15. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ БОЛЬШИХ СИСТЕМ

Рассмотрены некоторые специальные приемы, используемые при решении задач с большим числом элементов, без которых задачи не решаются.

В целом ряде случаев возникает необходимость рассчитать параметры систем, содержащих очень большое количество элементов. Оно может быть конечно, но не задано, может быть и бесконечным. Понятно, что прямые расчеты затруднительны, поэтому требуются либо специфический математический аппарат, либо обходные пути. Некоторые подобные задачи рассмотрены ниже.

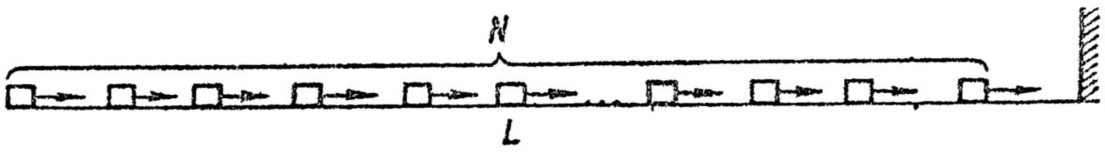


Рис. 152

Задача 15.1. На очень гладкую доску длиной L, в конце которой находится упругая массивная преграда, с интервалом $\Delta\tau$ ставят и толкают с начальной скоростью v_0 один за другим большое число N одинаковых маленьких кубиков. Кубики движутся без трения. Во время столкновения с доской и друг с другом происходит изменение направления движения на противоположное. Через какое время после толчка последнего кубика на доску они все покинут ее? Сколько всего соударений произойдет между кубиками? (Рис. 152)

Решение. Воспользуемся методом «сквозного прохождения». Это заметно упростит решение и сделает его красивым и кратким. В самом деле, при встрече маленьких кубиков друг с другом происходит упругий удар (время взаимодействия ничтожно), который приводит лишь к изменению направления движения. Описание движения каждого кубика затруднено, поскольку при каждой встрече меняется направление движения и число встреч у каждого разное. Если предположить, что при соударениях кубики меняются местами (один проходит сквозь другой), то есть не меняют своего направления движения, то задача сразу заметно упростится. Каждый кубик тогда будет в пути время $t = \frac{2L}{v_0}$. Суммарная задержка последнего по сравнению с первым, вызванная интервалом запуска, составит $(N - 1)\Delta\tau$. Таким образом, общая длительность процесса $\tau = \frac{2L}{v_0} + (N-1)\Delta\tau$.

А каждый, начиная с последнего кубика, будет иметь число соударений, составляющих ряд нечетных чисел от 1, 3, 5, 7, 9, ... до $(2N - 1)$, что в сумме дает N^2.

Задача 15.2. На черной полуплоскости находится очень большое число N одинаковых шаров. Один из них переносят на белую полуплоскость и под определенным углом с очень большой скоростью пускают на черную, желая выбить максимальное число шаров на белую полуплоскость.

Какое максимальное число шаров может быть выбито при любом первоначальном расположении шаров? Трением пренебречь.

Решение. Очевидно, решить эту задачу, не исходя из общих соображений, очень не просто. Нужны варианты расположения шаров для «цепной» передачи движения и т. п. Исходя из закона сохранения импульса, ясно, что хотя бы один шар должен сохранять первоначальный импульс, продолжая двигаться в черной полуплоскости, следовательно, хотя бы один шар не сможет попасть на белую полуплоскость.

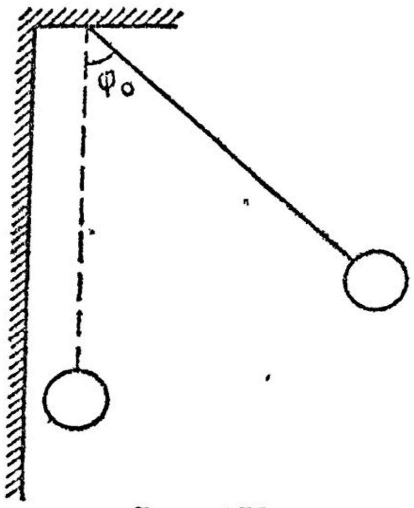


Рис. 153

Задача 15.3. Висящий на нити шарик отклонили на угол φ_0 от вертикали и затем отпустили. При ударе теряется постоянная часть α кинетической энергии $(0 < \alpha < 1)$, T — кинетическая энергия в момент удара.

Найти число ударов, после которых шарик отклонится на угол φ' (рис. 153).

Решение. Изменение потенциальной энергии после первого удара обусловлено изменением кинетической: $\Delta U = -mgl(1 - \cos\varphi_0) = T_0$. Потеря энергии $\Delta T_1 = \alpha T_0$ остается $T_0(1-\alpha)$, после второго удара остается кинетическая энергия: $T_0(1-\alpha) - \alpha T_0(1-\alpha) = T_0(1-\alpha)^2$, после третьего удара $T_0(1-\alpha)^3$.

Рассуждая таким образом, найдем, что после n-го удара шарик обладает энергией $T_0(1-\alpha)^n$ и сможет отклониться на угол φ'.

$$T_0(1-\alpha)^n = mgl(1 - \cos\varphi'),$$

$$mgl(1-\cos\varphi_0)(1-\alpha)^n = mgl(1-\cos\varphi),$$

$$(1-\alpha)^n = \frac{1-\cos\varphi'}{1-\cos\varphi_0}, \quad n > \frac{\lg\left(\frac{1-\cos\varphi'}{1-\cos\varphi_0}\right)}{\lg(1-\alpha)}.$$

Задача 15.4. В сосуде объема V_0 находится идеальный газ под давлением P_0. После n ходов откачивающего насоса, объем рабочей камеры которого V_1, в сосуде установится давление P_n. Найти $\frac{V_1}{V_0}$. Изменением температуры пренебречь.

Решение. Рассмотрим уравнение состояния газа после первого хода насоса: $P_0V_0 = P_1(V_0 + V_1)$.
После второго: $P_1V_0 = P_2(V_0 + V_1)$.
. . . .
После n-го: $P_{n-1}V_0 = P_n(V_0 + V_1)$.
Перемножив все равенства, получим:

$$P_0V_0^n = P_n(V_0 + V_1)^n \quad \text{или} \quad P_0 = P_n\cdot\left(1+\frac{V_1}{V_0}\right)^n.$$

И окончательно

$$\frac{V_1}{V_0} = \sqrt[n]{\frac{P_0}{P_n}} - 1.$$

Заметим лишь, что правомерность использования закона Бойля — Мариотта для переменной массы идеального газа обеспечивается ее постоянством в рамках одного хода насоса.

Задача 15.5. Даны 1990 невесомых металлических пластин, заряженных чередующимися зарядами $+q$; $-q$ и т. д. Емкость каждой пары пластин равна C.

Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы поменять заряд каждой из пластин на противоположный?

Решение. Рассмотрим вначале прямое решение. 1990 пластин, заряженных так, как сказано в условии, представляют собой 1989 конденсаторов, суммарная энергия которых $1989\frac{q^2}{2C}$. Поэтому в случае разрядки с последующей зарядкой наоборот мы должны выполнить работу, равную как минимум $1989\frac{q_2}{C}$. Вряд ли эта работа изо всех возможных минимальна Представим себе, что последнюю пластину переносят так, что она становится первой. При этом все заряды «меняются» на противоположные и работа в этом случае равна работе по удалению одной пластины конденсатора в поле другой на бесконечность.

Итак, искомая работа

$$A = \frac{q^2}{2C}.$$

Задача 15.6. Имеется неограниченно большое число N точек, каждая из которых соединена с каждой с помощью конденсатора емкости C.

Определить общую емкость системы между двумя любыми точками.

Решение. Пусть $N = 2$, тогда общая емкость системы C или $\frac{2}{2}C$ (так нам будет удобнее отыскивать закономерность). Добавим еще одну точку 3. Тогда общая емкость системы состоит из параллельного соединения двух цепочек с одним конденсатором и цепочка с двумя последовательно соединенными конденсаторами одинаковой емкости, т. е.

$$C_{\text{общ}} = C + \frac{C}{2} = \frac{3}{2}C \quad (\text{рис. } 154,\ a).$$

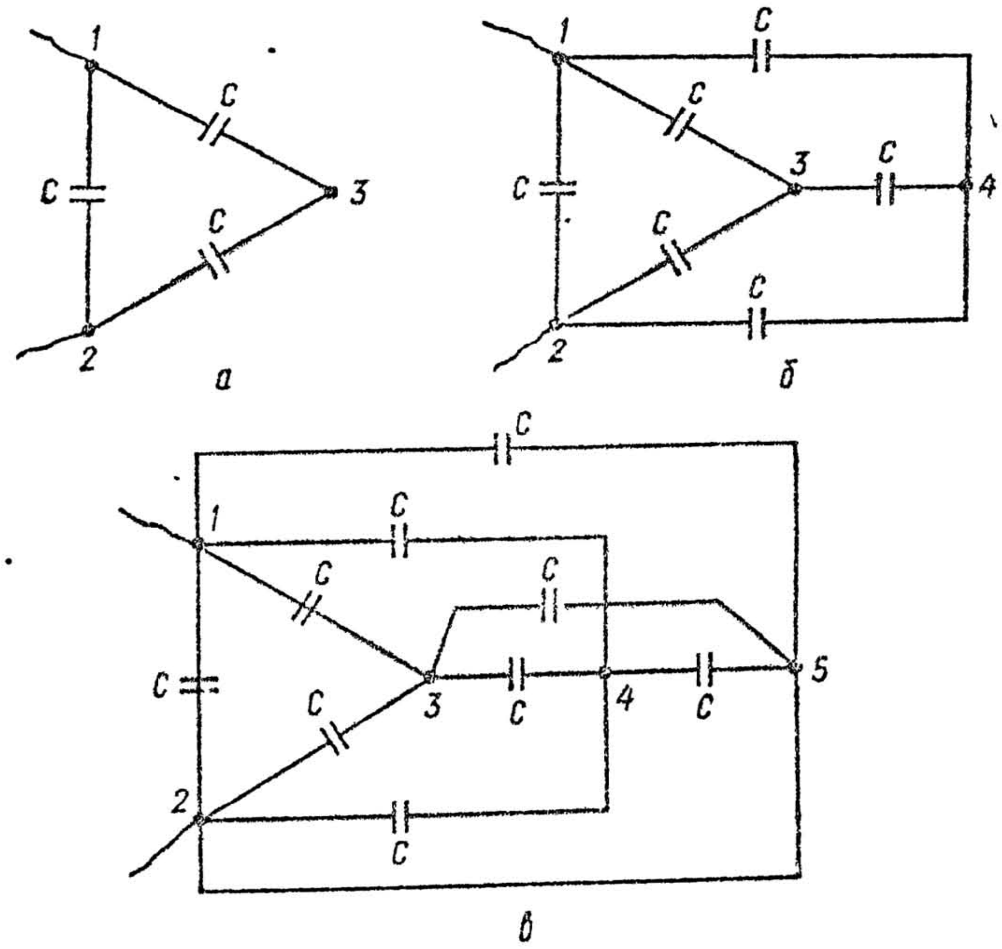


Рис. 154

Добавим еще одну точку 4 и соединим ее со всеми остальными (рис. 154, б). Точки 3 и 4 имеют одинаковый потенциал, поскольку они симметричны относительно точек 1 и 2, и поэтому конденсатор, включенный между ними, не будет заряжен, то есть общий вклад в емкость системы он не вносит. К общей емкости при внесении новой точки добавляется параллельная ветвь, содержащая два последовательно соединенных конденсатора, то есть добавляется $\frac{C}{2}$.

$$C_{общ} = C + \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = \frac{4}{2}C.$$

Добавление еще одной точки 5 добавляет лишь еще одну параллельную ветвь из двух последовательно соединенных конденсаторов $\frac{C}{2}$. Точки 3, 4 и 5 являются точками одинакового потенциала и добавление конденсатора между ними не вносит изменения в общую емкость системы. Таким образом, добавление любой новой точки увеличивает общую емкость системы на $\frac{C}{2}$ (рис. 154, в).

Составим таблицу [табл. 1].

Таблица 1

N Количество точек	$C_{общ}$. Общая емкость
2	$\frac{2}{2}C$
3	$\frac{3}{2}C$
4	$\frac{4}{2}C$
5	$\frac{5}{2}C$
. . . .	. . . .
N	$\frac{N}{2}C$

Из таблицы видно, что общая емкость системы

$$C_{общ} = \frac{N}{2}C.$$

Задача 15.7. Конденсатор емкости C заряжен до разности потенциалов U. К нему подключают незаряженный конденсатор емкости C_1 и после распределения зарядов отключают.

Сколько конденсаторов емкости C_1 нужно поочередно подключить к данному, чтобы заряд его уменьшился в N раз?

Решение. Воспользуемся N раз законом сохранения заряда:

$$N \text{ раз} \begin{cases} CU = (C_1 + C)\,U_1, \\ CU_1 = (C_1 + C)\,U_2, \\ \quad \dots \\ CU_{N-1} = (C_1 + C)\,\dfrac{U}{N}, \end{cases} \Rightarrow C^n = (C_1 + C)^n \frac{1}{N},$$

$$N = \left(1 + \frac{C_1}{C}\right)^n.$$

Логарифмируя, получаем n.

