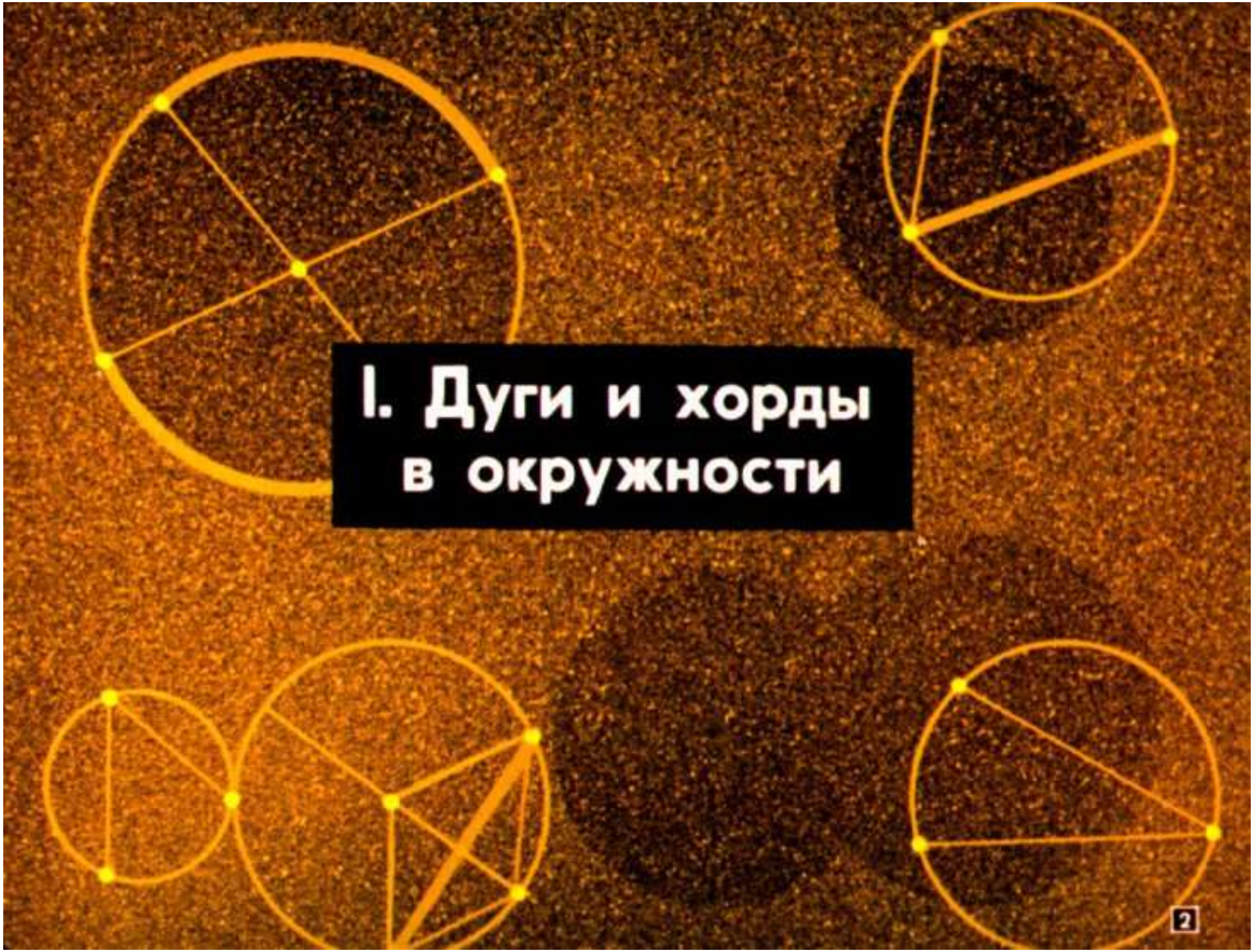
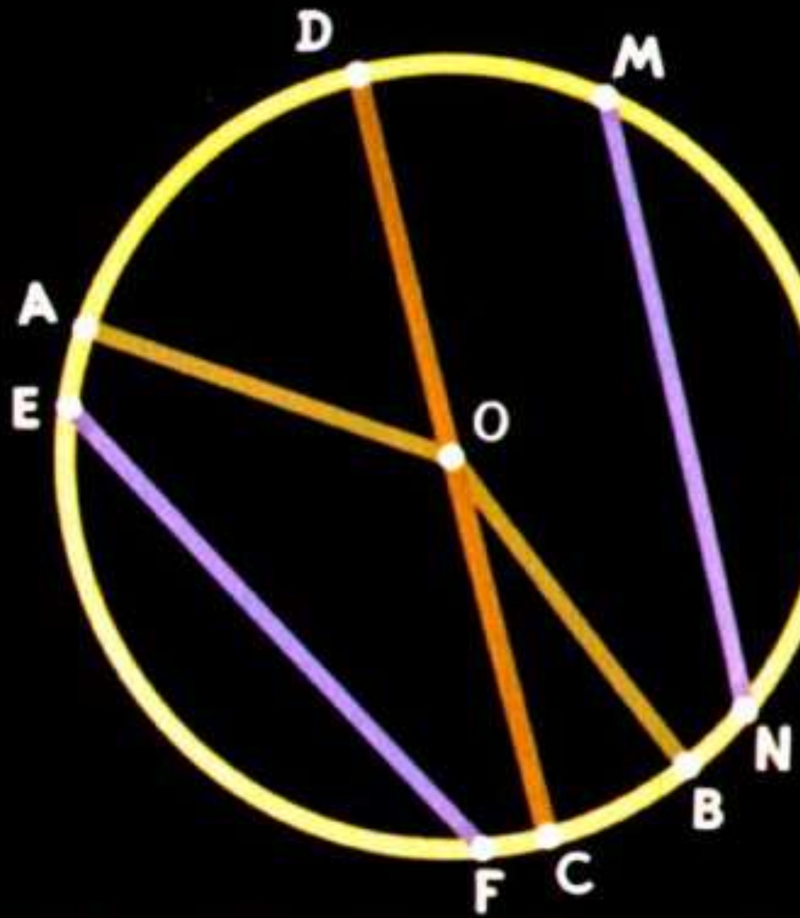
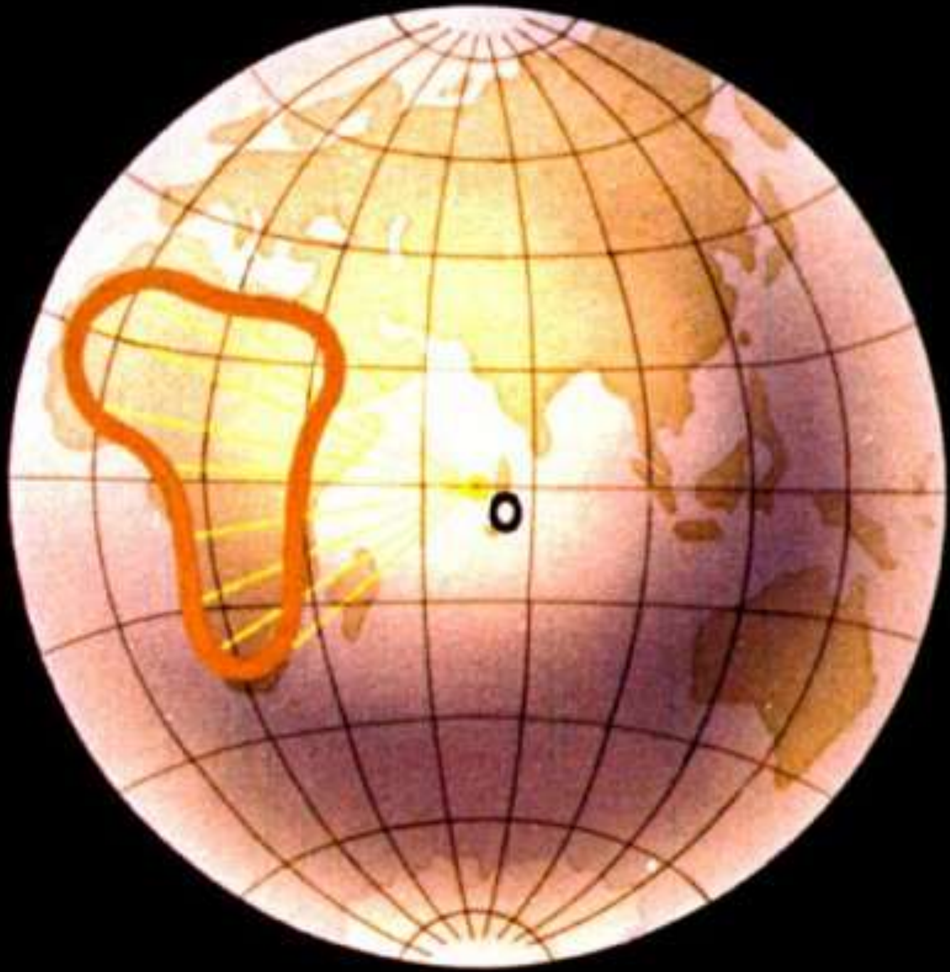
ДУГИ, ХОРДЫ И ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НИМИ

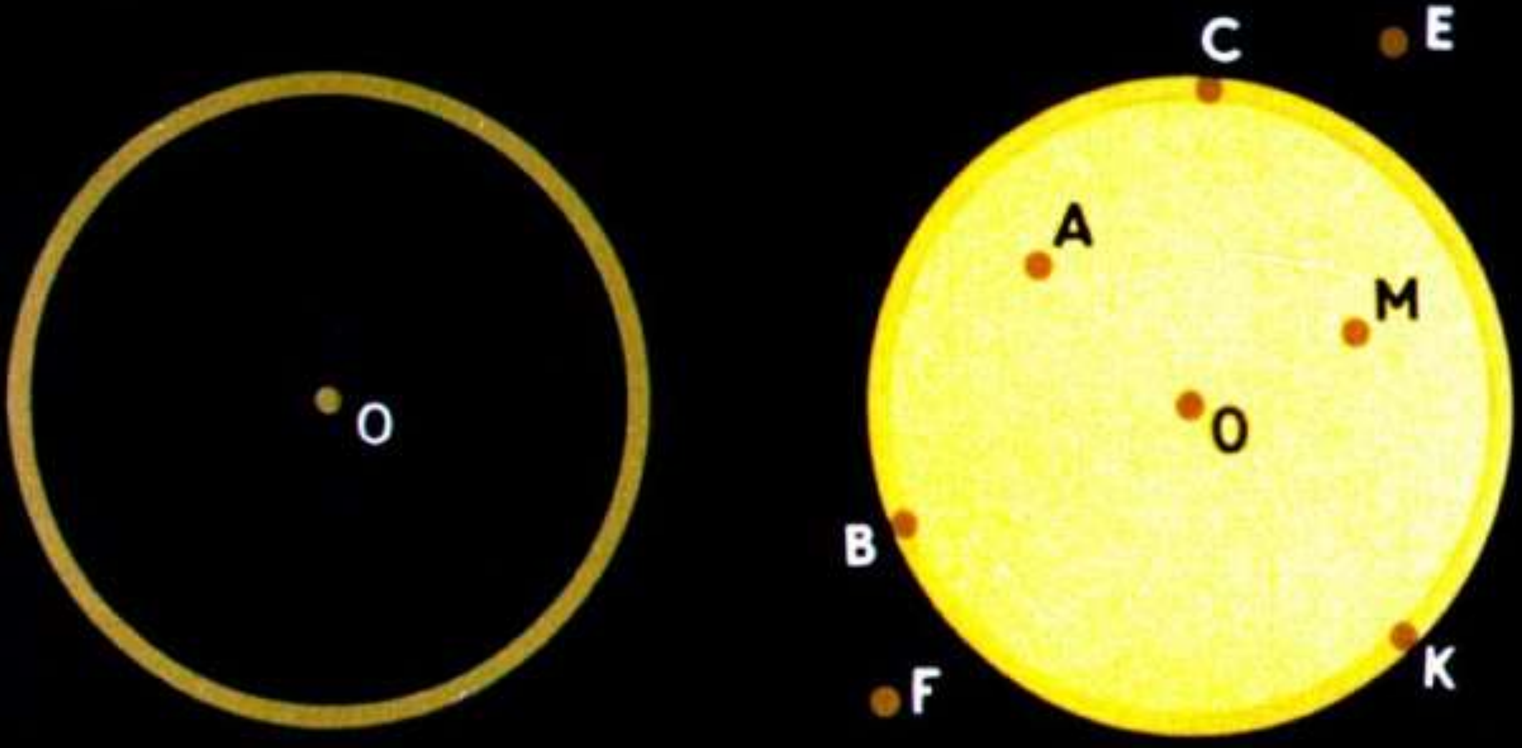

I. Дуги и хорды
в окружности
2



Кривая замкнутая линия на плоскости, все точки которой равно удалены от точки O той же плоскости, называется *окружностью*. Как называется точка O? Какие из указанных отрезков являются *радиусами*, какие *хордами*? Покажите *диаметр*.

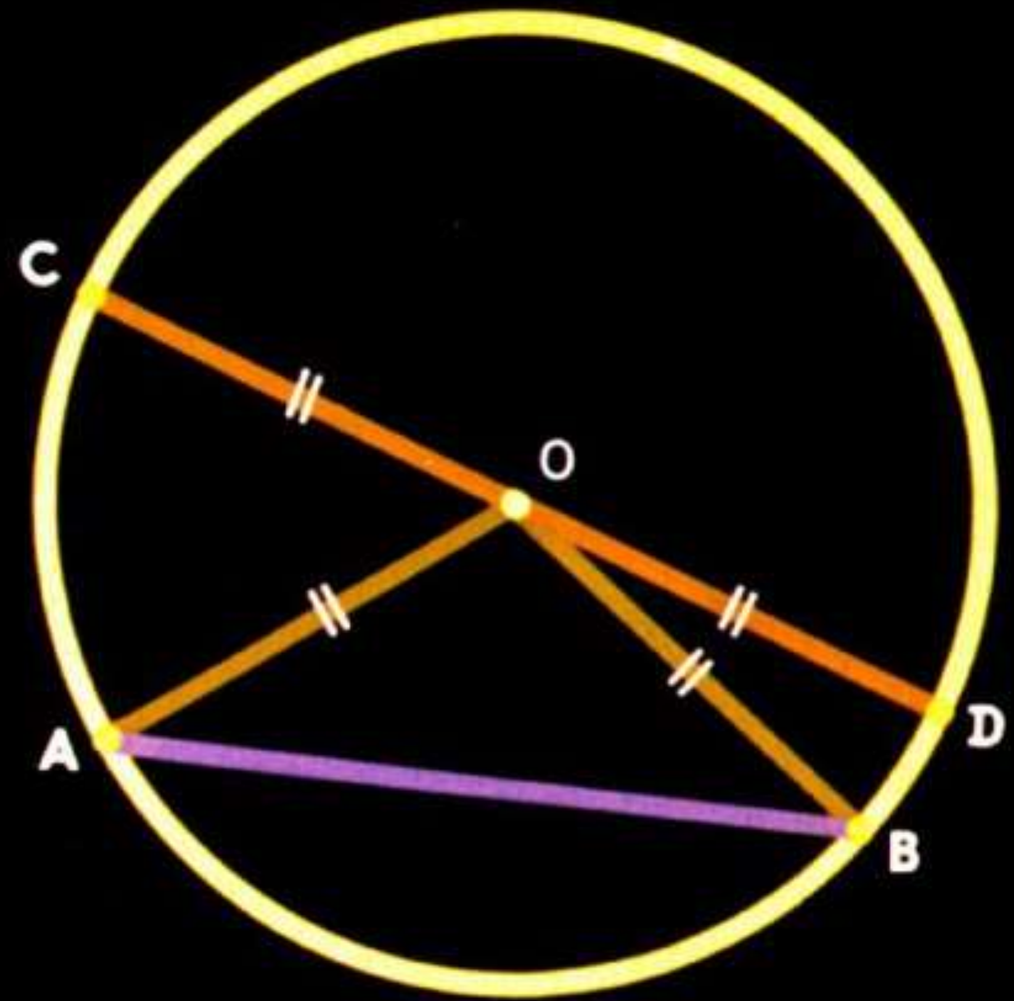


Все точки красной кривой одинаково удалены от точки О.
Почему эту кривую нельзя назвать окружностью?

