

А.Г. Мерзляк,
В.Б. Полонский,
Е.М. Рабинович,
М.С. Якир

СБОРНИК

задач и заданий
для тематического оценивания
по геометрии
для 9 класса

*Рекомендовано
Министерством науки и образования Украины*

Харьков
«Гимназия»
2004

Тематическое распределение тренировочных упражнений

Тема	Номера упражнений
Подобие фигур. Гомотетия	1-7
Свойства подобных треугольников	8-12
Признаки подобия треугольников	13-41
Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике	42-50
Углы, вписанные в окружность	51-73
Угол, образованный касательной и хордой	74-79
Четырехугольник, вписанный в окружность	80-86
Теорема косинусов	87-100
Сумма квадратов диагоналей параллелограмма	101-107
Теорема синусов	108-120
Соотношение между углами треугольника и противоположными сторонами	121-130
Свойство биссектрисы треугольника	131-146
Формула $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$	147-155
Решение треугольников	156-160
Ломаная. Выпуклый многоугольник	161-166
Сумма внутренних и внешних углов многоугольника	167-177
Правильный многоугольник	178-195
Зависимость между сторонами и радиусами вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника	196-214
Длина окружности и ее частей	215-232
Радианная мера угла	233-236
Площадь квадрата. Площадь прямоугольника	237-258
Площадь параллелограмма. Площадь ромба	259-273
Площадь треугольника	274-318
Площадь трапеции	319-340
Площадь многоугольника	341-349
Площади подобных фигур	350-360
Площадь круга и его частей	361-385
Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве	386-396
Призма	397-403
Пирамида	404-410
Цилиндр	411-413
Конус	414-417
Шар	418-420

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Вариант 1

Подобие фигур. Гомотетия

1. Начертить в тетради отрезок $AB = 2$ см и отметить точку O , не принадлежащую этому отрезку. Построить отрезок, гомотетичный отрезку AB с центром гомотетии в точке O и коэффициентом $k = 3$.
2. Начертить в тетради острый угол и отметить точку A , лежащую внутри угла. Построить угол, гомотетичный данному углу с центром гомотетии в точке A и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$.
3. Построить треугольник, гомотетичный данному тупоугольному треугольнику с центром гомотетии в точке пересечения его медиан и коэффициентом гомотетии $k = 2$.
4. Отметить в тетради две точки A и B . Найти такую точку O , чтобы точка A переходила в точку B при гомотетии с центром O и коэффициентом $k = 2$.
5. Гомотетия с центром в начале координат переводит точку $A(-2; 8)$ в точку $B(-1; 4)$. Найти коэффициент гомотетии.
6. Даны две параллельные прямые. Можно ли одну из них преобразовать в другую с помощью гомотетии? Как это сделать?
7. Могут ли два треугольника быть гомотетичными, но не подобными?

Свойства подобных треугольников

8. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (рис. 1). Найти неизвестные стороны этих треугольников.

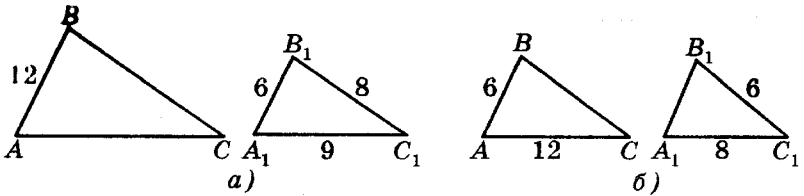


Рис. 1

9. Стороны треугольника относятся как $7:6:3$. Найти стороны подобного ему треугольника, если у него:
 - 1) периметр равен 8 см;
 - 2) меньшая сторона равна 6 см;
 - 3) большая сторона равна 28 см;
 - 4) разность большей и меньшей сторон равна 20 см.
10. Стороны многоугольника относятся как $4 : 5 : 7 : 8 : 9$. Найти стороны подобного ему многоугольника, если его периметр равен 99 см.
11. Стороны треугольника относятся как $4:6:7$, а средняя по длине сторона подобного ему треугольника равна 18 см. Найти другие стороны второго треугольника.
12. Периметры подобных треугольников относятся как $7:5$, а сумма меньших сторон треугольников равна 36 см. Найти стороны обоих треугольников, если стороны одного из них относятся как $3:7:8$.

Признаки подобия треугольников

13. Указать пары подобных треугольников и доказать их подобие (рис. 2).
14. Доказать, что равнобедренные треугольники подобны, если равны их углы при вершине.
15. У двух равнобедренных треугольников углы при вершине равны. Периметр первого треугольника равен 270 см. Найти его стороны, если стороны другого треугольника относятся как: 1) $1:4$; 2) $4:7$.

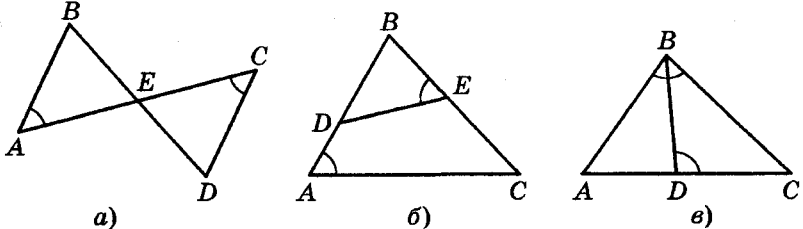


Рис. 2

16. У двух равнобедренных треугольников углы при вершине равны. Основание первого треугольника равно 8 см, а высота, проведенная к ней, — 3 см. Найти стороны другого треугольника, если его периметр равен 54 см.
17. Два прямоугольных треугольника имеют по равному острому углу. Катеты первого треугольника относятся как 5:12. Найти гипотенузу второго треугольника, если его периметр равен 120 см.
18. Углы одного треугольника относятся как 3:5:7, а один из углов другого треугольника на 24° больше второго и на 24° меньше третьего угла. Подобны ли эти треугольники?
19. Доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 3).
20. Найти пары подобных треугольников и доказать их подобие (рис. 4).
21. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, а стороны треугольника ABC , образующие угол A , в 3,5 раза больше сторон, образующих угол A_1 . Найти стороны BC и B_1C_1 , если их сумма равна 18 см.

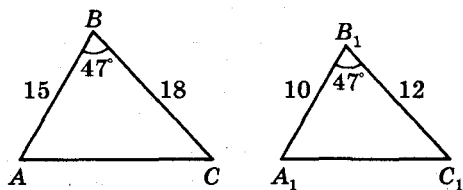


Рис. 3

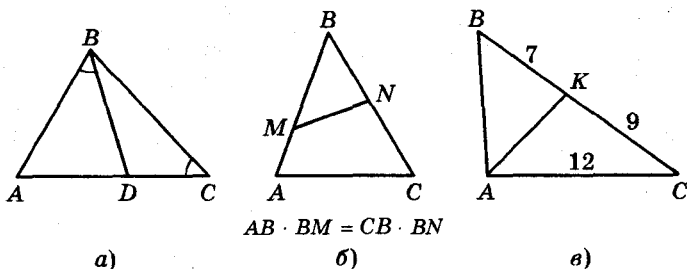


Рис. 4

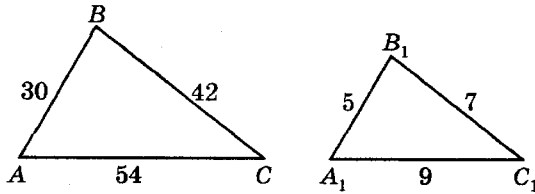


Рис. 5

22. В треугольнике ABC $AB = 16$ см, $AC = 20$ см. На стороне AB отложили отрезок $AD = 12$ см, а на стороне AC — отрезок $AE = 15$ см. Подобны ли треугольники ABC и ADE ?
23. Доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 5).
24. Указать пару подобных треугольников и доказать их подобие (рис. 6).
25. Определить, подобны ли треугольники, если стороны их равны:
- 1) 5 см, 8 см, 9 см и 15 см, 24 см, 27 см;
 - 2) 2 см, 5 см, 6 см и 8 см, 18 см, 20 см.
- Если ответ положителен, указать коэффициент подобия.
26. Стороны одного треугольника относятся как 5:7:9, а стороны другого треугольника равны 25 см, 35 см и 45 см. Подобны ли эти треугольники?
27. Катеты одного прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см, а гипотенуза и высота, проведенная к ней, другого треугольника соответственно равны 50 см и 24 см. Подобны ли эти треугольники?
28. На рис. 7 $BD \parallel CE$. Записать пропорции, начинающиеся с отношений: 1) $\frac{AC}{CE}$; 2) $\frac{BD}{CE}$; 3) $\frac{AE}{AD}$; 4) $\frac{AB}{BC}$.

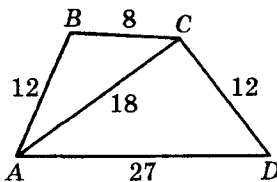


Рис. 6

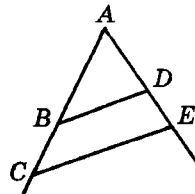


Рис. 7

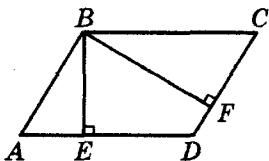


Рис. 8

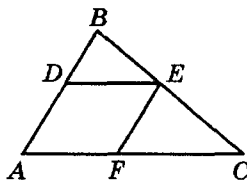


Рис. 9

29. В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BE и BF (рис. 8). Доказать подобие треугольников ABE и CBF .
30. Стороны параллелограмма равны 15 см и 30 см, а расстояние между меньшими сторонами равно 20 см. Найти расстояние между большими сторонами параллелограмма.
31. Периметр параллелограмма равен 70 см, а его высоты — 3 см и 4 см. Найти стороны параллелограмма.
32. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E . Большее основание AD трапеции равно 12 см, $AE = 15$ см, $BE = 5$ см. Найти меньшее основание трапеции.
33. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найти AB , если $AF = 10$ см и $BC : AD = 2 : 5$.
34. Одна из диагоналей трапеции равна 28 см и делит другую диагональ на отрезки длиной 5 см и 9 см. Найти отрезки, на которые делит точка пересечения диагоналей первую диагональ, и большее основание трапеции, если меньшее основание трапеции равно 6 см.
35. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) O — точка пересечения диагоналей. $AO : OC = 5 : 2$, а средняя линия трапеции равна 7 см. Найти основания трапеции.
36. В треугольнике ABC проведен луч BD такой, что $\angle ABD = \angle BCA$. Найти отрезки, на которые луч BD делит сторону AC , если $AB = 3$ см, $AC = 6$ см.
37. В треугольник ABC вписан параллелограмм $ADEF$ (рис. 9). Найти AC , если $AB = 16$ см, $AD = 12$ см, $DE = 5$ см.
38. В треугольник ABC вписан ромб $AKPE$ так, что угол A у них общий, а вершина P принадлежит стороне BC . Найти сторону ромба, если $AB = 6$ см, $AC = 3$ см.

39. В треугольник с основанием 12 см и высотой 4 см вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 5:9, причем большая сторона принадлежит основанию треугольника. Найти стороны прямоугольника.
40. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 10 см, а высота, опущенная на боковую сторону, — 12 см. Найти стороны треугольника.
41. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона — 10 см. Вычислить:
 1) радиус окружности, вписанной в треугольник;
 2) радиус окружности, описанной около треугольника.

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

42. Найти высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если она делит гипотенузу на отрезки длиной 4 см и 16 см.
43. Катет прямоугольного треугольника равен 8 см, а его проекция на гипотенузу — 4 см. Найти гипотенузу.
44. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки длиной 18 см и 32 см. Найти катеты треугольника.
45. Один катет прямоугольного треугольника равен 4 см, а проекция второго катета на гипотенузу — 6 см. Найти второй катет и гипотенузу.
46. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найти высоту треугольника, проведенную из вершины прямого угла.
47. Найти высоту и боковую сторону равнобедренной трапеции, основания которой 5 см и 13 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.
48. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне и равна $3\sqrt{5}$ см, а проекция боковой стороны на большее основание равна 4 см. Найти основания трапеции и ее боковую сторону.
49. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей ромба к его стороне, делит ее на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найти диагонали ромба.
50. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию, делит точкой касания боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 18 см. Найти основания трапеции и радиус окружности.