Задача 15.8. Из бесконечности к полубесконечной цепочке одинаковых зарядов q, закрепленных на одина-

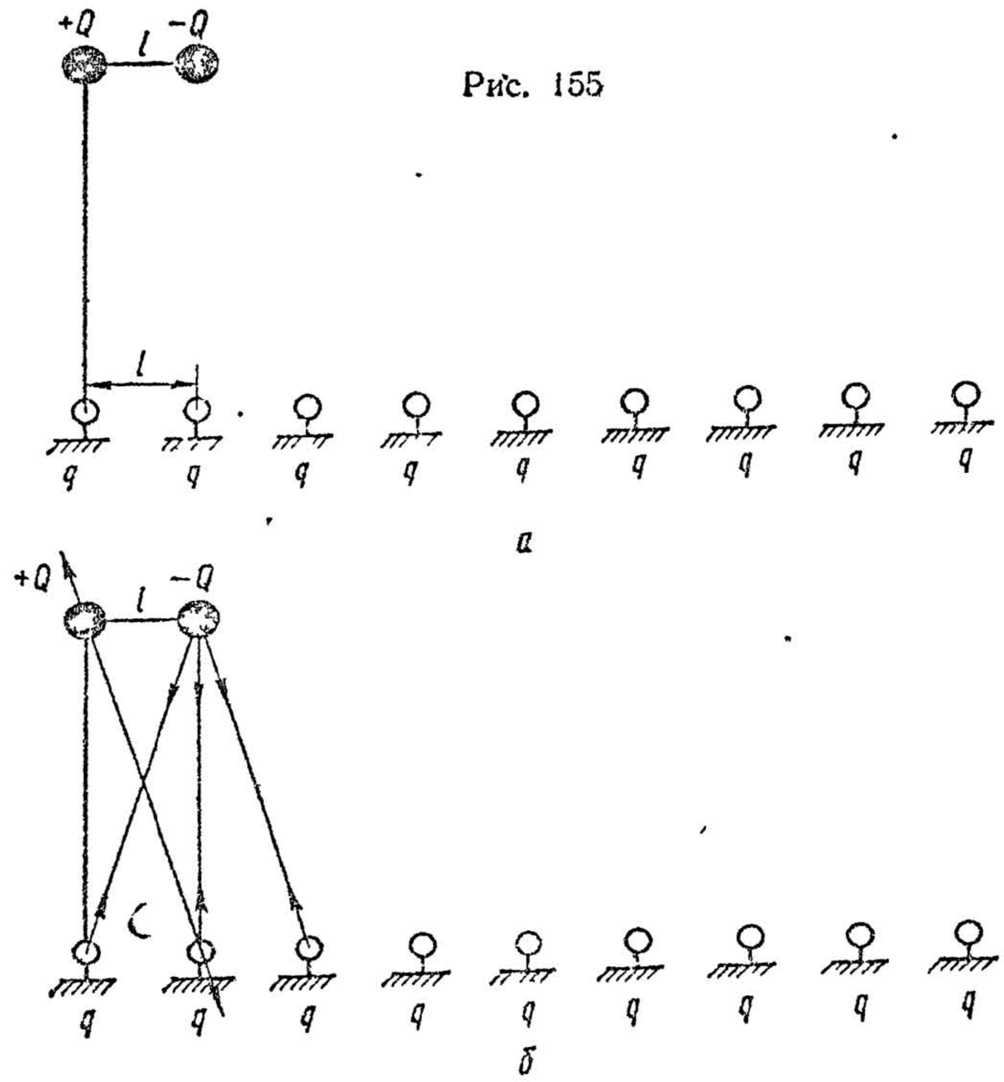


Рис. 155

ковых расстояниях l друг от друга, внесли диполь с зарядами $+Q$, $-Q$, расположив на расстоянии h параллельно цепочке зарядов. Длина диполя тоже l (см. рис. 155, *а*).

Определить выполненную работу по внесению диполя.

Р е ш е н и е. Работа по внесению диполя равна изменению потенциальной энергии системы диполь — цепочка. Так как в бесконечности потенциал и потенциальная энергия равны нулю, то искомая работа равна потенциальной энергии диполя в электростатическом поле полубесконечной цепочки. Заметим, что характер расположения цепочки и диполя дает возможность упростить расчет взаимодействия зарядов друг с другом (рис. 155, *б*).

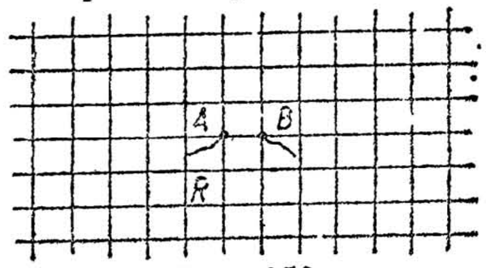


Рис. 156

Действительно взаимодействие заряда $+Q$ с q_1 равно по модулю и противоположно по знаку взаимодействию заряда $-Q$ с q_2 (то есть компенсируют друг друга). Аналогично взаимодействие зарядов $+Q$ и q_2 и зарядов $-Q$ и q_3 и т. д. Остается нескомпенсированным взаимодействие зарядов $-Q$ с q_1, расположенных на расстоянии $d = \sqrt{l^2 + h^2}$.

$$W_{-Q,q} = -k\frac{Qq}{\sqrt{l^2+h^2}} \Rightarrow A = k\frac{Qq}{\sqrt{l^2+h^2}}.$$

Задача 15.9. Имеется безграничная проволочная сетка с квадратными ячейками. Сопротивление каждого проводника между соседними узлами R_0.

Найти сопротивление этой сетки между точками A и B (рис. 156).

Р е ш е н и е. Воспользуемся принципом симметрии и принципом суперпозиции.

Мысленно подключим к точкам A и B источник напряжения U. Тогда $U = IR = I_0R_0$, где I — ток в подводящих проводах, I_0 — ток в проводнике AB.

Ток I_0 можно представить как суперпозицию двух токов. Если бы ток I «втекал» в точку A и растекался по сетке на бесконечность, то по проводнику AB — из симметрии — тек ток $\frac{I}{4}$. Аналогично, если бы ток I поступал в сетку из бесконечности и «вытекал» из точки B, то по проводнику AB тек ток тоже $\frac{I}{4}$. Наложив друг на друга оба эти решения, получим $I_0 = \frac{I}{2}$, поэтому $R = \frac{R_0}{2}$.

Задача 15.10. Имеется большое число N плоско-параллельных стеклянных пластин, причем показатель преломления верхней — n, а каждой последующей в k раз меньше, чем предыдущей.

Под каким углом α_0 должен падать свет на первую пластину, чтобы не выйти из последней?

Р е ш е н и е. Рассмотрим преломление света на границе раздела между N-ой и $(N-1)$-ой пластинами. Если угол преломления равен углу полного внутреннего отражения, то луч из последней не выйдет.

Запишем законы преломления для каждой из пластин: ($n_{\text{воздуха}} = 1$):

$$N \text{ раз} \begin{cases} \sin\alpha_0 = n\sin\alpha_1; \\ n\sin\alpha_1 = \dfrac{n}{k}\sin\alpha_2; \\ \dots \\ \dfrac{n}{k^{N-2}}\sin\alpha_N = \dfrac{n}{k^{N-1}}\sin 90^\circ. \end{cases}$$

Перемножив все равенства, получим

$$\sin\alpha_0 = \frac{n}{k^{N-1}} \quad \text{или} \quad \alpha_0 = \arcsin\frac{n}{k^{N-1}}.$$

16. МЕТОД ЭКСПОНЕНТЫ

Изложены важные экспоненциальные законы и формулы, показаны способы их получения (формулы Циолковского, барометрической, закона радиоактивного распада и других).

Предлагаемый метод экспоненты в некотором роде является комбинацией методов ДИ и аналогий. Экспонента обладает тем замечательным свойством, что ее первая производная имеет наиболее простой вид: $(e^x)' = e^x$, то есть повторяет саму функцию). Поясним суть метода на конкретных примерах, которые показывают, что мгновенные значения параметров физических процессов можно находить, избегая грубого усреднения.

Задача 16.1. В момент времени $t = 0$, когда скорость лодки v_0, отключают двигатель. Найти зависимость скорости от времени. Сила сопротивления пропорциональна скорости.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение второго закона динамики:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv,$$

где k — коэффициент сопротивления движению. Знак «—» указывает на противоположное скорости направление силы сопротивления. Подобные дифференциальные выражения решаются путем разделения переменных.

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\,dt.$$

Интеграл левой части $\ln v$ (см. таблицу интегралов). Поэтому $\ln v = -\frac{k}{m}t + C$, где C — постоянная интегрирования. Далее,

$$v = e^{-\frac{k}{m}t+C} = e^{C} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Из начальных условий ($t = 0$; $v = v_0$) находим: $e^C = v_0$. Окончательно $v = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$.
Примечателен следующий математический парадокс: $v = 0$ достижимо лишь при $t = \infty$. Физически же остановка означает, например, уменьшение скорости в 1000 раз.

Задача 16.2. Найти зависимость давления атмосферы от высоты.

Решение. Пусть давление столба воздуха единичной площади на высоте $h = 0$ равно P_0 (начальные условия). При увеличении высоты на dh давление уменьшается на dP: $dP = \rho g dh$. Плотность воздуха выразим из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}, \text{ откуда } dP = -P\frac{\mu g}{RT}\,dh.$$

Затем, разделив переменные, с учетом начальных условий, получим:

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{\mu g h}{RT}}.$$

Эта формула называется *барометрической*, или *формулой Больцмана*. Подумайте, какие упрощения использованы при ее выводе и каков их вклад в погрешность результата.

Задача 16.3. Найти зависимость температуры тела от времени, если температура окружающей среды $T_c = 0$ и при $t = 0$ температура тела T_0.

Решение. По закону Ньютона количество теплоты, отданное телом за время dt: $dQ = -kTdt$.
Коэффициент пропорциональности зависит от поверхности и материала тела. С другой стороны, $dQ = CdT$,

где C — теплоемкость тела. Итак, $CdT = -kTdt$ или $T = T_0 \cdot e^{-\frac{k}{c}t}$. Примерно так в криминалистике определяют время, прошедшее после события

Задача 16.4. Найти работу газа при изотермическом расширении от V_1 до V_2 (рис. 157).

Решение. Работа газа численно равна площади криволинейной трапеции. Для ее вычисления необходимо изотерму по методу ДИ разбить на участки, на каждом из которых можно пренебречь изменением давления: $dA = PdV$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $P = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$. Поэтому $dA = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}$ или

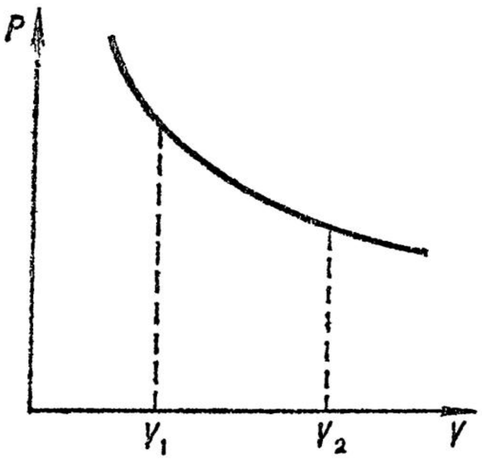


Рис. 157

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Задача 16.5. В схеме, изображенной на рисунке 158 в момент $t = 0$, когда заряд конденсатора равен q_0, замыкают ключ. Найти зависимость $q = q(t)$

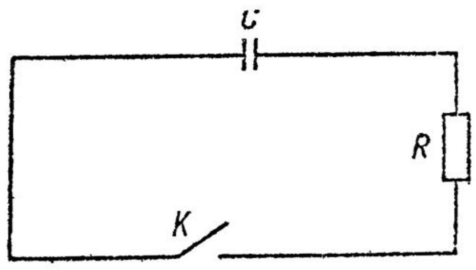


Рис. 158

Решение. За время dt заряд конденсатора уменьшается на $dq = -Idt$. Но $I = \frac{\Delta\varphi}{R}$, а $\Delta\varphi = \frac{q}{C}$. Поэтому

$$dq = -\frac{q}{RC}dt \quad \text{или} \quad q = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Задача 16.6. Радиоактивный распад характеризуется постоянной распада λ, которая показывает, что из большого числа N радиоактивных атомов в среднем за единицу времени распадается λN атомов. Вывести закон радиоактивного распада.

Решение. Число dN атомов, распавшихся за время dt: $dN = -\lambda N dt$. Отсюда $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Если $N = \frac{N_0}{2}$, то t называют периодом полураспада T.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \quad \text{или} \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Задача 16.7. Закон Бугера устанавливает зависимость интенсивности от толщины слоя поглощающего вещества. Вывести закон.

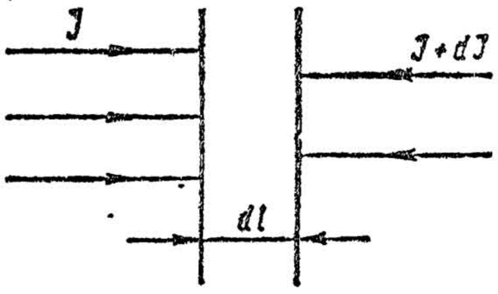


Рис. 159

Решение. Начальные условия $l = 0$; J_0 (рис. 159). Пусть k — коэффициент поглощения, тогда $dJ = -kJdl$ или $J = J_0e^{-kl}$.

Задачи для самостоятельного решения

16.8. Вывести формулу Циолковского.

Ответ. $m = m_0e^{-v}$.