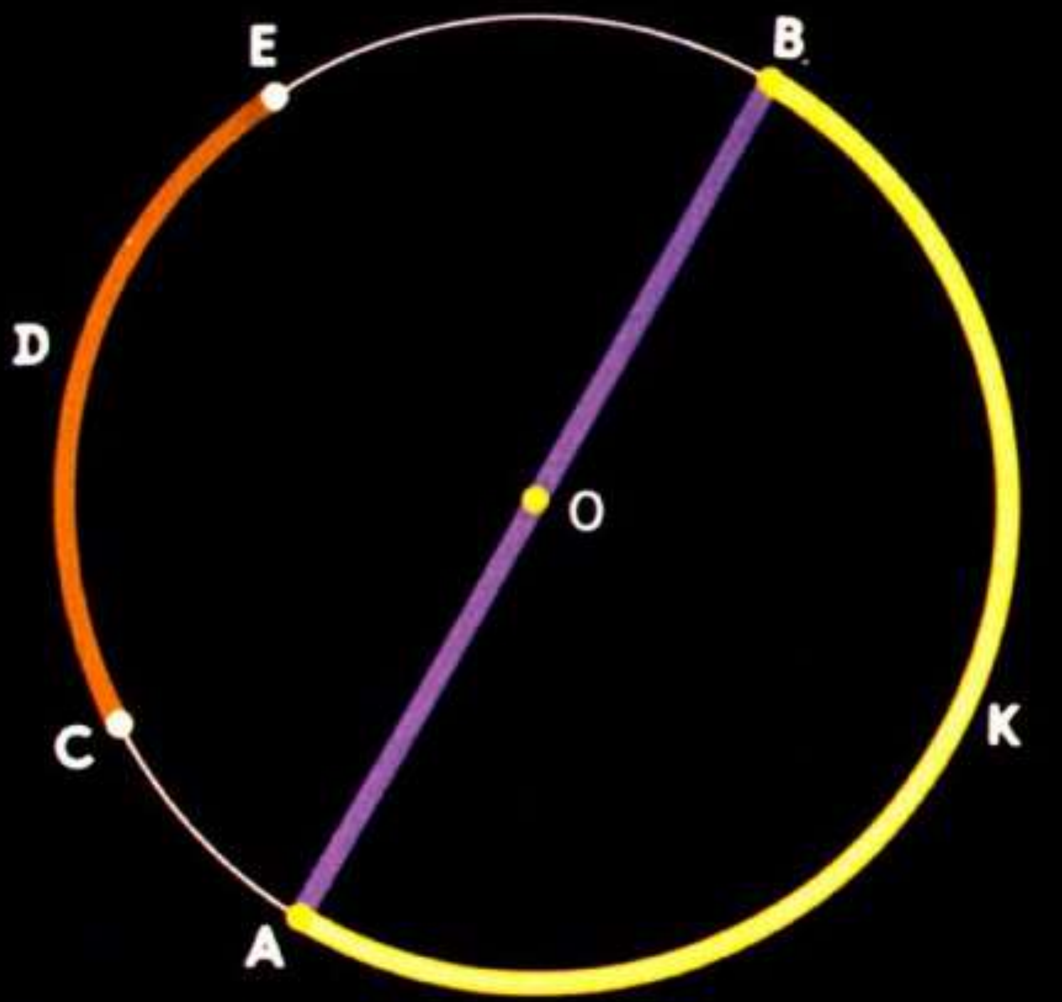


Окружность   Круг

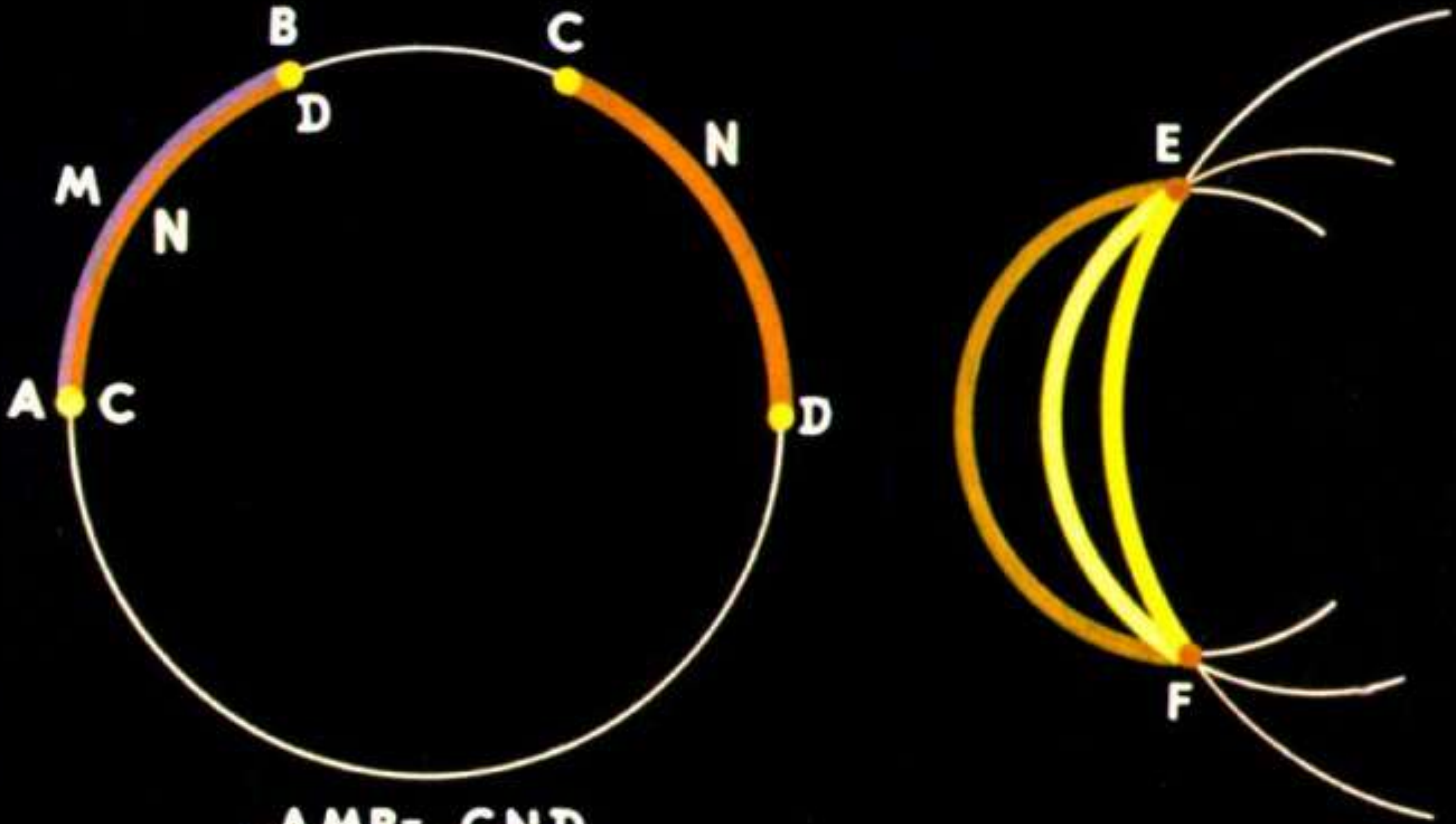
Часть плоскости, лежащая внутри окружности, вместе с точками окружности называется *кругом*. **Какие из указанных точек принадлежат окружности, какие кругу?**



Теорема. **Хорда, не проходящая через центр, меньше диаметра.** *Доказательство:* **OA + OB > AB; OA + OB = CD; CD > AB.** *Объясните этапы доказательства.*

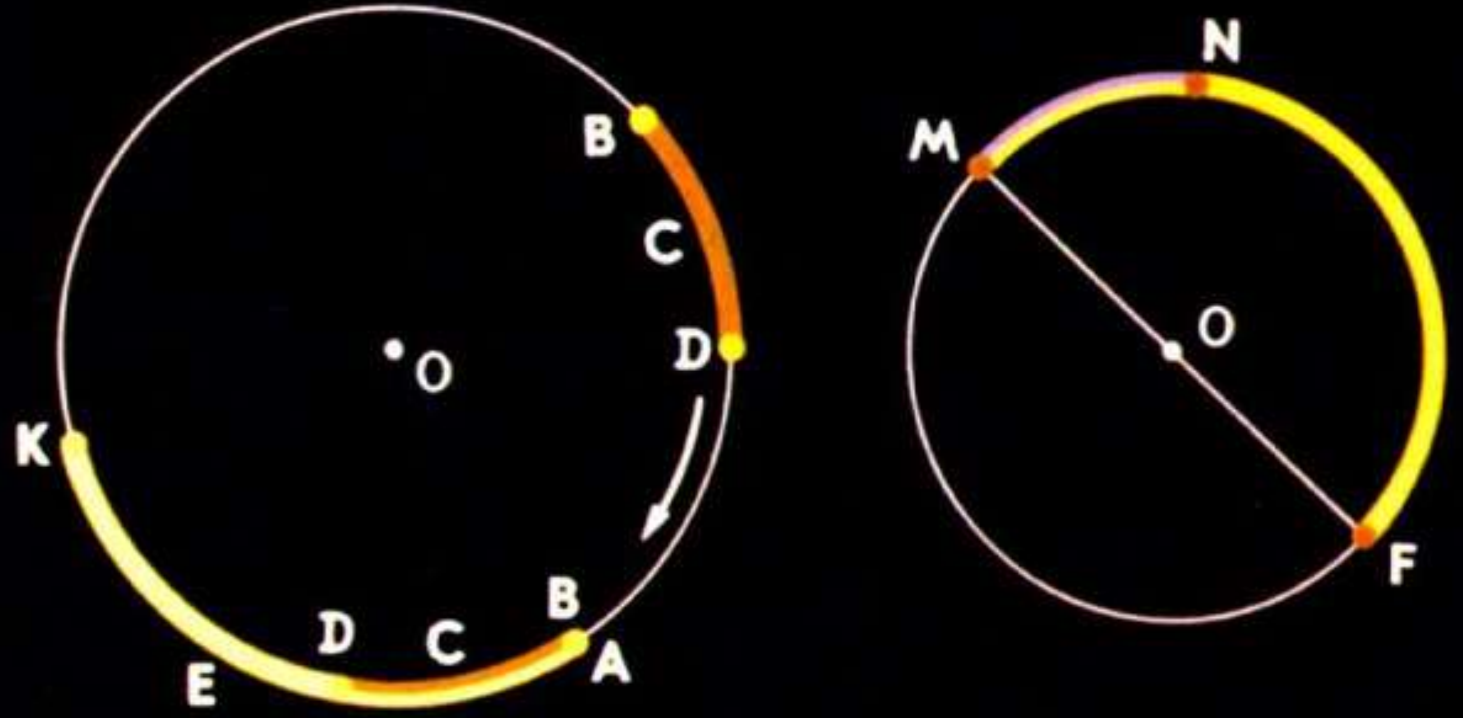


Часть окружности называют *дугой*. Дугу обозначают: ◡CDE. Если концы дуги AKB совпадают с концами диаметра AB, то дугу AKB называют *полуокружностью*.



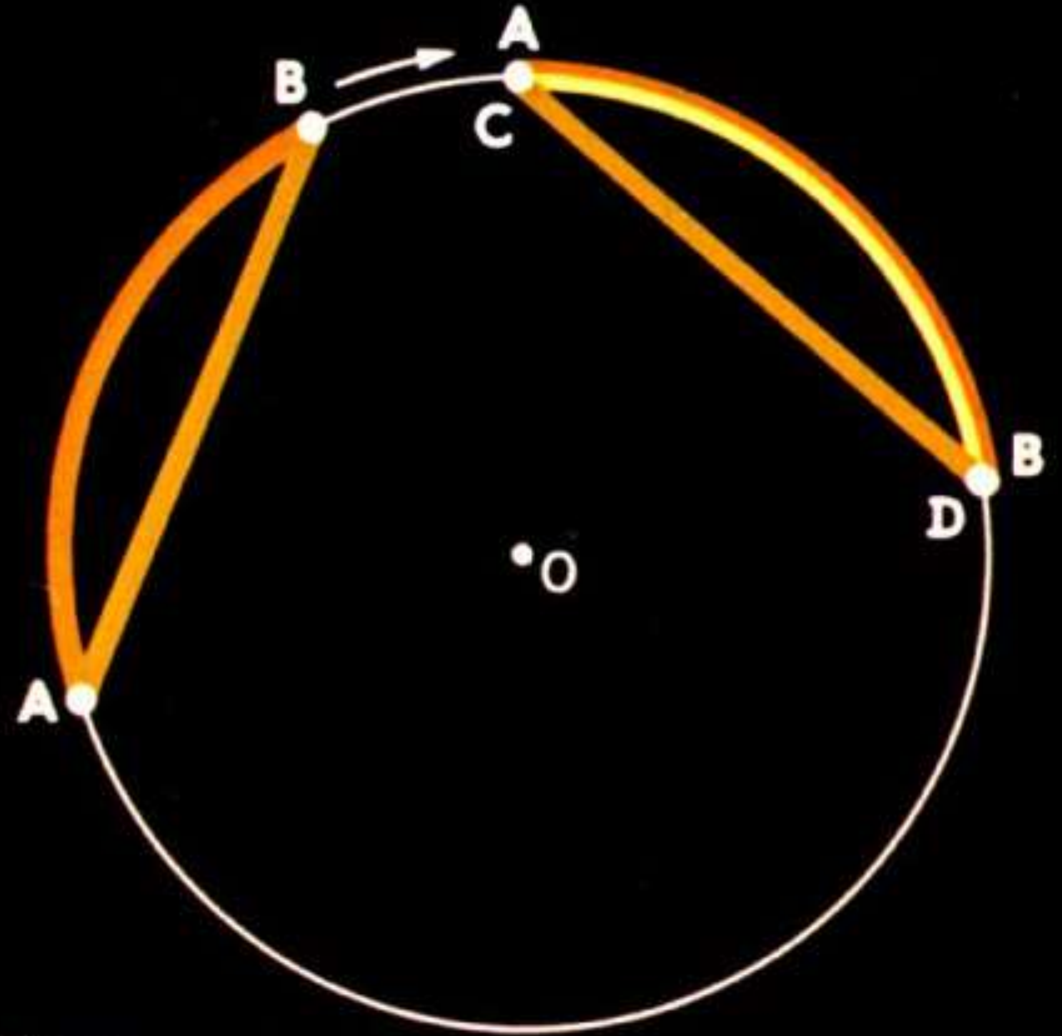
$\smile AMB = \smile CND$

Две дуги называются равными, если их можно совместить всеми их точками. Дуги неравных окружностей не могут быть равными.