Углы, вписанные в окружность

51. Определить градусную меру угла, вписанного в окружность, если соответствующий ему центральный угол равен:
1) 48° ; 2) 126° ; 3) 180° ; 4) 254° ; 5) α .
52. Определить градусную меру центрального угла окружности, если градусная мера соответствующего ему вписанного угла равна: 1) 17° ; 2) 87° ; 3) 90° ; 4) 176° ; 5) α .
53. Точка B окружности и ее центр O лежат по разные стороны от хорды AC . Найти: 1) угол ABC , если $\angle AOC = 124^\circ$; 2) угол AOC , если $\angle ABC = 94^\circ$.
54. Точки B и D лежат на окружности по одну сторону от хорды AC , $\angle ABC = 42^\circ$. Найти угол ADC .
55. Точки B и D лежат на окружности по разные стороны от хорды AC , $\angle ABC = 78^\circ$. Найти угол ADC .
56. Около треугольника ABC описана окружность с центром O . Найти угол BOC , если: 1) $\angle A = 78^\circ$; 2) $\angle A = 128^\circ$.
57. В треугольнике ABC $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 78^\circ$, O — центр описанной окружности. Найти: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle AOC$.
58. Определить углы равнобедренного треугольника, вписанного в окружность, боковая сторона которого стягивает дугу в 38° .
59. Хорда делит окружность в отношении 5:7. Определить величины вписанных углов, опирающихся на эту хорду.
60. Хорда MN делит окружность на две дуги. Градусная мера меньшей из них равна 140° , а большая делится точкой K в отношении 5:6, считая от точки M . Найти $\angle NMK$.
61. Окружность разделена тремя точками на части, относящиеся между собой, как 3:5:7. Точки деления соединены между собой. Определить углы образовавшегося треугольника.
62. Точки C и D окружности лежат по одну сторону от диаметра AB (рис. 10). Найти угол DCB , если $\angle ACD = 41^\circ$.
63. Точки M и K окружности лежат по одну сторону от диаметра CD (рис. 11). Найти угол CDK , если $\angle DMK = 53^\circ$.
64. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 78° . Полуокружность, построенная на боковой

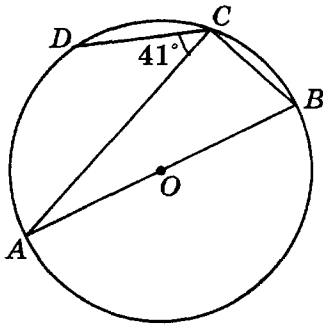


Рис. 10

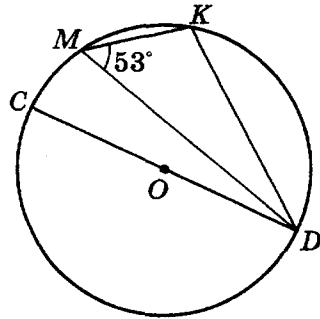


Рис. 11

стороне треугольника, как на диаметре, делится другими сторонами на три дуги. Какова градусная мера этих дуг?

65. Продолжение высоты CD треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E . Эта точка соединена с точкой F , диаметрально противоположной точке C . Доказать, что $EF \parallel AB$.
66. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены диаметры AD и AC . Доказать, что точки B , C и D лежат на одной прямой.
67. O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC . Найти углы треугольника ABC , если $\angle AOB = 128^\circ$. Сколько решений имеет задача?
68. Найти геометрическое место точек середин всех хорд, проходящих через данную точку окружности.
69. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под заданным углом α (рис. 12).
70. Построить треугольник по основанию, высоте, проведенной к основанию, и углу при вершине.

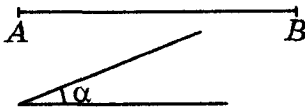


Рис. 12

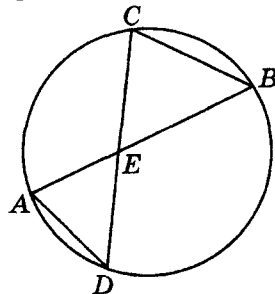


Рис. 13

71. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E (рис. 13). Доказать подобие треугольников ADE и BCE .
72. Хорды MK и PF окружности пересекаются в точке E . Найти длину отрезка EF , если $ME = 4$ см, $EK = 3$ см, $PE = 2$ см.
73. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M , делящей хорду AB на отрезки длиной 2 см и 9 см. На какие отрезки делит точка M хорду CD , если один из них больше другого на 3 см?

Угол, образованный касательной и хордой

74. Хорда AB стягивает дугу в 58° . Определить углы, образованные хордой и касательной, проведенной к окружности в точке A .
75. В угол ABC вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках D и E . Эти точки делят окружность на части, относящиеся как 3:7. Найти углы треугольника BDE .
76. В треугольнике ABC $\angle B = 74^\circ$. Около треугольника описана окружность и через точку A к окружности проведена касательная. Луч CD образует со стороной AC угол 23° (рис. 14). Найти углы треугольника ACD .
77. Из точки D , находящейся вне окружности, проведены к ней касательная DB и секущая DA (рис. 15). Доказать подобие треугольников ABD и BCD .
78. Из точки A к окружности проведены касательная AK длиной 4 см и секущая AE длиной 8 см. Найти длину отрезка AF секущей, расположенного вне окружности.
79. Из точки вне окружности проведены к ней касательная длиной 6 см и секущая, отрезок которой, лежащий внутри окружности, равен 5 см. Найти длину отрезка секущей, расположенного вне окружности.

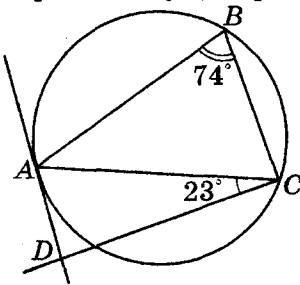


Рис. 14

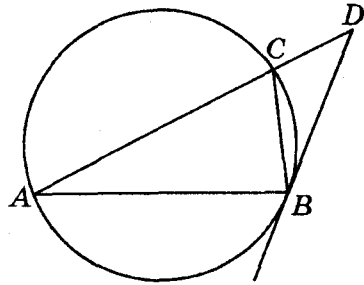


Рис. 15

Четырехугольник, вписанный в окружность

80. Можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, если:
- 1) $\angle A = 33^\circ$, $\angle C = 137^\circ$;
 - 2) $\angle B = 69^\circ$, $\angle D = 111^\circ$?
81. Найти углы C и D четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если $\angle A = 119^\circ$, $\angle B = 84^\circ$.
82. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого в порядке следования относятся как:
- 1) $5 : 7 : 8 : 4$;
 - 2) $3 : 5 : 8 : 6$?
83. Три угла четырехугольника, вписанного в окружность, взятые в порядке следования, относятся как $2:6:7$. Найти углы четырехугольника.
84. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC этого четырехугольника является диаметром окружности. Найти угол между диагоналями четырехугольника, лежащий против стороны AD , если $\angle BAC = 23^\circ$, $\angle DAC = 52^\circ$.
85. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны AC и BC треугольника в точках D и E соответственно. Доказать, что треугольники ABC и EDC подобны. Найти CD и CE , если $AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AB = 8$ см, $DE = 2$ см.
86. Равнобедренная трапеция, один из углов которой равен 54° , вписана в окружность. Угол между диагоналями трапеции, лежащий против боковой стороны, равен 36° . Найти положение центра окружности, описанной около трапеции, относительно трапеции.

Теорема косинусов

87. Найти сторону AC треугольника ABC , если:
- 1) $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $\angle B = 60^\circ$;
 - 2) $AB = 5\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 135^\circ$.
88. Найти косинусы углов треугольника, стороны которого равны 5 см, 8 см и 11 см.
89. Две стороны треугольника равны 6 см и 9 см, а синус угла между ними равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найти третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?
90. Стороны параллелограмма равны 8 см и 10 см, а угол между ними — 60° . Найти диагонали параллелограмма.

91. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) взяты соответственно точки D и E . Найти длину отрезка DE , если $AC = 4$ см, $BC = 2\sqrt{5}$ см, $CE = 1$ см, $BD = 2$ см.
92. Катет AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равен 2 см. На продолжении гипотенузы AB за точку B взята такая точка D , что $BD = BC$. Найти CD .
93. Одна сторона треугольника на 5 см больше другой, а угол между ними равен 60° . Найти периметр треугольника, если третья сторона равна 7 см.
94. Две стороны треугольника относятся как 5:3, а угол между ними равен 120° . Найти эти стороны, если периметр треугольника равен 15 см.
95. Две стороны треугольника равны 8 см и 7 см, а угол против меньшей из них — 60° . Найти третью сторону треугольника.
96. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 8$ см, $AD = 12$ см, $AB = CD = 10$ см. Найти длины диагоналей трапеции, используя теорему косинусов.
97. В равнобедренном треугольнике основание равно a , а угол при основании — α . Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне треугольника.
98. Стороны четырехугольника, взятые в порядке следования, равны a , b , c и d . Найти косинус угла между сторонами b и c , если около четырехугольника можно описать окружность.
99. Для сторон треугольника выполняется равенство $a^2 = b^2 + c^2 + bc$. Доказать, что угол, лежащий против стороны a , равен 120° .
100. Стороны треугольника равны 20 см и 12 см, а угол между ними — 120° . Найти длину медианы, проведенной к третьей стороне треугольника.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма

101. Найти диагонали параллелограмма, если они относятся как 6:7, а стороны параллелограмма равны 14 см и 22 см.
102. Одна из сторон параллелограмма на 5 см больше другой, а диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см. Найти стороны параллелограмма.
103. Стороны треугольника равны 8 см, 9 см и 13 см. Найти длину медианы треугольника, проведенной к наибольшей стороне.

104. В треугольнике ABC $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, BM — медиана. Найти сторону AC , если $BM : AC = 2 : 7$.
105. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 8 см, а медиана, проведенная к ней, — 6 см. Найти основание треугольника.
106. Медианы AM_1 и BM_2 треугольника ABC равны 12 см и 15 см, а угол AMB равен 60° (M — точка пересечения медиан). Найти длину третьей медианы.
107. Доказать, что в каждом выпуклом четырехугольнике сумма квадратов диагоналей вдвое больше суммы квадратов отрезков, которые соединяют середины противоположных сторон четырехугольника.

Теорема синусов

108. В треугольнике ABC $BC = 5\sqrt{3}$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Найти сторону AC .
109. В треугольнике ABC $AB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle A = 15^\circ$, $\angle C = 135^\circ$. Найти сторону AC .
110. В треугольнике ABC $AB = 13$ см, $BC = 8$ см. Может ли $\sin \angle A = \frac{2}{3}$?
111. В треугольнике ABC $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Найти стороны AC и AB .
112. На рис. 16 $AB = c$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, $\angle D = \gamma$. Найти AD .
113. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c , а острый угол α . Найти длину биссектрисы прямого угла.
114. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна d и делит угол A на углы α и β . Найти стороны и другую диагональ параллелограмма.

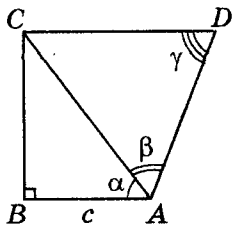


Рис. 16

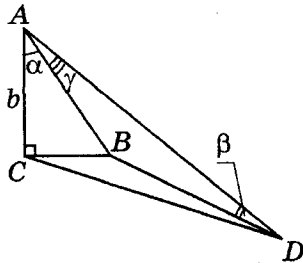


Рис. 17

115. В равнобедренном треугольнике основание равно a , а угол при основании α . Найти длину биссектрисы угла при основании треугольника.
116. Два угла треугольника равны α и β , а биссектриса третьего угла треугольника равна l . Найти стороны треугольника.
117. На рис. 17 $AC = b$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle BDA = \beta$, $\angle BAD = \gamma$. Найти CD .
118. Разность сторон AB и BC треугольника ABC равна 4 см, $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 45^\circ$. Найти стороны AB и BC треугольника ABC .
119. CM — медиана треугольника ABC . Доказать, что $AC : BC = \sin \angle MCB : \sin \angle MCA$.
120. Найти стороны треугольника, периметр которого равен P , а два угла — α и β .

Соотношение между углами треугольника и противоположными сторонами

121. В треугольнике ABC $AB > BC > AC$. Сравнить углы A , B и C .
122. В треугольнике ABC $\angle A = 43^\circ$, $\angle B = 82^\circ$. Сравнить стороны AB , BC и AC .
123. В треугольнике ABC AB — наименьшая сторона. Может ли угол C быть равным 61° ?
124. Определить вид треугольника, стороны которого равны:
1) 3 см, 4 см, 6 см; 2) 8 см, 15 см, 17 см.
2) 5 см, 6 см, 7 см;
125. В треугольнике ABC $\angle B > 90^\circ$. На продолжении стороны AB за точку B взяли произвольную точку D и соединили ее с точкой C . Доказать, что $CD > BC$.
126. В треугольнике ABC $BC > AB$, BM — медиана. Доказать, что $\angle ABM > \angle CBM$.
127. У треугольников ABC и KPE $AB = KP$, $BC = PE$, $AC > KE$. Доказать, что $\angle B > \angle P$.
128. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B > \angle A$, CD — высота. Доказать, что $AD > BD$.
129. В треугольнике ABC $AC = 6$ см, $AB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$. Найти угол C .
130. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $BC = 4\sqrt{6}$ см, $\angle C = 45^\circ$. Найти угол A . Сколько решений имеет задача?

Свойство биссектрисы треугольника

131. BD — биссектриса угла B треугольника ABC . Найти:
- 1) отрезки AD и DC , если $AB = 8$ см, $BC = 14$ см, $AC = 11$ см;
 - 2) сторону AB , если $AD : DC = 7 : 8$, $BC = 24$ см;
 - 3) сторону AC , если $AB : BC = 2 : 3$, $CD - AD = 3$ см;
 - 4) стороны AB , BC и AC , если $AB + BC = 56$ см, $AD = 9$ см, $DC = 15$ см.
132. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC . Сравнить углы ACD и BCD , если $AC = 12$ см, $BC = 15$ см, $AD = 6$ см, $BD = 12$ см.
133. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит противолежащий катет в отношении 2:1. Найти острые углы треугольника.
134. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найти катеты.
135. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет в отношении 5:3, а разность этих отрезков равна 6 см. Найти стороны треугольника.
136. Высота BD треугольника ABC равна 24 см и делит сторону AC на отрезки $AD = 7$ см и $DC = 10$ см. На какие отрезки делит сторону AC биссектриса угла B ?
137. Периметр прямоугольника равен 42 см, а его диагональ делится биссектрисой прямого угла на отрезки, длины которых относятся как 3:4. Найти диагональ прямоугольника.
138. Биссектриса угла прямоугольника делит его сторону на отрезки длиной 10 см и 14 см, считая от ближайшей к этому углу вершины. На какие отрезки делит эта биссектриса диагональ прямоугольника?
139. Диагональ равнобедренной трапеции делит высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 12 см, а боковая сторона трапеции равна ее меньшему основанию. Найти стороны трапеции.
140. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E принадлежит стороне BC . Найти длины отрезков BE и EC , если $AB = 21$ см, $BC = 18$ см, $AC = 15$ см.