16.9. Доказать, что если в условии задача 16.3 $T_c \neq 0$, то

$$T = (T_0 - T_c)\,e^{-\frac{k}{c}t} + T_c.$$

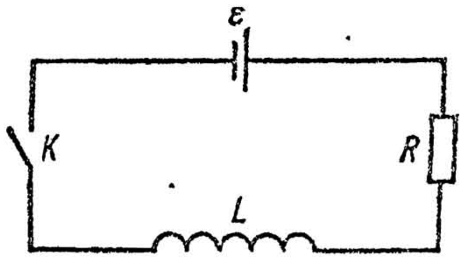


Рис. 160

16.10. В схеме, изображенной на рисунке 160 при $t = 0$ после замыкания ключа идет ток J_0. Найти ток в цепи при неустановившемся режиме.

Ответ. $i = J_0 \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

17. МЕТОД МИНИМУМА И МАКСИМУМА

Излагаются некоторые математические и физические способы нахождения минимума и максимума функций физических величин.

Часто приходится решать задачи, в которых необходимо определить наибольшее (наименьшее) значение величины из всех возможных. Метод решения таких задач получил название «min» «max». Его основы следуют, например, из принципа Ферма, экстремума энергии.

Однако в некоторых задачах удается обойти сложности дифференциального исчисления, особенно если функция физической величины — квадратичная или тригонометрическая. Иногда удается воспользоваться известными алгебраическими неравенствами, например Коши. Случается, что само условие физической задачи накладывает ограничения на ответ. Часто в решении помогают графики. Покажем это на примерах.

Задача 17.1. Нагруженные сани массой m движутся равномерно по горизонтальной поверхности под действием силы F. Коэффициент трения k. Найти значение минимальной силы и угол между силой и горизонталью.

Решение. Из второго закона Ньютона следует:

$$F = \frac{kmg}{k \sin \alpha + \cos \alpha}.$$

Минимальное значение силы F_{min} возможно при максимальном значении знаменателя. Обозначим $\operatorname{tg} \varphi = k$. Заметим, что

$$\sin \varphi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Поэтому $F = \dfrac{kmg}{\sqrt{1+k^2} \cos(\alpha - \varphi)}$.

Максимальное значение $\cos(\alpha - \varphi) = 1$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} k$.

$$F_{min} = \frac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}.$$

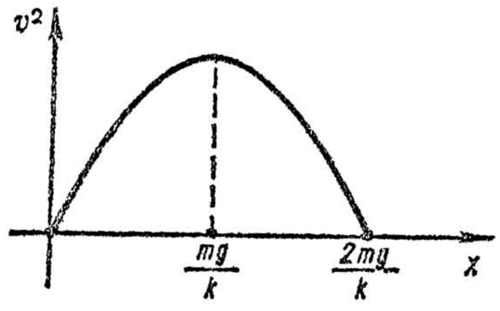


Рис. 161

Задача 17.2. К висящей очень тонкой пружине жесткостью k подвешен шарик. Вначале пружина не растянута. Затем шарик отпускают. Какой наибольшей скорости достигнет шарик при своем движении? Масса шарика m.

Решение. Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgx - \frac{kx^2}{2}$$

получаем квадратичную функцию v^2 от x:

$$v^2 = 2gx - \frac{k}{m} x^2.$$

На рисунке 161 представлен график зависимости $v^2 = v^2(x)$. Подставив $x = \frac{mg}{k}$, найдем $v_{max} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Задача 17.3. Однородный тяжелый канат, подвешенный за один конец, не рвется, если длина каната не превышает значение l_0. Пусть тот же канат соскальзывает под действием силы тяжести из горизонтально расположенной трубки с загнутым вниз концом. При какой наибольшей длине канат соскользнет, не порвавшись? Трение отсутствует.

Решение. Пусть l — длина каната. Запишем уравнения второго закона Ньютона для частей каната длиной

x и $l-x$ (рис. 162):

$$\rho Sxg - T = \rho Sxa,$$

$$T = \rho S(l-x)a.$$

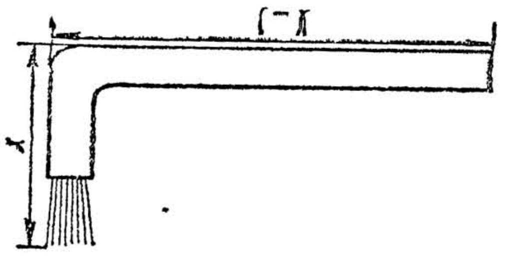


Рис. 162

Здесь S — площадь поперечного сечения каната, ρ — его плотность. Разделив одно уравнение на другое, получим

$$\rho Sgx^2 - \rho Sglx + Tl = 0. \qquad (1)$$

Из производной этого выражения $2\rho Sgx - \rho Sgl = 0$ найдем $x = \frac{l}{2}$.

Учитывая, что $T = \rho Sgl_0$, из (1) определяем $l = 4l_0$.

Задача 17.4. При каком значении R мощность во внешней цепи максимальна? (Рис. 163).

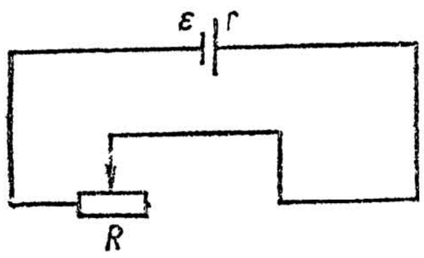


Рис. 163

Решение. Определим мощность во внешней цепи: $\frac{\mathscr{E}^2}{(R+r)^2} R = P$. Максимум этого выражения достигается при минимуме обратного:

$$\frac{1}{P} = \frac{(R+r)^2}{\mathscr{E}^2 R} = \frac{R^2 + 2Rr + r^2}{\mathscr{E}^2 R} =$$

$$= \frac{2}{\mathscr{E}^2} r + \frac{1}{\mathscr{E}^2}\left(R + \frac{r^2}{R}\right)$$

Очевидно, что $\frac{1}{P}$ минимально при минимуме $R + \frac{r^2}{R}$. Воспользуемся неравенством Коши.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \quad \text{или}$$

$$R + \frac{r^2}{R} \geqslant 2\sqrt{R \cdot \frac{r^2}{R}},$$

поэтому $R + \frac{r^2}{R} = 2r$, откуда $R = r$.

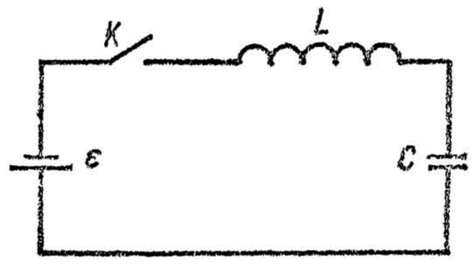


Рис. 164

Задача 17.5. Найти максимальное напряжение на конденсаторе и максимальный ток в цепи (рис. 164).

Решение. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = CU\mathscr{E} \Rightarrow \begin{array}{l} U_{\max} = U \quad (I = 0), \\ U_{\max} = 2\mathscr{E}. \end{array}$$

Максимальный ток найдем аналогично максимальной скорости (см. задачу 17.2).

$$I_{\max} = \mathscr{E}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (\text{рис. } 165).$$

Задача 17.6. Две собирающие тонкие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 расположены друг за другом на расстоянии L так, что их главные оптические оси совпадают. Перед первой линзой на расстоянии d_1 расположен предмет. Эта система дает прямое увеличенное изображение предмета. При каких L это возможно?

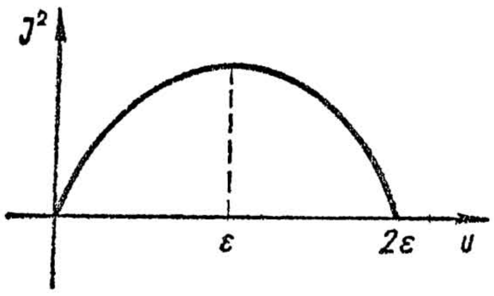


Рис. 165

Решение. Для того чтобы изображение было прямым, необходимо, чтобы $L - f_1 > F_2$, где f_1 — расстояние между первой линзой и изображением предмета в ней. Отсюда $L > F_2 + F_1 d_1/(d_1 - F_1)$. Второе ограничение на L накладывается условием (увеличением):

$$F = \frac{F_1}{d_1 - F_1} \cdot \frac{F_2}{L - f_1 - F_2} > 1.$$

Откуда $L < \dfrac{d_1(f_1 + F_2) - f_1 F_1}{d_1 - F_1}$.

И окончательно

$$\frac{F_1 d_1}{d_1 - F_1} + F_2 < L < \frac{d_1(f_1 + F_2) - f_1 F_1}{d_1 - F_1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

17.7. Точки 1 и 2 движутся по осям x и y к началу координат. В момент $t = 0$ точка 1 находится на расстоянии $S_1 = 10$ см, а точка 2 на расстоянии $S_2 = 5$ см от начала координат. Первая точка движется со скоростью $v_1 = 2$ см/с, а вторая $v_2 = 4$ см/с. Каково наименьшее расстояние между ними?

Ответ. $d_{\min} \approx 6{,}7$ см.

17.8. Имеется множество наклонных плоскостей с одинаковыми основаниями, равными b, но с разными высотами. При какой высоте h время соскальзывания тела по наклонной плоскости без трения будет минимальным?

Ответ. $h = b$.

17.9. Тонкая положительная линза имеет фокусное расстояние F и дает действительное изображение предмета. Каково минимальное расстояние между предметом и его изображением?

Ответ. $d_{\min} = 4F$.

18 МЕТОД АНАЛОГИИ

Начиная с первой оптико механической аналогии Ферма — Бернулли, показаны механические аналогии немеханических процессов и немеханические аналогии механических.

Толковый словарь русского языка аналогию понимает как «форму умозаключения, когда на основании сходства двух предметов, явлений в каком-либо отношении делается вывод об их сходстве в других отношениях». Физически система или явление может быть описана качественно и количественно. Такое описание физической системы будет полным, однако в некоторых случаях достаточно только качественного или количественного описания. Таким образом, физические системы или явления могут быть сходны, похожи, аналогичны как по своему поведению, так и по математическому их описанию. Например, сжатый под поршнем газ иногда ведет себя аналогично упруго деформированной пружине и, возможно, рассматривая малые колебания поршня, следует помнить о колебаниях груза на пружине?

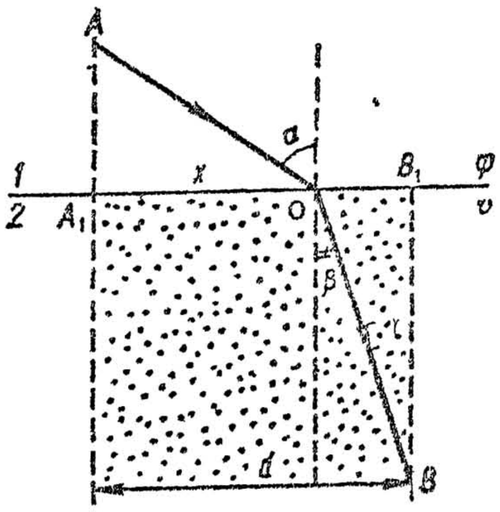


Рис. 166

Метод аналогии дает возможность сформировать понятный образ нового явления, а значит, способствует упрощению и его математического описания.

Часто изучая новые разделы физики, будь то термодинамика или электростатика, оптика или ядерная физика, помогаем себе, наводя переправу к уже изученному, подыскивая физические аналогии. Это преимущественно аналогии механические и касаются они механических или немеханических процессов. Но бывает и наоборот, когда удается найти немеханическую аналогию механическим процессам.

Методом аналогии решаются задачи, выводятся соотношения. Он способствует глубокому пониманию, объединяет материал из разных разделов физики. Убедимся в этом, решая задачи.

Задача 18.1. Человек идет из поселка A в поселок B. При этом первую часть пути он движется по лесу со скоростью u, а вторую — по болоту, со скоростью v. Как должен двигаться человек, чтобы добраться из A в B за минимальное время? (Граница раздела лес — болото — прямая.)

Решение. *1-й способ.* Рассмотрим решение задачи методом min и max. Для этого обозначим точку O на границе лес — болото (рис. 166).

Пусть расстояния $AA_1 = a$, $BB_1 = b$ и $A_1B_1 = d$ заданы, а расстояние $A_1O = x$.

Тогда время движения из A в B будет функцией x:

$$t_{AB} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v}.$$

Для нахождения минимума t_{AB} найдем производную $\frac{dt}{dx}$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{x}{v\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = 0.$$

Но $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin\alpha$ и $\frac{x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = \sin\beta$.

Поэтому $\frac{1}{u}\sin\alpha = \frac{1}{v}\sin\beta$.

2-й способ. Рассмотрим *оптическую аналогию.* Пусть свет из одной среды (точка A) попадет в другую (точка B). Из всех возможных путей свет изберет тот, на прохождение которого необходимо минимальное время. Это утверждение носит название *принципа Ферма* и является законом геометрической оптики. Поэтому

$$\frac{1}{u}\sin\alpha = \frac{1}{v}\sin\beta.$$

Здесь α — угол падения, а β — угол преломления.

3-й способ. Рассмотрим следующую *механическую аналогию.* Пусть кольцо скользит по гладкому стержню (рис. 167). К кольцу привязаны две нити, перекинутые через блоки. К нитям приложены силы F_1 и F_2.

