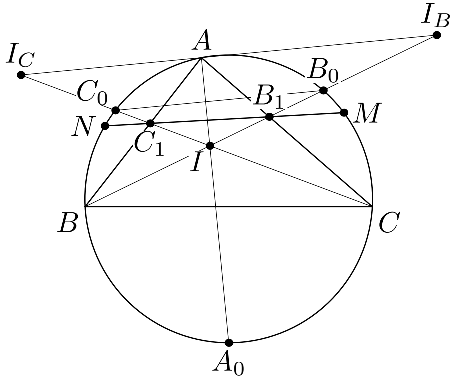


Рис. 327

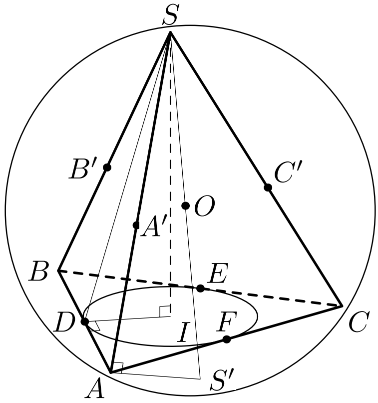


Рис. 328

757. Очевидно, начиная со второго члена, наши последовательности возрастают: $x_{n+2} > x_{n+1}^2 > x_{n+1}$, $y_{n+2} > y_{n+1}$. Так как $x_3 > 1 + 1^2 = 2$, $y_3 > 1^2 + 1 = 2$, все члены каждой из последовательностей, начиная с третьего, больше 2. Аналогично при $n > 3$ получим $x_n > 3$, $y_n > 3$.

Заметим теперь, что $x_{n+2} > x_{n+1}^2 > x_n^4$ при $n > 1$. С другой стороны, $y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1} = y_n^2 + y_n + y_{n-1}^2 < 3y_n^2 < y_n^3$ при $n > 3$.

Итак, при $n > 3$ имеем: $\frac{\lg x_{n+2}}{\lg y_{n+2}} > \frac{4 \lg x_n}{3 \lg y_n}$, а $\frac{\lg x_{2k}}{\lg y_{2k}} > \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{\lg x_2}{\lg y_2}$. При достаточно большом k правая часть последнего неравенства больше 1, а значит, $x_{2k} > y_{2k}$, что и требовалось доказать.

758. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что SD — высота в грани SAB. Так как SS' — диаметр окружности, проходящей через S, S' и A, то $\angle SAS' = 90°$ (см. рис. 328). Обозначив через R и r соответственно радиусы описанной сферы пирамиды и вписанной окружности треугольника ABC, имеем $S'A'^2 = S'A^2 + AA'^2 = (SS'^2 - SA^2) + AD^2 = SS'^2 - (SA^2 - AD^2) = SS'^2 - SD^2 = SS'^2 - (SI^2 + ID^2) = (2R)^2 - SI^2 - r^2$. Аналогично вычисляя $S'B'$ и $S'C'$, получаем, что $S'A' = S'B' = S'C' = \sqrt{(2R)^2 - SI^2 - r^2}$.

759. Перепишем условие задачи в виде равенства $(x + 1)^n - 1 = P(x)Q(x)$, где $P(x)$ — многочлен с нечетными коэффициентами.

Будем называть два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ *похожими* и обозначать $f(x) \equiv g(x)$, если коэффициенты при одинаковых степенях у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковую четность. Тогда, если в верном равенстве мы заменим некоторые коэффициенты одного или нескольких многочленов на их остатки по модулю 2, то мы получим два похожих многочлена. Следовательно,

$$(x+1)^n - 1 \equiv (x^k + x^{k-1} + \ldots + 1)Q(x). \tag{1}$$

Заменив в последнем равенстве переменную x на $\frac{1}{x}$ и домножив обе части на x^n, получаем

$$(x+1)^n - x^n \equiv (x^k + x^{k-1} + \ldots + 1)x^{n-k}Q(\frac{1}{x}). \tag{2}$$

При этом $x^{n-k}Q\left(\frac{1}{x}\right)$ — это некоторый многочлен степени, не превосходящей $n-k$, от переменной x. Вычитая из (1) формулу (2), имеем

$$x^n - 1 \equiv (x^k + x^{k-1} + \ldots + 1)R(x),$$

для некоторого многочлена $R(x)$. Пусть n не делится на $k+1$, тогда $n = q(k+1) + r$, $0 < r < k+1$. Тогда многочлен $x^n - x^r = x^r(x^{q(k+1)} - 1)$ делится на $x^{k+1} - 1 = (x^k + \ldots + 1)(x-1)$, а значит, $x^r - 1 = (x^n - 1) - (x^n - x^r) \equiv (x^k + \ldots + 1)R_1(x)$ для некоторого многочлена $R_1(x)$. Это невозможно, ибо степень многочлена $x^r - 1$ не больше степени многочлена $x^k + \ldots + 1$, и они непохожи.

760. В решении мы будем пользоваться следующей известной теоремой.

Теорема Холла. Пусть дан двудольный граф G (т. е. его вершины разбиты на два подмножества A и B таких, что любое ребро соединяет вершины из разных подмножеств). Предположим, что для любого подмножества вершин $A_1 \subseteq A$ количество вершин в A_1 не больше, чем количество вершин, соединенных хотя бы с одной вершиной из A_1. Тогда в графе найдется паросочетание (т. е. набор ребер с различными концами), содержащее все вершины множества A.

Перейдем к решению задачи. Построим граф, вершины которого соответствуют пионерам, а ребра — знакомствам. Степени вершин этого графа не менее 50 и не более 100. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $k \leqslant n \leqslant m$ — натуральные числа. Тогда из графа, степени вершин которого не менее n и не более m, можно удалить несколько ребер так, чтобы степени всех вершин стали не менее $n-k$ и не более $m-k$.*

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать утверждение леммы для $k = 1$. До тех пор, пока есть ребра, соединяющие пары вершин степени m, будем удалять такие ребра. Пусть таких ребер больше нет, обозначим через A множество всех вершин степени m в полученном после удаления ребер графе G, а через B множество всех остальных вершин.