141. В параллелограмме биссектриса тупого угла, равного 120° , делит сторону на отрезки длиной 12 см и 8 см, считая от вершины острого угла. Найти отрезки, на которые биссектриса этого угла делит диагональ параллелограмма.
142. В треугольнике со сторонами, равными 13 см, 18 см и 21 см, проведена полуокружность, центр которой принадлежит меньшей стороне треугольника, касающаяся двух других сторон. На какие отрезки центр полуокружности делит меньшую сторону?
143. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки длиной 5 см и 4 см. Найти стороны треугольника.
144. Высота равнобедренного треугольника равна 24 см, а боковая сторона относится к основанию как 7:10. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.
145. В равнобедренном треугольнике радиус вписанной окружности в 4 раза меньше высоты, проведенной к основанию, а периметр треугольника равен 72 см. Найти стороны треугольника.
146. Биссектриса BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки $AD = 6$ см и $DC = 8$ см. Найти длину биссектрисы, если $\angle BDC = 120^\circ$.

$$\text{Формула } \frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

147. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $\angle C = 30^\circ$. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника.
148. С помощью следствия из теоремы синусов найти стороны равностороннего треугольника по радиусу R описанной окружности.
149. Две стороны треугольника равны $3\sqrt{2}$ см и 4 см. Найти третью сторону треугольника, если она относится к радиусу описанной окружности как $\sqrt{2} : 1$. Сколько решений имеет задача?
150. В треугольнике ABC $\angle A = 54^\circ$, $\angle B = 66^\circ$, AK — высота треугольника. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABK , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 6 см.

151. В треугольнике ABC — точка пересечения высот. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если радиус окружности, описанной около треугольника AB , равен R .
152. Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а боковая сторона — 13 см. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.
153. Основания равнобедренной трапеции равны 24 см и 8 см, а боковая сторона — 12 см. Найти радиус окружности, описанной около трапеции.
154. В окружность радиус которой 4 см, вписана трапеция, одно основание которой в 2 раза больше каждой из трех других сторон. Найти диагонали трапеции.
155. В треугольнике ABC — точка пересечения биссектрис, $\angle AOC = 120^\circ$. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AOC , равны.

Решение треугольников

156. Найти неизвестные стороны и углы треугольника ABC , если: ::
- 1) $AC = 8$ см, $\angle B = 4^\circ$, $\angle C = 56^\circ$;
 - 2) $AB = 12,2$ см, $\angle A = 7^\circ$, $\angle B = 54^\circ$;
 - 3) $AB = 9$ см, $BC = 6$ см, $\angle B = 70^\circ$;
 - 4) $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 110^\circ$;
 - 5) $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см;
 - 6) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см;
 - 7) $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $\angle A = 100^\circ$;
 - 8) $AB = 8$ см, $BC = 9$ см, $\angle A = 40^\circ$;
 - 9) $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 20^\circ$;
 - 10) $AB = 6$ см, $BC = 3$ см, $\angle A = 40^\circ$.
157. В треугольнике ABC ($AB = BC = 6$ см, $\angle B = 40^\circ$). Найти: 1) сторону AC ; 2) высоту AD ; 3) медиану AM ; 4) биссектрису BK ; 5) радиус описанной окружности; 6) радиус вписанной окружности.
158. Диагональ BD равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 4 см, $\angle CDB = 36^\circ$, $\angle BDA = 48^\circ$. Найти: 1) стороны трапеции; 2) радиус окружности, описанной около треугольника BCD ; 3) радиус окружности, вписанной в треугольник AOD (O — точка пересечения диагоналей трапеции).

159. Большая сторона треугольника, вписанного в окружность, равна 6 см, а вершины треугольника делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 1:4:7. Найти неизвестные стороны треугольника.
160. На сторонах треугольника ABC ($AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$) вне его построены правильные треугольники и их вершины последовательно соединены. Определить периметр образовавшегося треугольника. Решить задачу в общем виде, а также вычислить, если $AB = 4$ см, $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 105^\circ$.

Ломаная. Выпуклый многоугольник

161. Какие из приведенных на рис. 18 фигур можно назвать ломаными? Ответ обосновать. Среди выбранных ломаных указать простые.

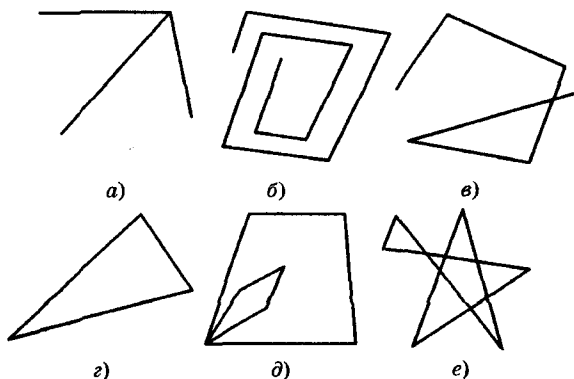


Рис. 18

162. Могут ли звенья замкнутой ломаной быть равными:
 1) 3 см, 5 см, 9 см, 16 см; 2) 2 см, 9 см, 3 см, 1 см, 3 см;
 3) 5 см, 8 см, 19 см, 2 см, 3 см? Ответ обосновать.
163. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого семиугольника? Найти общее количество диагоналей выпуклого семиугольника.
164. Доказать, что в выпуклом пятиугольнике сумма длин диагоналей больше суммы длин сторон.

165. Доказать, что сумма длин двух медиан треугольника больше длины его третьей медианы.
166. Доказать, что сумма медиан треугольника больше его полупериметра, но меньше периметра.

Сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника

167. Можно ли построить выпуклый пятиугольник, все углы которого прямые?
168. Может ли наименьший угол выпуклого девятиугольника быть равным 141° ?
169. Как изменится сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, если количество его сторон увеличится на три?
170. Определить углы выпуклого семиугольника, если их градусные меры относятся как $4:5:6:7:7:8:8$.
171. Найти углы выпуклого четырехугольника, если один из них равен 60° , второй и третий относятся как $7:3$, а четвертый равен полусумме второго и третьего.
172. Какое наибольшее количество острых углов может иметь выпуклый многоугольник?
173. Может ли один из углов выпуклого пятиугольника быть больше суммы четырех других?
174. В выпуклом многоугольнике сумма его внутренних углов равна 1620° . Найти количество его сторон и диагоналей.
175. В выпуклом многоугольнике 77 диагоналей. Найти количество его сторон и сумму углов.
176. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника в 2 раза больше суммы его внешних углов. Сколько сторон у этого многоугольника?
177. Найти количество сторон выпуклого многоугольника, у которого сумма внутренних углов больше суммы внешних на 540° .

Правильный многоугольник

178. Существует ли пятиугольник, не являющийся правильным, все углы которого равны?
179. Все ли правильные многоугольники имеют ось симметрии?

180. Найти величины внутренних и внешних углов правильного n -угольника, если n равно: 1) 5; 2) 9; 3) 12.
181. Найти количество сторон правильного многоугольника, если: 1) его внутренний угол равен 168° ; 2) его внешний угол равен 18° .
182. Определить количество сторон правильного многоугольника, у которого внешний угол составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего.
183. Сумма внешних углов правильного многоугольника вместе с одним из внутренних углов составляет 532° . Найти количество сторон многоугольника.
184. На рис. 19 изображен правильный шестиугольник $ABCDEF$, K — точка пересечения продолжений сторон DE и AF . Найти угол AKD .
185. На рис. 20 изображены несколько последовательных сторон правильного многоугольника. Как определить количество его сторон?

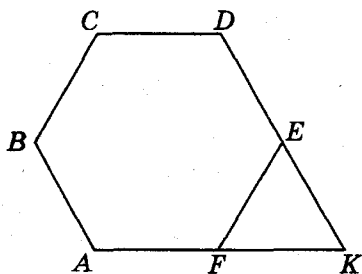


Рис. 19

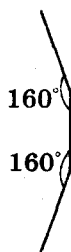


Рис. 20

186. Найти величину центрального угла правильного n -угольника, если n равно: 1) 3; 2) 9; 3) 15.
187. Центральный угол правильного многоугольника равен 15° . Найти количество сторон многоугольника.
188. Какой наибольший центральный угол может иметь правильный многоугольник?
189. На рис. 21 изображен правильный пятиугольник, вписанный в окружность. Как проще всего на этом рисунке построить правильный десятиугольник?
190. По данной стороне a построить правильный восьмиугольник.

191. Описать около данной окружности правильный шестиугольник.
192. AB , BC и CD — три последовательные стороны правильного многоугольника с центром O . Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M . Доказать, что около четырехугольника $MAOC$ можно описать окружность.

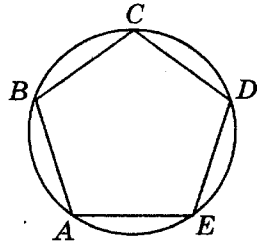


Рис. 21

193. В окружность вписан многоугольник, все углы которого равны. Могут ли быть неравными его стороны?
194. Доказать, что если последовательно соединить середины сторон правильного многоугольника, то полученной фигурой будет правильный многоугольник с тем же количеством сторон.
195. Пятиугольник имеет две оси симметрии. Доказать, что он правильный.

Зависимость между сторонами и радиусами вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника

196. Сторона правильного треугольника равна 4 см. Найти радиусы его вписанной и описанной окружностей.
197. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $5\sqrt{2}$ см. Найти сторону квадрата и радиус вписанной в него окружности.
198. Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен $4\sqrt{3}$ см. Найти сторону шестиугольника и радиус описанной около него окружности.
199. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен 8 см, а радиус окружности, вписанной в него, — $4\sqrt{3}$ см. Найти сторону многоугольника и количество его сторон.
200. Существует ли правильный многоугольник, у которого отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно 0,6?
201. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна $\sqrt{6}$ см. Найти сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

202. Найти радиусы окружностей, вписанной в правильный треугольник и описанной около него, если их разность равна 8 см.
203. В окружность вписан и около нее описан правильные шестиугольники. Найти отношения сторон этих шестиугольников.
204. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник, в этот треугольник вписана окружность, а в окружность — квадрат. Найти сторону квадрата.
205. Около квадрата со стороной 6 см описана окружность, а около окружности описан правильный шестиугольник, около которого описана окружность. Найти радиус этой окружности.
206. В окружность радиусом $\sqrt{3}$ см вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен второй правильный треугольник и в него вписана окружность. Найти радиус этой окружности.
207. Середины сторон правильного двенадцатиугольника соединены через одну так, что полученной фигурой является правильный шестиугольник. Найти сторону шестиугольника, если сторона двенадцатиугольника равна 2 см.
208. Сторона правильного восьмиугольника $ABCDEFKP$ равна 6 см. Найти длины диагоналей AC , AD и AE .
209. Общая хорда двух пересекающихся окружностей служит для одной из окружностей стороной правильного вписанного треугольника, а для другого — стороной вписанного квадрата. Найти расстояние между центрами окружностей, если они лежат по разные стороны от хорды, а длина хорды равна 6 см.
210. В правильный треугольник со стороной a вписана окружность. Три маленьких окружности касаются этой окружности и двух сторон треугольника. Найти радиусы маленьких окружностей.
211. Углы квадрата срезали так, что получили правильный восьмиугольник со стороной $2\sqrt{2}$ см. Найти сторону квадрата.
212. В данный ромб вписать квадрат так, чтобы стороны квадрата были параллельными диагоналям ромба.
213. Правильный треугольник со стороной 6 см повернут на угол 60° относительно его центра. Найти периметр образовавшегося шестиугольника.

214. Около правильного четырехугольника со стороной a описана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин четырехугольника является величиной постоянной. Найти ее.

Длина окружности и ее частей

215. Найти длину окружности, радиус которой равен:

1) 1 см; 2) 4 см; 3) π см; 4) $\frac{6}{\pi}$ см.

216. Найти длину окружности, диаметр которой на 8 см длиннее радиуса.

217. Чему равен радиус окружности, длина которой равна: 1) 2 см; 2) 5 см; 3) π см; 4) $4\pi^2$ см?

218. Как построить окружность, длина которой равна сумме длин трех данных окружностей?

219. Радиус окружности увеличили: 1) в 2 раза; 2) на 2 см. Как при этом изменилась длина окружности?

220. На диаметре AB окружности взяли произвольную точку M и на отрезках AM и MB как на диаметрах построили окружности. Сравнить длину окружности с диаметром AB с суммой длин окружностей, построенных на отрезках AM и MB .

221. Груз поднимается с помощью блока (рис. 22). На сколько поднимется груз за шесть оборотов блока, если радиус блока равен 6 см?