Пусть силы $F_1 = \frac{1}{u}$ и $F_2 = \frac{1}{v}$. Если кольца находятся в равновесии, то горизонтальные составляющие сил F_1 и F_2 равны:

$$\frac{1}{u}\sin\alpha = \frac{1}{v}\sin\beta.$$

По-видимому, первое знакомство с аналогией происходит при изучении криволинейного движения. Так, на

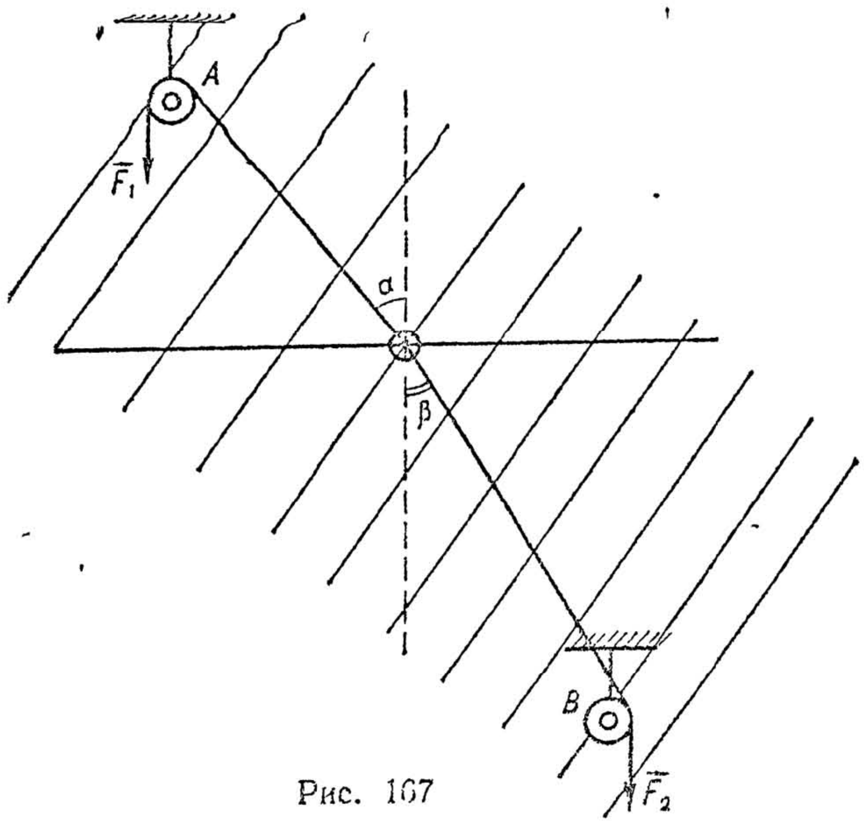


Рис. 107

пример, роль координаты при криволинейном движении играет угол, описываемый радиус-вектором точки. Кроме того, и другим величинам кинематики прямолинейного движения имеются аналогии в кинематике криволинейного движения (табл. 2). Аналогичны не только соответствующие формулы, но и их вывод.

Таблица 2

Прямолинейное движение	Криволинейное движение
$\vec{x}$	$\vec{\varphi}$
$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
$\vec{a}$	$\vec{\varepsilon}$
$\vec{x}=\vec{v}t$	$\vec{\varphi}=\vec{\omega}t$
$\vec{v}_t=\vec{v}_0+\vec{a}t$	$\vec{\omega}_t=\vec{\omega}_0+\vec{\varepsilon}t$
$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{v}_0t+\frac{\vec{a}t^2}{2}$	$\vec{\varphi}=\vec{\varphi}_0+\vec{\omega}_0t+\frac{\vec{\varepsilon}t^2}{2}$
$2\vec{a}\vec{x}=\vec{v}_t^2-\vec{v}_0^2$	$2\vec{\varepsilon}\vec{\varphi}=\vec{\omega}_t^2-\vec{\omega}_0^2$

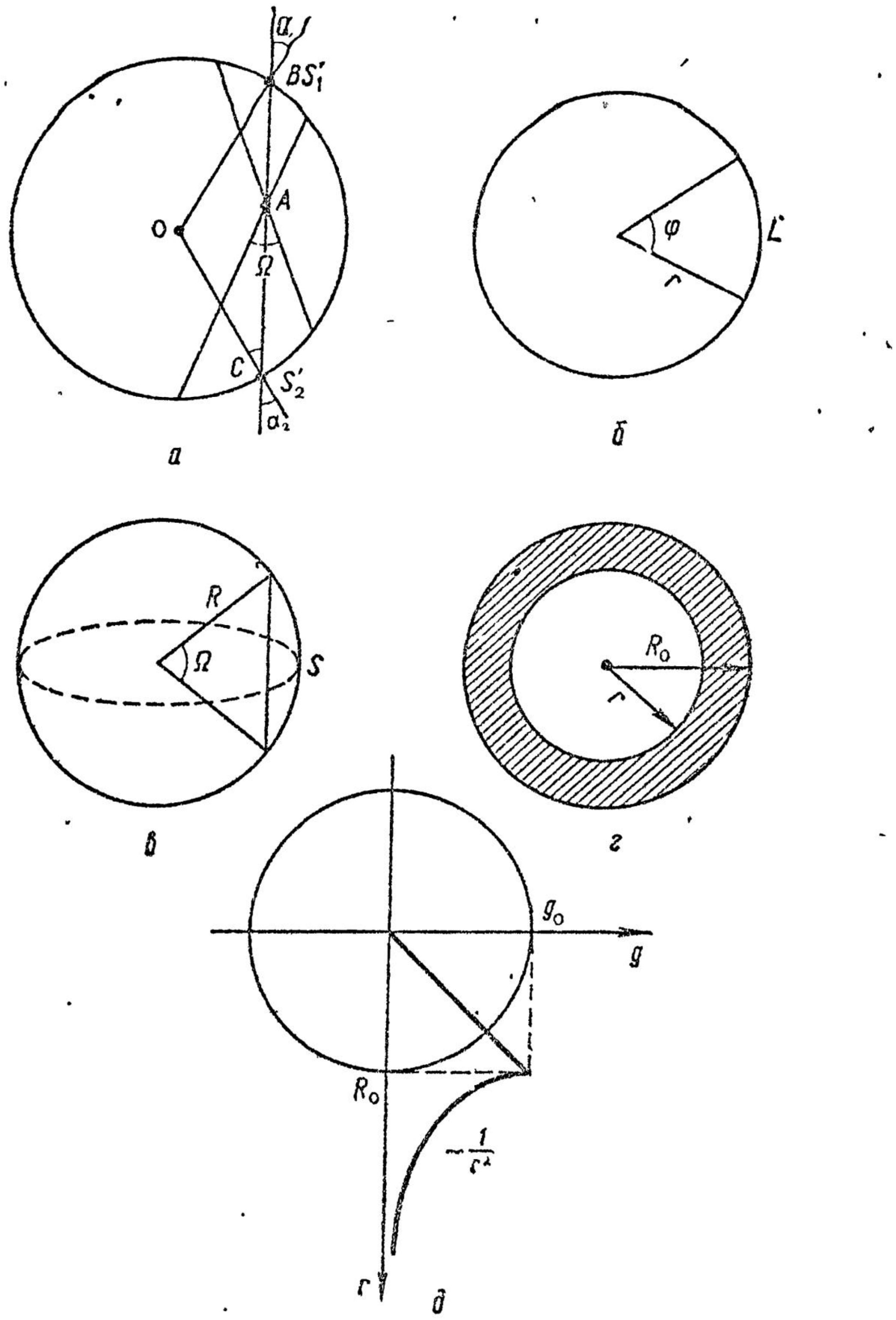


Рис. 168

Таким образом, аналогия определений и роли физических величин приводит к аналогии описания прямолинейного и криволинейного движений.

Следующая яркая аналогия между законом Всемирного тяготения и законом Кулона:

$$F_г = \gamma \frac{Mm}{r^2}. \quad \text{и} \quad F_к = k \frac{Qq}{r^2} \ .$$

Оба закона выражают силы, обратно пропорциональные квадрату расстояний между телами, оба установлены экспериментально методом крутильных весов Генри Кавендишем. Правда, первый касается только притяжения (гравитации), второй же в зависимости от знаков зарядов описывает и отталкивание.

Задача 18.2. Доказать, что ускорение свободного падения на расстоянии r от центра Земли ($r < R_0$, где R_0 — радиус Земли) равно $g = g_0 \frac{r}{R_0}$ (g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли).

Р е ш е н и е. Рассмотрим вначале сферу, масса единицы площади которой σ. В произвольную точку A внутрь сферы внесем тело массой m (рис. 168, *а*) и рассмотрим силу притяжения данного тела сферой. Выделим два конуса с вершиной в точке A. Пространственный угол при вершине конуса называют *телесным*. Между плоским углом и телесным существует следующая аналогия: (рис. 168, *б* и *в*).

$$\varphi = \frac{L}{r}, \quad \Omega = \frac{S}{R^2},$$

$$\varphi_{\text{полн.}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi, \quad \Omega_{\text{полн.}} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.$$

Поскольку телесные углы при вершине A нецентральны (угол Ω мал),

$$\Omega = \frac{S_1 \cos\alpha_1}{AB^2} = \frac{S_2 \cos\alpha_2}{AC^2}, \quad \text{откуда}$$

$$S_1 = \frac{\Omega}{\cos\alpha_1} AB^2 \quad \text{и} \quad S_2 = \frac{\Omega}{\cos\alpha_2} AC^2.$$

Но $\alpha_1 = \alpha_2$ как углы при основании равнобедренного треугольника COB, поэтому результирующая сила притяжения со стороны участков сферы S_1 и S_2:

$$F = \gamma m \frac{\Omega}{\cos\alpha} \sigma \left(\frac{AB^2}{AB^2} - \frac{AC^2}{AC^2} \right) = 0.$$

В силу произвольного выбора точки A и конусов с вершиной в A понятно, что сила притяжения тела любой массы, помещенного внутрь сферы, со стороны сферы равна нулю. Это утверждение аналогично результату, полученному с помощью теоремы Гаусса для напряженности электростатического поля внутри заряженной сферы.

Рассмотрим далее тело массой m на расстоянии r ($r < R_0$) (рис. 168, *г*).

Таблица 3

Электростатика	Гравитация
q	m
k	γ
$\vec{F} = k\dfrac{qQ}{r^2}$	$\vec{F} = \gamma\dfrac{Mm}{r^2}$
$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q} = k\dfrac{Q}{r^2}$	$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \gamma \times \dfrac{M}{r^2} = \vec{g}$ — напряженность гравитационного поля
Напряженность $\vec{E} = \dfrac{q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = 2\pi k\sigma$ поля пластины	$\vec{E} = 2\pi\gamma\dfrac{M}{S}$ — напряженность только гравитационного поля пластины
$\varphi = k\dfrac{Q}{r}$	$\varphi = \gamma\dfrac{M}{r}$

На основании приведенного выше доказательства сила притяжения со стороны заштрихованной области равна нулю. Поэтому

$$mg = \gamma\frac{m\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} \Rightarrow g = \frac{4}{3}\pi\rho\gamma r.$$

Но $g_0 = \frac{4}{3}\pi\rho\gamma R$.

Разделив одно уравнение на другое, получим

$$g = g_0\frac{r}{R_0}.$$

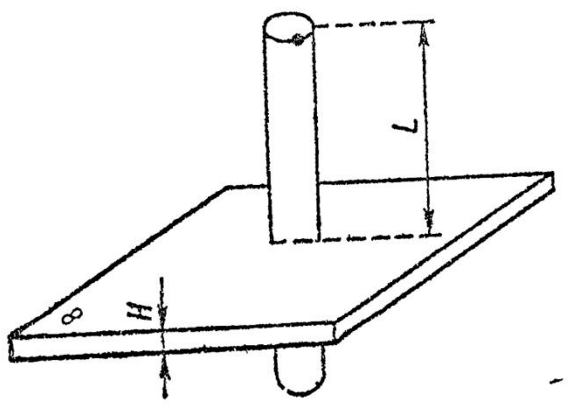


Рис. 169

На графике (рис. 167, *д*) представлена зависимость ускорения свободного падения от расстояния до центра Земли.

График полностью аналогичен графику зависимости напряженности электростатического поля, равномерно заряженного по объему шара от расстояния до его центра. В таблице 3 представлены аналогичные величины и формулы, описывающие электростатическое и гравитационное взаимодействие.

Задача 18.3. Дана большая плоская пластина толщины H и плотности ρ. В пластины вставлена трубка. В трубке только в гравитационном поле пластины начинает падать шарик с высоты L ($L \gg H$).

Определить период его колебаний (рис. 169).

Решение. Период колебаний шарика равен учетверенному времени падения с высоты L на пластину $T = 4t$, где $t = \sqrt{\frac{2l}{g}}$.

Здесь $g = 2\pi\gamma \frac{M}{S} = 2\pi\gamma\rho H$.

Поэтому $T = 4\sqrt{\frac{L}{\pi\gamma\rho H}}$.

Рассмотрим последовательное и параллельное соединение пружин, жесткости которых равны соответственно k_1 и k_2. Найдем эквивалентную жесткость системы.

Пусть результатом действия силы F на систему (рис. 170, *а*) будет абсолютное удлинение x. Тогда $F = kx = k_1x + k_2x$, откуда $k_{пар.} = k_1 + k_2$.