Рассмотрим двудольный граф G' на тех же вершинах, в котором останутся лишь ребра между A и B. Проверим выполнение условия теоремы Холла для этого графа. Рассмотрим множество $A_1 \subset A$, пусть B_1 — множество вершин, смежных с вершинами из A_1. Из A_1 выходит не менее $m|A_1|$ ребер к вершинам множества B_1, а в каждую вершину из B_1 входит менее m ребер, следовательно, $|B_1| \geqslant |A_1|$ (через $|X|$ мы, как обычно, обозначаем количество элементов в множестве X). Таким образом, по теореме Холла существует паросочетание, содержащее все вершины из A. Удалив из графа G ребра этого паросочетания, мы получим граф G_1, степени вершин которого не менее $n-1$ и не более $m-1$. Лемма 1 доказана.

Перейдем к решению задачи. Применив лемму 1 для исходного графа и $k = 30$, мы получим граф H, степени вершин которого не менее 20 и не более 70. Сделаем его ребра красными. Для каждой вершины этого графа отметим 20 вершин среди ее соседей и попарно соединим эти 20 вершин зелеными ребрами. Так как из каждой вершины выходит не более 70 красных ребер, то из нее выходит не более, чем $70 \cdot 19 = 1330$ зеленых ребер.

Рассмотрим граф H' с зелеными ребрами на вершинах графа H. Несложно по очереди покрасить эти вершины в 1331 цвет так, чтобы соседние вершины были разноцветными: рассматривая каждую следующую вершину, покрасим ее в любой незадействованный среди ее соседей цвет.

Теперь опять рассмотрим граф H с красными ребрами. Среди соседей каждой его вершины есть 20 выделенных и все они покрашены в разные цвета.

Замечание. Можно покрасить пилотки пионеров всего в 761 цвет. Для доказательства этого факта надо заменим лемму 1 на более сильную лемму 2, доказательство которой предоставляется читателю.

Лемма 2. *Пусть $k \leqslant n$ — натуральные числа. В графе G степени всех вершин не менее n и не более $2n$. Тогда можно удалить несколько ребер так, чтобы степени всех вершин стали не менее k и не более $2k$.*

ОТВЕТЫ*)

2. 987654321. **3.** а) Не обязательно. б) Обязательно. **4.** За n ходов. **8.** 1993. **11.** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $\ldots$, $x_{99} = 2$, $x_{100} = \frac{1}{2}$. **16.** Выигрывает второй игрок. **17.** $n = 3$. **21.** Не сможет. **23.** Окружность с центром в точке B и радиусом, равным высоте треугольника ABC. **25.** 30 минут. **27.** Существует. **28.** При восьми лжецах. **31.** $p = 2$, $q = 7$, $r = 3$, $s = 11$ или $p = 2$, $q = 7$, $r = 11$, $s = 3$. **32.** 4 месяца. **33.** а) да; б) нет. **37.** 5. **38.** 208. **50.** Нельзя. **52.** Не существует. **53.** $p = 3$. **56.** Нельзя. **57.** $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{19^3}}$. **61.** 3. **63.** При четных N. **70.** 1995^2. **73.** Не хватит. **74.** $10^6 - 10 \cdot 9^5$. **75.** Не существует. **76.** $n \neq 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$. **77.** Можно. См. рис. 67. **78.** $\alpha = 30°$. **79.** 4. **81.** $x^2 + ax$, $x^2 - ax$, a — любое число; $x^2 + x - 2$, $x^2 + x - 2$. **83.** 8, 9, 10. **84.** Выигрывает второй. **85.** $n = 1996$. **91.** Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла B (т. е. биссектриса внешнего угла) без самой точки B. **98.** n. **100.** $\frac{n}{2}$ при четном n, $\frac{n+1}{2}$ при нечетном n. **101.** 16. **102.** $n = 2$. **104.** Не существует. **110.** 2. **111.** $p = 7$, $q = 3$. **112.** 14. **114.** Выигрывает партнер игрока, делающего первый ход. **124.** Нельзя. **126.** 12. **135.** Не существуют. **136.** $\alpha = 1$. **137.** Не существуют. **138.** Не могут. **145.** Все треугольники, длины сторон которых пропорциональны 3, 4 и 5 («Египетский треугольник»). **147.** 3456. **148.** 4. **149.** Не могут. **150.** Выигрывает первый. **152.** Нельзя. **153.** $b = 0$, $0 \leqslant a < 4$. **156.** Начинающий. **157.** $x = \frac{-3 + \sqrt{9 + 12n}}{6}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **158.** Нет. **159.** $(n-2)^3$. **160.** 11 рублей. **161.** 1260. **164.** Нельзя. **165.** Нет. **167.** $\frac{5}{6}$. **170.** 1999. **171.** $CA_1 : A_1B = BC_1 : C_1A = AB_1 : B_1C = 2 : 1$. **172.** 5. **175.** Выигрывает первый игрок. **176.** Нельзя. **177.** 29. **189.** Да. **197.** Нет. **203.** 7. **204.** Если количество монет в мешках различается не более, чем на 1, то алмаз достанется второму пирату, в противном случае — первому. **205.** Не обманывает. **206.** 48. **209.** Сможет. **210.** Существуют. **214.** Одним взвешиванием. **219.** $1 : 2$. **220.** $n = 2000$. **221.** Не существует. **226.** Тремя. **231.** При $N \geqslant 8$. **233.** Нельзя. **234.** 14. **236.** При любых n и m победит первый игрок. **238.** Обязательно. **239.** Нельзя. **242.** Верно. **244.** 25. **246.** Существует. Например, $5 \cdot 2^{2000}$ или $2 \cdot 5^{2000}$. **251.** Две

---

*) Приведены ответы ко всем задачам кроме тех, в которых требуется доказать утверждение.