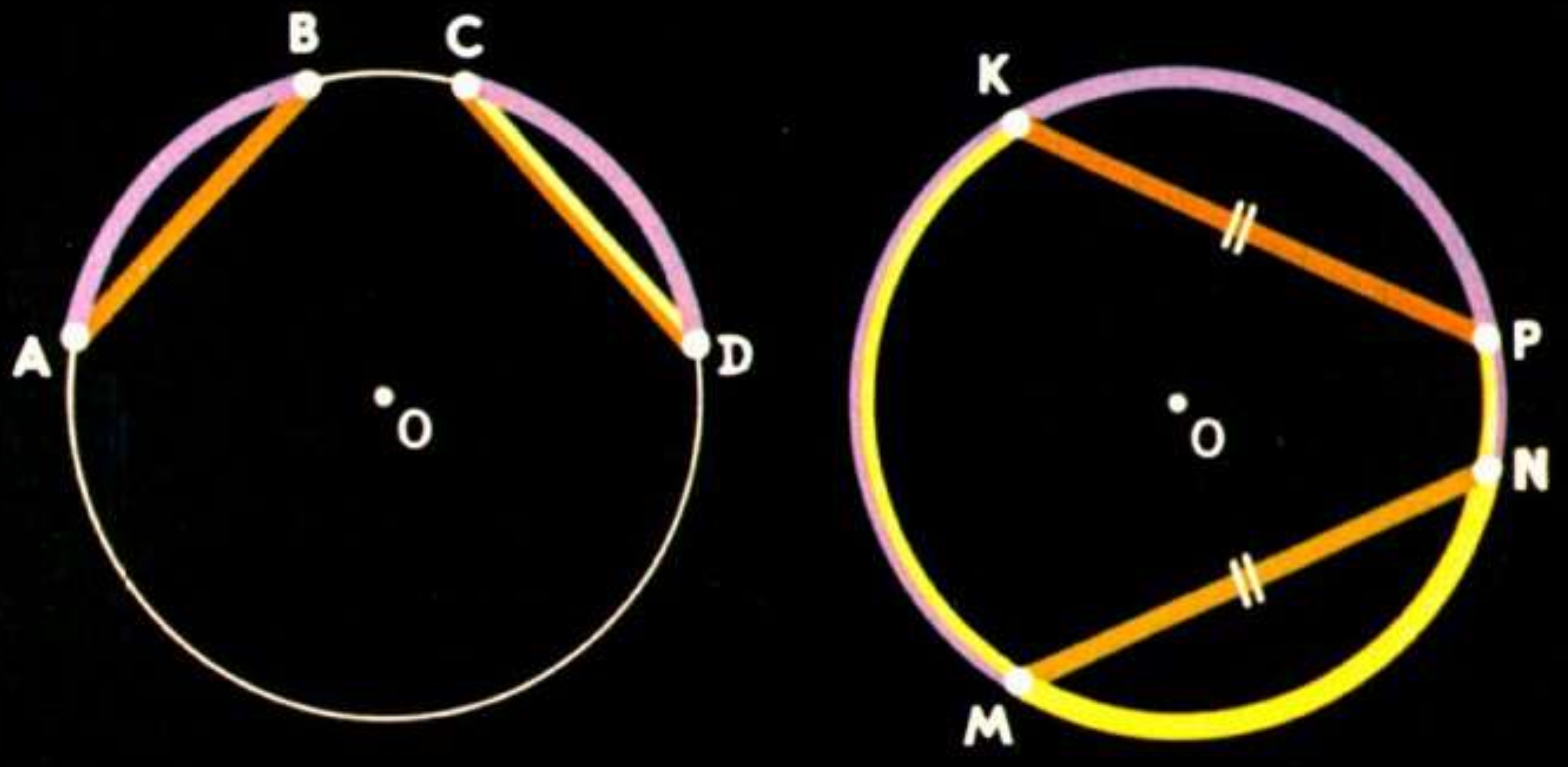


$\smile BCD < \smile AEK$ $\smile MN < \smile MNF$

Если дугу BCD можно наложить на дугу AEK так, что точка B совпадёт с точкой A, а все другие точки дуги BCD окажутся на дуге AEK между точками A и K, то $\smile BCD < \smile AEK$. Дугу меньше полуокружности можно обозначать двумя буквами: $\smile MN$.

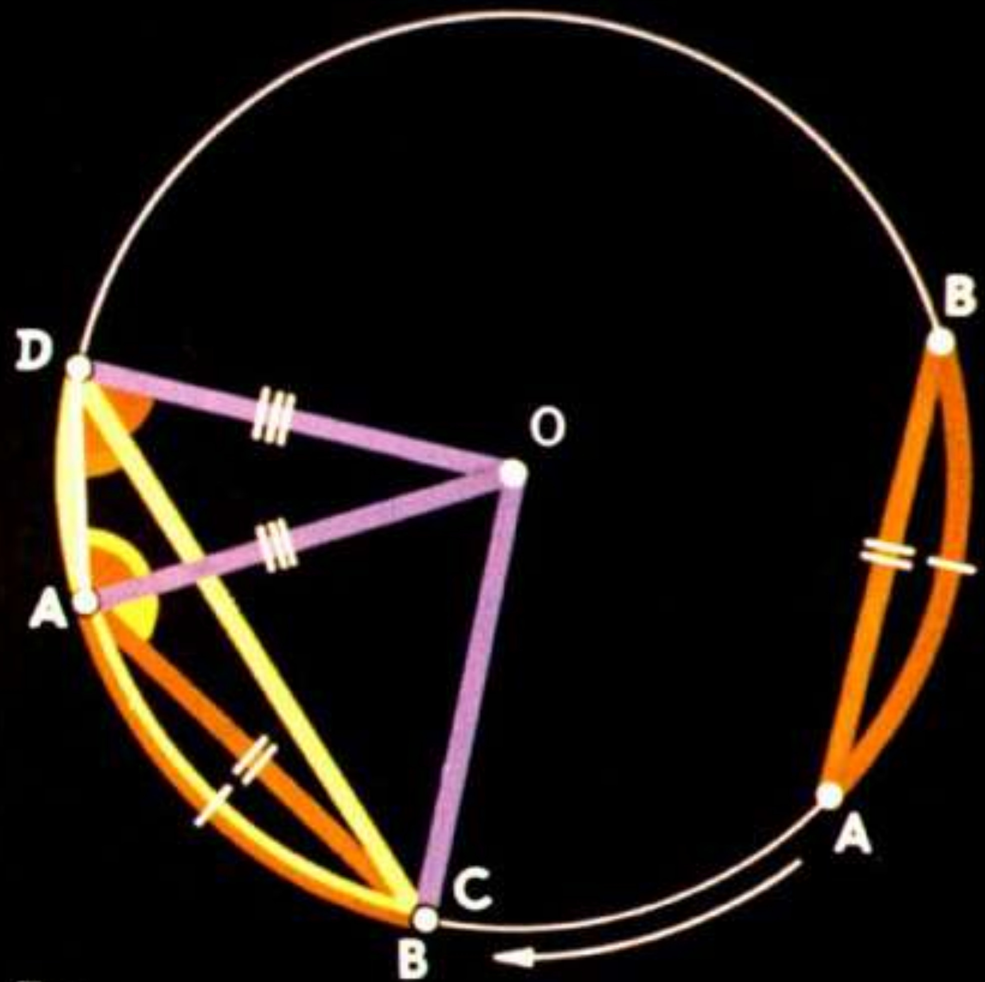


Теорема. Равные дуги стягиваются равными хордами. *Доказательство:* $\smile AB = \smile CD$, значит, при наложении совпадут и их концы, а следовательно, совпадут и их хорды, т. е. $AB = CD$.

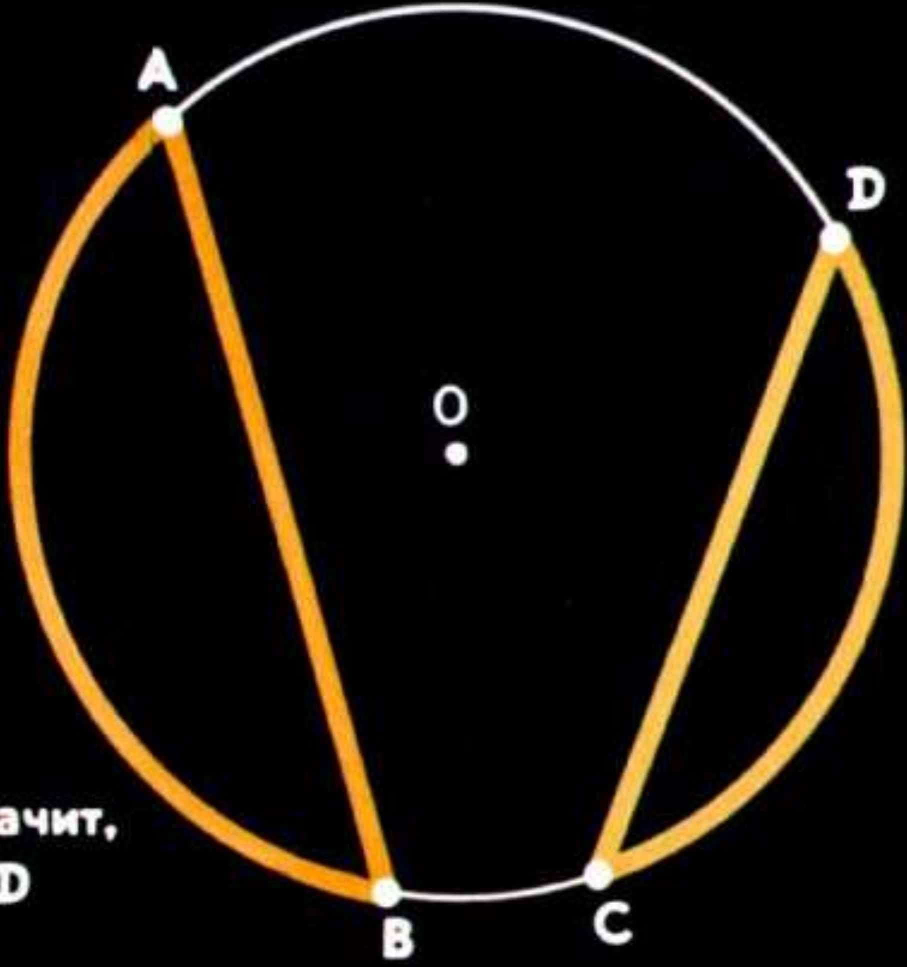


$AB = CD$, значит, $\smile AB = \smile CD$ $\quad$ $KP = MN$, значит, $\smile KMP = \smile MKN$

Верна и обратная теорема. В окружности равные хорды стягивают равные дуги, если обе дуги меньше (больше) полуокружности. *Докажите.*



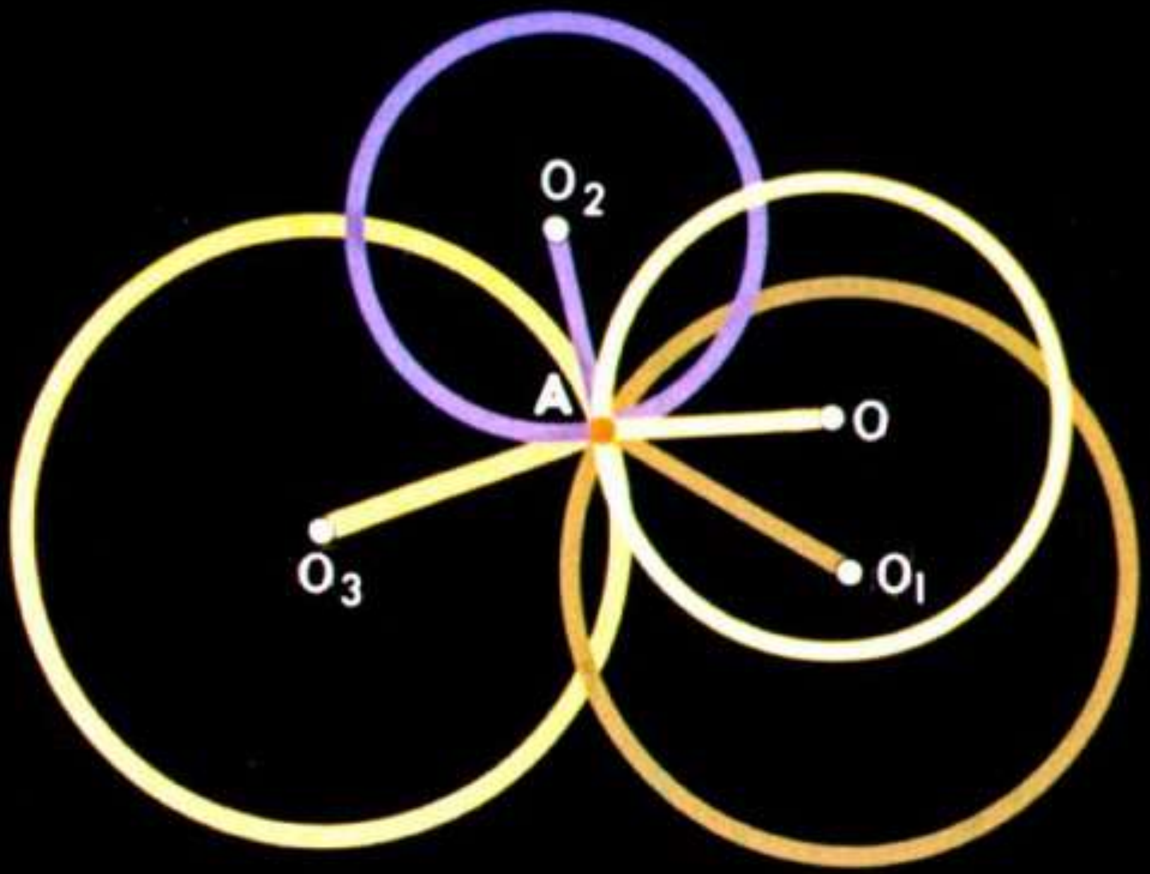
Теорема. **Если дуги меньше полуокружности, то бо́льшая из них стягивается большей хордой.** *Доказательство:* **$\angle DAB > \angle DAO = \angle ODA > \angle ADC$, значит, в $\triangle ADC$: $DC > AC$ или $DC > AB$.** *Объясните этапы доказательства.*



$AB > CD$, значит,
$\smile AB > \smile CD$

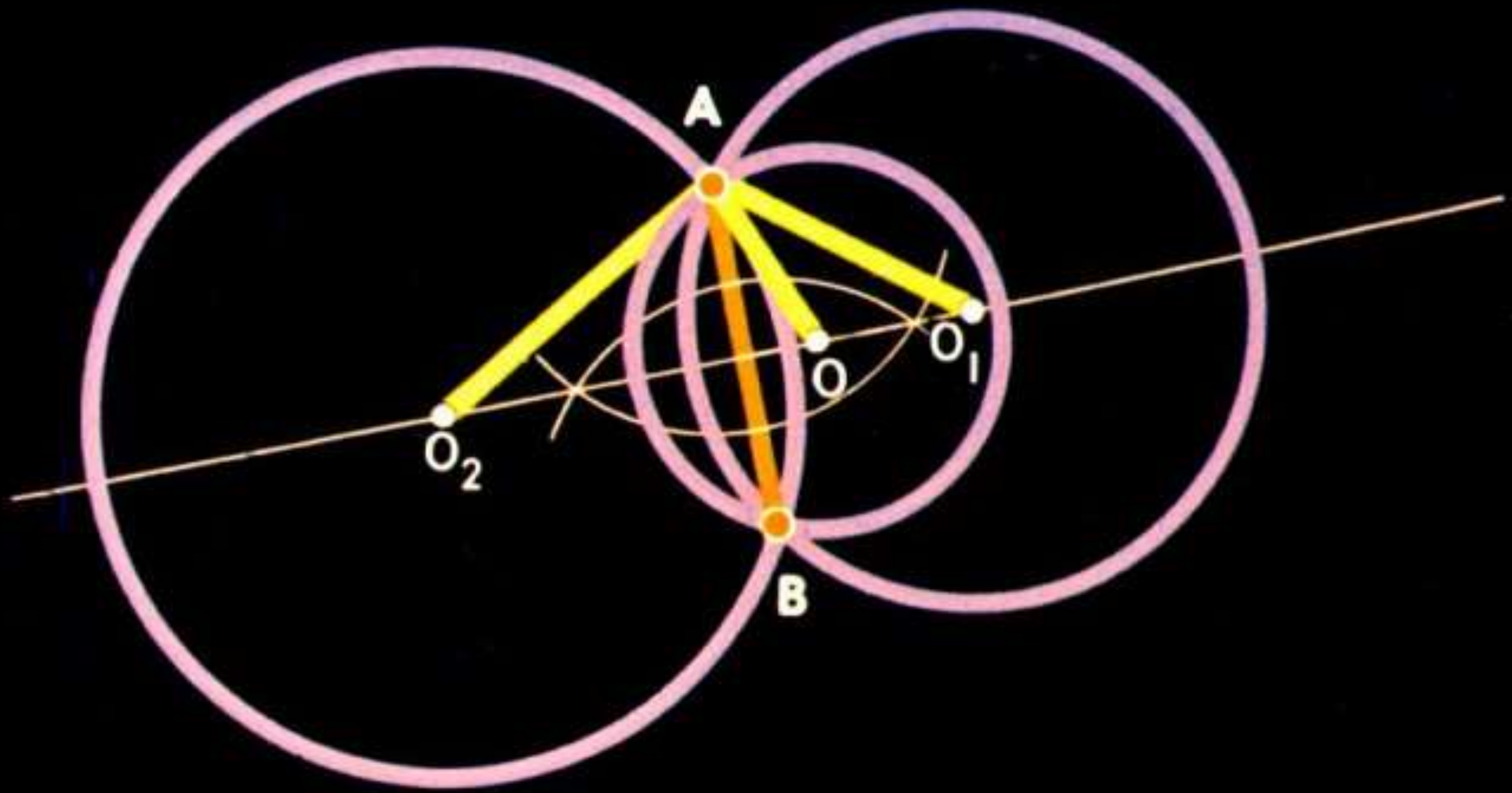
Верна и обратная теорема. В окружности бо́льшая хорда стягивает бо́льшую дугу, если дуги меньше полуокружности. *Докажите самостоятельно методом от противного.*