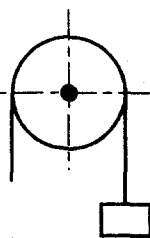


Рис. 22

222. Диаметр ведущего колеса электровоза равен 2 м. Найти скорость электровоза, если ведущее колесо за одну минуту делает 100 оборотов.

223. Построить график зависимости длины окружности от ее радиуса.

224. Радиус окружности равен 6 см. Найти длину дуги, содержащей: 1) 1° ; 2) 15° ; 3) 120° ; 4) 270° ; 5) 330° .

225. Длина дуги окружности равна 15 см, а ее градусная мера — 18° . Найти радиус окружности.

226. Длина дуги окружности радиуса 30 см равна 2π см. Найти градусную меру дуги.

227. Начертить в тетради окружность радиуса 6 см. Отметить на ней дугу длиной 4π см.

228. Длина окружности радиуса 10 см равна длине дуги второй окружности, содержащей 150° . Найти радиус второй окружности.

229. $ABCD$ — квадрат со стороной a , KM , ME , EP и PK — дуги с центрами B , A , D и C соответственно и радиусами, равными $\frac{a}{2}$ (рис. 23).

Найти периметр фигуры $KPEM$.

230. На катете BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) как на диаметре построена окружность. Найти длину дуги этой окружности, расположенной вне треугольника и отсекаемой гипотенузой AB , если $\angle B = 36^\circ$, $BC = 6$ см.

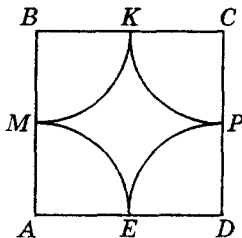


Рис. 23

231. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Найти длину дуги окружности с центром в вершине A , касающейся стороны BC и расположенной внутри треугольника.

232. В окружность радиусом $R = 1$ вписан правильный двенадцатиугольник, а около окружности описан квадрат. Сделать рисунок и с помощью него доказать, что $3 < \pi < 4$.

Радиянная мера угла

233. Найти радианную меру углов: 15° ; 30° ; 48° ; 75° ; 120° ; 240° .

234. Найти градусную меру угла, радианная мера которого равна: $\frac{\pi}{20}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{22}$; $\frac{4}{5}\pi$; $1\frac{2}{3}\pi$; 3π .

235. Радиус окружности равен единице. Найти длину дуги окружности, соответствующей углу в 3 радиана.

236. Могут ли все углы треугольника быть равными целому числу радиан?

Площадь квадрата. Площадь прямоугольника

237. Найти площадь квадрата, сторона которого равна:
1) 12 см; 2) 3,5 см; 3) t см.

238. Найти площадь квадрата, диагональ которого равна:
1) 4 см; 2) $5\sqrt{2}$ см; 3) t см.

239. Найти площадь прямоугольника, стороны которого равны: 1) 12 см и 8 см; 2) 0,8 см и 3,4 см.
240. Найти сторону квадрата, если его площадь равна: 1) 196 см^2 ; 2) $7,29 \text{ см}^2$; 3) 18 м^2 ; 4) $m \text{ см}^2$.
241. Одна из сторон прямоугольника равна 12 см, а его площадь — 168 см^2 . Найти другую сторону прямоугольника.
242. Сторона прямоугольника равна 8 см и образует с диагональю угол 30° . Найти площадь прямоугольника.
243. Найти стороны прямоугольника, если они относятся как 4:7, а площадь прямоугольника — 112 см^2 .
244. Площадь прямоугольника равна 21 см^2 . Найти стороны прямоугольника, если одна из них на 4 см больше другой.

245. Квадрат и прямоугольник имеют равные площади. Сторона квадрата равна 8 см, а одна из сторон прямоугольника 16 см. Найти другую сторону прямоугольника.

246. Найти площадь квадрата, если радиус окружности, описанной около него, равен R .

247. Площадь квадрата численно равна его периметру. Найти сторону квадрата.

248. $ABCD$ — квадрат (рис. 24). Отрезки MK и PE параллельны его сторонам. Используя

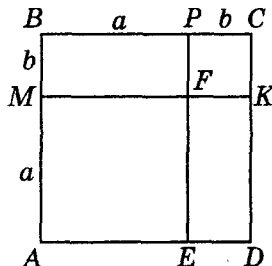


Рис. 24

- рисунок, доказать формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
249. Могут ли два неравных квадрата иметь равные площади?
250. Как изменится площадь квадрата, если его сторону: 1) увеличить в 7 раз; 3) увеличить в m раз; 2) уменьшить в 4 раза;
251. Как изменится площадь квадрата, если его диагональ увеличить в 4 раза? Как изменится при этом периметр квадрата?
252. Как изменится площадь прямоугольника, если: 1) одну из его сторон увеличить в 3 раза; 2) одну из его сторон уменьшить в 5 раз; 3) обе стороны увеличить в 7 раз; 4) одну сторону увеличить в 4 раза, а другую — в 6 раз;

- 5) одну сторону увеличить в 8 раз, а другую уменьшить в 2 раза;
- 6) одну сторону увеличить в k раз, а другую — в p раз;
- 7) одну сторону увеличить в m раз, а другую уменьшить в n раз?
253. Отношение площадей двух квадратов равно 3. Найти отношение их периметров.
254. Построить квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов.
255. Построить квадрат, площадь которого в 3 раза больше площади данного квадрата.
256. Стороны прямоугольника равны a и b . Построить квадрат, площадь которого равна площади данного прямоугольника.
257. Как разрезать на части два маленьких равных квадрата, чтобы из них можно было сложить один большой квадрат?
258. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна 3 см. Найти площадь квадрата, вписанного в эту окружность.

Площадь параллелограмма. Площадь ромба

259. Найти площадь параллелограмма, сторона которого равна 18 см, а высота, проведенная к ней, — 7 см.
260. На рис. 25 указать параллелограммы, имеющие равные площади.
261. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны 9 см и 12 см, а угол между ними — 60° .

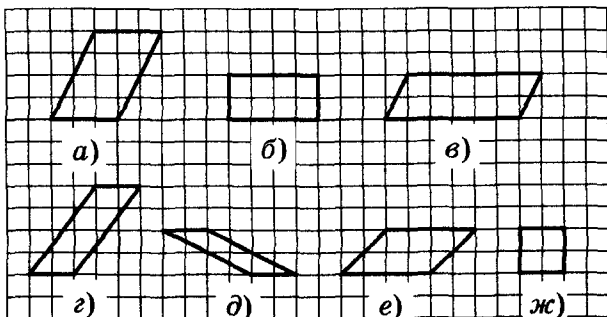


Рис. 25

262. Найти площадь ромба, сторона которого равна $5\sqrt{3}$ см, а один из углов — 120° .
263. Среди всех ромбов с заданной стороной указать ромб наибольшей площади.
264. Углы ромба относятся как 1:3, а его сторона равна 8 см. Найти площадь ромба.
265. Площадь параллелограмма равна 48 см^2 . Найти расстояние между сторонами параллелограмма, длины которых 6 см.
266. Одна из сторон параллелограмма равна 4 см, а высота, проведенная к другой стороне, — 8 см. Найти неизвестные стороны и высоту параллелограмма, если его площадь равна 96 см^2 .
267. Стороны параллелограмма равны 9 см и 12 см, а одна из высот — 4 см. Найти другую высоту параллелограмма. Сколько решений имеет задача?
268. Площадь параллелограмма равна 54 см^2 , а его высота на 3 см больше стороны, к которой она проведена. Найти эту сторону параллелограмма и высоту, проведенную к ней.
269. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны, а отношение их площадей равно $\sqrt{2}$. Найти углы параллелограмма.
270. Стороны параллелограмма равны 6 см и 8 см. Может ли его площадь быть равной 49 см^2 ?
271. Высоты параллелограмма равны 8 см и 10 см, а угол между ними — 60° . Найти площадь параллелограмма.
272. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны 9 см и 15 см, а одна из диагоналей перпендикулярна стороне.
273. Доказать, что прямая, проходящая через центр симметрии параллелограмма, делит его на две части равной площади.

Площадь треугольника

274. Сторона треугольника равна 8 см, а высота, проведенная к ней, — 4,5 см. Найти площадь треугольника.
275. Площадь треугольника равна 84 см^2 . Найти высоту треугольника, проведенную к стороне длиной 8 см.
276. Найти площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны 6 см и 9 см.

277. На рис. 26 указать треугольники, имеющие равные площади.

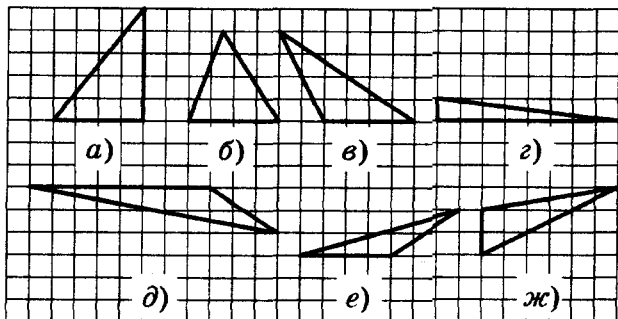


Рис. 26

278. Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 4 см и 7 см, а угол между ними: 1) 30° ; 2) 120° .
279. Две стороны треугольника равны 4 см и 8 см. Может ли его площадь быть равной: 1) 12 см^2 ; 2) 16 см^2 ; 3) 18 см^2 ?
280. Основание треугольника 8 см, а высота, проведенная к ней, — 3 см. Какой должна быть высота второго треугольника с основанием 6 см, чтобы его площадь была в 3 раза больше площади первого треугольника?
281. Найти площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 6 см, а боковая сторона — 5 см.
282. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найти высоту треугольника, проведенную к гипотенузе.
283. Как изменится площадь треугольника, если:
- 1) его высоту увеличить в 3 раза;
 - 2) его основание уменьшить в 5 раз;
 - 3) высоту увеличить в 5 раз, а основание уменьшить в 2 раза;
 - 4) основание увеличить в 7 раз, а высоту — в 8 раз?
284. В треугольнике ABC $AB : BC = 2 : 3$. Найти отношение высот треугольника, проведенных из вершин C и A .
285. Доказать, что большей стороне треугольника соответствует меньшая высота.
286. Доказать, что медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади.

287. O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Доказать, что площади треугольников AOB и COD равны.
288. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, делит ее на отрезки длиной 8 см и 5 см, считая от вершины угла при основании. Найти площадь треугольника.
289. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 12 см. Найти площадь треугольника, если отношение боковой стороны к основанию равно $\frac{5}{6}$.
290. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 30° , а его площадь — 150 см^2 . Найти стороны треугольника.
291. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, а синус угла, лежащего против него, равен 0,8. Найти площадь треугольника.
292. Найти площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 26 см, а разность катетов — 14 см.
293. Найти площадь прямоугольного треугольника, если высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки длиной 6 см и 24 см.
294. Найти площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см.
295. Найти площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 26 см, а радиус вписанной окружности — 4 см.
296. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписана окружность с центром O и радиусом $\sqrt{3}$ см (рис. 27). Найти площадь треугольника, если $\angle OBC = 30^\circ$.
297. Сторона квадрата $ABCD$ равна 14 см. На сторонах BC и CD взяты такие точки E и F соответственно, что $BE = 4$ см, $DF = 9$ см. Найти площадь треугольника AEF (рис. 28).

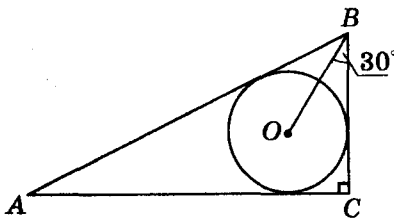


Рис. 27

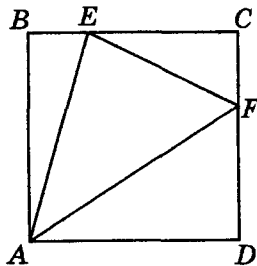


Рис. 28

298. Найти площадь треугольника, изображенного на рис. 29.

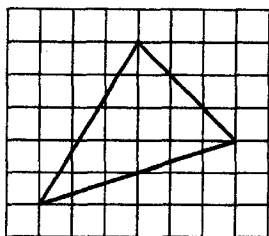


Рис. 29

299. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписан квадрат $MKPC$ (рис. 30). Найти его площадь, если $AC = 6$ см, $BC = 4$ см.

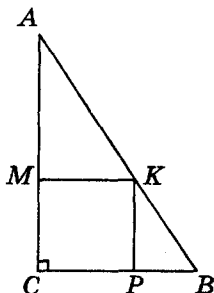


Рис. 30

300. Площадь треугольника ABC равна 28 см². Точка D делит сторону BC в отношении $3:1$, считая от точки B . Найти площади треугольников ABD и ACD .

301. В треугольнике ABC $AB = 14$ см, $BC = 8$ см. В каком отношении делит площадь треугольника ABC биссектриса угла B ?

302. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 31), $AO = OB$, $CO = 3$ см, $OD = 5$ см. Найти отношение площадей треугольников AOC и DOB .