раскраски: а) все числа одного цвета; б) числа $3k-2$, $k \in \mathbb{Z}$ — цвета A, числа $3k-1$, $k \in \mathbb{Z}$ — цвета B, числа $3k$, $k \in \mathbb{Z}$ — цвета C. **252.** 150. **256.** 2001. **257.** $p = 5$, $q = 3$. **258.** Нет. **265.** Нельзя. **267.** Выигрывает второй. **269.** Нельзя. **277.** Нельзя. **279.** Да, можно. **281.** $n = 3$. **287.** Да, можно. **288.** 41. **294.** Выигрывает первый. **296.** Верно. **297.** 7. **299.** Выигрывает второй. **301.** 3. **308.** Победит второй игрок. **310.** 98. **313.** $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. **315.** 870. **317.** $x = \pm 1$. **320.** Не всегда. **321.** 2 и 3. **329.** В 17.15 или в 17.45. **330.** 13. **332.** Не существует. **333.** Не может. **335.** 1. **336.** Нельзя. **341.** Не могло. **344.** $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$. **350.** 2. **356.** Не сможет ни один из них. **358.** 101105. **359.** 4. **362.** Первый. **363.** Можно. **367.** $(2^k, 2^k)$, где $k \geqslant 0$. **369.** Шесть игр. **370.** Можно. **371.** Не сможет. **375.** Не существует. **377.** 135°. **380.** $N!$ ($N! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot N$). **381.** Можно. **383.** $(2, 2)$. **384.** Не может. **385.** Таких чисел нет. **386.** -2. **387.** $N!$ ($N! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot N$). **391.** Больше тех, у которых семнадцатая с конца цифра — 7. **394.** Может. **396.** Нельзя. **397.** 33. **398.** Не может. **399.** $\triangle A_1B_1C_1$ — равносторонний, все углы равны 60°. **400.** Может. **402.** Не могут. **405.** 33. **407.** Может. **412.** Не может. **415.** При всех нечетных n. **416.** $\left[\frac{2n}{3}\right]$. **419.** 13. **424.** 30000. **425.** Не может. **427.** Нельзя. **428.** 16. **431.** 48. **432.** $\frac{n+1}{2}$. **436.** При $F = 8$. **438.** Верно. **439.** $n = 7$. **443.** $f(x) \equiv 1$, $f(x) \equiv x$. **445.** $\{0, 0, 0, 0\}$, $\{1, 1, 1, 1\}$, $\{-1, -1, 1, 1\}$, $\{-1, -1, -1, 1\}$ (с точностью до перестановки чисел четверки). **447.** $n = 8k + 1$, где $k \in \mathbb{N}$. **451.** Выигрывает начинающий. **464.** 25. **473.** 0 или 12. **475.** Не может. **476.** Можно. **478.** 180°. **479.** 0. **481.** Корней нет. **483.** Существует. **489.** Нет, не могут. **494.** При четных n. **497.** Не представимых в таком виде. **504.** Нельзя. **507.** $n = 2$. **509.** Не могла. **510.** Сможет тот сержант, который дежурит третьим. **512.** Да, мог. Например, записав числа $1/4$, $1/2$, 1, 2, 5, 5^2, 5^4, 5^8, 5^{16}, 5^{32}. **513.** Нет. **517.** Не существуют. **519.** Не существует. **520.** За пять вопросов. **524.** Всем, кроме, быть может, одного. **525.** Нет. **528.** 106. **529.** $(\pm 1; 0)$; $(\pm 4; 3)$; $(\pm 4; 5)$. **533.** Не существуют. **535.** $m = n = l = 2$. **538.** 99 мудрецов. **541.** Трехчленов, не имеющих корней, больше. **547.** Найдутся. **548.** Верно. **549.** За 24 часа. **551.** $\left[\frac{3N}{4}\right]$ звена (здесь $[x]$ — целая часть числа x). **557.** Нельзя. **560.** Удачная расстановка единственна — все числа равны $+1$. **565.** $r_{1998} = 1997{,}5$. **566.** Да. **569.** 9. **572.** Можно. **573.** $n(n+1)$. **576.** Выигрывает Петя. **578.** $a_1 = a_2 = \ldots = 2$. **585.** Нет. **592.** Выигрывает Петя. **593.** $a +$

$+ b + c = -3$. **601.** $\frac{2^{1001}-2}{3} - 500$. **604.** Нельзя. **605.** 7. **617.** Эти суммы одинаковы. **621.** 500 или 501. **624.** $n = p^m$, где p — простое число, $m \in \mathbb{N}$. **632.** $n = p^k$, p — простое, или $n = 12$. **633.** 97 средних чисел. **636.** При n участниках. **641.** Нельзя. **644.** 10. **646.** $n = k - 1$. **661.** 10010. **668.** $a_{2003} = 10p$. **671.** Нельзя. **680.** 209. **691.** За 4005 вопросов. **693.** Существуют. **694.** Всегда. **695.** 51 хорошая пара. **698.** За 2003 вопроса. **704.** Существует. **708.** $\frac{2003 \cdot 2002}{2} + 1 = 2005004$. **714.** Верно. **716.** Может. **718.** 1003. **721.** 11. **723.** За 1003 вопроса. **725.** 16. **729.** 49. **733.** Не существует. **734.** Нельзя. **739.** 117. **743.** Выигрывает игрок, делающий второй ход. **747.** 117. **755.** Выигрывает первый.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Агаханов Н.Х., Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В., Резниченко С.В., Слинько А.М. Математические олимпиады. 9 класс. — М.: Просвещение, Учеб. лит. 1997. — 208 с.

[2] Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Физматкнига, 2006. — 320 с.

[3] Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Всероссийская олимпиада школьников по математике: Методическое пособие / Науч. ред. Э.М. Никитин — М.: АПК и ППРО, 2005. — 140 с.

[4] Агаханов Н.Х., Терешин Д.А., Кузнецова Г.М. Школьные математические олимпиады. — М.: Дрофа, 1999. — 128 с.

[5] Берлов С.Л., Иванов С.В., Кохась К.П. Петербургские математические олимпиады. — Изд. 2-е стереотип. — Санкт-Пететрбург, Москва, Краснодар: Лань, 2005. — 606 с.