II. Построение
окружности
через одну, две,
три точки
14



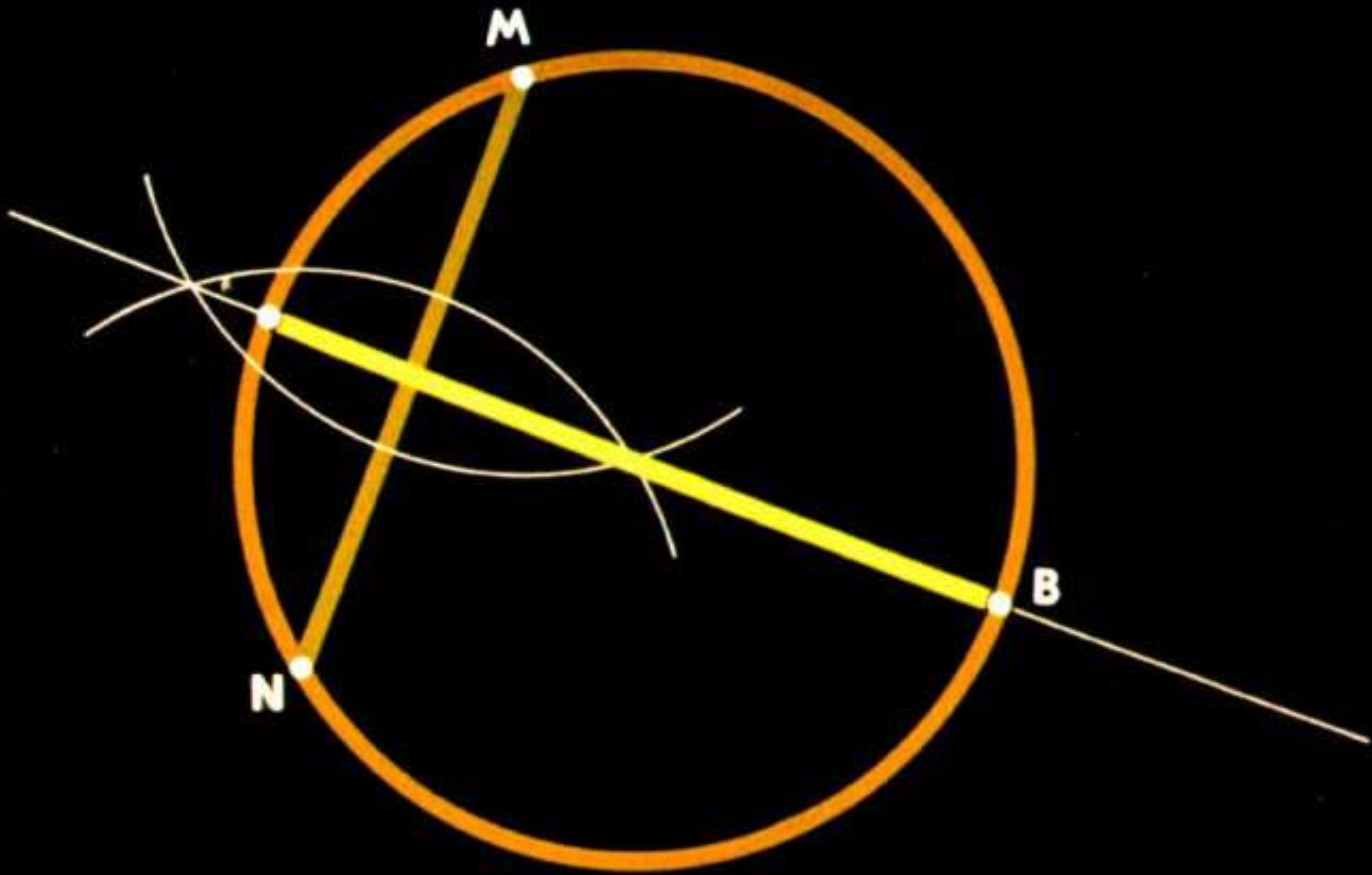
15

Задача: через точку А провести окружность. *Решение:* на плоскости берём любую точку О и радиусом ОА проводим окружность. Задача имеет бесконечное множество решений.

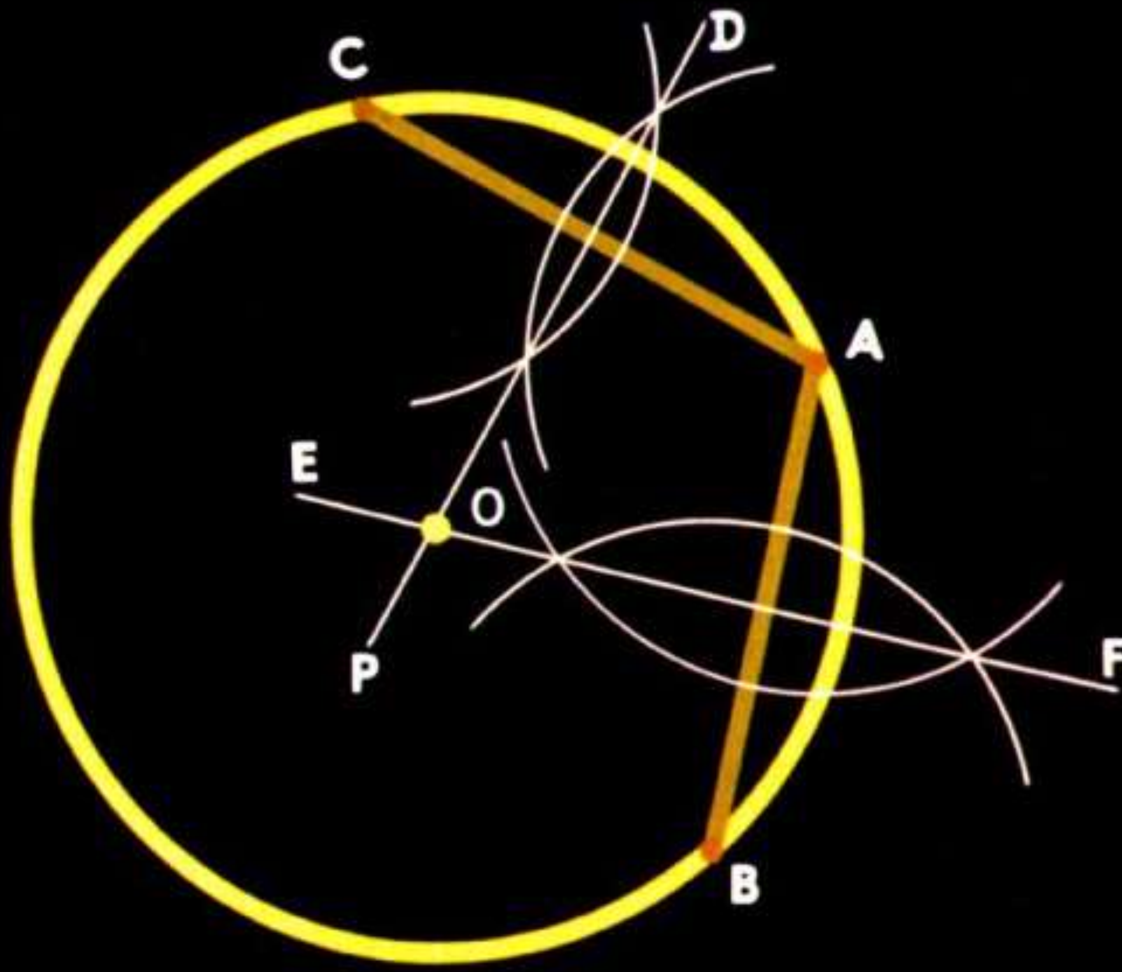


17

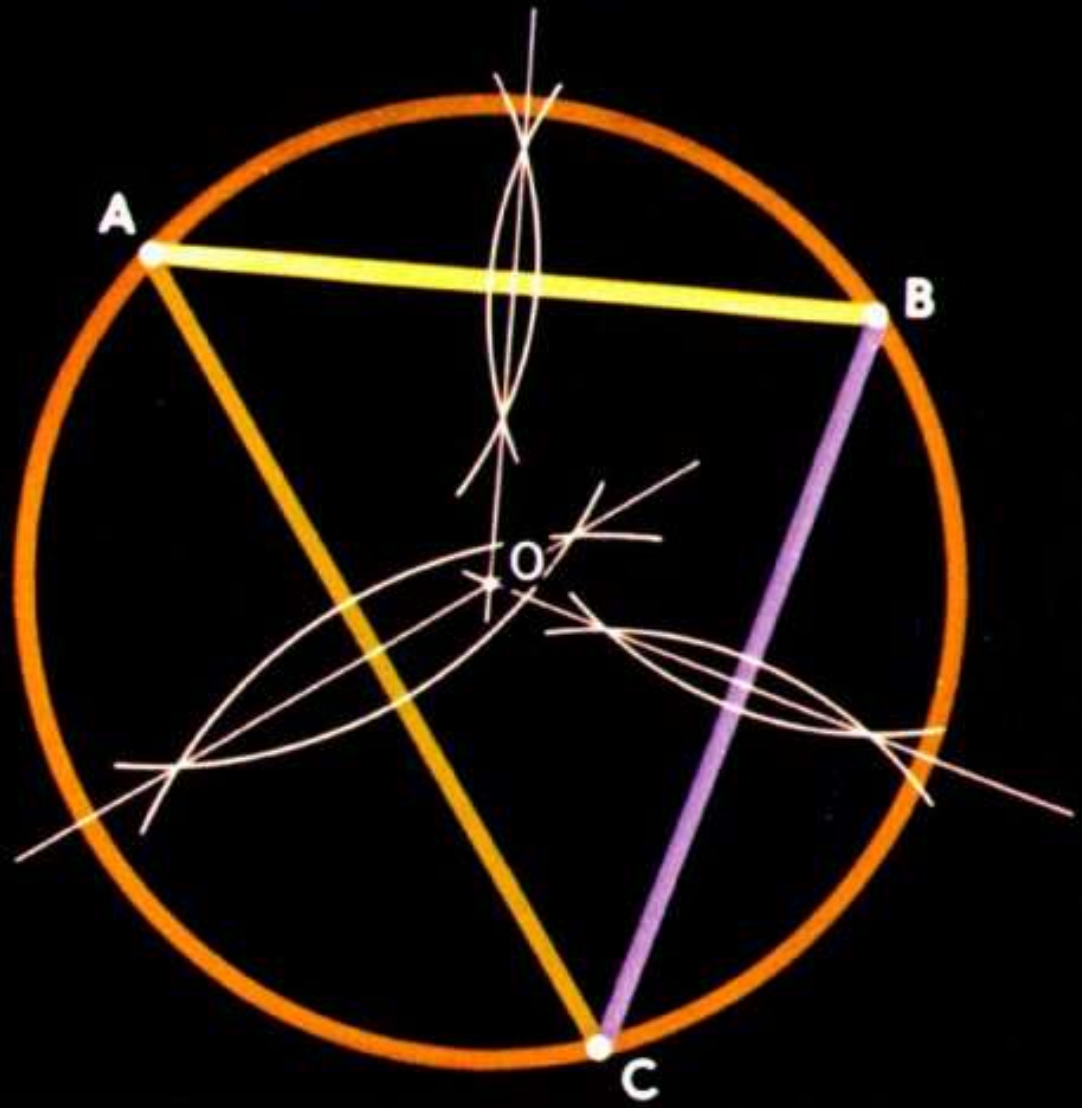
Задача: через точки A и B провести окружность. *Решение:* проводим серединный перпендикуляр к отрезку AB. Любую точку O этого перпендикуляра берём за центр и строим окружность радиусом OA. *Сколько решений имеет задача?*



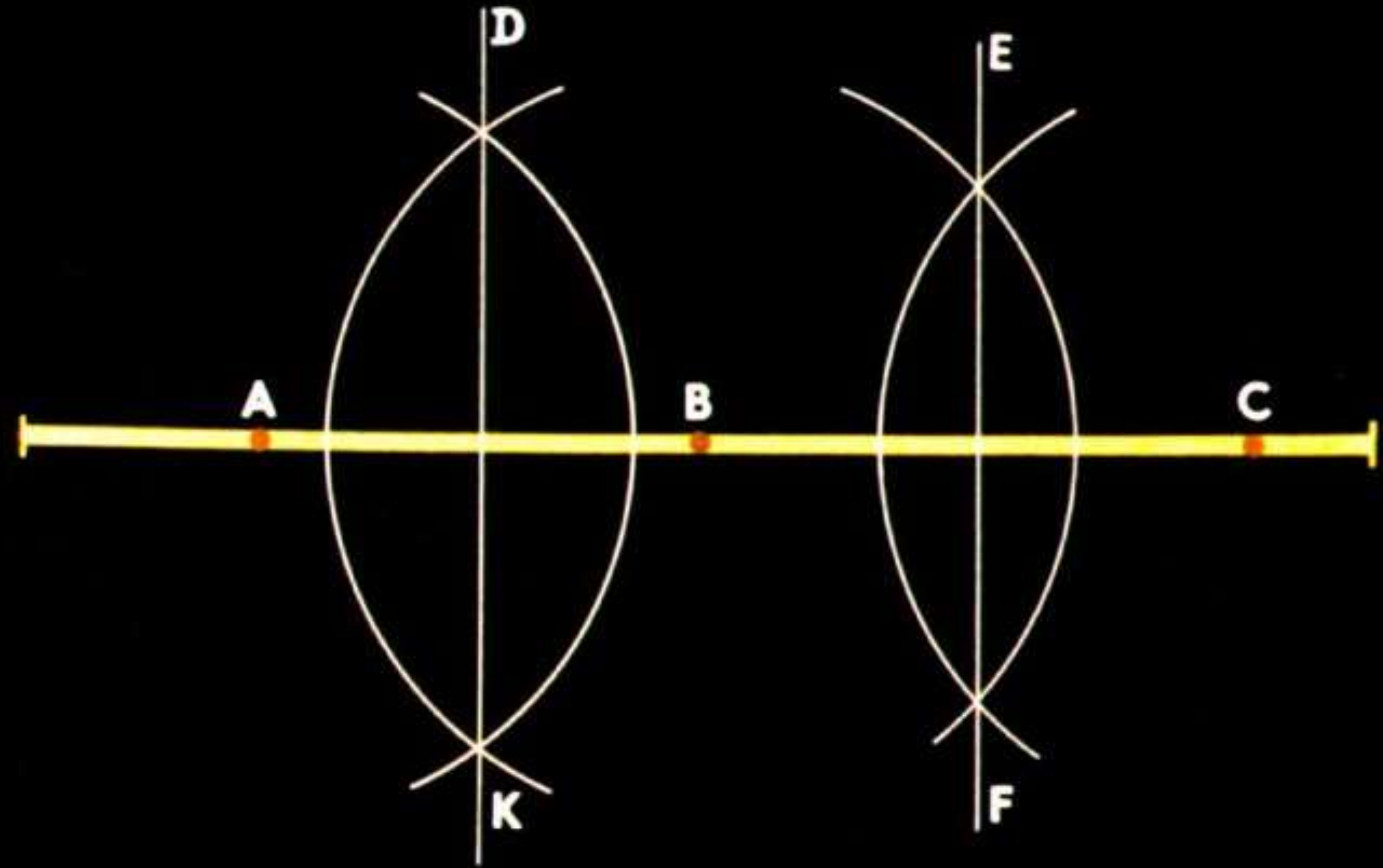
Задача: построить диаметр окружности, центр которой не указан. *Объясните решение. Докажите теорему:* «Отрезок AB серединного перпендикуляра к хорде MN является диаметром».