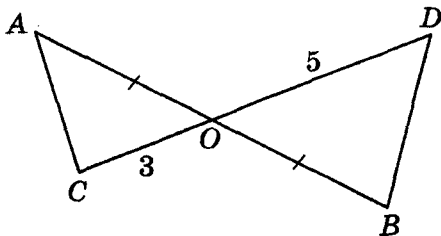


Рис. 31

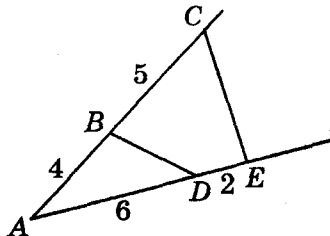


Рис. 32

303. На сторонах AC и AE угла A отложены отрезки $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AD = 6$ см, $DE = 2$ см (рис. 32). Найти отношение площадей треугольника ABD и четырехугольника $BCED$.

304. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно так, что $BM : MC = 3 : 1$, $CK : KD = 1 : 2$. Площадь треугольника MCK равна 6 см². Найти площадь квадрата $ABCD$.

305. Через вершину треугольника провести прямую так, чтобы она разделила его площадь в отношении: 1) 2:1; 2) 2:3.
306. Через вершину параллелограмма провести прямую так, чтобы она разделила его площадь в отношении 2:3.
307. Построить равнобедренный треугольник, равновеликий данному треугольнику, так, чтобы боковая сторона равнобедренного треугольника была равна одной из сторон данного треугольника.
308. Найти площадь ромба, диагонали которого равны 8 см и 5 см.
309. Найти площадь ромба, если его сторона равна 15 см, а сумма диагоналей — 42 см.
310. Найти площадь ромба, если его диагонали относятся как 5:12, а высота равна 60 см.
311. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей ромба к стороне, делит ее на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найти площадь ромба.
312. Угол между диагоналями прямоугольника равен 60° , а его площадь — 12 см^2 . Найти стороны прямоугольника.
313. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. На сторонах AB и BC взяты такие точки E и F , что треугольник DEF — равносторонний. Найти его площадь.
314. Найти площадь треугольника, стороны которого равны 26 см, 28 см и 30 см.
315. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки длиной 5 см и 6 см. Найти площадь треугольника, если меньшая из двух других сторон равна 15 см.
316. Найти наименьшую высоту треугольника, стороны которого равны 7 см, 8 см и 9 см.
317. Три окружности, радиусы которых равны 12 см, 14 см и 16 см, попарно касаются друг друга. Определить площадь треугольника, вершины которого лежат в центрах этих окружностей.
318. В треугольник со сторонами 26 см, 15 см и 37 см вписана окружность и центр окружности соединен с вершинами треугольника. Найти площади полученных трех треугольников.

Площадь трапеции

319. Найти площадь трапеции, основания которой равны 8 см и 11 см, а высота — 4 см.
320. Площадь трапеции равна 168 см^2 , одно из ее оснований — 15 см, а высота — 9 см. Найти второе основание трапеции.

321. Площадь трапеции равна 24 см^2 , а ее высота — 4 см. Найти основания трапеции, если они относятся как 1:5.
322. Найти площадь трапеции, основания которой 6 см и 12 см, а боковая сторона длиной 8 см образует с меньшим основанием угол 120° .
323. Найти площадь трапеции $ABCD$ (рис. 33).

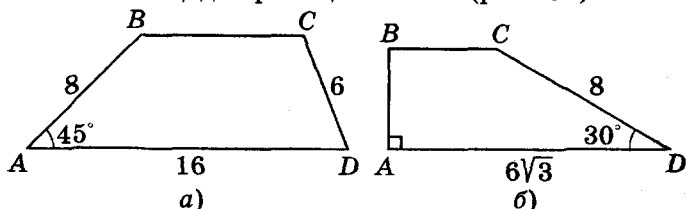


Рис. 33

324. Основания равнобедренной трапеции равны 9 см и 27 см, а диагональ — 45 см. Найти площадь трапеции.
325. Найти площадь равнобедренной трапеции, большее основание которой равно 9 см, боковая сторона — 8 см, а тупой угол — 135° .
326. Найти площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой перпендикулярны, а основания равны 14 см и 18 см.
327. Найти площадь равнобедренной трапеции, основания которой 10 см и 12 см, а диагонали являются биссектрисами ее острых углов.
328. Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 28 см, а разность оснований — 9 см. Найти площадь трапеции, если ее меньшая диагональ является биссектрисой прямого угла.
329. Найти площадь прямоугольной трапеции, большее основание которой равно 14 см, большая боковая сторона — 12 см и острый угол равен 60° .
330. Разность оснований прямоугольной трапеции равна 10 см, а разность боковых сторон — 2 см. Найти площадь трапеции, если ее большая диагональ равна 30 см.
331. Периметр равнобедренной трапеции равен 50 см, а острый угол — 60° . Найти площадь трапеции, если ее диагональ является биссектрисой острого угла трапеции.
332. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если проекция диагонали на большее основание равна 6 см.
333. Найти площадь трапеции, основания которой равны 6 см и 8 см, а углы при большем основании — 30° и 45° .

334. Площадь трапеции равна 56 см^2 , а ее высота — 4 см. Найти основания трапеции, если их разность равна 4 см.
335. Найти площадь трапеции, основания которой равны 15 см и 29 см, а боковые стороны — 13 см и 15 см.
336. В равнобедренную трапецию вписана окружность, делящая боковую сторону трапеции на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найти площадь трапеции.
337. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 4 см, а острый угол трапеции — 30° . Найти ее площадь.
338. Длины боковых сторон трапеции равны 20 см и 13 см, а разность оснований — 21 см. Найти площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.
339. Периметр трапеции равен 66 см, а точка касания вписанной окружности делит боковую сторону на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найти площадь трапеции.
340. Больше основание равнобедренной трапеции в 2 раза больше меньшего основания, а диагональ трапеции является биссектрисой ее острого угла. Найти площадь трапеции, если радиус окружности, описанной около нее, равен 2 см.

Площадь многоугольника

341. Диагонали четырехугольника равны 4 см и 8 см, а угол между ними — 30° . Найти площадь четырехугольника.
342. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника равен 4 см. На сторонах треугольника с внешней стороны построены квадраты и их вершины последовательно соединены. Найти площадь образовавшегося шестиугольника.
343. Выразить площадь правильного шестиугольника через длину его большей диагонали.
344. Вычислить площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 4 см.
345. Найти отношение площадей правильного треугольника, четырехугольника и шестиугольника, стороны которых равны.
346. Квадрат со стороной 1 см срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Найти его площадь.
347. Сторона правильного треугольника равна 4 см. В треугольник вписана окружность, а в окружность — правильный шестиугольник. Найти площадь шестиугольника.
348. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M . Площади треугольников AMB , VMC

и CMD соответственно равны 6 см^2 , 4 см^2 и 8 см^2 . Найти площадь треугольника AMD .

349. В окружность вписан четырехугольник, стороны которого последовательно равны 3 см, 5 см, 8 см, 10 см. Найти площадь четырехугольника.

Площади подобных фигур

350. Стороны двух правильных треугольников относятся как 5:7. Как относятся их площади?
351. Сторона одного квадрата равна диагонали другого. Как относятся их площади?
352. Найти отношение площадей частей, на которые делит треугольник средняя линия.
353. Площади двух квадратов относятся как 2:5. Сторона большего квадрата равна 8 см. Найти сторону меньшего квадрата.
354. Периметры подобных многоугольников относятся как 3:8, а разность их площадей равна 385 см^2 . Найти площади многоугольников.
355. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на две части равной площади. Найти отрезок этой прямой, расположенный между сторонами треугольника, если основание треугольника равно 6 см.
356. Сторона AB треугольника ABC разделена на части в отношении 3:4:5, считая от вершины A , и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC . Найти отношение площадей полученных частей.
357. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 см. Прямая, параллельная медиане треугольника, проведенной к гипотенузе, делит треугольник на части, площади которых относятся как 1:5. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.
358. M — середина стороны BC квадрата $ABCD$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке P . Найти площадь треугольника APD , если площадь треугольника BPM равна 6 см^2 .
359. Провести прямую, параллельную медиане данного треугольника, так, чтобы она отсекала $\frac{1}{4}$ часть его площади.
360. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E . Найти площадь трапеции, если $AD : BC = 7 : 5$, а площадь треугольника AED равна 98 см^2 .

Площадь круга и его частей

361. Найти площадь круга, радиус которого равен:
1) 3 см; 2) π см; 3) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ см.
362. Найти с точностью до десятых радиус круга, площадь которого равна 4 см^2 .
363. Радиус круга уменьшили в 3 раза. Как при этом изменилась площадь круга?
364. Найти площадь круга, длина окружности которого равна 8π см.
365. Длины двух окружностей равны 8π см и 12π см. Чему равно отношение площадей соответствующих кругов?
366. Найти площадь круга, описанного около правильного треугольника, площадь которого равна $9\sqrt{3} \text{ см}^2$.
367. Найти отношение площадей вписанного и описанного кругов правильного шестиугольника.
368. Найти площадь кольца, расположенного между двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны 4 см и 6 см.
369. Найти площадь сектора круга радиуса 5 см, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) 20° ; 2) 150° ; 3) 240° .
370. Какую часть круга составляет площадь сектора, если соответствующий сектору центральный угол равен: 1) 40° ; 2) 105° ; 3) 330° ?
371. Площадь сектора составляет $\frac{3}{8}$ площади круга. Найти градусную меру центрального угла, соответствующего данному сектору.
372. Найти радиус круга, если площадь сектора этого круга равна $8,5 \text{ см}^2$, а центральный угол, соответствующий этому сектору, равен 108° .
373. Найти площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 10 см, а дуга сектора содержит: 1) 30° ; 2) 135° ; 3) 210° .
374. Найти площадь кругового сегмента, если его основание равно 4 см, а дуга содержит: 1) 45° ; 2) 300° .
375. Может ли сегмент круга быть одновременно и сектором?
376. Найти площади заштрихованных фигур, изображенных на рис. 34.
377. Найти площадь круга, вписанного в равнобедренный треугольник, основание которого равно 10 см, а боковая сторона — 13 см.

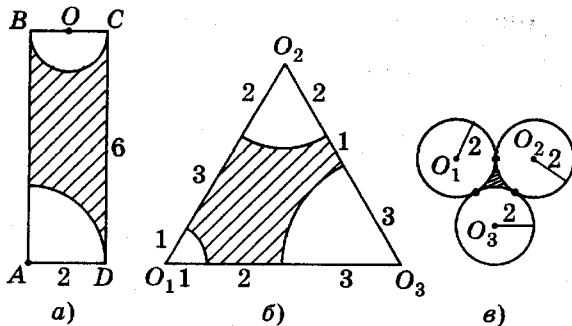


Рис. 34

378. Острый угол ромба равен 30° , а площадь круга, вписанного в ромб, равна 6π см². Найти площадь ромба.
379. Два круга имеют общую хорду. Найти отношение площадей этих кругов, если из центра первого круга общую хорду видно под углом 60° , а из центра второго — под углом 120° .
380. В правильный треугольник, сторона которого равна 4 см, вписана окружность, и около него же описана окружность. Найти площадь кругового кольца, расположенного между этими окружностями.
381. Длины сторон треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. В него вписан полукруг, диаметр которого лежит на большей стороне треугольника. Найти площадь полукруга.
382. На стороне правильного треугольника со стороной 6 см построен полукруг, лежащий в той же полуплоскости, что и треугольник. Определить площадь той части треугольника, которая лежит вне полукруга.
383. Радиус круга равен 4 см. В нем проведена хорда, длина которой равна стороне правильного треугольника, вписанного в этот круг. Найти площадь большего из сегментов, определяемых этой хордой.
384. В круговой сектор, дуга которого содержит 60° , вписан круг радиусом 3 см. Найти площадь сектора.
385. Радиус круга равен 2 см. По разные стороны от центра круга проведены параллельные хорды, одна из которых равна стороне правильного вписанного четырехугольника, а другая — стороне правильного вписанного шестиугольника. Найти площадь части круга, расположенной между хордами.

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

386. Могут ли две различные плоскости иметь только одну общую точку?
387. Сколько различных плоскостей можно провести через две произвольные точки?
388. Можно ли утверждать, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и вторую: 1) на плоскости; 2) в пространстве?
389. Точки A , B , C и D не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые AB и CD пересекаться?
390. Через точки A и B прямой l проведены перпендикулярные к ней прямые AC и BD . Верно ли, что прямые AC и BD параллельны: 1) на плоскости; 2) в пространстве?
391. Прямые a и b не лежат в одной плоскости и прямые b и c не лежат в одной плоскости. Верно ли, что прямые a и c не лежат в одной плоскости?
392. Точка A не принадлежит плоскости α . Сколько существует прямых, проходящих через точку A и параллельных плоскости α ?
393. Прямая a параллельна плоскости α . Существуют ли в плоскости α прямые, не параллельные прямой a ?
394. Могут ли быть параллельными плоскости, проходящие через непараллельные прямые?
395. Верно ли, что если прямая не перпендикулярна плоскости, то она не перпендикулярна ни одной прямой этой плоскости?
396. Прямая b перпендикулярна плоскости β . Сколько существует плоскостей, содержащих прямую b и перпендикулярных плоскости β ?