[6] Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. —М.: Наука, 1988. — 288 с.

[7] Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. — 400 с.

[8] Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986. — 303 с.

[9] Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. — Киров: Аса, 1994. — 272 с.

[10] Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике, — М.: МЦНМО, 2005. — 560 с.

[11] Зарубежные математические олимпиады / Под ред. И.Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987. — 416 с.

[12] Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. — Изд. 3-е, испр. / Под редакцией В.О. Бугаенко. — М.: МЦНМО, 2004. — 96 с.

[13] Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В., Резниченко С.В., Слинько А.М. Математические олимпиады. 10 класс. — М.: Просвещение, Учеб. лит. 1998. — 256 с.

[14] Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В., Резниченко С.В., Слинько А.М. Математические олимпиады. 11 класс. — М.: Просвещение, Учеб. лит. 1999. — 254 с.

[15] Купцов Л.П., Резниченко С.В., Терешин Д.А. Российские математические олимпиады школьников. Книга для учащихся. — Ростов-на-Дону: Феникс, 1996. — 640 с.

[16] Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. Венгерские математические олимпиады. — М.: Мир, 1976. — 543 с.

[17] Леман А.А. Сборник задач Московских математических олимпиад. — М.: Просвещение, 1965. — 384 с.

[18] Муштари Д.Х. Подготовка к математическим олимпиадам. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2000. — 239 с.

[19] Оре О. Графы и их применение. — Изд. 3-е стереотип. — М.: КомКнига, 2006. — 168 с.

[20] Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. — Изд. 5-е испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2006. — 640 с.

[21] Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989. — 288 с.

[22] Савин А.П. и др. Физико-математические олимпиады. Сборник. — М.: Знание, 1977. — 160 с.

[23] Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства. — М.: Физматлит, 2002. — 256 с.

[24] Серпинский В. 250 задач по теории чисел. — М.: НИЦ РХД, 2004. — 160 с.

[25] Фомин Д.В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Политехника, 1994. — 309 с.

[26] Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993—2005 г. / Под ред. В.М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2006. — 456 с.

[27] Шарыгин И.Ф. Геометрия. Планиметрия. 9 — 11 кл. — Изд. 2-е стереотип. — М.: Дрофа, 2001. — 398 с.

[28] Эвнин А. Ю. Элементарная теория чисел. Сборник олимпиадных задач. — Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1996. — 76 с.

[29] Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б. Всероссийские математические олимпиады школьников. — М.: Просвещение, 1992. — 383 с.

Приложение 1

АВТОРЫ ЗАДАЧ

Курсивом помечены задачи, написанные в соавторстве

С. Августинович(2): 90, *444*
Н. Авилов(2): 63, 141
Н. Агаханов(53): 1, 29, 33, 38, 41, 105, 109, *135*, 137, 153, 173, 174, 201, 225, 242, 249, *258*, 269, 270, 274, 281, 285, 289, 290, 294, 313, 329, 331, 334, 342, 349, 377, 398, 402, 429, 469, 513, *515*, 525, 533, 543, 593, 597, *609*, 617, 618, 641, 665, 673, *681*, 685, *718*, 733
А. Акопян(4): 366, *706*, 719, 734
И. Акулич(2): 170, 172
М. Антонов(2): 180, 573
А. Бадзян(3): 372, 412, 422
Ф. Бахарев(3): 577, 688, 758
А. Белов(9): 57, 104, 116, 130, 167, 462, 491, 568, 646
А. Берзиньш(2): *60*, *484*
С. Берлов(61): 34, 39, *40*, 178, 181, 192, 195, 211, 219, *232*, *247*, 283, 310, 315, 322, 326, 340, 343, 352, 360, 426, 466, 572, 575, 582, 586, 589, 598, 600, 603, *610*, 616, 619, 622, 623, 631, *637*, 638, 647, 648, 650, 658, 662, 666, 670, 671, *672*, 674, 689, 692, 695, *699*, 715, 720, 736, *737*, 738, 739, 742, 744, 750
И. Богданов(28): *279*, *287*, *292*, *296*, *320*, *328*, *363*, 365, *368*, *376*, *380*, 385, *392*, *395*, *413*, *424*, *610*, *611*, 630, *656*, *668*, 693, *704*, *708*, *718*, 723, *737*, 743
О. Богопольский(1): *8*
А. Быстриков(1): 707
В. Вавилов(2): 6, 22
С. Волчёнков(7): 234, 353, 384, *547*, 569, 578, 712
А. Воронецкий(1): *147*
А. Галочкин(3): 69, 449, *488*
Г. Гальперин(1): 566
А. Гарбер(2): 416, 759
М. Гарбер(1): 716
Е. Гладкова(1): 425
А. Глебов(1): *728*
А. Голованов(25): 193, *198*, 200, 248, 261, 297, 323, 389, 391, 457, 461, *465*, 485, 489, 493, 497, 517, 581, 594, 601, 649, 651, *681*, 754, 757
В. Гордон(1): 474
Я. Губин(1): 145
С. Гулько(1): 42
С. Дворянинов(3): 49, 78, 477
Д. Джукич(4): 235, *610*, 624, 632
О. Дмитриев(1): 300
В. Дольников(30): 68, 92, 99, 131, 140, 155, *187*, 191, *224*, *232*, 245, 276, 282, 348, 554, 556, *563*, 584, 590, 608, *611*, 612, 635, 639, *656*, 667, 675, *676*, 703, 711
С. Дужин(3): 64, 102, 202
Ф. Дужин(1): 84
М. Евдокимов(6): 190, 196, 209, 504, 541, 565
Л. Емельянов(39): 36, 124, 136, 165, 203, 213, 218, 240, 243, 254, 278, 295, 298, 306, 307, 309, 314, 318, 338, 351, 371, 374, 388, 390, 396, 399, *400*, 404, 414, 420, 640, 642, 655, *672*, 690, *699*, *706*, 731, 756
Т. Емельянова(5): 250, 354, 607, 627, 713
Р. Женодаров(17): 2, 16, 28, 31, 53, 61, 85, 89, 97, 156, 233, 237, 257, *363*, *369*, 386, 397
В. Жуховицкий(1): 14
Жюри(4): *221*, 545, 691, 698
С. Зайцев(1): 431
В. Замков(1): 238
В. Замятин(1): 220
А. Заславский(2): 327, *735*
С. Злобин(4): 179, 275, 583, 653
Е. Знак(1): *221*
И. Иванов(1): 687
С. Иванов(1): 303
С. Игонин(1): *187*
И. Изместьев(8): *60*, 81, 96, 139, 166, 479, 552, 553
М. Исаев(1): *735*
А. Калинин(5): 5, 18, 46, 450, 467
Р. Карасёв(10): *66*, *135*, 263, 324, 358, *563*, *564*, 567, 626, *676*
Д. Карпов(14): 4, *224*, *232*, 454, 480, *523*, *564*, 570, 576, 592, 596, 628, *702*, 760