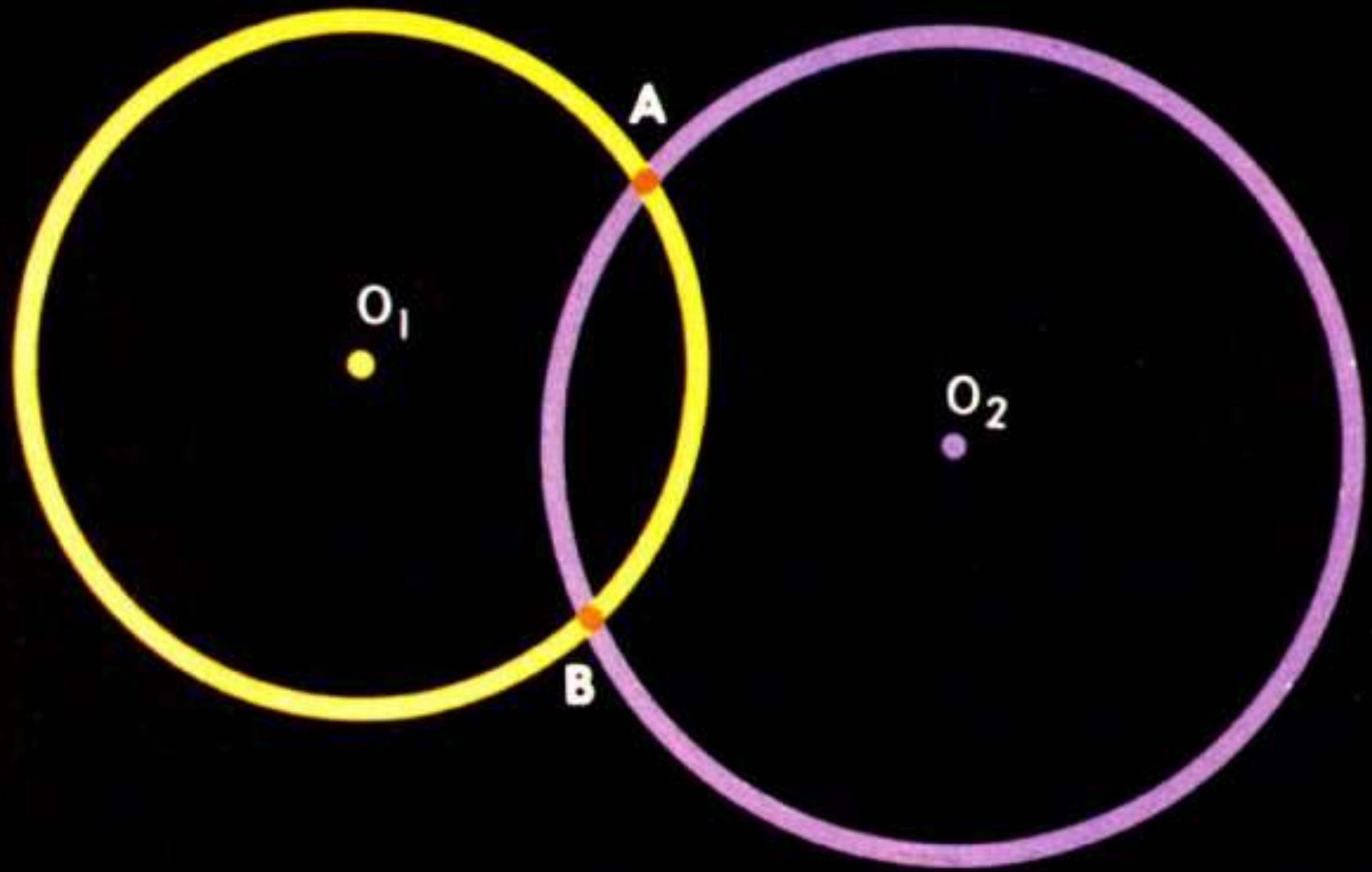
Задача: через три точки А, В и С, не лежащие на одной прямой, провести окружность. *Объясните решение. Сколько решений имеет задача?*



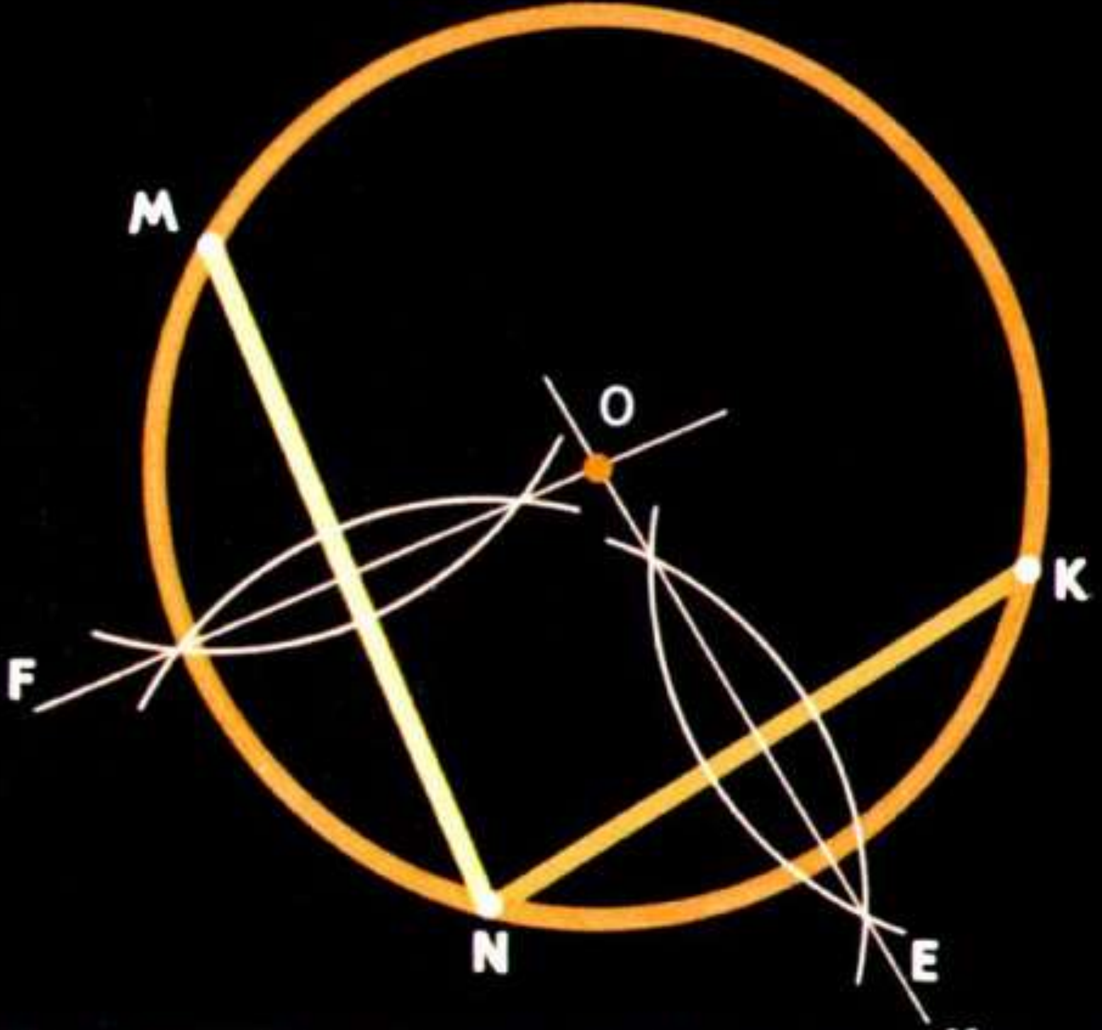
Почему три серединных перпендикуляра к сторонам $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке?



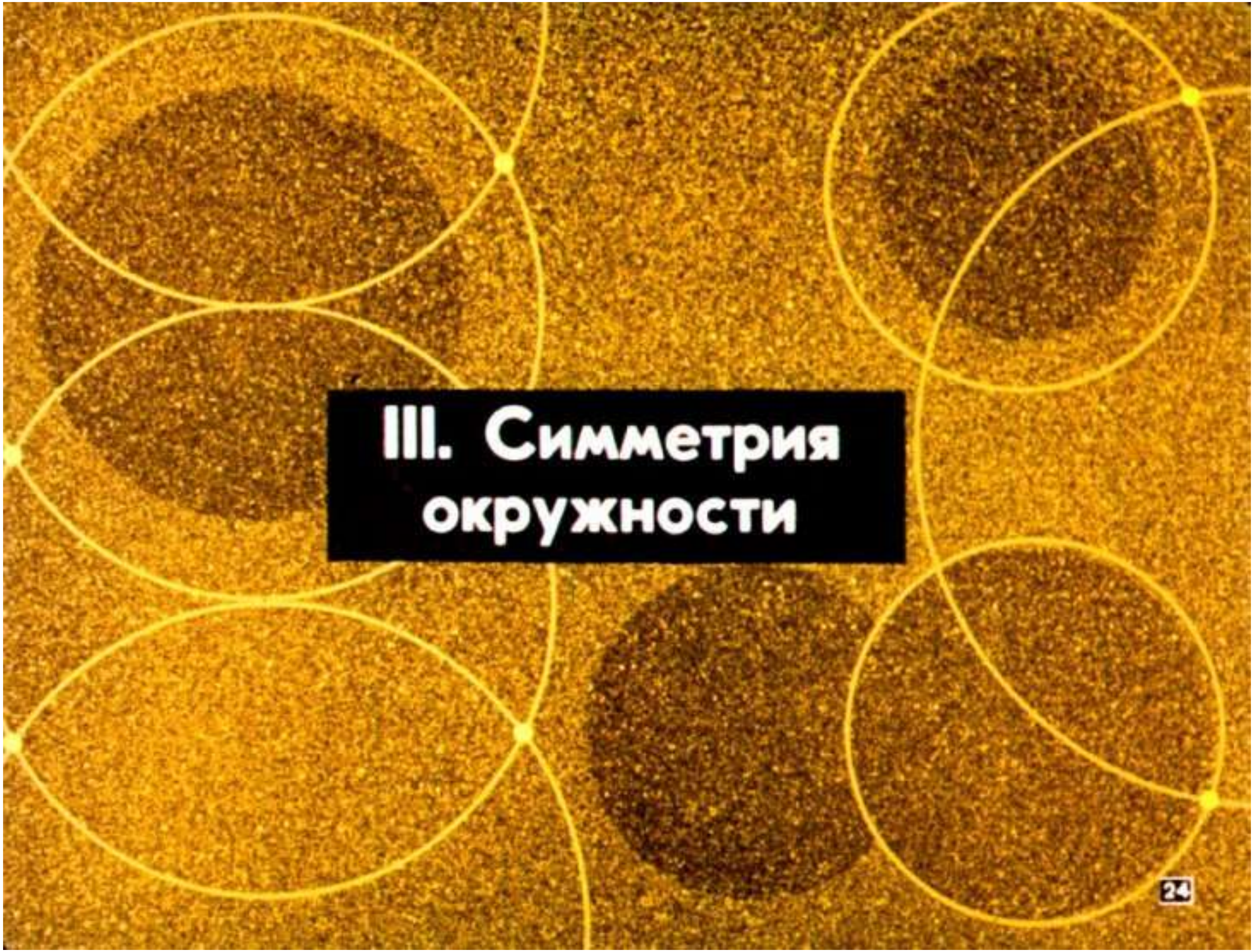
Объясните по чертежу, почему через три точки А, В и С, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружность.

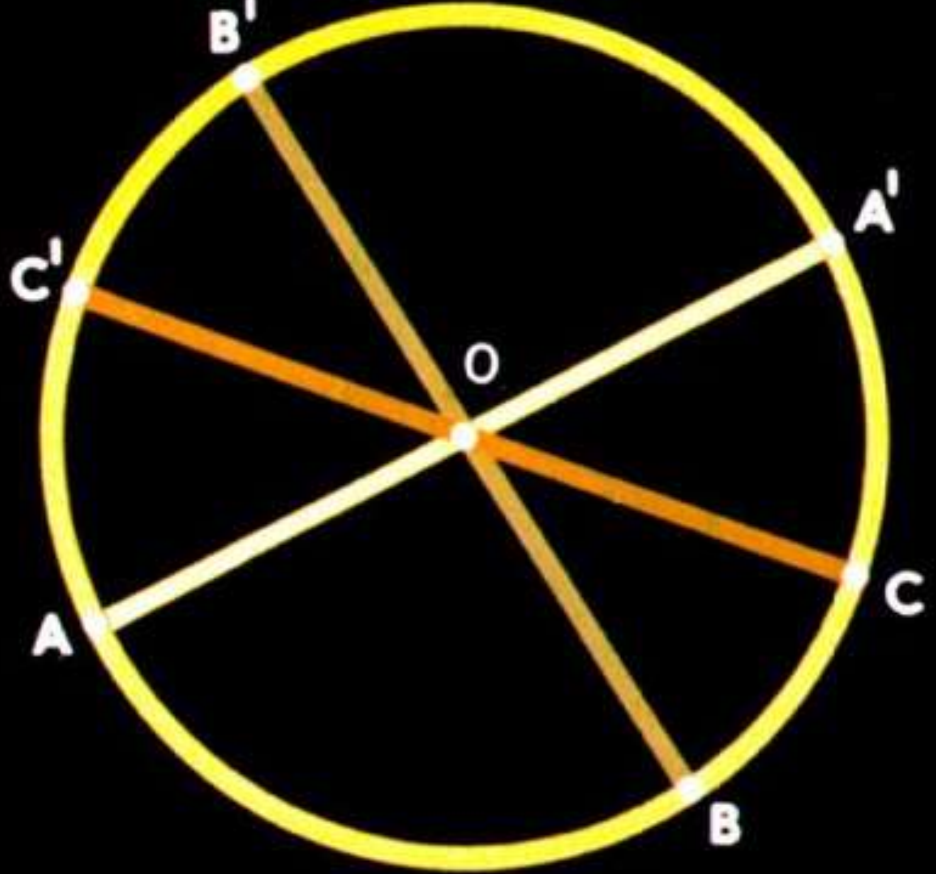


Из решения предыдущих задач вытекает теорема: через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести только одну окружность. *Объясните*, почему две различные окружности не могут пересекаться в трёх точках.