Призма

397. На рис. 35 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Указать:
- 1) ребра, параллельные ребру AD ;
 - 2) ребра, перпендикулярные ребру AA_1 ;

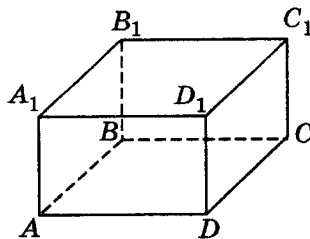


Рис. 35

- 3) ребра, скрещивающиеся с ребром CC_1 ;
 4) ребра, параллельные грани ABC ;
 5) ребра, перпендикулярные грани A_1B_1B ;
 6) грани, перпендикулярные грани $A_1B_1C_1$.
398. Найти полную поверхность и объем куба с ребром 4 см.
 399. Найти площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда (рис. 35), если $AB = 4$ см, $BC = 3$ см, $AA_1 = 5$ см.
 400. В основании прямой призмы лежит параллелограмм, стороны которого равны 6 см и 8 см, а острый угол — 60° . Найти площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем призмы, если ее высота равна 10 см.
 401. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а высота — 5 см. Найти площадь боковой поверхности и объем призмы.
 402. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 10 см, а один из катетов — 6 см. Найти площадь боковой поверхности и объем призмы, если ее высота равна 5 см.
 403. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция с основаниями 6 см и 12 см и боковой стороной 5 см. Найти площадь полной поверхности и объем призмы, если ее высота равна 4 см.

Пирамида

404. На рис. 36 изображена пирамида $SABCD$. Назвать:
 1) основание пирамиды; 3) боковые ребра пирамиды;
 2) вершину пирамиды; 4) боковые грани пирамиды.

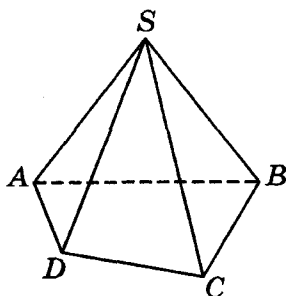


Рис. 36

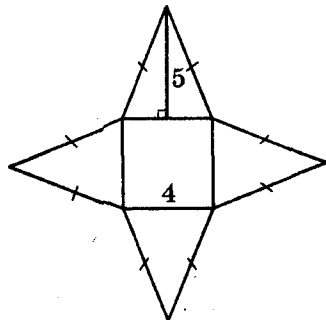


Рис. 37

405. Все грани треугольной пирамиды — правильные треугольники со стороной 8 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.
406. Вычислить площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, развертка которой изображена на рис. 37.
407. Боковые ребра SA , SB , SC и SD четырехугольной пирамиды $SABCD$ равны между собой, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle DSA = 45^\circ$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если $SA = 6$ см.
408. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной 4 см. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 3 см.
409. Найти объем правильной треугольной пирамиды (рис. 38), основание которой — треугольник MKP со стороной 6 см, DO — высота пирамиды, $DO = 4$ см.
410. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник MKP , $MK = MP = 13$ см, $KP = 24$ см. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 5 см.

Цилиндр

411. На рис. 39 изображен цилиндр. Назвать отрезок, который является:
- 1) высотой цилиндра;
 - 2) образующей цилиндра;
 - 3) радиусом нижнего основания цилиндра;
 - 4) радиусом верхнего основания цилиндра.
412. Радиус основания цилиндра равен 5 см, а его высота — 4 см. Найти площадь полной поверхности и объем цилиндра.

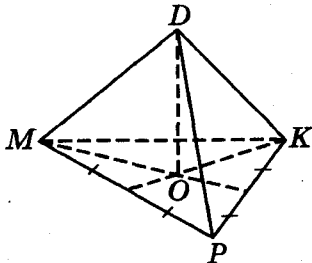


Рис. 38

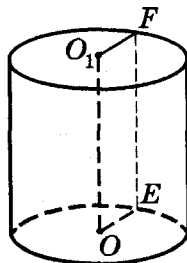


Рис. 39

413. Прямоугольник, стороны которого равны 10 см и 6 см, вращается вокруг большей стороны. Найти площадь полной поверхности и объем полученного цилиндра.

Конус

414. На рис. 40 изображен конус. Назвать отрезок, который является:
- 1) высотой конуса;
 - 2) образующей конуса;
 - 3) радиусом основания конуса.
415. Радиус основания конуса равен 15 см, а образующая — 17 см. Найти площадь полной поверхности и объем конуса.
416. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см, вращается вокруг меньшего катета. Найти площадь полной поверхности и объем полученного конуса.

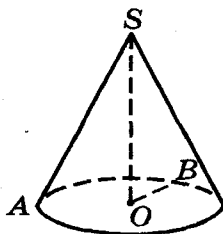


Рис. 40

417. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Он вращается сначала вокруг катета a , а затем вокруг катета b . Найти отношение объемов полученных конусов.

Шар

418. Найти площадь поверхности и объем шара, радиус которого равен 6 см.
419. Полукруг, диаметр которого равен 8 см, вращается вокруг этого диаметра. Найти площадь поверхности и объем полученного шара.
420. Радиус шара увеличили в три раза. Как при этом изменились площадь поверхности и объем шара?

Вариант 2

Подобие фигур. Гомотетия

1. Начертить в тетради отрезок $DC = 4$ см и отметить точку M , не принадлежащую этому отрезку. Построить отрезок, гомотетичный отрезку DC с центром гомотетии в точке M и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$.
2. Начертить в тетради острый угол и отметить точку F , лежащую на одной из сторон данного угла. Построить угол, гомотетичный данному углу с центром гомотетии в точке F и коэффициентом $k = 2$.
3. Построить прямоугольник, гомотетичный данному прямоугольнику с центром гомотетии в точке пересечения его диагоналей и коэффициентом гомотетии $k = 3$.
4. Отметить в тетради две точки P и D . Найти такую точку M , чтобы точка P переходила в точку D при гомотетии с центром M и коэффициентом $k = \frac{1}{4}$.
5. Гомотетия с центром в начале координат переводит точку $F(-4; 6)$ в точку $C(-12; 18)$. Найти коэффициент гомотетии.
6. Даны два параллельных, но не равных между собой отрезка. Можно ли один из них преобразовать в другой с помощью гомотетии? Как это сделать?
7. Могут ли два треугольника быть гомотетичными и равными?

Свойства подобных треугольников

8. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (рис. 41). Найти неизвестные стороны этих треугольников.

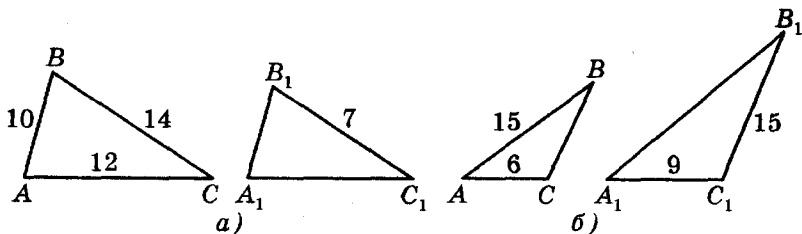


Рис. 41

9. Стороны треугольника относятся как 5:11:14. Найти стороны подобного ему треугольника, если у него:
- 1) периметр равен 120 см;
 - 2) средняя по величине сторона равна 55 см;
 - 3) меньшая сторона равна 15 см;
 - 4) сумма большей и средней по величине сторон равна 50 см.
10. Стороны многоугольника относятся как 6:5:4:7:9. Найти стороны подобного ему многоугольника, если его периметр равен 124 см.
11. Стороны треугольника относятся как 5:9:12, а большая из сторон подобного ему треугольника равна 48 см. Найти другие стороны второго треугольника.
12. Периметры подобных треугольников относятся как 3:4, а сумма их средних по величине сторон равна 112 см. Найти стороны обоих треугольников, если стороны одного из них относятся как 4:8:7.

Признаки подобия треугольников

13. Указать пары подобных треугольников и доказать их подобие (рис. 42).
14. Доказать, что два любых равносторонних треугольника подобны.

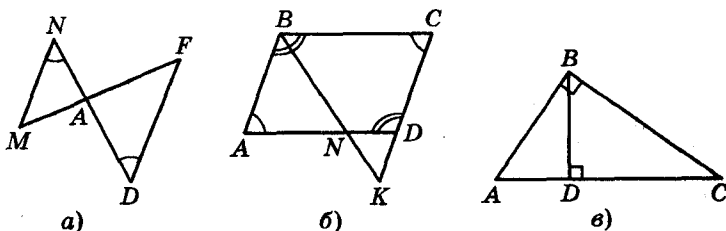


Рис. 42

15. У двух равнобедренных треугольников углы при вершине равны. Периметр первого треугольника равен 110 см. Найти его стороны, если стороны второго треугольника относятся как: 1) 4:9; 2) 3:4.
16. У двух равнобедренных треугольников углы при основании равны. Основание первого треугольника равно 16 см, а высота, проведенная к ней, равна 6 см. Найти стороны второго треугольника, если его периметр равен 54 см.
17. Два прямоугольных треугольника имеют по равному острому углу. Катеты первого треугольника относятся как 7:24. Найти гипотенузу второго треугольника, если его периметр равен 168 см.
18. Углы одного треугольника относятся как 1:3:5, а один из углов другого треугольника на 40° больше второго и на 40° меньше третьего угла. Подобны ли эти треугольники?
19. Доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 43).
20. Найти пары подобных треугольников и доказать их подобие (рис. 44).
21. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, а стороны треугольника ABC , образующие угол C , в 1,5 раза больше сторон, образующих угол C_1 . Найти стороны AB и A_1B_1 , если их разность равна 3 см.

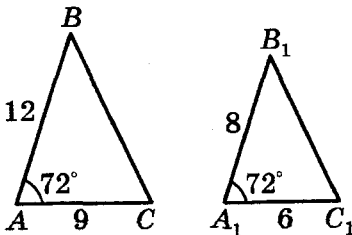


Рис. 43

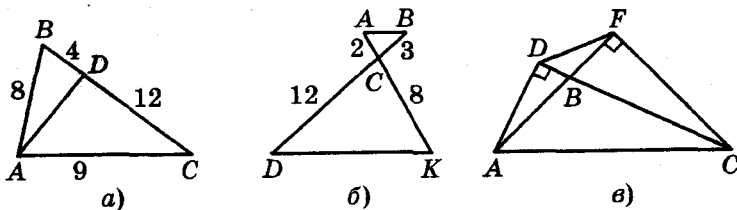


Рис. 44

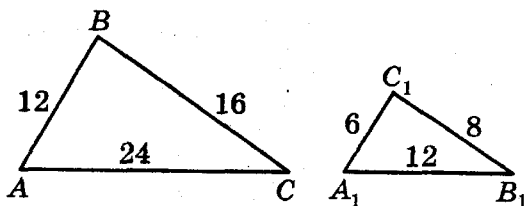


Рис. 45

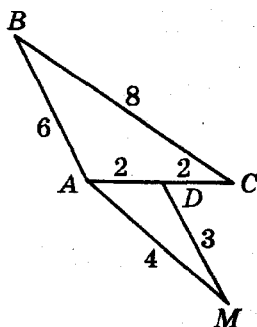


Рис. 46

22. В треугольнике ABC $AC = 54$ см, $BC = 42$ см. На стороне CB отложили отрезок $BD = 35$ см, а на стороне AC — отрезок $CN = 9$ см. Подобны ли треугольники ABC и NDC ?
23. Доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 45).
24. Указать пару подобных треугольников и доказать их подобие (рис. 46).
25. Определить, подобны ли треугольники, если стороны их равны:
- 1) 9 см, 10 см, 14 см и 36 см, 40 см, 56 см;
 - 2) 7 см, 11 см, 13 см и 22 см, 33 см, 39 см.
26. Стороны одного треугольника равны 27 см, 33 см и 48 см, а стороны второго треугольника относятся как 9:11:16. Подобны ли эти треугольники?
27. Катеты одного прямоугольного треугольника относятся как 4:3, а гипотенуза и высота, проведенная к ней, второго треугольника равны 150 см и 72 см. Подобны ли эти треугольники?
28. На рис. 47 $CD \parallel AK$. Записать пропорции, начинающиеся отношениями: 1) $\frac{BC}{BA}$; 2) $\frac{AK}{CD}$; 3) $\frac{BC}{CD}$; 4) $\frac{AB}{BK}$.
29. В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BM и CN (рис. 47). Доказать подобие треугольников ABM и BCN .
30. Высоты параллелограмма равны 12 см и 18 см, а меньшая сторона параллелограмма равна 6 см. Найти большую сторону.
31. Периметр параллелограмма равен 64 см, а его высоты — 7 см и 9 см. Найти стороны параллелограмма.

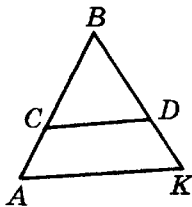


Рис. 47

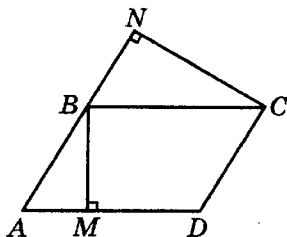


Рис. 48

32. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M . Большее основание $AD = 26$ см, $MC = 9$ см, $CD = 4$ см. Найти меньшее основание трапеции.
33. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке N , $DN = 36$ см. Найти CD , если $AB : BN = 5 : 7$.
34. Точка пересечения диагоналей трапеции делит одну из диагоналей на отрезки длиной 7 см и 11 см. Найти основания трапеции, если их разность равна 16 см.
35. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) K — точка пересечения диагоналей. $AK : KC = 4 : 9$, а $KD - BK = 10$ см. Найти BD .
36. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка M так, что $\angle ACM = \angle ABC$, $AM = 9$ см, $BM = 7$ см. Найти AC .
37. В треугольник ABC вписан параллелограмм $DQCM$ (рис. 49), $AC = 10$ см, $MC = 4$ см, $QC = 9$ см. Найти BC .
38. В треугольник ABC вписан ромб $DMNA$ так, что угол A у них общий, а вершина M принадлежит стороне BC . $CM = 6$ см, $BM = 4$ см, $AB = 20$ см. Найти сторону ромба.
39. В треугольник с основанием 12 см вписан прямоугольник, стороны которого равны 8 см и 5 см. Большая сторона прямоугольника принадлежит основанию. Найти высоту треугольника, проведенную к основанию.
40. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 30 см, а высота, проведенная к боковой стороне, — 36 см. Найти стороны треугольника.