ТЕМАТИЧЕСКИЙ РУБРИКАТОР

Олимпиадные задачи нестандартны по формулировкам, и для решения многих из них требуются яркие и оригинальные математической идеи. Тем не менее, условно разобьем задачи на рубрики по содержанию и методам решения, а также дадим краткий обзор наиболее часто употребляемых приемов и фактов. После каждого раздела рубрикатора приводятся номера иллюстрирующих его задач из настоящего сборника.

Некоторые общие методы решения олимпиадных задач

Выделим наиболее важные идеи, которые применяются во многих ситуациях. При решении трудных многоходовых задач они могут служить средством для доказательства вспомогательных утверждений.

Метод математической индукции

Этот метод состоит в следующем.

Пусть имеется последовательность утверждений T_1, T_2, T_3, ..., про которую известно, что

1) T_1 верно (база индукции);

2) из того, что T_n верно, вытекает, что T_{n+1} верно (для $n = 1, 2, 3, \ldots$) (переход или шаг индукции).

Тогда вся последовательность состоит из верных утверждений.

Возможна вариация условия 2): из предположения, что утверждения $T_1, T_2, \ldots, T_n$ верны, вытекает, что T_{n+1} верно (для $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Также возможно применение индукции в форме «спуска» — сведения доказательства утверждения T_n к доказательству утверждений T_k для некоторых $k < n$. Иногда к утверждению задачи индукция напрямую неприменима, но можно сформулировать вспомогательное утверждение, которое доказывается при помощи индукции.

14, 68, 144, 180, 192, 227, 284, 291, 312, 440, 446, 456, 560, 565, 566, 574, 596, 597, 600, 608, 626, 684, 739.

Принцип Дирихле

Классическая формулировка этого принципа заключается в следующем: если в n клетках сидит $n+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит не менее двух кроликов.

Более общая форма: если в nk клетках сидит не менее $nk+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит не менее $k+1$ кроликов.

28, 55, 140, 181, 187, 191, 239, 264, 282, 396, 409, 489, 526, 530, 573, 616, 620, 622, 641, 645, 648.

Вариацией принципа Дирихле является *метод усреднения*, состоящий в следующем. Пусть для каждому из n вариантов сопоставлено некое число. Тогда если сумма всех n чисел равна S, то одному из вариантов сопоставлено число, не меньшее S/n.

12, 195, 468, 549.

Принцип крайнего

При решении задач полезно рассматривать объекты и случаи, являющиеся в некотором смысле «крайними». Приведем примеры начала рассуждений по принципу крайнего: «среди данных n точек выберем пару наиболее удаленных», «предположим, что условие неверно, и рассмотрим многочлен минимальной степени, не удовлетворяющий условию», «среди всех подмножеств данного конечного множества чисел выберем подмножество с наибольшей суммой» и т. д.

44, 211, 276, 294, 310, 316, 324, 330, 332, 392, 584.

Инварианты

Если в задаче речь идет о последовательном выполнении некоторых операций, то ключевым шагом к решению может оказаться нахождение величины или характеристики, которая сохраняется при выполнении операций (такая величина называется *инвариантом*), либо нахождение величины, которая изменяется монотонно (например, не увеличивается) при выполнении операций (такая величина называется *полуинвариантом*).

4, 33, 139, 164, 165, 269, 394, 427, 479, 536.

Олимпиадные задачи можно условно разделить на четыре раздела: «алгебра», «теория чисел» (задачи о целых числах), «геометрия» и наиболее богатый по тематике раздел «комбинаторика».

1. Алгебра

Алгебраические преобразования

При решении уравнений, систем и некоторых других задач, по формулировке близких к «школьным», основным моментом в решении является выполнение некоторой выкладки, тождественного преобразования (например, группировки слагаемых или сомножителей), использование основных алгебраических формул.

1, 18, 57, 73, 89, 102, 117, 125, 128, 201, 237, 289, 302, 361, 386, 408, 423, 425, 449, 453, 521, 565, 617, 665, 673.

Задачи об арифметических, геометрических прогрессиях и других числовых последовательностях:

70, 168, 222, 261, 375, 381, 578, 678, 701.

Текстовые задачи на составление уравнений, неравенств:

25, 79, 141, 145, 169, 173, 206, 271, 298, 329, 473.

Задачи, использующие тригонометрические функции и преобразования:

41, 69, 313, 359, 377, 385, 390, 413, 418, 613, 659, 681.

Задачи о рациональных и иррациональных числах:

289, 665, 673, 714.

Неравенства

При доказательстве неравенств часто используется следующие классические неравенства между средним гармоническим, геометрическим, арифметическим и квадратическим (*неравенство о средних*) для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Наиболее часто применимо неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Для двух чисел оно выглядит так: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

В неравенствах о средних равенства достигаются тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, поэтому они часто применимы при доказательстве *симметричных* неравенств (т. е. неравенств, не изменяющихся при перестановке любых двух переменных).

1, 11, 49, 89, 179, 229, 342, 378, 403, 412, 653, 670, 692, 715.