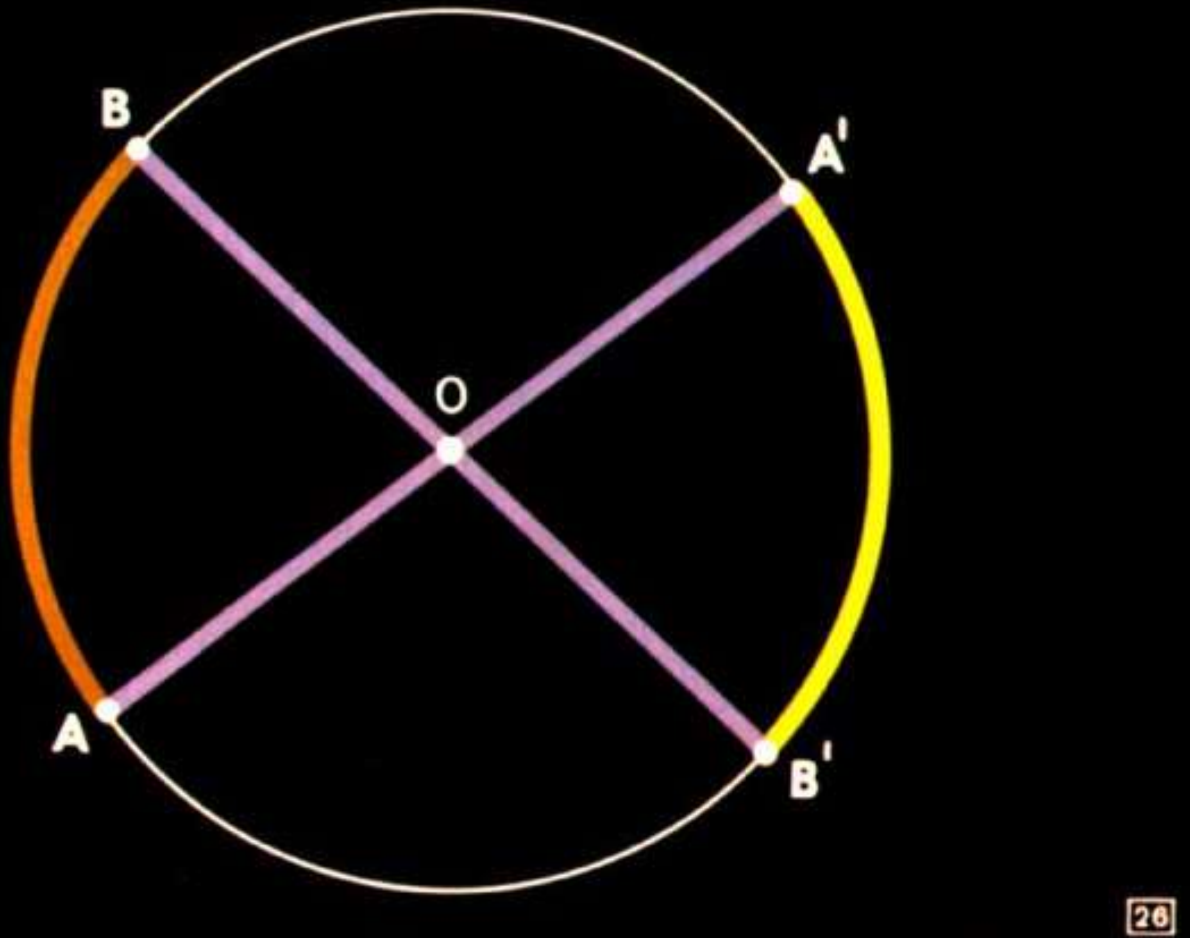


Задача: **в окружности не указан центр. Как его найти?**
Объясните решение, показанное на чертеже.

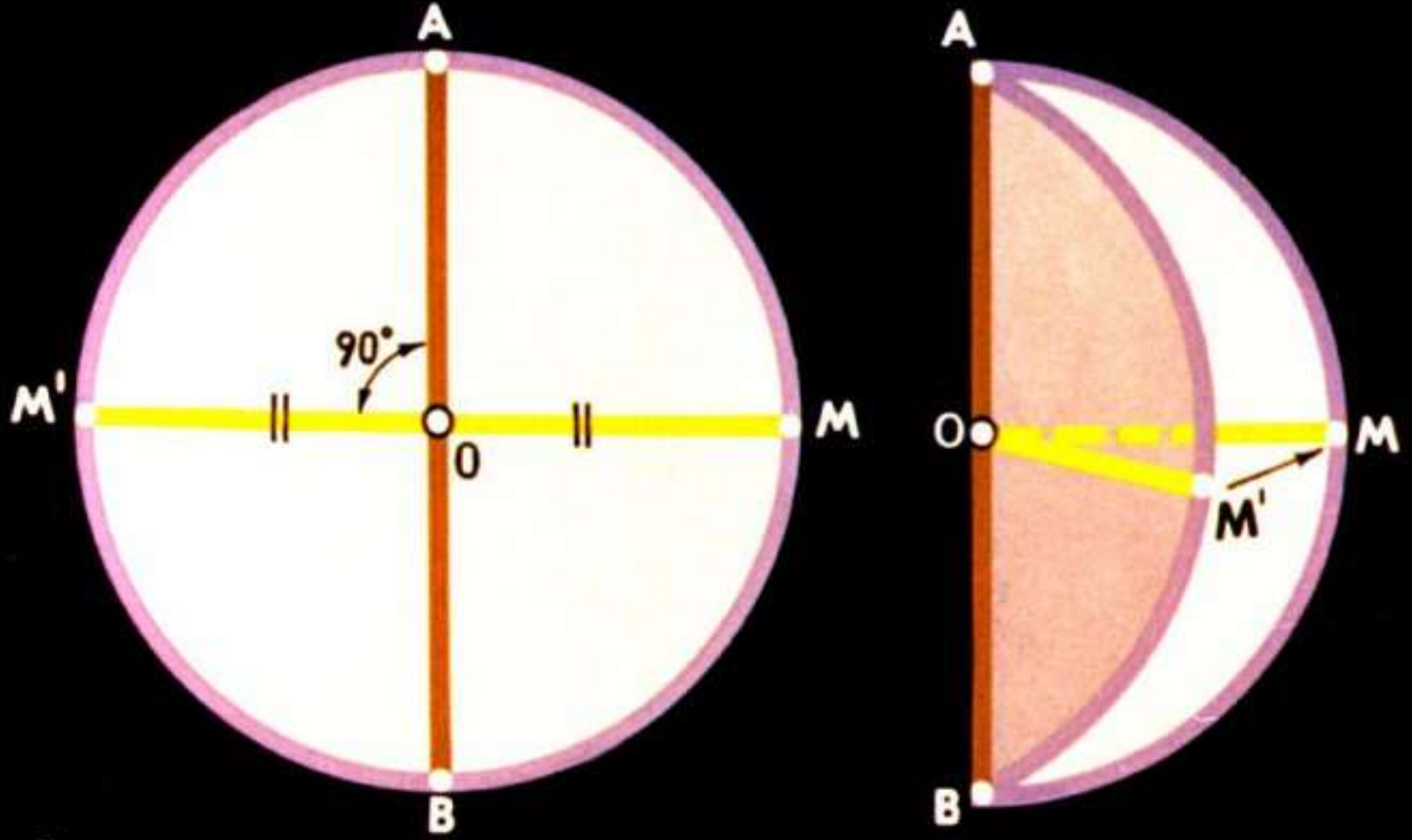

III. Симметрия
окружности
24



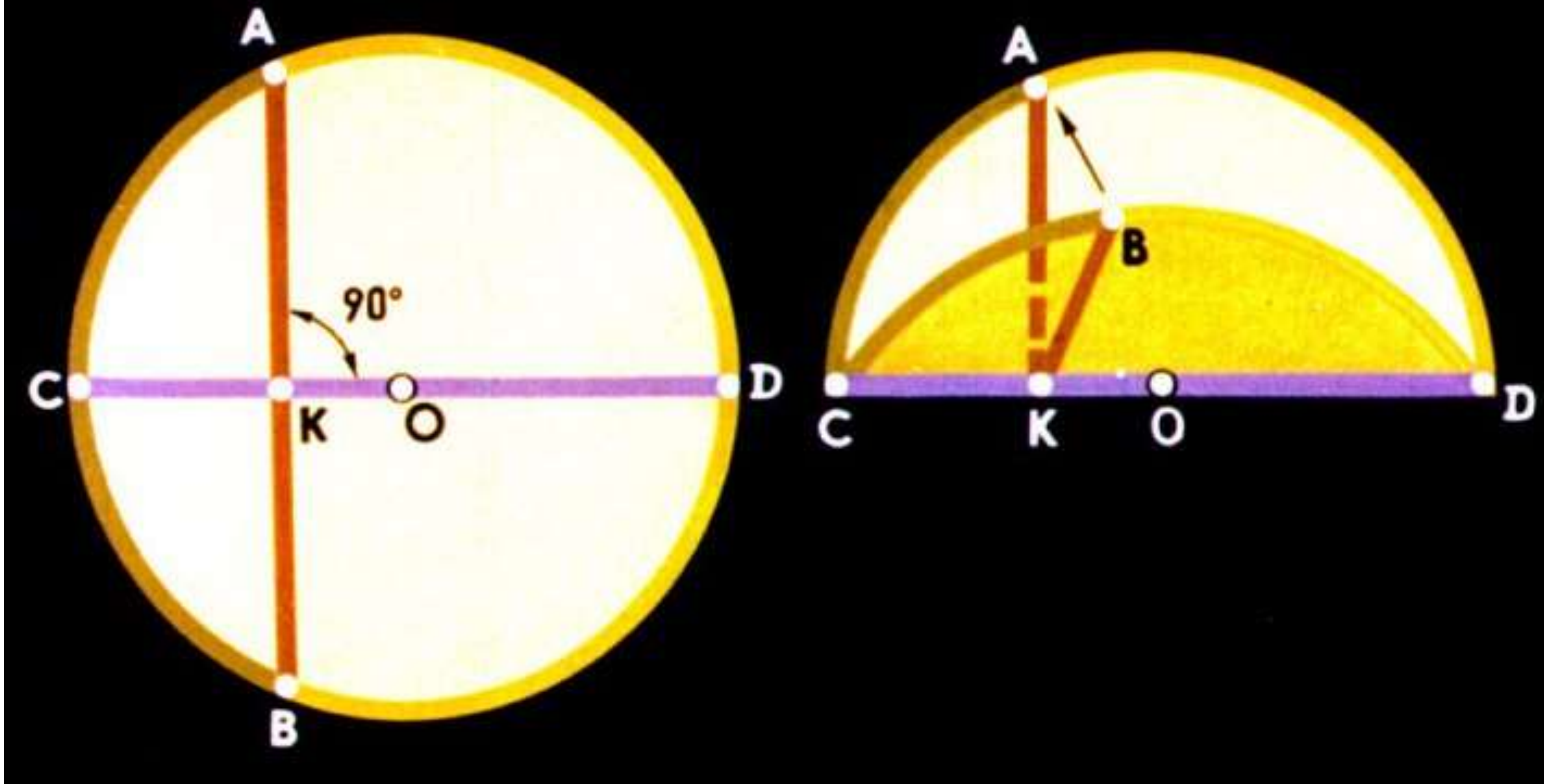
Центр окружности является центром её симметрии. *Доказательство:* возьмём любую точку A окружности и проведём диаметр AA'; так как AO = OA', то для любой точки, взятой на окружности, есть симметричная точка на этой окружности.



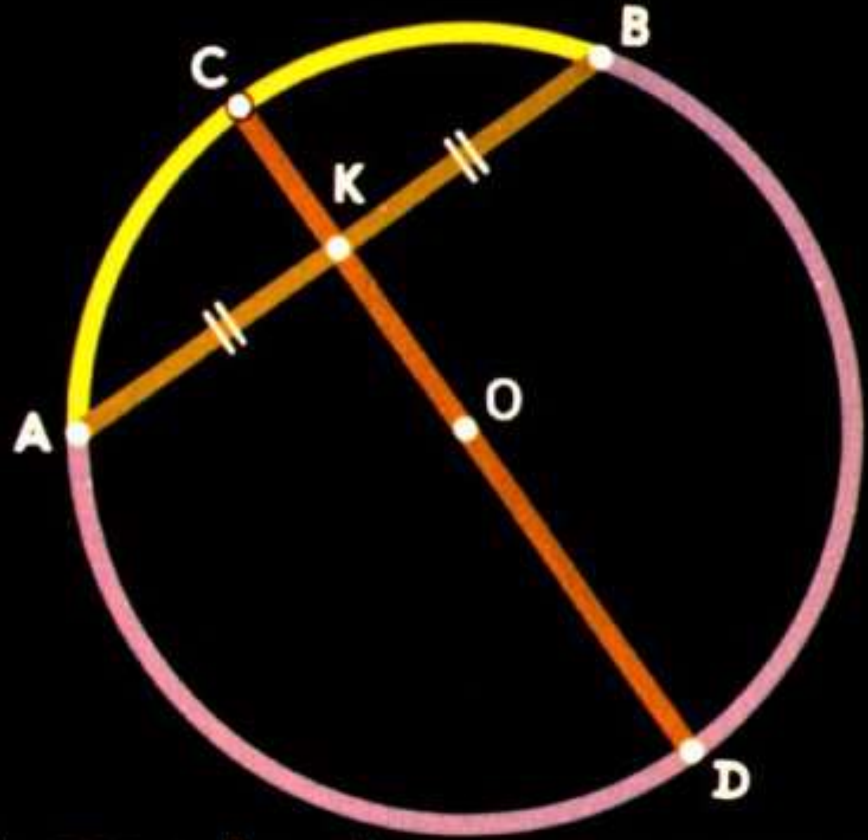
Задача: построить дугу A' B', симметричную дуге AB, относительно центра O. *Объясните решение задачи по чертежу.*



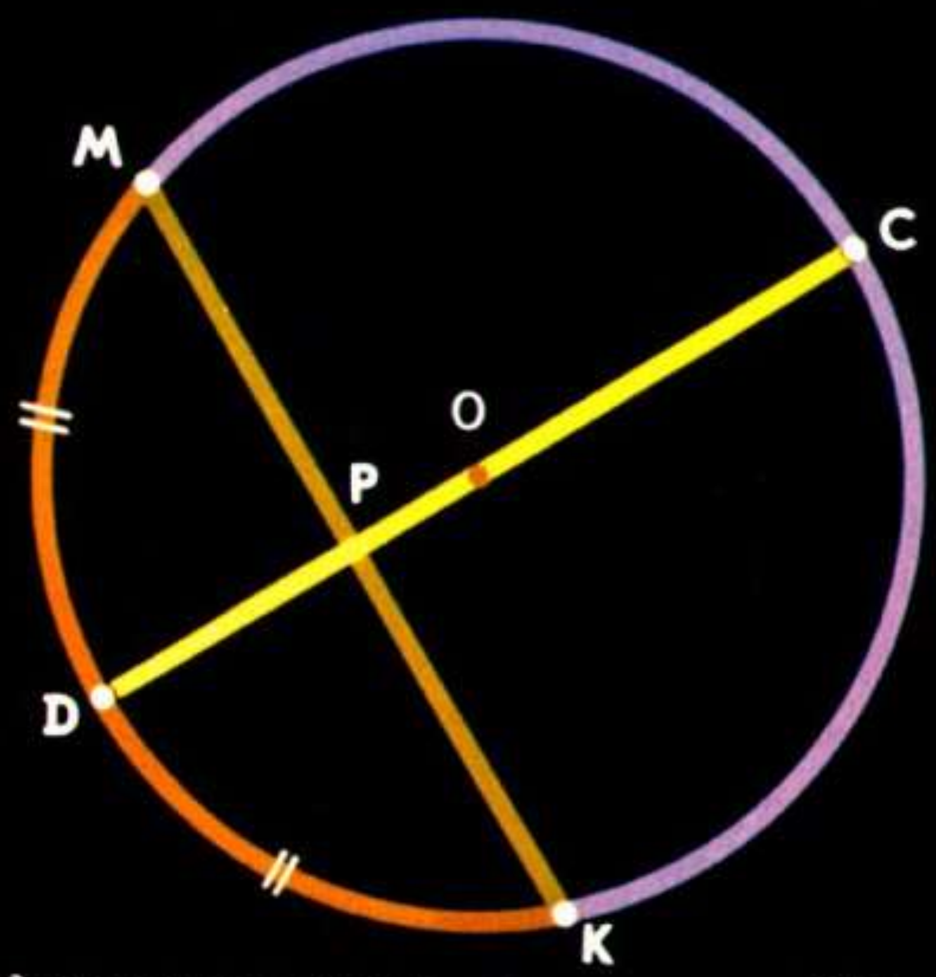
Всякий диаметр окружности является её осью симметрии.
Доказательство: **проведём диаметр $MM' \perp AB$. Так как $MO = M'O$, то при перегибании окружности по диаметру AB точка M' совместится с точкой M. Полуокружности $AM'B$ и AMB также совместятся. Почему?**