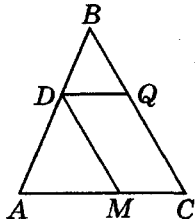


Рис. 49

41. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а боковая сторона — 15 см. Вычислить:
1) радиус окружности, вписанной в треугольник;
2) радиус окружности, описанной около треугольника.

**Пропорциональные отрезки
в прямоугольном треугольнике**

42. Найти высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если она делит гипотенузу на отрезки длиной 12 см и 27 см.
43. Катет прямоугольного треугольника равен 15 см, а его проекция на гипотенузу — 9 см. Найти гипотенузу.
44. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки длиной 40 см и 10 см. Найти катеты треугольника.
45. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 18 см, а проекция второго катета на гипотенузу — 9 см. Найти второй катет и гипотенузу.
46. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 16 см. Найти высоту треугольника, проведенную из вершины прямого угла.
47. Найти высоту и боковую сторону равнобедренной трапеции, основания которой равны 10 см и 8 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.
48. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Высота трапеции равна 12 см, а боковая сторона — $4\sqrt{13}$ см. Найти основания трапеции.
49. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей ромба к его стороне, делит ее на отрезки длиной 4 см и 25 см. Найти диагонали ромба.
50. Точка касания окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, делит ее боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 2 см. Найти радиус окружности и основания трапеции.

Углы, вписанные в окружность

51. Найти градусную меру угла, вписанного в окружность, если соответствующий ему центральный угол равен:
1) 32° ; 2) 134° ; 3) 180° ; 4) 320° ; 5) β .
52. Определить градусную меру центрального угла, если градусная мера соответствующего ему вписанного угла равна: 1) 21° ; 2) 89° ; 3) 90° ; 4) 167° ; 5) β .

53. Точка A окружности и ее центр O лежат по разные стороны от хорды MN . Найти: 1) угол MAN , если $\angle MON = 136^\circ$; 2) угол MON , если $\angle MAN = 129^\circ$.
54. Точки K и D лежат на окружности по одну сторону от хорды AB . Найти угол AKB , если $\angle ADB = 129^\circ$.
55. Точки K и D лежат на окружности по разные стороны от хорды AB , $\angle AKB = 107^\circ$. Найти угол ADB .
56. Около треугольника DEF описана окружность с центром O . Найти угол DOF , если: 1) $\angle E = 38^\circ$; 2) $\angle E = 148^\circ$.
57. Хорды CD и CE лежат по разные стороны от центра O окружности, $\angle ECD = 84^\circ$, $\angle COE : \angle DOE = 9 : 14$. Найти углы COE и DOE .
58. Определить углы равнобедренного треугольника, вписанного в окружность, основание которого стягивает дугу в 192° .
59. Хорда делит окружность в отношении $8:7$. Определить величины вписанных углов, опирающихся на эту хорду.
60. В окружности проведена хорда AB . Из точки A к ней проведен перпендикуляр, который делит большую из дуг окружности в отношении $5:2$. Определить градусные меры дуг, на которые делит окружность хорда AB .
61. Окружность разделена четырьмя точками на части, относящиеся как $3:5:7:9$ и точки деления последовательно соединены между собой. Определить углы образовавшегося четырехугольника.
62. Точки D и B лежат по одну сторону от диаметра AC (рис. 50). Найти угол ABD , если $\angle DAC = 52^\circ$.
63. В окружности с центром O проведены два диаметра AB и KE . Точки P и E лежат по одну сторону от диаметра AB (рис. 51). Найти угол ABE , если $\angle PKE = 16^\circ$, $\angle BAP = 48^\circ$.
64. На основании AB равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность с центром O , пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Найти градусные меры дуг AD , DE и BE , если $\angle ACB = 86^\circ$.

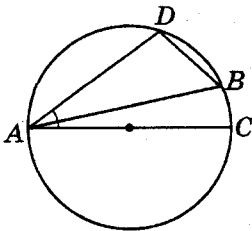


Рис. 50

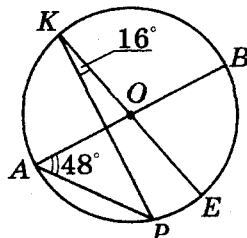


Рис. 51

65. Продолжение высоты BD треугольника ABC пересекает окружность, описанную около треугольника, в точке F . H — точка пересечения высот треугольника. Доказать, что $HD = DF$.
66. Две окружности пересекаются в точках D и C . Через точку D проведена секущая, пересекающая окружность в точках E и F . Доказать, что величина угла FCE постоянна для каждой секущей, проходящей через точку D .
67. O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника DEF . Найти углы треугольника DEF , если $\angle DOE = 116^\circ$. Сколько решений имеет задача?
68. Найти геометрическое место точек середин всех хорд, проходящих через данную внутреннюю точку окружности.
69. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок MK виден под заданным углом β (рис. 52).

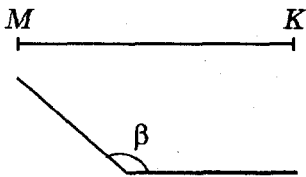


Рис. 52

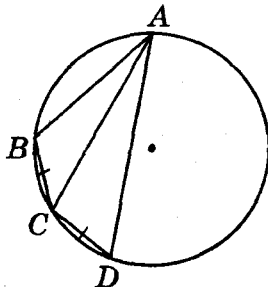


Рис. 53

70. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и медиане, проведенной к основанию.
71. Хорды BC и CD равны (рис. 53). Доказать равенство углов BAC и DAC .
72. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке K . Найти длину отрезка AK , если $KB = 8$ см, $CK = 6$ см, $KD = 4$ см.
73. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E , которая делит хорду AB на отрезки длиной 4 см и 9 см. На какие отрезки делит точка E хорду CD , если их сумма равна 15 см?

Угол, образованный касательной и хордой

74. Хорда DE стягивает дугу в 76° . Определить углы, образованные хордой и касательной, проведенной к окружности в точке E .

75. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB , BC и AC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Найти углы треугольника $A_1B_1C_1$, если $\angle A = 52^\circ$, $\angle B = 26^\circ$.
76. На продолжении диаметра AB окружности взята точка M и через нее проведена касательная MC к этой окружности (рис. 54). Найти угол ABC , если $\angle BCM = 124^\circ$.
77. Из точки M , лежащей вне окружности, проведена к ней секущая MP и луч ME (рис. 55). Доказать, что если треугольники MEK и MPE подобны, то луч ME касается окружности.

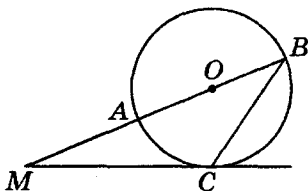


Рис. 54

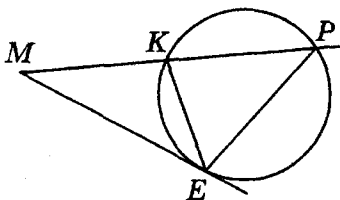


Рис. 55

78. Из точки M вне окружности проведены к ней касательная ME длиной 6 см и секущая MK , отрезок DM которой, лежащий вне окружности, равен 4 см. Найти длину отрезка секущей, расположенного внутри окружности.
79. Радиус окружности равен 10 см. Из точки вне окружности проведены к ней касательная длиной $2\sqrt{7}$ см и секущая, расстояние которой от центра окружности равно 8 см. Найти длину секущей.

Четырехугольник, вписанный в окружность

80. Можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, если:
- 1) $\angle B = 82^\circ$, $\angle D = 108^\circ$;
 - 2) $\angle A = 64^\circ$, $\angle B = 116^\circ$?
81. Найти углы A и B четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если $\angle C = 37^\circ$, $\angle D = 106^\circ$.
82. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого в порядке следования относятся как:
- 1) $3 : 7 : 6 : 2$;
 - 2) $5 : 9 : 10 : 7$?

83. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол A больше угла B на 58° и в 4 раза больше угла C . Найти углы четырехугольника.
84. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD = 74^\circ$, $\angle BCD = 106^\circ$, $\angle ABD = 47^\circ$, $\angle CBD = 58^\circ$. Определить угол между диагоналями четырехугольника, лежащий против стороны BC .
85. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точки пересечения окружностей проведены прямые, пересекающиеся в точке C и пересекающие окружности в точках M, K, P и E (рис. 56). Доказать, что треугольники CKP и CME подобны. Найти CK и CP , если $ME = 9$ см, $KP = 6$ см, $CM = 12$ см, $CE = 15$ см.

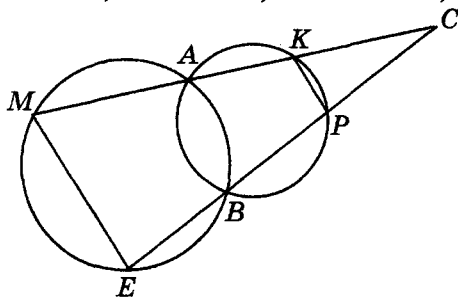


Рис. 56

86. Диагонали равнобедренной трапеции пересекаются под прямым углом. Определить положение центра окружности, описанной около трапеции, относительно трапеции.

Теорема косинусов

87. Найти сторону BC треугольника ABC , если:
- 1) $AB = 2\sqrt{3}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 30^\circ$;
 - 2) $AB = 4$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 120^\circ$.
88. Найти косинусы углов треугольника, стороны которого равны 7 см, 9 см и 11 см.
89. Две стороны треугольника равны 7 см и 8 см, а синус угла между ними равен $\frac{4\sqrt{3}}{7}$. Найти третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?
90. Диагонали параллелограмма равны 8 см и 10 см, а угол между ними — 30° . Найти стороны параллелограмма.

91. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно такие точки D и E , что $AD = 3$ см, $EC = 6$ см. Найти длину отрезка ED , если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 10$ см.
92. На стороне BC правильного треугольника ABC вне его построен прямоугольный треугольник BCD ($\angle C = 90^\circ$). Найти AD , если $AC = 3$ см, $DC = 6$ см.
93. Стороны треугольника, одна из которых на 8 см больше другой, образуют угол 120° , а третья сторона равна 28 см. Найти периметр треугольника.
94. Одна сторона треугольника равна 35 см, а две другие относятся как 3:8 и образуют угол 60° . Найти неизвестные стороны треугольника.
95. Две стороны треугольника равны 9 см и 21 см, а угол против большей из них равен 120° . Найти третью сторону треугольника.
96. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = BC = DC = 8$ см, $AD = 10$ см. Найти длину диагонали AC , применяя теорему косинусов.
97. Основание равнобедренного треугольника равно c , а угол при вершине — α . Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне треугольника.
98. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Найти длину диагонали AC .
99. Для сторон треугольника выполняется равенство $a^2 = c^2 + b^2 - cb$. Доказать, что угол, противолежащий стороне a , равен 60° .
100. Две стороны треугольника равны 16 см и 6 см, а угол между ними — 60° . Найти длину медианы, проведенной к третьей стороне треугольника.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма

101. Найти стороны параллелограмма, если они относятся как 8:19, а диагонали параллелограмма равны 30 см и 50 см.
102. Диагонали параллелограмма равны 18 см и 26 см, а одна из сторон на 10 см больше другой. Найти стороны параллелограмма.
103. Стороны треугольника равны 6 см, 12 см и 10 см. Найти медиану треугольника, проведенную к наименьшей стороне.
104. Две стороны треугольника равны 14 см и 22 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 12 см. Найти третью сторону треугольника.

105. Основание равнобедренного треугольника равно $8\sqrt{2}$ см, а боковая сторона — 12 см. Найти длину медианы треугольника, проведенной к боковой стороне.
106. Основание треугольника равно 42 см, а медианы, проведенные к боковым сторонам, — 30 см и 60 см. Найти третью медиану треугольника.
107. Доказать, что в каждом треугольнике отношение суммы квадратов сторон к сумме квадратов медиан является величиной постоянной. Найти эту постоянную.

Теорема синусов

108. В треугольнике ABC $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Найти сторону BC .
109. В треугольнике ABC $CB = 6\sqrt{3}$ см, $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 15^\circ$. Найти сторону AB .
110. В треугольнике ABC $AC = 9$ см, $BC = 7$ см. Может ли $\sin \angle A = \frac{4}{5}$?
111. В треугольнике ABC $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найти стороны BC и AC .
112. На рис. 57 $AC = b$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ADB = \gamma$, $AD = m$. Найти синус угла ABD .
113. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α , а биссектриса этого угла равна l . Найти стороны треугольника.
114. Диагональ равнобедренной трапеции равна d и делит острый угол на углы α и β (α — угол между диагональю и основанием трапеции). Найти стороны трапеции.
115. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) угол при вершине равен α , а биссектриса угла при основании равна l . Найти периметр треугольника.
116. На стороне AB ромба $ABCD$ отмечена точка E такая, что $\angle BCE : \angle DCE = 1 : 4$. Найти длины отрезков AE и CE , если $AB = a$, $\angle BCD = \alpha$.