В некоторых оценочных задачах используются соображения роста функций или последовательностей: Вот простые примеры подобных оценок: $2^n > n$ при $n > 1$ (говоря неформально, последовательность 2^n «растет быстрее» последовательности n), $x^2 > 100x$ при $x > 100$ (квадратичная функция «растет быстрее» линейной). Различные оценки для наборов чисел и неравенства, связанные с упорядоченностью чисел:

17, 168, 445, 602, 605, 612, 709, 757.

Разные неравенства (см. также оценочные задач из других разделов):

134, 197, 345, 488, 583, 586, 675.

Многочлены

Задачи о свойствах квадратного трехчлена:

209, 249, 274, 285, 305, 317, 427, 475, 512, 521, 525, 533, 541, 545, 593, 637, 718.

Для корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ многочлена $P(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$ справедливы формулы (*теорема Виета*):

$c_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$,

$c_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n$,

$\ldots$

$c_n = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

(т. е. $(-1)^i c_i$ равно сумме произведений корней во всевозможных подмножествах из i корней).

Если дан набор из n чисел, иногда полезно рассмотреть многочлен, корнями которого являются эти числа. Задачи о корнях многочленов:

21, 29, 34, 81, 149, 225, 242, 258, 293, 325, 355, 519, 553, 629, 649, 685, 744.

Разные задачи о многочленах:

27, 38, 200, 253, 349, 412, 418, 432, 618, 683, 707, 759.

Функции и их свойства

Функциональные уравнения, неравенства:

46, 136, 153, 221, 443, 458, 609, 733.

Использование графиков функций:

22, 101, 225, 729.

В задачах могут использоваться различные свойства функций: четность и нечетность, монотонность, непрерывность, дифференцируемость, выпуклость, периодичность и т. д. В некоторых задачах речь идет о специальных функциях ($[x]$, $\{x\}$ и т. д.)

21, 100, 128, 157, 193, 323, 490, 574, 601, 678, 753.

2. Теория чисел

Остатки

Пусть n — натуральное число, и для целых чисел a, q, r выполнено равенство $a = qn + r$, причем $0 \leqslant r < n$. Тогда q называется *неполным частным*, а r — *остатком* при делении a на n. Целые числа a и b, дающие равные остатки при делении на n, иногда называются *сравнимыми по модулю* n (пишется $a \equiv b \pmod n$).

Рассмотрение остатков может быть полезным в самых разных ситуациях. Остатки могут быть препятствием для разрешимости уравнений в целых числах. Например, не существует натуральных x, y, для которых $x^2 + 1 = 3^y$, поскольку x^2 не может давать остаток 2 при делении на 3.

Остаток может являться инвариантом в задачах, связанных с процессами.

Если r — остаток при делении a на b, то НОД(a, b)=НОД(r, b). На этом соображении основан *алгоритм Евклида* нахождения наибольшего общего делителя (НОД) целых чисел a и b: разделив $a = r_0$ на $b = r_1$, в остатке получим r_2; разделив r_1 на r_2, в остатке получим r_3, и т. д., в конце концов r_k разделится на r_{k+1} без остатка; r_{k+1} и будет равен НОД(a, b).

5, 18, 31, 36, 37, 111, 164, 165, 208, 251, 281, 296, 429, 469, 494, 552, 597, 648, 714, 721, 727, 746.

Делимость, простые числа, разложение на простые множители

Во многих задачах о делимости, НОД, НОК, используется существование и единственность разложения на простые сомножители (*основная теорема арифметики*). Полезно рассмотрение простого делителя p и показателя степени, в которой p входит в разложение чисел на простые множители.

50, 58, 83, 110, 142, 149, 192, 232, 257, 279, 297, 336, 340, 349, 461, 485, 499, 501, 507, 535, 589, 594, 600, 624, 632, 664, 732, 741.

Отметим задачи с ключевой идеей четности:

50, 92, 137, 202, 265, 394, 397, 433, 525, 533, 759.

В разных задачах на делимость полезным оказываются следующие утверждения: $a^n - b^n$ делится на $a - b$ для различных целых a, b и натурального n; $a^n + b^n$ делится на $a + b$ для различных целых a, b и нечетного n. Как следствие, получаем, что $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$ для различных целых a, b и любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами.

123, 217, 321, 381, 389, 415.

Цифры и десятичная запись

Задачи о десятичной записи натуральных чисел и бесконечных десятичных дробях:

137, 147, 170, 177, 238, 269, 335, 350, 365, 393, 477, 513, 547, 569, 581, 661, 668, 704, 754.

Признак делимости на 11: натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность сумм цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, делится на 11. Обобщение признаков делимости на 3 и на 9: натуральное число и его сумма цифр дают равные остатки при делении на 3 и на 9. Используются также более простые признаки делимости на 4, 5, 8 и т. д.

2, 131, 308, 341, 363, 585.

Оценочные задачи в теории чисел

Несложными примерами могут служить следующие оценки: расстояние между двумя различными числами, делящимися на n, не меньше n; если a и b — точные квадраты, причем $a > b > n$, то $a - b > 2\sqrt{n}$. Разные оценочные задачи:

56, 105, 131, 248, 256, 277, 287, 311, 319, 367, 375, 383, 391, 465, 509, 517, 529, 638, 651, 693.

Теоретико-числовые функции

В некоторых задачах участвуют различные функции, определенные на множестве натуральных чисел: число делителей, сумма делителей и т. д.

53, 85, 606, 614.

Конструктивы

Задачи на построение интересных примеров и конструкций:

141, 183, 189, 210, 246, 363, 393, 477, 483, 493, 547, 566, 610, 738.

3. Геометрия

Основные факты. Признаки равенства треугольников

Широко используются основные факты школьного курса геометрии: свойства средней линии, свойства равнобедренных треугольников, признаки равенства треугольников, свойства и признаки параллелограмма. В задачах на вычисления применяются теоремы Пифагора, синусов, косинусов, также для вычислений привлекаются векторы или массы:

30, 51, 62, 103, 107, 143, 174, 270, 275, 303, 309, 318, 334, 354, 366, 399, 455, 467, 527, 531, 619, 642, 650, 679.