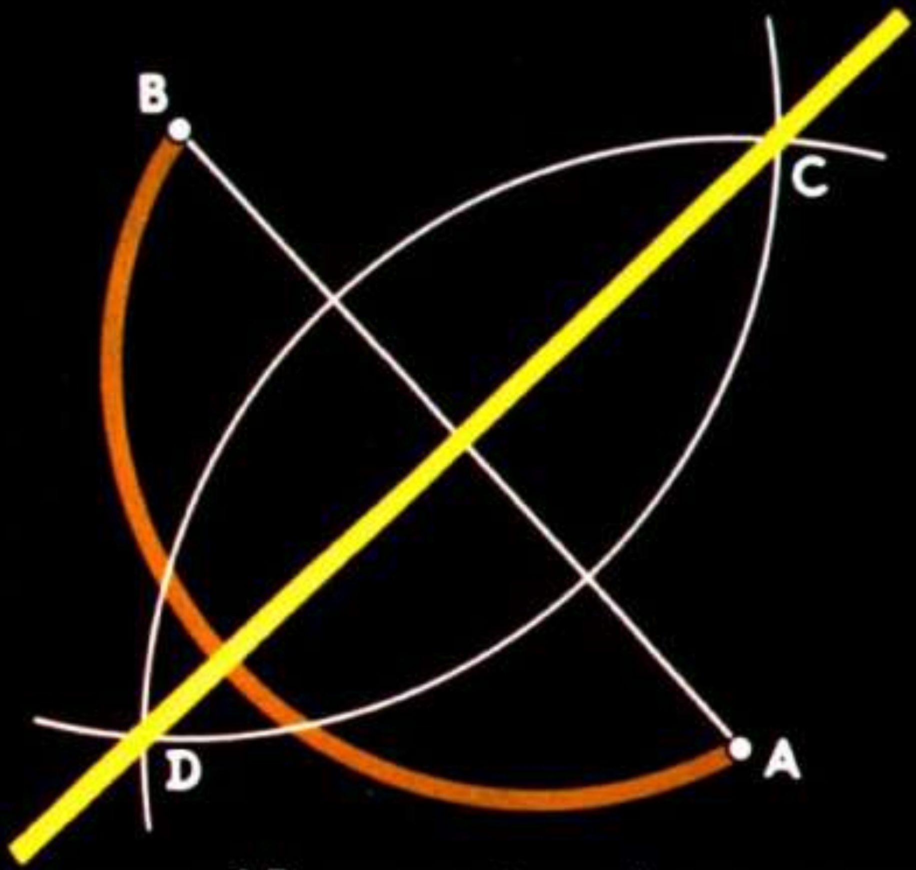
Диаметр CD, перпендикулярный к хорде AB, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам. *Объясните доказательство по чертежу.*



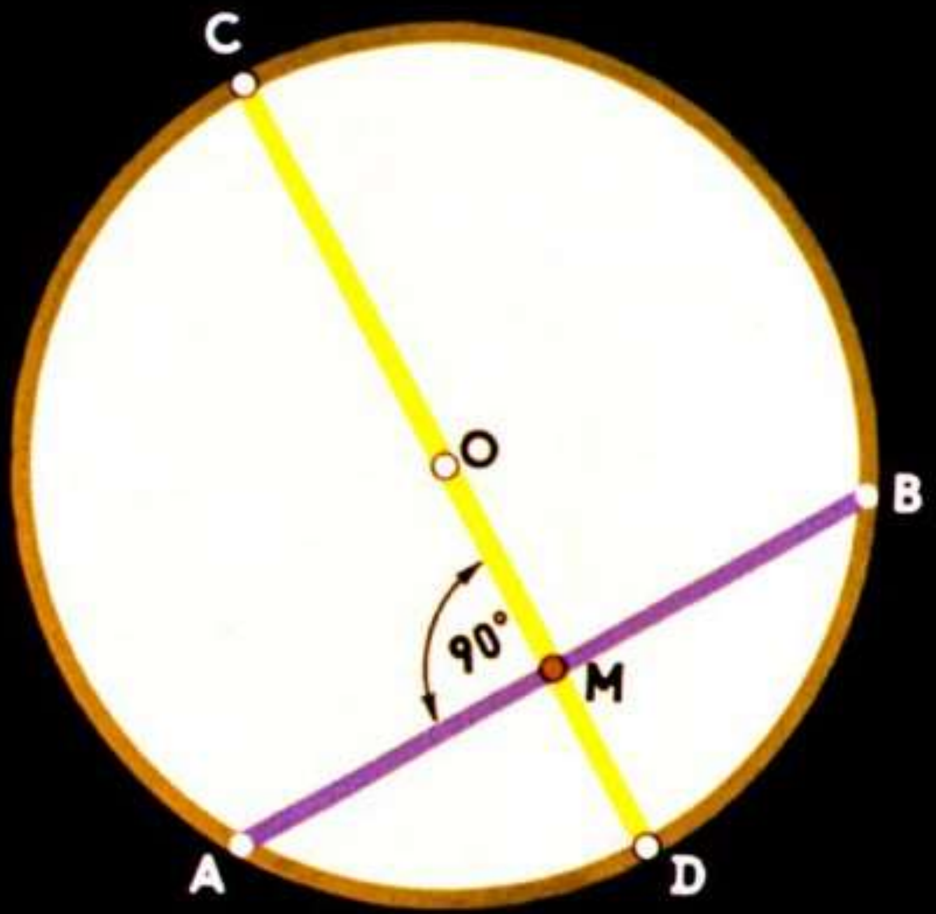
Диаметр CD, проведённый через середину хорды AB, перпендикулярен к ней. *Доказательство:* **пусть OK не перпендикулярна AB, но по предыдущей теореме точка K – середина AB, значит, наше предположение, что OK не перпендикулярна AB, неверно. Остаётся принять, что $OK \perp AB$. Почему $\smile AC = \smile CB$?**



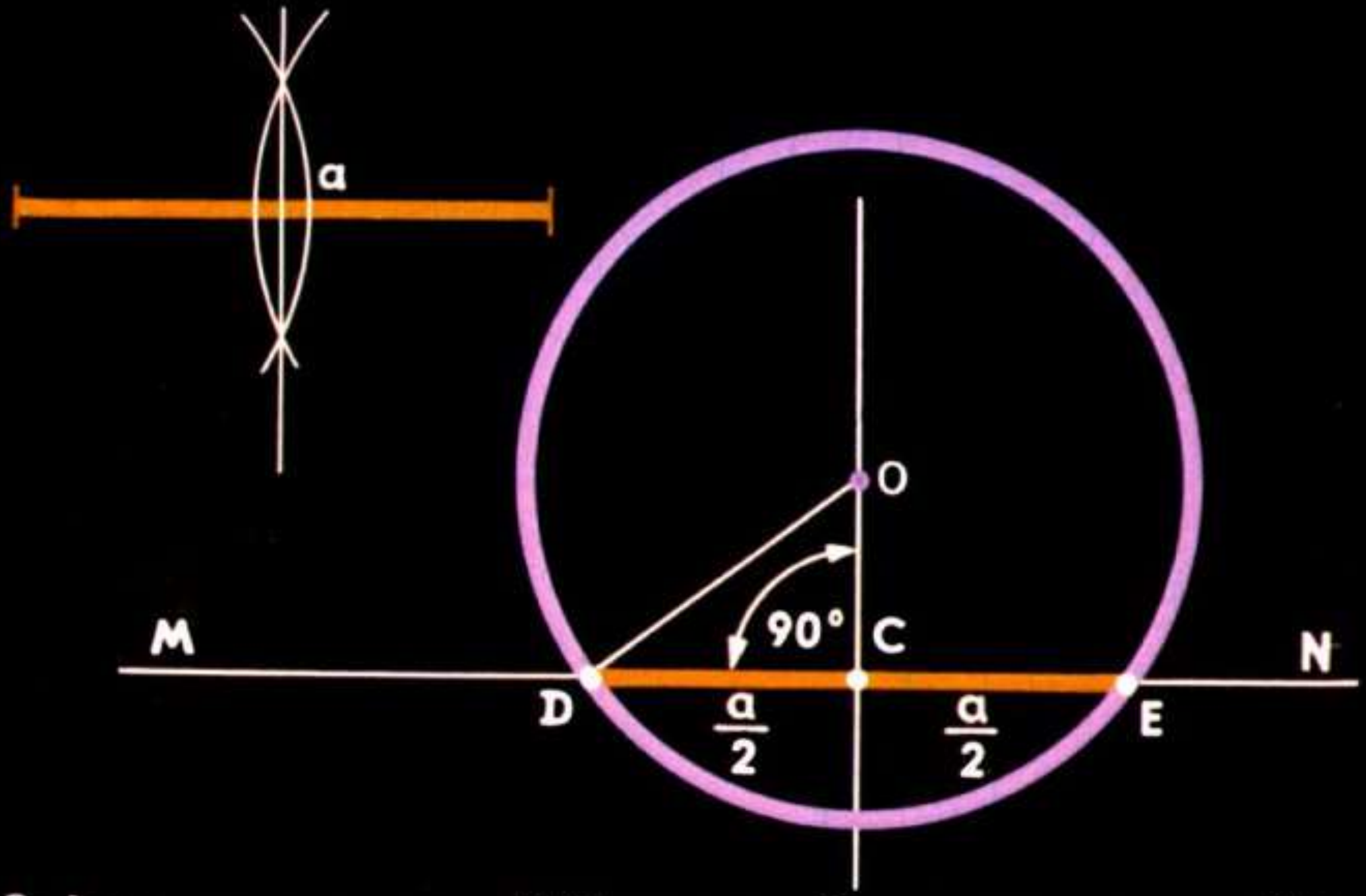
Аналогично докажите теорему: диаметр CD, проходящий через середину дуги MDK, перпендикулярен к хорде, стягивающей эту дугу. Почему MP=PK?



Задача: **дана дуга AB; постройте её ось симметрии.** *Объясните построение по чертежу.* **Имеет ли дуга AB центр симметрии?**

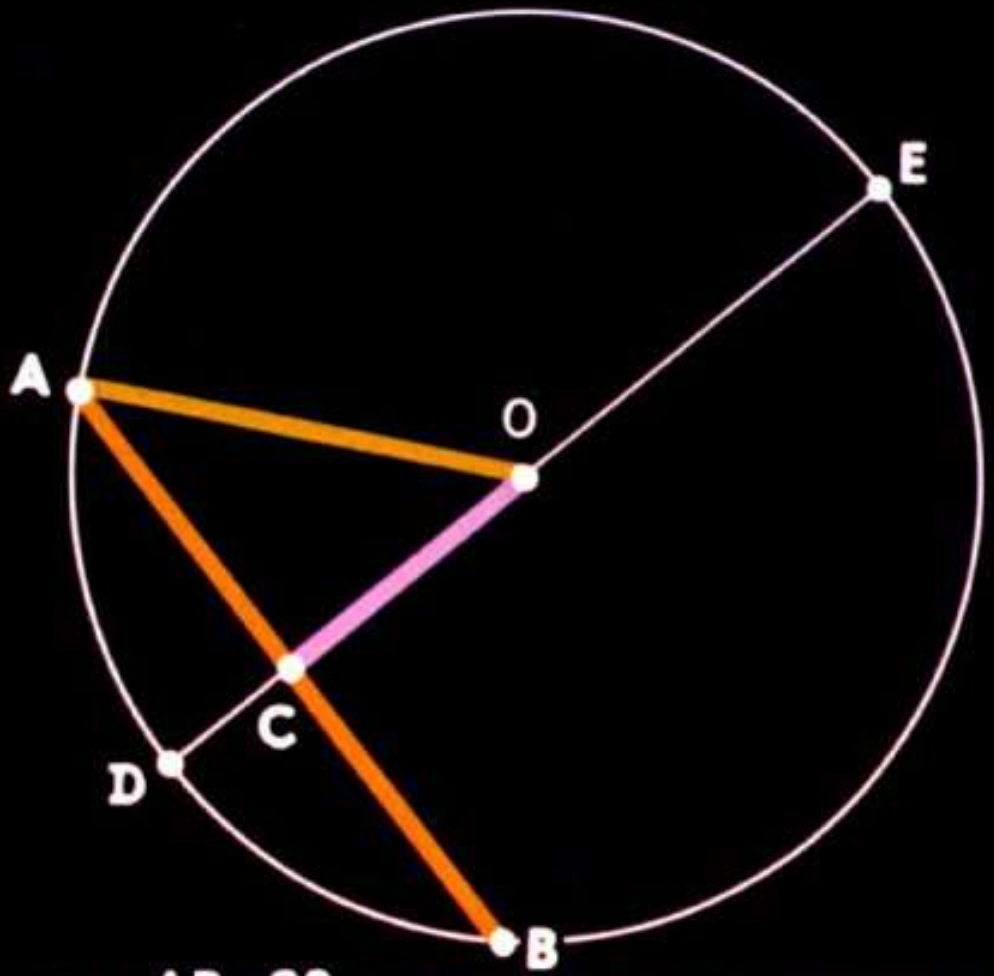


Задача: внутри круга дана точка М. Построить хорду так, чтобы точка М делила её пополам. *Объясните* решение задачи.

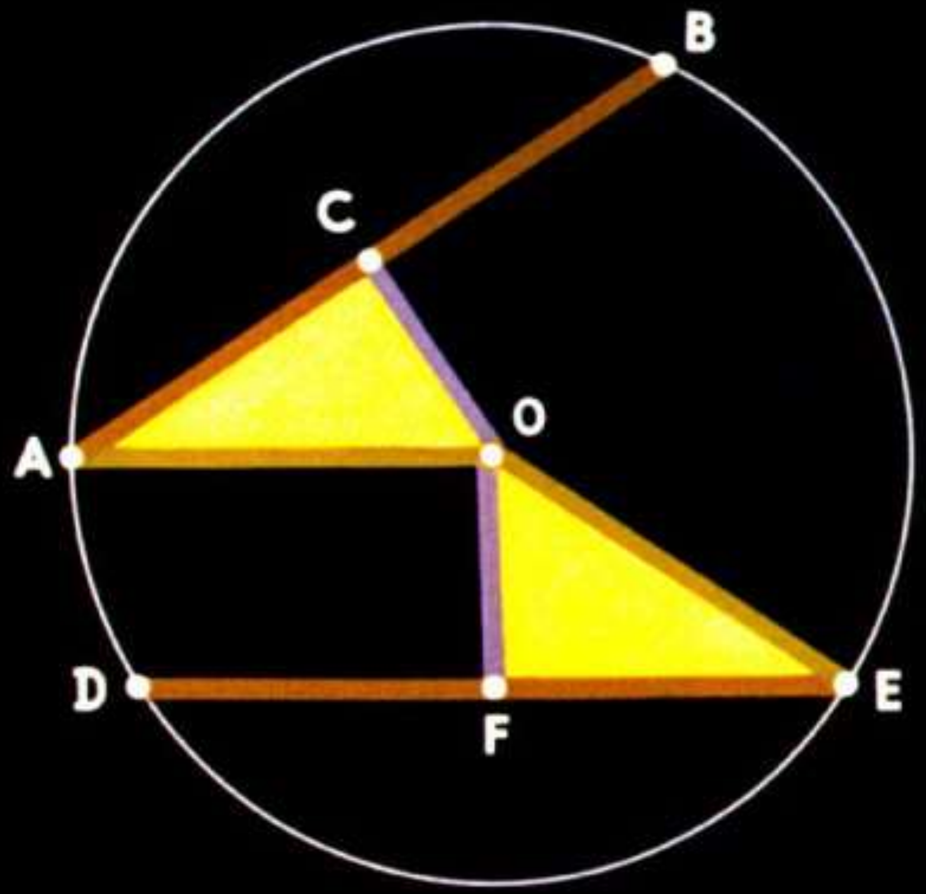


Задача: дана прямая MN и точка O, не лежащая на MN. Построить окружность с центром O, отсекающую на прямой MN хорду, равную отрезку a. *Объясните решение.*