В случае последовательного соединения пружин (рис. 170, *б*)

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{или}$$

$$\frac{F}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}.$$

Но на основании третьего закона динамики $F = F_1 = F_2$, поэтому $\frac{1}{k_{посл.}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

Напомним, что аналогичные выражения определяют эквивалент-

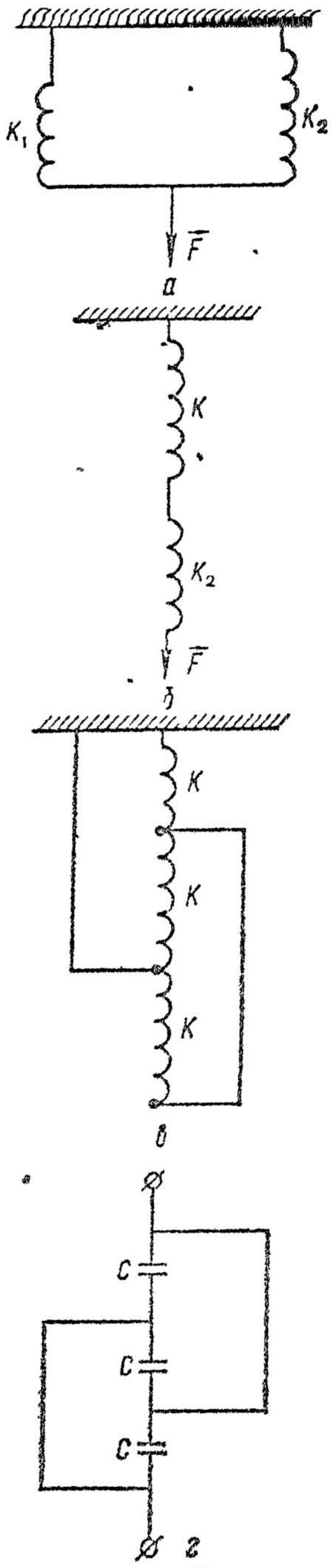


Рис. 170

ные емкости для соединения конденсаторов.

Задача 18.4. Три пружины ($k_1 = k_2 = k_3 = k$) соединены при помощи жестких связей, так как показано на рисунке 170, *в*. Найти эквивалентную жесткость системы.

Р е ш е н и е. Заменим данную систему пружин аналогичным соединением конденсаторов, емкость C полученной системы равна k (рис. 170, *г*). Эквивалентная емкость полученной системы равна $3C$. Конденсаторы соединены параллельно. Значит, искомая эквивалентная жесткость также равна $3k$.

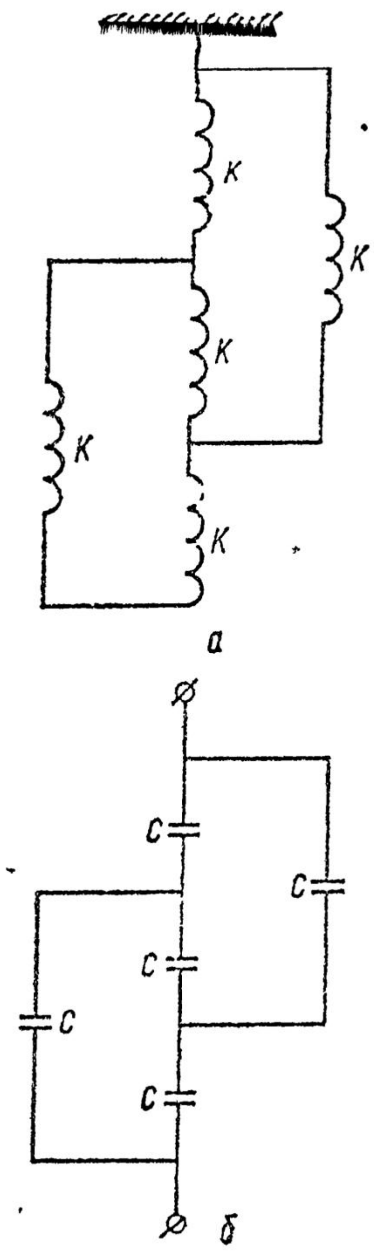


Рис. 171

Задача 18.5. Найти эквивалентную жесткость системы, изображенной на рисунке 171, *а*.

Р е ш е н и е. Емкость аналогичного соединения конденсаторов (рис. 171, *б*) равна C. Поэтому искомая жесткость системы также равна k.

Задача 18.6. Из подводного пистолета стреляют шариком ($\rho < \rho_{\text{воды}}$). Найти время всплывания шарика (рис. 172).

Р е ш е н и е.

$$F = \rho_{\text{в}} V g - mg = (\rho_{\text{в}} - \rho) V g.$$

Это аналогично падению шарика массой $m = (\rho_{\text{в}} - \rho) V$ с высоты H в воздухе.

Поэтому $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Решая следующую задачу, воспользуемся аналогией между механическими колебаниями и движением по окружности.

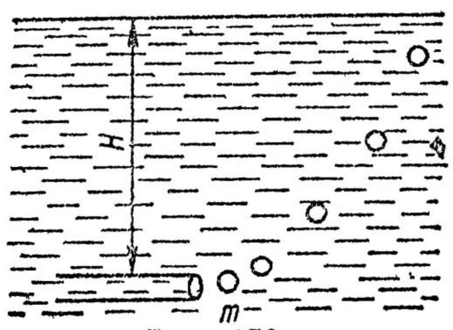
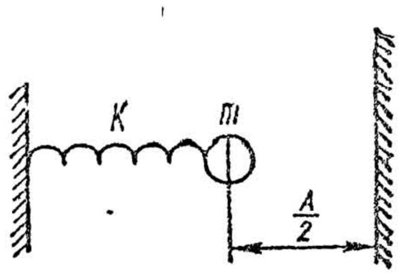


Рис. 172

Задача 18.7. Найти период колебаний шарика (рис. 173, *а*), который упруго отражается от стены, отстоящей от положения равновесия на $\frac{A}{2}$ (A — амплитуда).

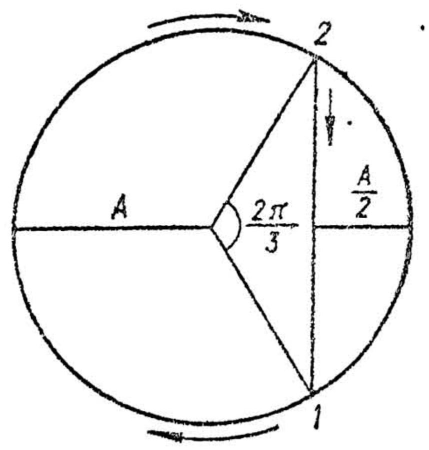
Р е ш е н и е. На рисунке 173, *б* представлена окружность, движение по которой аналогично колебанию шарика. Шарик, достигнув точки *2* окружности, мгновенно переходит в точку *1* и продолжает движение по окружности.



а

$$T = \frac{2\pi - \frac{2}{3}\pi}{\omega} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\frac{1}{\omega} = \frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$



б

Рис. 173

В задаче 18.8 использована аналогия между неравномерным прямолинейным движением и гармоническими колебаниями. Напомним, что *гармоническими* называют такие колебания, для которых ускорение пропорционально смещению: $a = -\omega^2 x$.

Задача 18.8. Тонкий однородный брусок длиной l скользит сначала по гладкому горизонтальному столу, а затем попадает на шероховатый участок с коэффициентом трения μ. Брусок останавливается, въехав туда наполовину. Найдите начальную скорость бруска и время торможения.

Решение. Сила трения $\vec{F}_{тр.} = -\mu mg\frac{x}{l}$ сообщает бруску ускорение $a = -\frac{\mu g}{l}x$. Поэтому $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$. Искомое время $\tau = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$.

Для нахождения начальной скорости запишем уравнение движения:

$$x = \frac{l}{2}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\,t.$$

Учитывая, что $v = x'$, получим:

$$v = x' = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\cos\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\,t.$$

Начальная скорость соответствует $t = 0$.

$$v_0 = v(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu g l}.$$

Покажем аналогию между электромагнитными колебаниями в колебательном контуре и механическими колебаниями груза на пружине (рис. 174, *а* и *б*).

Колебательные процессы в этих системах описываются аналогичными соотношениями:

$$m\dot{x} - kx = 0 \quad \text{и} \quad Lq + \frac{1}{C}q = 0.$$

При наличии жидкого трения (активного сопротивления) и переменной вынуждающей силы (переменной ЭДС) (рис. 174, *в* и *г*).

$$mx + rx + kx = F(t) \quad \text{и} \quad Lq + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}(t).$$

В таблице 4 представлены аналогичные величины.

Таблица 4

Механические колебания	Электромагнитные колебания
x	q
$\dot{x} = v$	$\dot{q} = i$
$\dot{x} = v = a$	$q = i = \frac{di}{dt}$
m	L
F	E, U
r	R
k	$\frac{1}{C}$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T = 2\pi\sqrt{LC}$
$E_к = \frac{mv^2}{2}$	$E = \frac{Li^2}{2}$
$E_п = \frac{kx^2}{2}$	$E = \frac{q^2}{2C}$

Задача 18.9. Последовательно с катушкой индуктивностью L и конденсатором емкостью C через ключ K подключили батарею с постоянной $\mathcal{E}_0$. В начальный момент времени ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен. Определить максимальную величину тока в цепи после

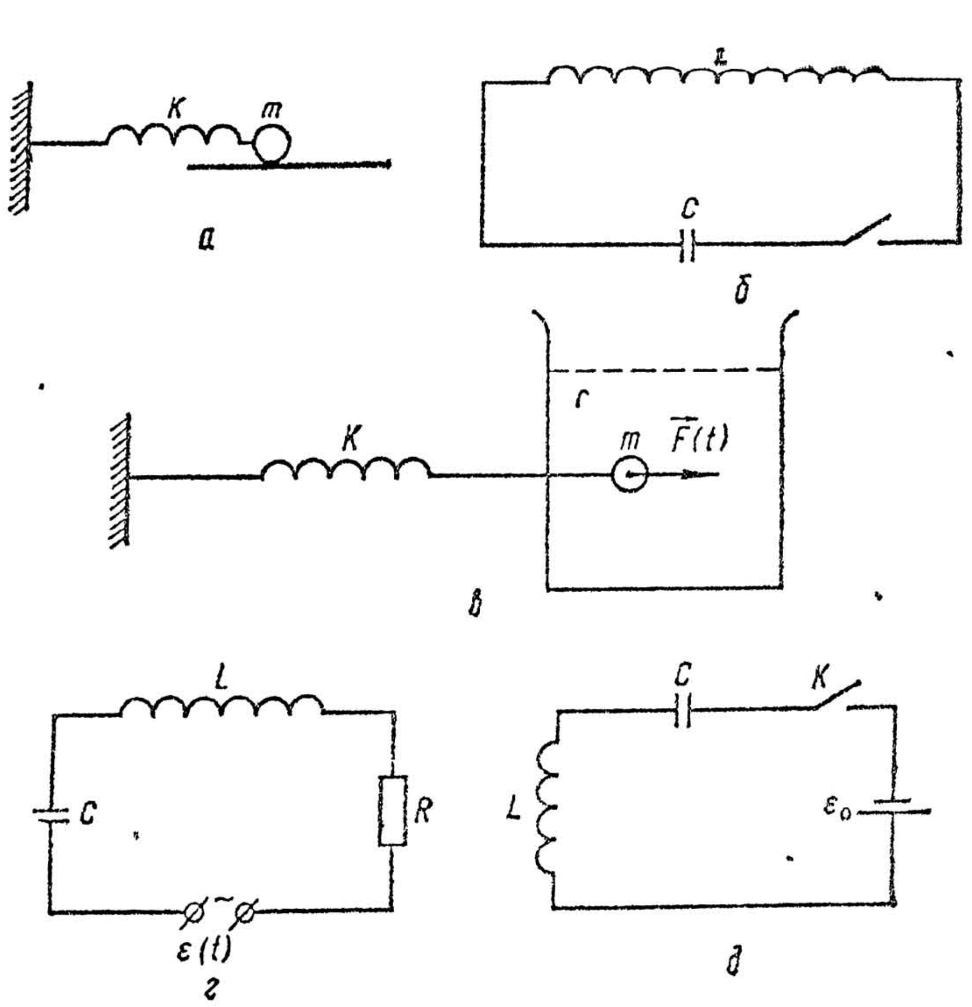


Рис. 174

замыкания ключа K. Активным сопротивлением пренебречь. (Рис. 174, *д*).

Р е ш е н и е. Аналогично тому, как в механических колебаниях максимальная скорость тела наступает в момент прохождения положения равновесия ($x = 0$), так и ток в катушке будет максимален, если разность потенциалов на ней равна 0:

$$\mathscr{E}q = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2}.$$

Но $q = CU$ и $U = \mathscr{E}$.

Откуда $\frac{C\mathscr{E}^2}{2} = L\frac{I^2}{2}$ или $I_{max} = \mathscr{E}_0\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Задача 18.10. На рисунке 174, *в* $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$. Найти максимальную скорость тела.