Подобие

В подобных фигурах отношения любых соответствующих линейных элементов равно коэффициенту подобия. Подобие или теорема Фалеса используется, например, при вычислении отношения отрезков, лежащих на параллельных прямых.

6, 9, 66, 119, 138, 151, 171, 190, 230, 243, 283, 374, 420, 486, 550, 555, 575, 582, 587, 603, 623, 674, 719, 735.

Площади

Отметим следующее свойство: если прямые AB и CD пересекаются в точке O (отличной от A, B, C, D), то отношение площадей треугольников AOC и BOD равно $\dfrac{OA \cdot OC}{OB \cdot OD}$. Иногда площадь используется как вспомогательное средство для вычислений.

15, 94, 278, 390, 631, 643.

Вписанный угол

При решении большого числа планиметрических задач используется теорема о равенстве вписанных углов, опирающихся на одну дугу. «Предельным» вариантом этой теоремы является теорема об угле между касательной и хордой. Следствием теоремы о вписанных углах является теорема об угле между двумя секущими.

В геометрических конфигурациях можно проводить вспомогательные окружности, пользуясь критерием вписанности четырехугольника (сумма противоположных углов равна 180°) и следующим утверждением: для того, чтобы выпуклый четырехугольник $ABCD$ был вписанным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство углов ABD и ACD.

Приведем два полезных факта для произвольного треугольника.

1. (*«лемма о трезубце»*) Середина дуги BC (не содержащей точки A) описанной окружности треугольника ABC равноудалена от B, C и центра вписанной окружности.

2. Точка, симметричная ортоцентру треугольника ABC относительно стороны, лежит на описанной окружности.

Эти факты несложно доказываются с помощью теоремы о вписанных углах и нередко используются как вспомогательные утверждения в более трудных конструкциях.

7, 23, 35, 43, 47, 54, 59, 71, 82, 91, 127, 146, 154, 162, 178, 184, 212, 215, 219, 223, 247, 254, 295, 322, 338, 343, 372, 404, 414, 430, 434, 442, 474, 478, 502, 505, 518, 534, 571, 579, 595, 607, 666, 696, 731, 742, 750.

Секущие и касательные к окружностям

Из равенства отрезков касательных, проведенных из точки к окружности, вытекает, например, следующее полезное утверждение: в треугольнике ABC точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC симметричны относительно середины BC.

Пусть дана окружность ω радиуса R с центром O и точка X на расстоянии d от O. Если секущая, проходящая через точку X, пересекает окружность в точках A и B, то произведение $XA \cdot XB$ не зависит от проведенной секущей и равно $\pm(d^2 - R^2)$, где знак «$+$» выбирается для точки X вне ω, знак «$-$» выбирается для точки X внутри ω. Величина $(d^2 - R^2)$ называется *степенью точки X относительно окружности ω*.

Пусть даны две неконцентрические окружности ω_1 и ω_2. Множество точек, имеющих равные степени относительно ω_1 и ω_2, является прямой, перпендикулярной линии центров, и называется *радикальной осью* окружностей ω_1 и ω_2.

Имеются пространственные аналоги: степень точки относительно сферы, радикальная плоскость двух неконцентрических сфер.

122, 186, 388, 498, 555, 615, 662, 672, 724, 756.

Геометрические преобразования

Задачи с использованием движений: осевой симметрии, поворота, параллельного переноса:

3, 20, 23, 151, 207, 307, 343, 351, 364, 690, 713.

В ряде задач уместно использование гомотетии. Полезно заметить, что две касающиеся окружности могут быть переведены одна в другую гомотетией с центром в точке касания.

250, 259, 351, 450, 463, 562, 615, 627, 655, 699, 706, 740, 748.

Стереометрия

Основные свойства, связанные со сферой — равенство отрезков касательных, проведенных из одной точки, и теорема о произведении отрезков секущих. Задачи, в которых фигурирует сфера:

19, 327, 360, 495, 543, 591, 640, 688.

В стереометрических задачах полезно рассмотрение сечений или проекций фигур. Разные задачи по стереометрии:

47, 66, 167, 196, 262, 290, 422, 471, 515, 758.

Геометрические неравенства

Отметим основные несложные факты: неравенство треугольника, наклонная не меньше проекции, в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, в трехгранном угле сумма двух плоских углов больше третьего.

26, 39, 78, 135, 235, 268, 331, 406, 426, 459, 647.

Комбинаторная геометрия

В этот раздел традиционно относят задачи о множествах точек, отрезков, произвольных многоугольниках, многогранниках, задачи о размещении фигур внутри других фигур, покрытии фигур другими фигурами.

Подходы для решения задач этого раздела часто ищутся исходя из *принципа крайнего*: «рассмотрим среди данных точек точку с наименьшей абсциссой», «выберем треугольник наибольшей площади с вершинами в точках данного конечного множества», «рассмотрим *выпуклую оболочку конечного множества точек* (т. е. наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки)», и т.д.)

68, 75, 99, 211, 276, 348, 466, 559, 563, 590, 608, 611, 626, 656, 667, 710, 735.

Разные задачи на взаимное расположение фигур:

130, 140, 158, 226, 245, 312, 416, 438, 448, 511, 532, 542, 635, 658, 676, 703, 712.

Разные оценочные задачи комбинаторной геометрии:

109, 113, 155, 187, 263, 316, 484, 491, 522, 546, 554, 567.

Конструктивы

Разрезания, придумывание интересных геометрических конструкций:

90, 203, 240, 300.

4. Комбинаторика

Подсчет или оценка количества вариантов

Простейший способом отыскать количество вариантом является *комбинаторный принцип счета*: если объект A можно выбрать a способами, и для каждого из этих a способов имеется b способов выбрать объект B, то количество способов выбрать пару (упорядоченную) объектов (A, B) равно ab. Пусть, например, требуется найти количество возможных обедов, состоящих из первого, второго и напитка, если на первое предложено 3 разных блюда, на второе — 7 блюд, на третье — 4 напитка. Из принципа комбинаторного счета вытекает ответ: $3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$.