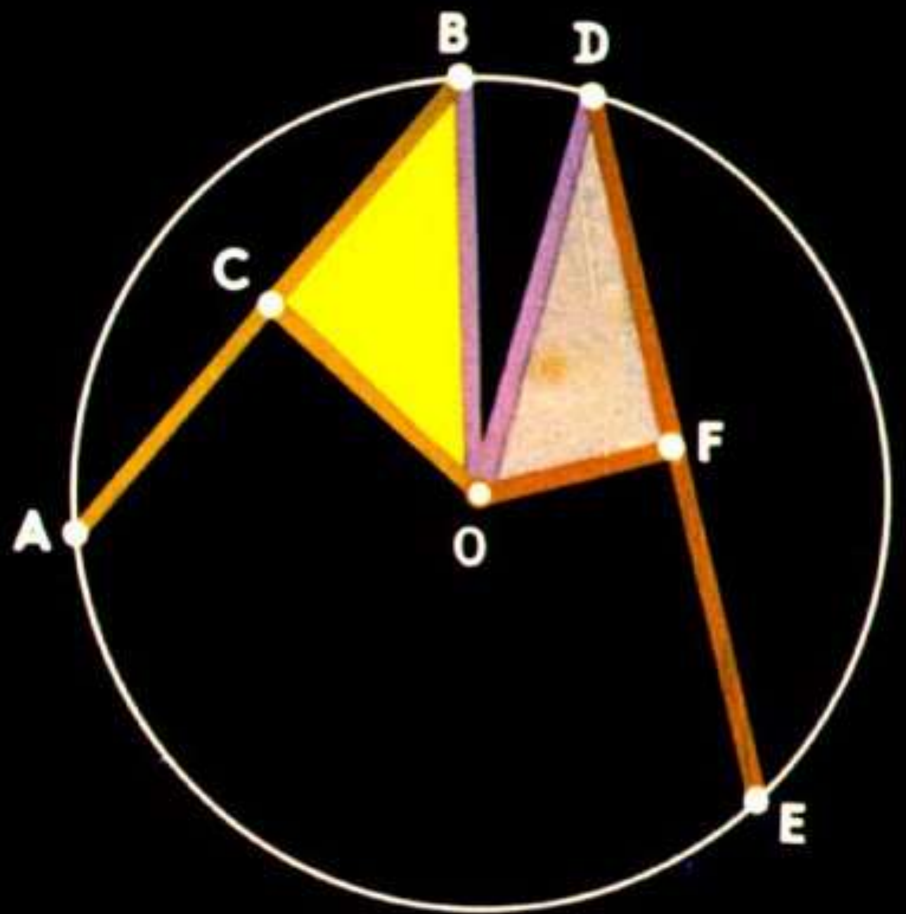

IV. Зависимость
между длиной хорды
и её расстоянием
от центра
34



Задача: хорда AB = 32 см, диаметр окружности 40 см. Найти расстояние хорды AB от центра 0. *Решение:* AO = 20 см, AC = 16 см (почему?). Из $\triangle$ AOC, где $\angle$ ACO = 90° (почему?), имеем: $OC^2 = AO^2 - AC^2 = 20^2 - 16^2 = (20-16) \cdot (20+16) = 4 \cdot 36$; $OC = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

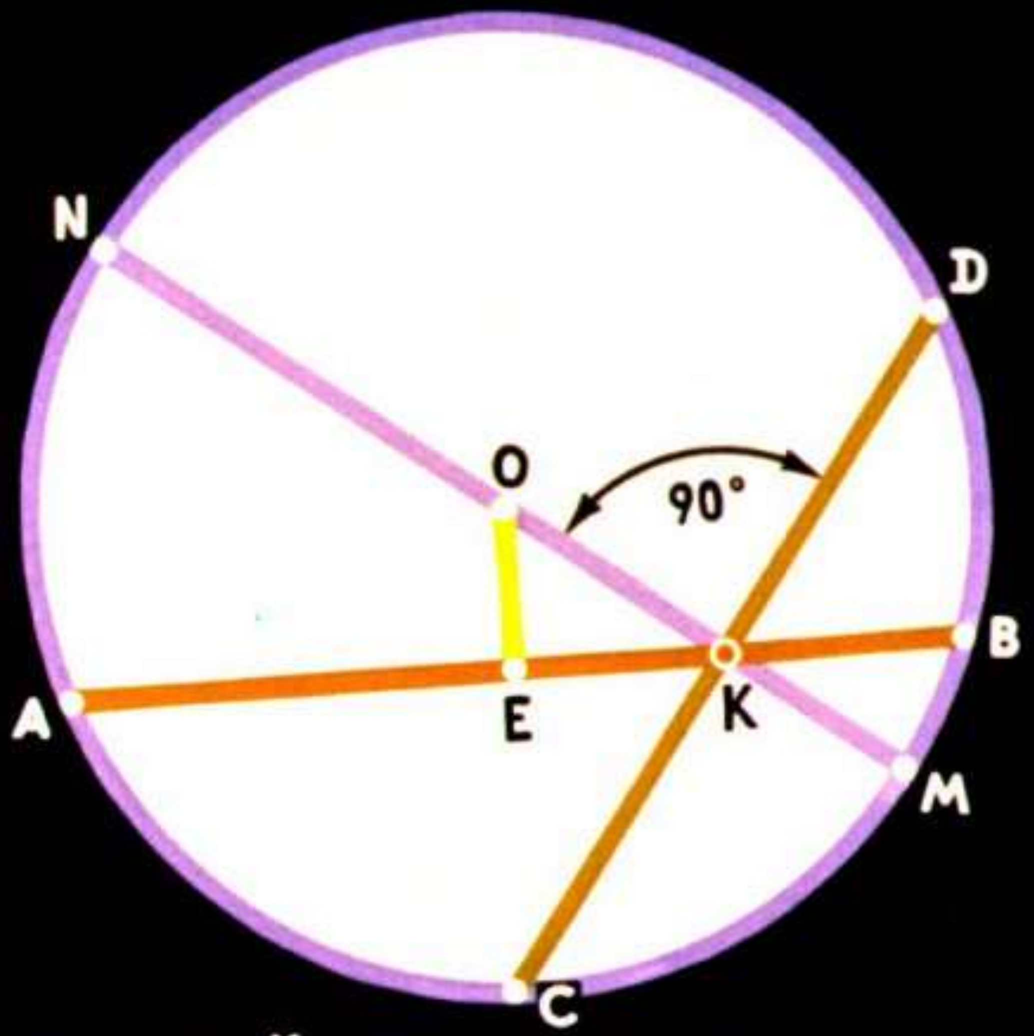


Теорема. В окружности равные хорды равноудалены от центра. *Доказательство:* $\triangle AOC = \triangle OFE$, так как они прямоугольные и $OA = OE$ и $AC = FE$ (почему?). Значит, $OC = OF$.
Сформулируйте и докажите обратную теорему.

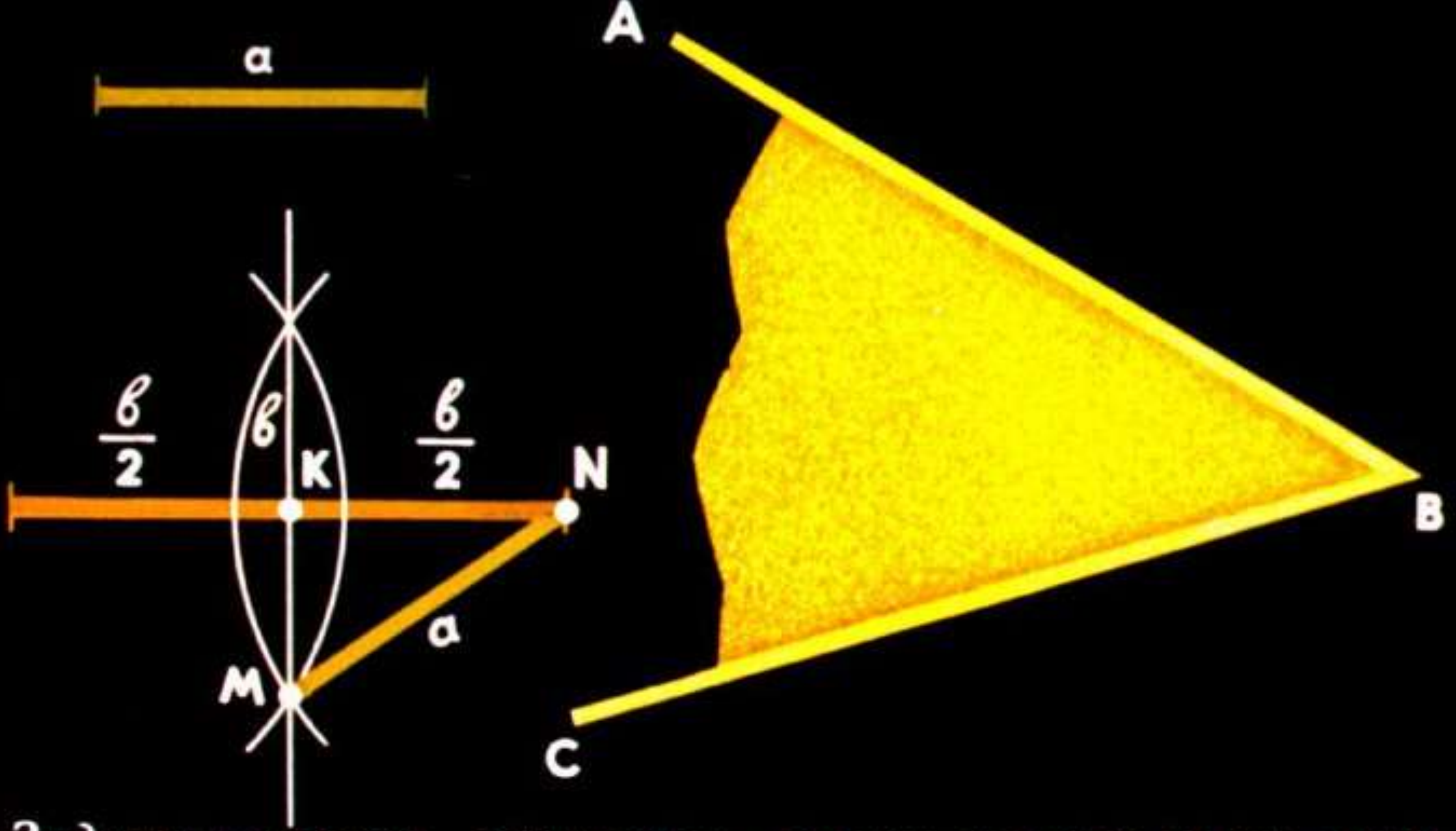


37

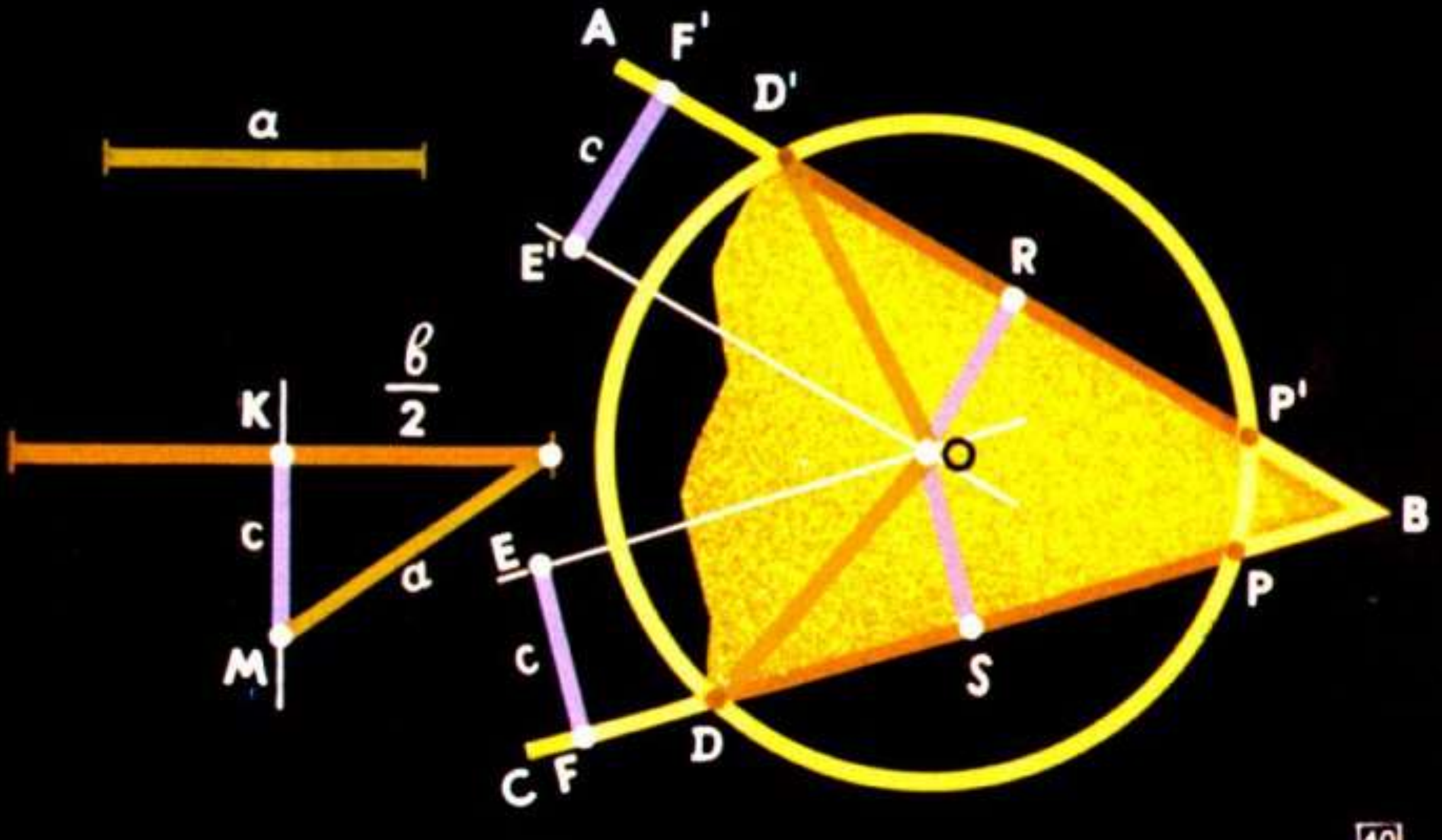
Теорема: в окружности бо́льшая хорда расположена ближе к центру. *Доказательство:* в прямоугольных треугольниках $OC^2 = OB^2 - BC^2$ и $OF^2 = OD^2 - DF^2$, но $OB^2 = OD^2$ (почему?) $BC < DF$ по условию или $BC^2 < DF^2$, значит, $OC^2 > OF^2$ или $OC > OF$. *Верна и обратная теорема. Сформулируйте её.*



Задача: через точку K, взятую внутри круга, проведены две хорды AB и CD, причём CD перпендикулярна диаметру NM. *Докажите*, что CD < AB.



Задача: построить окружность, радиус которой равен отрезку a, так, чтобы она отсекла от сторон угла ABC хорды, равные отрезку $в$. *Решение:* построим $\Delta\, MNK$ так, чтобы $KN = \frac{в}{2}$, $\angle MKN = 90^\circ$ и $MN = a$.



Проведём EO || BD и E'O || BA на расстоянии c от сторон ∠ABC. Точку пересечения O прямых EO и E'O примем за центр искомой окружности. Проведём окружность радиусом, равным a. *Докажите*, **что отрезки DP и D'P' равны отрезку в.**

Конец

Диафильм по математике для средней
школы сделан по заказу
Министерства просвещения РСФСР

Автор А. Чесноков
Художник Н. Дунаева
Редактор В. Чернина

Студия «Диафильм», 1968 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7
Д-262-68 Цветной 0-30