Р е ш е н и е. Воспользуемся аналогичной системой (рис. 174, *г*).

$$I_{max} = \frac{\mathscr{E}_0}{Z}, \text{ где } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}.$$

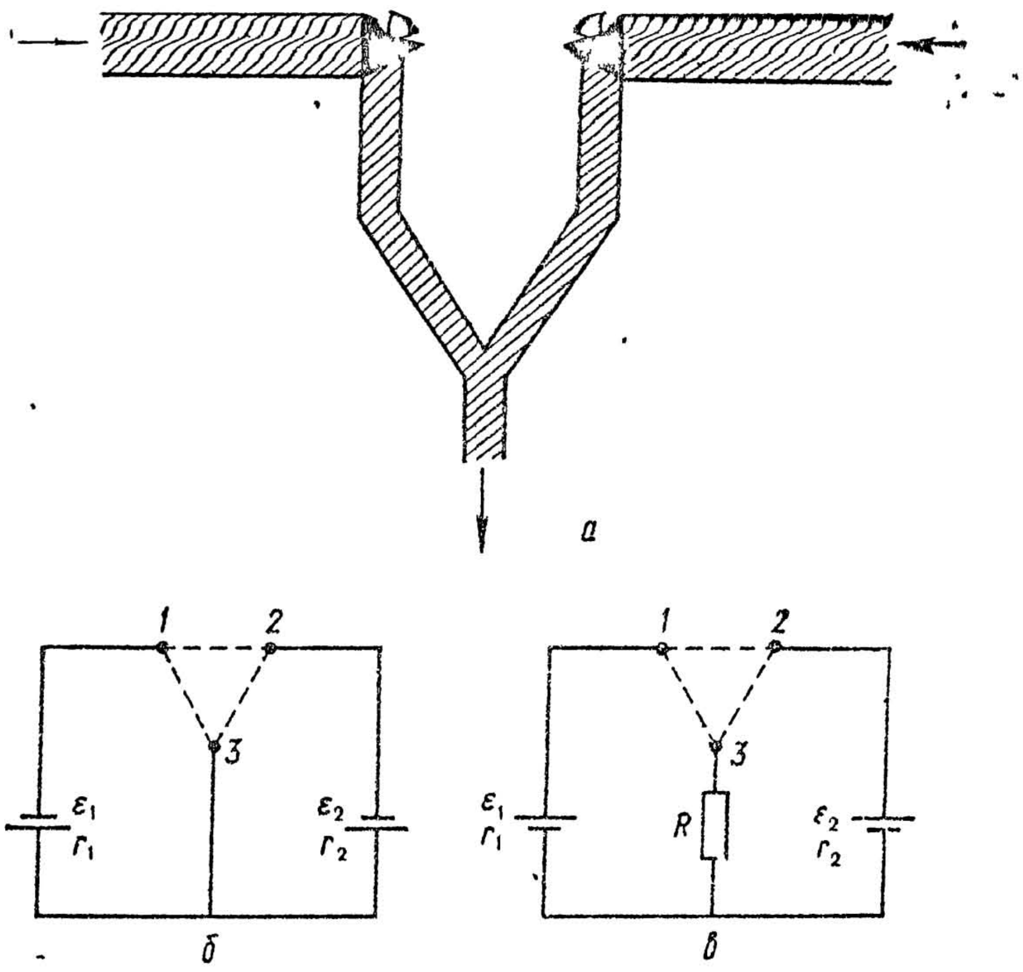


Рис. 175

Поэтому (см. табл 4)

$$v_{max} = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + \left(\omega_0 m - \frac{k}{\omega_0}\right)^2}}.$$

Задача 18.11. Оказалось, что график $v(t)$ имеет вид синусоиды Максимальная скорость равна v_0. Найти среднюю скорость

Решение. Поскольку скорости соответствует сила тока, средняя скорость аналогична действующему значению силы тока. Поэтому $v_{ср} = \frac{2v_0}{\pi}$.

Задача 18.12. Если кран холодной воды открыт полностью, а горячей — закрыт (рис. 175, *а*), то ванна наполняется за время $t_1 = 8$ мин, если при этом на выходное отверстие насадить шланг с душем на конце, то время наполнения увеличится до $t_2 = 14$ мин Когда кран холодной воды закрыт, а горячей — полностью открыт, то время наполнения ванны $t_3 = 12$ мин; при таких же условиях, но с душем — $t_4 = 18$ мин.

За какое время наполнится ванна, если полностью открыты оба крана? А если при этом насажен шланг с душем?

Решение. Аналогичные электрические схемы представлены на рисунках 175, *б* и *в*.

ε_1, r_1 и ключ *1—3* — аналогичны крану холодной воды; ε_2, r_2, ключ *2—3* — горячей.

Прошедший заряд аналогичен объему воды, а сила тока — расходу воды. При замыкании ключа *1—2—3* (рис. 175, *б*) $I_5 + I_1 + I_3$, где $I_1 t_1 = I_3 t_3 = I_5 t_5 = q_0$.

Поэтому $t_5 = \dfrac{t_1 t_3}{t_1 + t_3} = 4{,}8$ мин.

Найдем I_6 (рис. 175, *в*):

$$\frac{\left(\dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2}\right) \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}{R + \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{\dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2}}{1 + \dfrac{R}{r_1} + \dfrac{R}{r_2}}.$$

Здесь мы воспользовались правилом нахождения E и r для источника, эквивалентного двум параллельно соединенным источникам

Учтем далее, что $q_0 = I_1 t_1 = I_3 t_3 = I_2 t_2 = I_4 t_4 = I_6 t_6$, где $I_2 = \dfrac{\mathscr{E}_1}{R + r_1}$, $I_4 = \dfrac{\mathscr{E}_2}{R + r_2}$, $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1}$, $I_3 = \dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2}$.

Решая полученные уравнения совместно, получим:

$$t_6 = \frac{t_1 t_3}{t_1 + t_3}\left(\frac{t_2}{t_1} + \frac{t_4}{t_3} - 1\right),$$

$$t_6 = 10{,}8 \text{ мин.}$$

Задачи для самостоятельного решения

18.13. Плита массой M и площадью S расположена горизонтально. На высоте H над плитой горизонтально со скоростью v бросают шарик массой m. Описать его движение.

18.14. Найдите период малых колебаний поршня массой m в гладком цилиндрическом сосуде сечением S. По обе стороны от поршня находится газ с параметрами P_0; $V_0 = Sl_0$ и T_0. Процесс изотермический.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml_0}{2P_0S}}$.

18.15. Определите период колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого E. Полярную молекулу можно представить в виде жесткой гантельки длиной l, на концах которой находятся две материальные точки массой m, несущие заряды $+q$ и $-q$.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{lm}{2qE}}$.

19. МЕТОДЫ СОФИЗМОВ И ПАРАДОКСОВ

Продемонстрированы кажущиеся верными решения задач, анализ которых способствует более глубокому пониманию сути физических процессов и законов, их описывающих.

Метод *парадоксов* — создание противоречащих здравому смыслу ситуаций, доказательств, неожиданно и непривычно приводящих к противоречию с традиционными утверждениями и выводами, истинность которых, казалось, не вызывает сомнения. Метод обостряет понимание сути процесса, его тонкостей, стимулирует интерес, побуждает к напряженной работе мысли по распутыванию клубка противоречий. *Софизмы* — это уловки, выдумки сродни головоломкам, в которых мнимое доказательство выдается за правдоподобное.

Этот метод с успехом работает во всех науках, ибо умение довести до абсурда рождает глубокое понимание истины.

Суть метода лучше всего проясняют конкретные примеры.

Задача 19.1. Половину окружности велосипедист на треке проехал с постоянной скоростью $v_1 = 4$ м/с. Средняя скорость на всем треке была 10 м/с.

Определить скорость на второй половине пути.

Решение. Обычно решение этой задачи получают с помощью известной формулы $v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}$.

Так так $S_1 = S_2 = S'$, а $t_1 = \frac{S'}{v_1}$ и $t_2 = \frac{S'}{v_2}$, $v_{ср} = \frac{2S'}{t_1 + t_2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$.

Отсюда: $v_2 = \frac{v_{ср} v_1}{2v_1 - v_{ср}}$.

Подставив значение, $v_2 = -40$ м/с.

Как понимать полученный ответ? Объясните.

Время движения со средней скоростью должно быть равно сумме времени, затраченного на прохождение каждого участка

$$t_{ср} = t_1 + t_2 \quad \text{или} \quad \frac{2S'}{v_{ср}} = \frac{S'}{v_1} + \frac{S'}{v_2}.$$

Но $\frac{2}{10} = \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$ ... без прибавления второй дроби.

Это означает, что время, затрачиваемое на прохождение первой половины пути, уже больше, чем время, отпущенное на прохождение с данной средней скоростью всего пути. При таких исходных данных задача лишена смысла.

Примечание. Речь идет о скаляре (средней скорости пути) и потому знак минус не означает движение на другой половине дистанции в обратном направлении.

Задача 19.2. В романе «Гектор Сервадак» Жюль Верн описал комету «Галия». Период ее обращения вокруг Солнца составил 2 года, а расстояние от Солнца в афелии равнялось 820 млн. км.

Могла ли существовать такая комета?

Решение. Согласно III закону Кеплера квадраты периодов небесных тел относятся как кубы больших полуосей их орбит. Зная расстояние от Земли до Солнца ($\approx$ 150 млн. км) и период обращения Земли вокруг него (1 год),

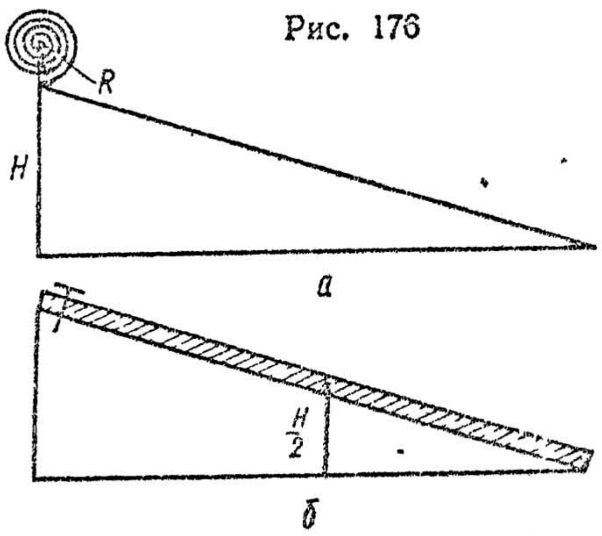


Рис. 176

$$\left(\frac{T_{\text{кометы}}}{T_{\text{земли}}}\right)^2 = \left(\frac{a_{\text{кометы}}}{2R_{\text{земн.орб.}}}\right)^3 \quad \text{или} \quad \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \left(\frac{x+820}{2\cdot 150}\right)^3.$$

Откуда $x = -343$ млн. км. Понятно, что этого быть не может и описанные параметры кометы — лишь плод фантазии писателя

Задача 19.3. На наклонной плоскости высотой H лежит свернутый в рулон линолеум. M — масса рулона, R — его радиус. Край линолеума прикреплен гвоздем к полу. После легкого толчка линолеум случайно покатился, раскручиваясь, вдоль наклоненной плоскости. Вначале его потенциальная энергия $W_0 = Mg\,(R + H)$, а в конце $W = Mg\,\frac{H}{2}$.

Куда же исчезла значительная часть энергии? (рис. 176, *а* и *б*).

Решение. Значительная доля потерянной энергии пошла в создание звуковой волны (ушла в «хлопок»). Часть энергии при ударе потрачена на деформацию и в конце концов перешла во внутреннюю энергию.

Задача 19.4. Луч из более оптически плотной среды может и не выйти (в случае предельного угла) в среду с меньшей оптической плотностью. Если явление полного внутреннего отражения обладает, как все явления геометрической оптики, обратимостью, то как луч находит точку, где ему следует вернуться в среду более оптически плотную? (рис. 177, *а* и *б*).

Решение. Обратимость, разумеется, выполняется. Тут происходит подмена понятия световой луч и ось луча. Световой луч имеет расходимость; где пучок коснется другой среды, там и начинает происходить преломление.

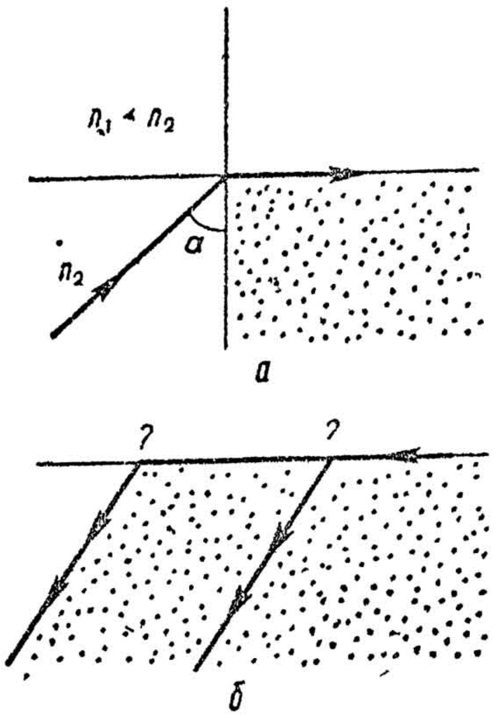


Рис. 177

Задача 19.5. Мимо неподвижного наблюдателя, стоящего на платформе, проходит вагон со скоростью v. В вагоне со скоростью u в направлении движения вагона бросают шарик массой m. Какова кинетическая энергия шарика по отношению к наблюдателю?

Решение. Шарик имеет кинетическую энергию собственного движения $\frac{mu^2}{2}$ и переносного вместе с вагоном $\frac{mv^2}{2}$. Значит ли, что его кинетическая энергия равна $K_1 = \frac{m}{2}(v^2 + u^2)$?

С другой стороны шарик движется относительно наблюдателя со скоростью $v + u$, а потому обладает энергией $K_2 = \frac{m}{2}(v + u)^2$.

Какое из утверждений верно?

Задача 19.6. В сосуд налита жидкость массой M до высоты H. Данный сосуд соединен очень тонким шлангом с другим таким же. Первоначально вся вода в первом сосуде и полная энергия воды $W_0 = \frac{1}{2} MgH$. Если открыть кран, то потенциальная энергия системы оказывается равной $W_1 = 2\frac{M}{2} g \frac{H}{4}$ (массой воды в соединительной трубке можно пренебречь).

Где причина исчезновения части энергии? (рис. 178, *а* и *б*).