В некоторых задачах используется основные формулы комбинаторики:

количество *перестановок* n символов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$;

формула для *числа сочетаний*: количество k-элементных подмножеств n-элементного множества равно $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

32, 40, 74, 96, 108, 112, 126, 208, 410, 457, 462, 497, 500, 604, 616.

Различные оценочные задачи

Во многих задачах о конечных множествах, наборах чисел, таблицах, ставится вопрос о нахождении экстремума некоторой величины или об установлении некоторой оценки комбинаторными методами.

106, 115, 288, 304, 320, 358, 362, 369, 392, 419, 424, 428, 436, 439, 444, 454, 464, 480, 503, 508, 514, 520, 528, 556, 622, 633, 636, 680, 691, 695, 698, 708, 722.

Соответствия

Решающей идеей в задаче может быть построение некоторого соответствия между объектами.

52, 161, 166, 198, 202, 213, 234, 252, 380, 452, 460, 500, 524, 538, 541, 546, 551, 552, 580, 643, 718, 752.

Важный частный случай соответствия — разбиение на пары:

117, 125, 147, 398, 523, 574, 617, 664.

Процессы и операции

Если в задачах речь идет о некотором пошаговом процессе, важным соображением (помимо отыскания инварианта или полуинварианта) может оказаться периодичность процесса, обратимость операции, так называемая *дискретная непрерывность* некоторой величины (так говорят, если за одну операцию величина изменяется «не на много»).

64, 98, 104, 116, 557.

Задачи на решетках

Задачи о клетчатых досках, таблицах, решетках:

148, 159, 176, 181, 216, 220, 255, 266, 288, 292, 352, 384, 402, 424, 431, 439, 523, 528, 540, 568, 580, 598, 641, 645, 671, 680, 689, 708, 714, 725.

В некоторых задачах используются вспомогательные раскраски:

36, 63, 124, 152, 282, 332, 504, 573, 737.

Графы

Задачи о городах и дорогах, авиалиниях, турнирах зачастую являются переформулировкой вопросов из теории графов.

Граф (или граф без петель и кратных ребер) задается конечным множеством — множеством *вершин* графа, и множеством неупорядоченных пар вершин — *ребер* графа. Вершины графа удобно изображать точками, а ребра — линиями, соединяющими соответствующие пары вершин.

Вершины, соединенные ребром, называются *соседними* или *смежными*. Количество вершин, смежных с вершиной A, называется *степенью* вершины A; вершина степени 1 называется *висячей*. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Путь — это последовательность ребер A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ (здесь BC — ребро, соединяющее вершины B и C); вершины A_1 и A_n называются соответственно *началом* и *концом* пути. Путь по ребрам A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ называется *циклом*, если $A_1 = A_n$; цикл называется *простым*, если вершины A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1} различны.

Компонентой связности вершины A называется множество вершин, включающее A и все вершины X, для которых существует путь с началом A и концом X. Компоненты связности различных вершин либо не пересекаются, либо совпадают, поэтому множество вершин графа разбивается на несколько попарно не пересекающихся компонент связности; если компонента всего одна, то граф называется *связным*.

Теорема Эйлера утверждает, что в связном графе

1. существует цикл, содержащий каждое ребро ровно по разу, тогда и только тогда, когда степени всех вершин четны;

2. существует путь, содержащий каждое ребро ровно по разу, тогда и только тогда, когда степени всех вершин, кроме возможно двух, четны.

Связный граф, в котором нет циклов, называется *деревом*. Количество ребер в дереве с n вершинами равно $n - 1$.

Если на каждом ребре графа задано направление, то граф называется *ориентированным*.

Задачи о связности и компонентах связности:

48, 159, 255, 356, 564, 570, 628, 644, 702.

Задачи о путях по ребрам графа, обходах ребер и вершин графа:

20, 24, 63, 176, 596, 652, 669, 687.

Покраска вершин или ребер графа, разные задачи о графах:

42, 64, 224, 232, 584, 639, 660, 675, 694, 711, 728, 760.

Игры

В некоторых играх возможные ходы соперников разбиваются на пары. Один из игроков может выигрывать, отвечая парным ходом. В частности, к этому типу относятся игры, допускающие симметричную стратегию за одного из соперников.

76, 84, 156, 175, 204, 236, 371, 576, 592, 755.

В различных играх возможно определить выигрышные ситуации для каждого из игроков. Чтобы это сделать, полезно анализировать игру с конца. В небольшом количестве задач предположение о существовании выигрышной стратегии у одного из игроков иногда можно опровергнуть (путем так называемой *передачи хода*). В таком случае наличие выигрышной стратегии можно обосновать без явного ее предъявления. Разные игры:

8, 16, 21, 114, 150, 242, 267, 294, 299, 308, 356, 362, 432, 451, 472, 577, 743.

Конструктивы

Задачи на отыскание алгоритмов и стратегий:

121, 160, 172, 244, 296, 344, 510, 512, 524, 538, 544, 548, 572, 594, 646, 691, 698, 716, 720, 723, 736.

Отдельно выделим задачи на взвешивания:

80, 205, 214, 218, 272, 400.

Разные задачи на придумывание интересных конструкций:

27, 33, 60, 77, 144, 231, 301, 353, 368, 376, 447, 476, 506.

Содержание

Агаханов Назар Хангельдыевич
Богданов Илья Игоревич
Кожевников Павел Александрович
Подлипский Олег Константинович
Терешин Дмитрий Александрович

ВСЕРОССИЙСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
1993—2006
ОКРУЖНОЙ И ФИНАЛЬНЫЙ ЭТАПЫ

Редактор *Ф. И. Кизнер*
Оригинал-макет изготовлен *А. В. Полозовым*
Обложка *А. Р. Сафарова*

Оригинал-макет предоставлен авторами

Подписано в печать 22.02.2007 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 29,5. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.