Решение. Если нет потерь на трение, забирающих недостающую энергию во внутреннюю (то есть в тепло), тогда, кроме потенциальной энергии, в системе воз-

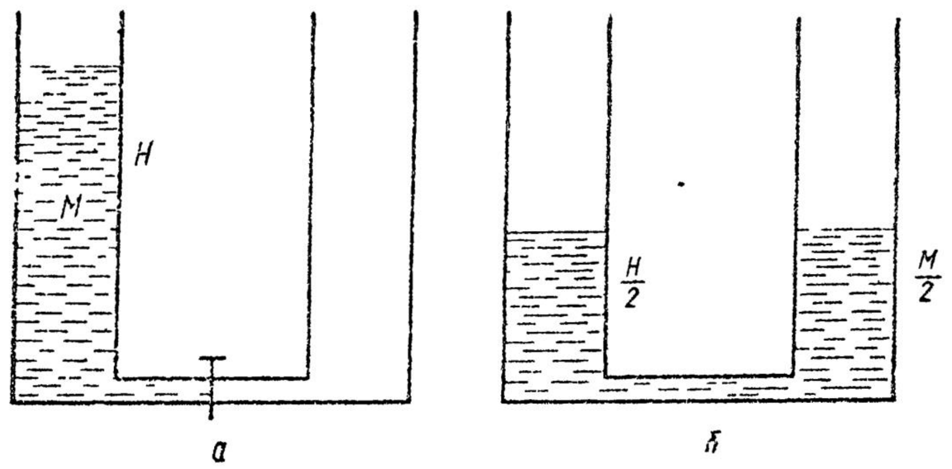


Рис. 178

никают колебания, кинетическая энергия которых забирает часть энергии.

Задача 19.7. Если к недеформированной пружине подвесить груз массой m_1, то удлинение составит l_1, а если m_2, то l_2.

Какова работа растяжения пружины от l_1 до l_2?

Решение. *1-й способ.* Найдем работу как произведение средней силы $\frac{m_1 + m_2}{2} g$ на перемещение $l_2 - l_1$ (рис. 179).

$$A = \frac{m_1 + m_2}{2} g (l_2 - l_1).$$

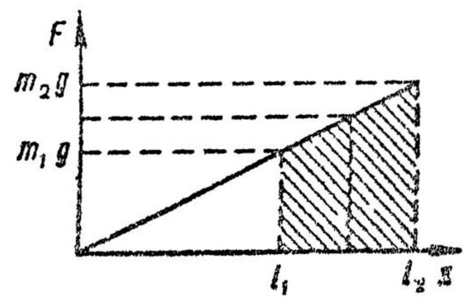


Рис. 179

2-й способ. Искомая работа приводит к изменению энергии пружины:

$$A = \frac{kl_2^2}{2} - \frac{kl_1^2}{2},$$

где k подлежит определению из $kl_1 = m_1 g$ и $kl_2 = m_2 g$. Откуда $k = \frac{m_2 - m_1}{l_2 - l_1} g$.

Окончательно

$$A = \frac{l_1 + l_2}{2} g (m_2 - m_1).$$

Перед нами два решения и два ответа. Какое из них верно?

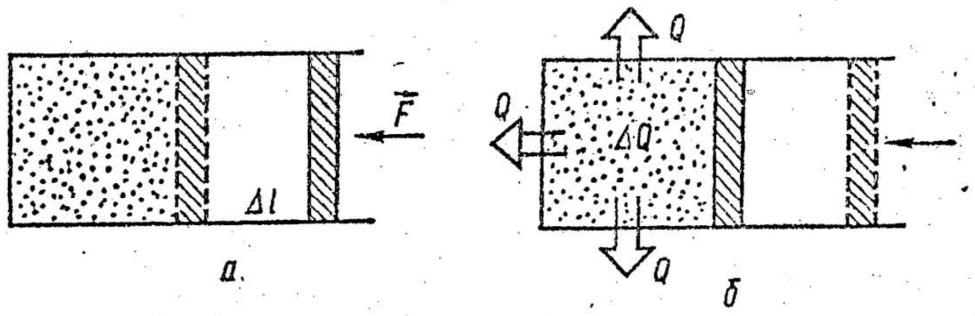
Задача 19.8. Рассмотрим идеальный газ в сосуде с поршнем. Пусть поршень очень медленно силой F вдвигают в сосуд (рис. 180, *а*). При этом, очевидно, что газ выполнил некую не нулевую работу. Но если $A > 0$, то

$\Delta U \neq 0$, то есть не равно нулю и изменение его внутренней энергии.

Поэтому и происходит изменение температуры.

Получается, что изотермическое сжатие невозможно? В чем тут дело?

Решение. В действительности изотермический процесс в отличие от взрывного адиабатного является



а б

Рис. 180

квазистационарным, то есть медленным. Представим себе горсть песка на чашке рычажных весов, уравновешенную гирей. Уберем одну песчинку — равновесие не нарушится. Уберем вторую, третью — то же самое. Для существенного нарушения равновесия необходимо заметно уменьшить горсть песка. Оказывается, что условие медленного протекания процесса в газе является необходимым, но не достаточным. Достаточное же условие обеспечивает контакт сосуда с окружающей средой. Это означает, что процесс в идеальном газе, описанный выше, будет изотермическим лишь при температуре окружающей среды. То есть работа, произведенная над газом, обеспечивает незаметное нагревание окружающей среды. Поэтому изотермический — это процесс медленный, контактный, при T среды. (рис. 180, *б*).

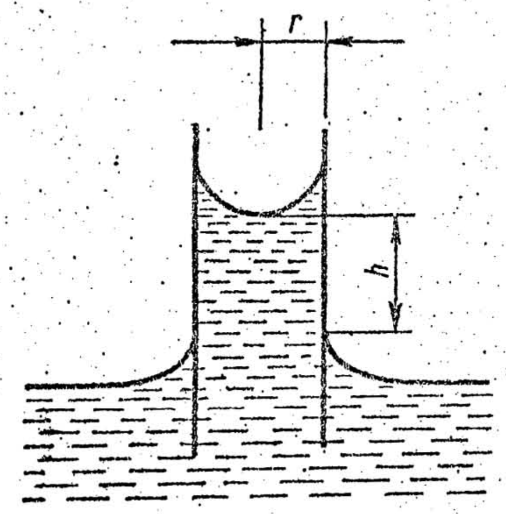


Рис. 181

Задача 19.9. Известно, что при поднятии жидкости (рис.181) в капилляре силы поверхностного натяжения совершают работу, определяемую $A = Fh = \sigma 2\pi rh$. Учитывая, что

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}, \quad A = \frac{4\pi\sigma^2}{\rho g}.$$

Между тем, изменение потенциальной энергии равно $\Delta W = mg\frac{h}{2}$, где $m = \pi r^2 h\rho$ — масса поднятой жидкости.

$$\Delta W = \pi r^2 h\rho g\frac{h}{2} = \frac{2\pi\sigma^2}{\rho g}.$$

Почему не совпадает изменение потенциальной энергии с работой сил поверхностного натяжения?

Решение. Половина энергии перешла во внутреннюю энергию жидкости, она нагрелась.

Задача 19.10. Определить скорость одинокого неподвижного атома (массой m_a) после поглощения им фотона света с частотой ν.

Предлагается решение, основанное на использовании законов сохранения импульса и энергии

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = m_a v, \\ h\nu = \frac{m_a v^2}{2}, \end{cases} \Rightarrow v = 2c.$$

Получили ответ, противоречащий постулатам теории относительности.

Решение. Энергия поглощенного фотона на основании постулатов Бора расходуется на переход электрона на другую стационарную орбиту, причем атом может поглощать только такие фотоны, энергия которых строго обусловлена. С другими фотонами поглощения не происходит. Наблюдается рассеяние, аналогичное упругому соударению.

Задача 19.11. Постоянным током называется ток, величина и направление которого на данном промежутке времени не меняются. Но ток $I = nlvS$ будет постоянным при (v = const) постоянной скорости, то есть при отсутствии ускорения ($a = 0$). Однако электроны имеют массу и заряд, а потому со стороны постоянного электрического поля на них действует постоянная сила

$$F = eE = e\frac{U}{l}.$$

Но, по II закону Ньютона $a = \frac{F}{m}$, наличие силы и массы обуславливают наличие ускорения. Однако, если $a \neq 0$, $a > 0$, то $v \neq$ const, то есть постоянный ток невозможен?

Решение. В формулировке данной задачи учитывается лишь влияние на движение электронов внешнего электрического поля. Однако, механизм сопротивления прохождению тока состоит в том, что электроны испытывают влияние как ионов в узлах кристаллической решетки металла, так и взаимодействие с другими электронами в рамках электронного газа. То есть наряду с участками ускоренного существуют участки замедленного движения. Возможна также остановка электронов. Поэтому на рисунке 182 представлен график тока. На графике видно, что то, что мы понимаем под постоянным током, есть усредненный во времени наблюдения ток.

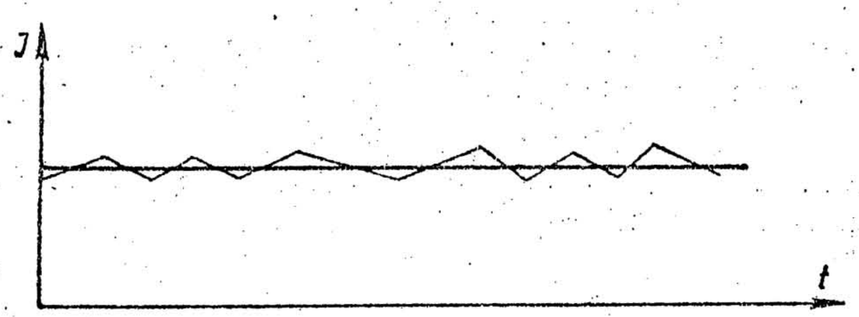


Рис. 182

Задача 19.12. При ремонте перегоревшей спирали ее чуть-чуть укоротили. При включении в сеть она стала светиться ярче, так как при параллельном включении (а все бытовые приборы включаются именно так) выделяется мощность $P = \frac{U^2}{R}$, которая возрастает при уменьшении сопротивления. Возникает вопрос: нельзя ли для выделения большей мощности почти совсем укоротить спираль нагревателя, оставив лишь очень маленькую длину, тогда $\left(P = \rho \frac{l}{S}\right)$ сопротивление спирали уменьшится, а потребляемая прибором мощность возрастет?

Решение. Очень сильно изменить длину спирали нагревателя нельзя хотя бы потому, что резкое уменьшение сопротивления в цепи вызовет очень большой ток и приведет к короткому замыканию. Все нагрузки электрических цепей и источников должны быть в этом плане согласованы.

Задача 19.13. Абсолютный показатель преломления среды зависит от диэлектрической и магнитной проницаемости и равен $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$. В таблицах указано $\varepsilon = 81$ и $\mu = 1$ для воды. Но $n = 1{,}33$, а не 9, как получается по формуле. В чем тут дело?

Решение. Табличное значение диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 81$ указано для случая стационарного электростатического поля: свет — электромагнитная волна большой частоты, а инертные диполи молекул воды не успевают так быстро (частота порядка 10^{10}—15^{15} Гц) переориентироваться, поэтому ослабление электростатического поля происходит не в 81 раз, а меньше, что и соответствует значению абсолютного показателя преломления.

Задача 19.14. В 1923 г. Луи де Бройль высказал гипотезу о том, что с движением любого материального объекта связано распространение волн длиной $\lambda = \frac{h}{mv}$, где h — постоянная Планка, а mv — импульс объекта. Рассмотрим движение бегуна $m = 60$ кг, скорость которого 10 м/с. По де Бройлю $\lambda \approx 10^{-36}$ м.
Возможно ли наблюдение таких волн и как убедиться в справедливости гипотезы?

Решение. Разрешающая способность современных оптических приборов по длине волны не превышает 10^{-12} м. Поэтому, очевидно, что гипотеза де Бройля нашла свое подтверждение только в микромире. Объекты микромира должны удовлетворять условие $mv \approx 10^{-22}$ Н·с.

Задача 19.15. В ядрах атомов случаются взаимные превращения нуклонов: протона в нейтрон и наоборот. Первая реакция описывается $p \to n + e^- + \tilde{\nu}$, где p — протон, n — нейтрон, e_- — электрон, $\tilde{\nu}$ — электронное антинейтрино.

Превращение нейтрона в протон $n \to p + e_+ + \nu$, где e_+ — позитрон (античастица электрона), ν — электронное нейтрино (античастица $\tilde{\nu}$).

Представим себе, что обе реакции происходят последовательно с очень коротким интервалом времени. Тогда $p \to p + e_- + e_+ + \nu + \tilde{\nu}$.

Удивительное явление!

Имели протон, получили протон и набор элементарных частиц. Разве законы сохранения в микромире не действуют?

Решение. Конечно, действуют, ведь законы сохранения — это фундаментальные законы природы. Все дело в том, что одна из реакций проходит с выделением, а другая с поглощением некоторого количества теплоты. Таким образом никакого нарушения законов сохранения нет и в помине.

Задача 19.16. На одном шарике имеется 8 избыточных электронов. К нему подносят точно такой же незаряженный шарик. Как разделят шарики между собой заряд?

Решение. Здравый смысл восстает против такой постановки вопроса. Конечно, каждый шарик будет нести по 4 избыточных электрона!

Однако вопрос задачи не столь наивен, как кажется. Все дело в том, что, во-первых, нет приборов, способных измерять заряды меньше 10^{-8} Кл (напомним, что заряд электрона $1{,}6 \times 10^{-19}$ Кл). Во-вторых, все процессы в микромире носят вероятностный характер и справедливо утверждать, что существует ненулевая вероятность деления избыточного числа электронов поровну, хотя в принципе возможны и другие комбинации, например, 0 и 8, 1 и 7 и т. д. Поэтому невозможно утверждать достоверность любого ответа. Вот почему вопросы, касающиеся микромира, не предполагают получение категорического ответа.

20. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В главе помещены задачи без указания методов их решения. К некоторым из них даны ответы, в других требуется самостоятельно оценить правильность полученного результата.

Заключительная глава содержит задачи разного уровня, содержащие различные методы решения. Читателю предстоит самостоятельно найти несколько подходов, сравнить их, выбрать для себя наиболее наглядный и простой. Ко многим задачам приведены ответы, там, где они отсутствуют, предлагаем самостоятельно найти способы оценки правильности полученных результатов. Систему таких методов авторы надеются описать в следующей своей работе.

Задача 20.1. Корабль идет на Запад со скоростью v. Ветер дует с Юго-Запада. Величина скорости ветра, измеренная на палубе корабля, равна v_1.

Найти величину скорости ветра v_2 относительно Земли.

Ответ. $v_2 = -\frac{v}{\sqrt{2}} + \sqrt{v_1^2 - \frac{v^2}{2}}$.

Задача 20.2. Две материальные точки движутся вдоль одной прямой со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$).

Найти скорость точки, всегда находящейся посередине между ними, если: а) материальные точки движутся друг за другом; б) навстречу друг другу.

Ответ. а) $\frac{v_1 + v_2}{2}$ б) $\frac{v_1 - v_2}{2}$.

Задача 20.3. Второй шарик бросают вертикально вверх через t_0 после первого.

С какой скоростью надо бросить второй шарик, чтобы он упал на 3 с раньше первого? Скорость первого — v_0.

О т в е т. $v = v_0 - \frac{g\,(t_0 + 3)}{2}$.

Задача 20.4. При движении материальной точки по прямой наблюдалась следующая зависимость проходимого пути от времени:

а) $x = t^2 + t$; б) $x = \frac{1}{1+t^2}$.

Чему равна средняя скорость v движения на интервале от момента времени t до $t + \Delta t$?

Чему равна мгновенная скорость $v_{мгн}$ в момент t?

О т в е т. а) $v_{ср} = 3t^2 + 1 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2$; $v_{мгн} = 3t^2 + 1$;

Задача 20.5. Тело движется горизонтально со скоростью 30 м/с. Через 20 с после начала действия постоянной силы F оно приобрело скорость 20 м/с, направленную в обратную сторону.

Найти перемещение тела за это время.

О т в е т. $S = 20$ м.

Задача 20.6. На вертикально подвешенной нити укреплено n свинцовых шариков так, что нижний шарик почти касается пола. При освобождении верхнего конца нити шарики один за другим ударяются о пол. Как должны относиться расстояния между шариками и расстояния от шариков до пола, чтоб удары слышались через равные промежутки времени?

О т в е т. Отношение расстояний от шариков до пола равно отношению квадратов целых чисел.

Задача 20.7. Определить наибольшую высоту, на которой снаряд с начальной скоростью $v_0 = 80$ м/с, может поразить цель, расположенную на расстоянии 500 м от местонахождения орудия.

О т в е т. $H_{max} \approx 135$ м.

Задача 20.8. Поезд движется по закруглению радиусом 800 м со скоростью 20 м/с.

Определить, какой должна быть разница высоты рельсов для того, чтобы боковое давление на реборды колес равнялось нулю. Расстояние между рельсами 1,5 м.

О т в е т. $\Delta h = 8$ см.

Задача 20.9. С каким наименьшим горизонтально направленным ускорением должна двигаться наклонная плоскость с углом наклона α, чтобы лежащее на ней тело поднималось? Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью k.

О т в е т. $a = \frac{g\,(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{\cos\alpha - k\sin\alpha}$

Задача 20.10. Груз массой m, лежащий на горизонтальной плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной к нему силой F.

При каком наклоне линия действия этой силы к горизонту ее численное значение будет наименьшим? Коэффициент трения равен μ.

О т в е т. $\alpha = \operatorname{arctg}\mu$.

Задача 30.11. Грузы в 1 и 3 кг на горизонтальной поверхности связаны идеально упругой невесомой нитью. Если одной и той же силой подействовать горизонтально то на один, то на другой груз, то длина нити при движении грузов будет 13 см и 11 см. Какова длина ненатянутой нити?

О т в е т. $l = 10$ см.

Задача 20.12. Тело массой 2 кг движется с ускорением 2 м/с^2. На тело действуют 3 равных силы, лежащих в одной плоскости.

Угол между 1 и 2 силами равен 60°, между 2 и 3 — 60°, между 1 и 3 — 100°.

Найти величины этих сил.

Ответ. $F_1 = F_2 = F_3 = 2$ Н.

Задача 20.13. К середине резинового шнура длиной 2 м, расположенного горизонтально, подвешена гиря массой 0,5 кг. Под действием гири шнур провис на 0,5 м.

Определить коэффициент упругости шнура, если деформация шнура упругая. Массой шнура пренебречь.

Ответ. $k = 46 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Задача 20.14. Метровый кусок медной проволоки диаметром 0,4 см подвешен за верхний конец. На сколько он растянется под влиянием собственного веса? $\left(\text{Модуль Юнга для меди } E = 9{,}8 \times 10^{11} \text{ Па, плотность } \rho = 8{,}9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$

Ответ. $\Delta l = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$м.

Задача 20.15. Деревянный кубик ($\rho = 0{,}5 \cdot 10^3$ кг/м³) погружен в воду на глубину 2 м. На какую высоту поднимется кубик, если его отпустить? Трение не учитывать.

Ответ. $h = 2$ м.

Задача 20.16. Как изменилось бы ускорение свободного падения на поверхности Земли, если бы радиус Земли сократился на 1 %, а ее масса осталась бы неизменной?

Ответ. Увеличилось бы на 2 %.

Задача 20.17. В кузове грузовика лежит деревянный ящик, частично загруженный кирпичом. Дно ящика — квадрат со стороной 1 м, масса ящика по сравнению с массой кирпича пренебрежимо мала. Известно, что ящик начинает скользить, если грузовик трогается с ускорением 6 м/с². До какой высоты можно уложить кирпичи в ящике без опасения, что он опрокинется при таком ускорении?

Ответ. $h = 1{,}6$ м.

Задача 20.18. Ящик с точными приборами поставлен на анализирующую прокладку для защиты от вертикальных вибраций. Под нагрузкой прокладки сдавливается на 6 см. Чему равен период собственных колебаний ящика?

Ответ. $T \approx 0{,}5$ с.

Задача 20.19. Спутник движется по круговой орбите в плоскости экватора на высоте, равной радиусу Земли. С какой скоростью должен перемещаться наземный наблюдатель, чтобы спутник появлялся над ним каждые 5 часов? Направления движения спутника и вращения Земли совпадают.

Задача 20.20. Два математических маятника с одинаковой массой и разной длиной колеблются так, что силы натяжения их нитей в момент прохождения ими положения равновесия равны. Во сколько раз угол отклонения первого маятника от вертикали больше угла отклонения второго маятника?

Задача 20.21. Математический маятник колеблется по закону $x = x_0 \cos (2\pi t + \varphi_0)$.

Какова длина маятника?

Ответ. $l = 25$ см.

Задача 20.22. По траектории, соединяющей центры Земли и Луны, с Земли выпущен неуправляемый космический аппарат. Найти минимальную скорость его удара о поверхность Луны.

Ответ. $v = 7{,}5 \cdot 10^{8}$ м/с.

Задача 20.23. Небольшое тело начинает соскальзывать без начальной скорости из верхней точки жестко закрепленной полусферы радиусом R. Как высоко оно подскочит после упругого удара о поверхность, на которой закреплена сфера?

Ответ. $h = \frac{23}{27} R$.

Задача 20.24. Стержень массой M и длиной L свободно падает в вертикальной плоскости, касаясь одним концом опоры. В начальном состоянии покоя стержень составлял с горизонталью угол 30°. Определить давление на ось вращения стержня в тот момент, когда он проходит горизонтальное положение.

Ответ. $\frac{3}{4} Mg$.

Задача 20.25. Спутник массой M мчится в пространстве, свободном от действия сил (межпланетный осколок). Изменение его массы пропорционально скорости $\frac{dM}{dt} = \alpha v$, α — постоянная величина. Чему будет равно его изменение? В начальный момент наблюдения скорость спутника v.

Ответ. $\Delta = -\frac{\alpha v^2}{M}$.

Задача 20.26. На невесомой упругой нити вращается маленький свинцовый шарик, образуя при вращении конический маятник с плоским углом 60°. Кинетическая энергия шарика 1 Дж. Найти потенциальную энергию растянутой нити, если известно, что она удлинилась на 10 %.

Ответ. $U = 0{,}4$ Дж.

Задача 20.27. Материальная точка массой 0,1 кг движется по окружности радиусом 10 см. Центростремительное ускорение точки меняется с течением времени по закону $a_n = 100\, t^2$. Найти мощность внешних сил, развиваемую в тот момент, когда точка сделала 10 оборотов от начала движения.

Ответ. $N = 11{,}2$ Вт.

Задача 20.28. В игрушечную ракету наливается вода, занимающая малую часть внутренней полости ракеты. В остальную часть полости накачивается воздух до давления P. Оценить h — высоту подъема ракеты, считая, что масса воды m много меньше массы ракеты M, время истечения воды много меньше времени полета, сечение сопла ракеты много меньше сечения полости (ρ — плотность воды).

Ответ. $h = \frac{m^2 P}{\rho g M^2}$.

Задача 20.29. Найти формулу для кинетической энергии тела, движущегося под действием постоянной силы F (в начальный момент времени скорость была равна нулю), в зависимости: а) от времени; б) от пройденного пути.

Ответ. а) $K = \frac{F^2 t^2}{2m}$;

б) $K = F(x - x_0)$.

Задача 20.30. Цилиндрический стакан до высоты 10 см заполнен кусочками льда, поры между которыми сквозные и в исходном состоянии заполнены воздухом. Льдинки занимают 60 % объема. Лед начинает таять, причем соотношение объемов льдинок и пор между ними остается неизменным. Найти уровень воды в стакане, когда растаяло 70 % льда. Плотность льда 900 кг/м^3, плотность воды 1000 кг/м^3.

Ответ. $h \approx 5{,}4$ см.

Задача 20.31. В герметически закрытом сосуде объемом 5 л находится только кипящая вода массой 0,5 кг и ее пары при температуре 100 °C. Найти массу пара. Принять плотность воды при 100 °C равной 10^3 кг/м^3.

Ответ. $m \approx 2{,}61$ г.

Задача 20.32. Количество тепла, необходимое для нагревания 1 кг железа от 0° до $T°$ ($T < 200°$ C) дается следующей эмпирически наблюдаемой зависимостью

$$Q\ (T) = 440{,}857\, T + 0{,}29725\, T^2.$$

Найти среднюю теплоемкость $C_{ср}$ железа при: а) 0°; б) 100 °C и с) 150 °C.

Задача 20.33. В длиной теплоизолированной трубе между двумя одинаковыми поршнями массой $M = 10$ кг находится 8 г гелия при температуре $T_0 = 300$ К. В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону и равны 3 м/с и 1 м/с. До какой максимальной температуры нагреется газ? Поршни тепло не проводят.

Задача 20.34. При прохождении через перегретую жидкость ионизирующей частицы вдоль ее траектории образуются мельчайшие пузырьки пара. Те из пузырьков, радиус которых больше «критического», быстро вырастают до видимых размеров, а пузырьки меньших размеров захлопываются силами поверхностного натяжения.

Определить критический радиус для жидкого пропана (C_3H_8), находящегося в камере под давлением 5 атм. при 328 К, а давление насыщенного пара пропана при этой температуре 15 атм. Коэффициент поверхностного натяжения пропана 4,46 : 10^{-7} Н/см.

Ответ. $R_{кр} = 9 \cdot 10^{-9}$ м.

Задача 20.35. В тонкостенном сосуде, помещенном в вакуум, имеется очень маленькое отверстие, на которое направляется параллельный пучок одноатомных молекул, летящих с одной и той же скоростью v_0, перпендикулярной к площади отверстия. Концентрация молекул в пучке n_0. Найти в установившемся равновесном состоянии среднюю скорость (v), концентрацию молекул (n) и температуру газа в сосуде.

Ответ. $v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, v_0$; $n = n_0\sqrt{8\pi}$; $T = \frac{vm_0^2}{4k}$.

Задача 20.36. Вольфрамовая нить, испаряясь в вакуум при температуре 2000 К уменьшается в весе со скоростью $1{,}14 \cdot 10^{-16} \frac{кг}{см^2 с}$. Вычислить давление насыщенного пара вольфрама при этой температуре.

Ответ. $6{,}7 \cdot 10^{-12}$ мм рт. ст.

Задача 20.37. Вокруг протона вращаются по круговой орбите четыре электрона, располагаясь в углах квадрата со стороной $a = 10^{-10}$ м. Протон находится в центре этого квадрата. Определить угловую скорость движения электронов по орбите.

СОДЕРЖАНИЕ

Вступление 3

1. Выбор системы отсчета 5

2. Метод усложнения—упрощения 12

3. Метод дифференцирования и интегрирования (ДИ) 17

4. Метод обратимости 21

5. Методы определения центра масс 25

6. Вариационные принципы механики. Метод виртуальных перемещений 30

7. Метод экстремума потенциальной энергии 36

8. Законы сохранения 42

9. Теорема Гаусса и другие подходы к решению электростатических задач 54

10. Правила Кирхгофа и другие методы расчета электрических цепей 60

11. Методы расчета эквивалентных элементов 74

12. Метод суперпозиции 80

13. Метод зеркальных изображений 85

14. Графические методы 89

15. Методы расчета параметров больших систем 119

16. Метод экспоненты 126

17. Метод минимума и максимума 129

18. Метод аналогии 133

19. Методы софизмов и парадоксов 146

20. Задачи для самостоятельного решения 154