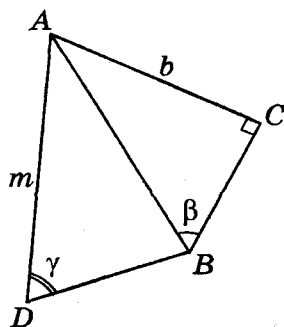


Рис. 57

117. На рис. 58 $CD = b$, $AD = c$,
 $\angle BCD = \alpha$, $\angle BDC = \beta$, $\angle ACB =$
 $= 90^\circ$, $\angle ADB = \gamma$. Найти AB .

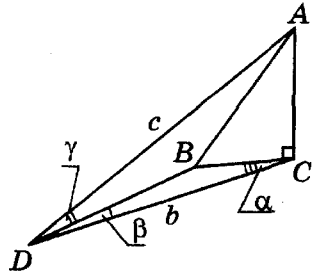


Рис. 58

118. Одна из сторон треугольника на 8 см больше другой, а углы, лежащие против этих сторон, равны 45° и 30° . Найти эти стороны треугольника.
119. Доказать, что треугольник ABC и треугольник, стороны которого равны синусам углов треугольника ABC , подобны.
120. Найти стороны треугольника ABC , если медиана AM равна m , $\angle BAM = \alpha$, $\angle CAM = \beta$.

Соотношения между углами треугольника и противоположными сторонами

121. В треугольнике ABC $AC > AB > BC$. Сравнить углы A , B и C .
122. В треугольнике ABC $\angle A = 89^\circ$, $\angle C = 23^\circ$. Сравнить стороны AB , BC и AC .
123. В треугольнике ABC AC — наибольшая сторона. Может ли угол B быть равным 59° ?
124. Определить вид треугольника, стороны которого равны:
 1) 5 см, 6 см, 8 см; 3) 5 см, 12 см, 13 см.
 2) 4 см, 7 см, 8 см;
125. В треугольнике ABC угол C больше 90° . На стороне BC взяли точку D и соединили ее с точкой A . Доказать, что $AD > AC$.
126. В треугольнике ABC AM — медиана, $\angle CAM > \angle BAM$. Доказать, что $AB > AC$.
127. У треугольников DEF и MKP $DE = MK$, $DF = MP$, $\angle EDF < \angle KMP$. Доказать, что $EF < KP$.
128. Высота BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки AD и DC , причем $AD < CD$. Доказать, что $\angle BAD > \angle BCD$.
129. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $BC = 2\sqrt{6}$ см, $\angle C = 60^\circ$. Найти угол A .
130. В треугольнике ABC $AC = 9$ см, $BC = 3\sqrt{3}$ см, $\angle A = 30^\circ$. Найти угол B . Сколько решений имеет задача?

Свойство биссектрисы треугольника

131. AK — биссектриса угла A треугольника ABC . Найти:
- 1) отрезки BK и KC , если $AB = 8$ см, $AC = 15$ см, $BC = 8$ см;
 - 2) сторону AB , если $BK : KC = 3 : 7$, $AC = 28$ см;
 - 3) стороны AB и AC , если $AC - AB = 9$ см, $BK : KC = 4 : 7$;
 - 4) стороны AB , BC и AC , если $AB - BK = 2$ см, $AC - CK = 3$ см, $AB + BC + AC = 25$ см.
132. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC . Сравнить углы BAM и CAM , если $AB = 9$ см, $BC = 16$ см, $BM = 5$ см, $AC = 8$ см.
133. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит противолежащий катет в отношении $2 : \sqrt{3}$. Найти острые углы треугольника.
134. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки длиной 12 см и 15 см. Найти другой катет и гипотенузу.
135. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет в отношении 17:15, а разность гипотенузы и большего катета равна 4 см. Найти стороны треугольника.
136. Высота треугольника делит сторону на отрезки длиной 5 см и 9 см. Найти длины отрезков, на которые делит эту сторону биссектриса треугольника, если разность двух других сторон равна 2 см.
137. Стороны прямоугольника относятся как 3:4, а биссектриса прямого угла делит диагональ на отрезки, разность которых равна 5 см. Найти стороны прямоугольника.
138. Биссектриса угла прямоугольника делит диагональ на отрезки длиной 30 см и 40 см. На какие отрезки делит эта диагональ сторону прямоугольника?
139. В прямоугольной трапеции большая диагональ делит высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 12 см, а большая боковая сторона трапеции равна меньшему основанию. Найти стороны трапеции.
140. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписан квадрат $MKDC$ так, что точка K лежит на гипотенузе AB . Найти длины отрезков AK и BK , если $AC = 21$ см, $BC = 28$ см.

141. Острый угол параллелограмма равен 60° . Его биссектриса делит сторону на отрезки длиной 9 см и 15 см, считая от вершины тупого угла. На какие отрезки делит эта биссектриса меньшую диагональ?
142. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника, касается его катетов. Найти катеты, если центр окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см.
143. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки, один из которых на 2 см больше другого. Найти стороны треугольника, если боковая сторона относится к основанию как 5:8.
144. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 9:4, а боковая сторона треугольника равна 18 см. Найти основание треугольника.
145. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 5:4. Найти периметр треугольника, если его боковая сторона меньше основания на 15 см.
146. Длина биссектрисы треугольника равна 16 см. Она образует с противоположной стороной угол 60° и делит ее в отношении 3:4. Найти эту сторону.

$$\text{Формула } \frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

147. В треугольнике ABC $BC = 5\sqrt{3}$ см, $\angle A = 120^\circ$. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника.
148. С помощью следствия из теоремы синусов найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с гипотенузой c .
149. Две стороны треугольника равны $2\sqrt{3}$ см и 8 см. Найти третью сторону треугольника, если она равна радиусу окружности, описанной около этого треугольника.
150. В треугольнике ABC $\angle C = 73^\circ$, $\angle B = 77^\circ$, BH — высота треугольника. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если радиус окружности, описанной около треугольника HBC , равен 4 см.

151. В треугольнике ABC $\angle C = \alpha$. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен R . Найти радиус окружности, описанной около треугольника AMB , где M — точка пересечения биссектрис треугольника ABC .
152. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона — 10 см. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника.
153. В равнобедренной трапеции основания равны 6 см и 24 см. Найти радиусы окружностей — описанной около этой трапеции и вписанной в нее, если известно, что они существуют.
154. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найти радиус окружности, описанной около трапеции, если ее боковая сторона равна $5\sqrt{2}$ см.
155. На стороне AB треугольника ABC взяли произвольную точку D . Доказать, что отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ADC и BDC , является величиной постоянной, то есть не зависит от выбора точки D .

Решение треугольников

156. Найти неизвестные стороны и углы треугольника ABC , если:
- 1) $AB = 12$ см, $\angle A = 74^\circ$, $\angle C = 39^\circ$;
 - 2) $BC = 6$ см, $\angle B = 21^\circ$, $\angle C = 56^\circ$;
 - 3) $AC = 7$ см, $BC = 9$ см, $\angle C = 80^\circ$;
 - 4) $AB = 8$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 100^\circ$;
 - 5) $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $AC = 8$ см;
 - 6) $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см;
 - 7) $BC = 5$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 130^\circ$;
 - 8) $AC = 6$ см, $AB = 8$ см, $\angle C = 10^\circ$;
 - 9) $BC = 8$ см, $AC = 7$ см, $\angle B = 10^\circ$;
 - 10) $BC = 8$ см, $AC = 3$ см, $\angle B = 70^\circ$.
157. В треугольнике ABC $\angle A = \angle B = 50^\circ$, $AB = 8$ см. Найти: 1) сторону AC ; 2) биссектрису AD ; 3) медиану CM ; 4) радиус вписанной окружности; 5) радиус описанной окружности.
158. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = CD = m$, угол при большем основании равен α , а диагональ образует с большим основанием угол β .

Найти: 1) диагональ AC ; 2) основание трапеции; 3) радиус окружности, описанной около трапеции; 4) радиус окружности, вписанной в треугольник AOD (O — точка пересечения диагоналей трапеции).

159. Меньшая сторона треугольника равна 4 см. В треугольнике вписана окружность, которая делится точками касания со сторонами на части, градусные меры которых относятся как 7:8:9. Найти две других стороны треугольника.
160. В треугольнике ABC $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. На сторонах треугольника вне его построены квадраты. Их вершины последовательно соединили так, что получили шестиугольник. Найти периметр шестиугольника. Решить задачу в общем виде, а также вычислить, если $BC = 6$ см, $\angle B = 65^\circ$, $\angle C = 50^\circ$.

Ломаная. Выпуклый многоугольник

161. Какие из приведенных на рис. 59 фигур можно назвать ломаными? Ответ обосновать. Среди выбранных ломаных указать простые.

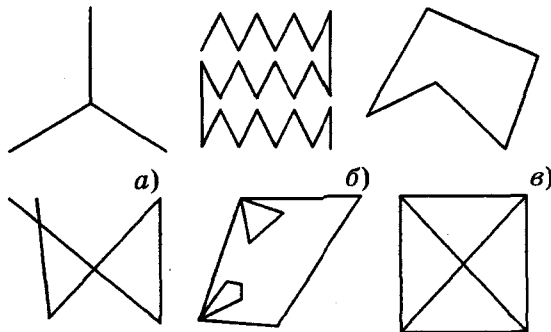


Рис. 59

162. Могут ли звенья замкнутой ломаной быть равными: 1) 4 см, 9 см, 23 см, 11 см; 2) 14 см, 8 см, 1 см, 2 см, 2 см; 3) 8 см, 17 см, 5 см, 1 см, 3 см? Ответ обосновать.
163. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого девятиугольника? Найти общее количество диагоналей выпуклого девятиугольника.

164. Доказать, что в выпуклом семиугольнике сумма длин диагоналей больше суммы длин сторон.
165. В выпуклом четырехугольнике последовательно соединены середины сторон. Доказать, что сумма длин диагоналей полученного четырехугольника больше полусуммы диагоналей данного четырехугольника.
166. Доказать, что для выпуклого четырехугольника сумма длин диагоналей больше полупериметра четырехугольника, но меньше периметра четырехугольника.

Сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника

167. Существует ли шестиугольник, все стороны которого равны и который не является правильным?
168. Может ли наибольший угол выпуклого шестиугольника быть равным 119° ?
169. Как изменится сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, если количество его сторон увеличится на 7?
170. Определить углы выпуклого Девятиугольника, если их градусные меры относятся как $5:6:7:8:8:9:9:9:9$.
171. Найти углы выпуклого пятиугольника, если один из них равен 115° , второй, третий и четвертый относятся как $7:5:3$, а пятый равен полуразности второго и четвертого углов.
172. Многоугольник имеет четыре острых угла. Доказать, что он не выпуклый.
173. Может ли сумма двух углов выпуклого шестиугольника быть больше суммы четырех других?
174. В выпуклом многоугольнике сумма его внутренних углов равна 2340° . Найти количество его сторон и диагоналей.
175. В выпуклом многоугольнике 54 диагонали. Найти количество его сторон и сумму углов.
176. В выпуклом многоугольнике сумма внешних углов в 5 раз меньше суммы внутренних. Найти количество сторон многоугольника.
177. Найти количество сторон выпуклого многоугольника, у которого сумма внутренних углов на 1080° больше суммы внешних.

Правильный многоугольник

178. Существует ли шестиугольник, не являющийся правильным, все стороны которого равны?
179. Какие из правильных n -угольников имеют центр симметрии?
180. Найти величины внутренних и внешних углов правильного n -угольника, если n равно: 1) 8; 2) 10; 3) 15.
181. Найти количество сторон правильного многоугольника, если: 1) его внутренний угол равен 172° ; 2) его внешний угол равен 24° .
182. Определить количество сторон правильного многоугольника, у которого внешний угол на 156° меньше внутреннего.
183. Сумма внешних углов правильного многоугольника вместе с одним из внутренних составляет 468° . Найти количество сторон многоугольника.
184. На рис. 60 изображен правильный пятиугольник $ABCDE$. Найти угол CAD .

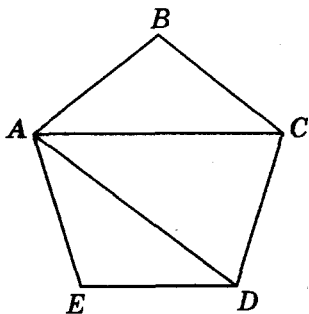


Рис. 60

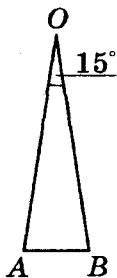


Рис. 61

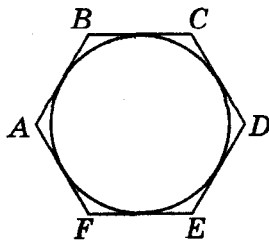


Рис. 62

185. Центр правильного многоугольника соединили с концами стороны AB (рис. 61). Как определить количество сторон многоугольника?
186. Найти величину центрального угла правильного n -угольника, если n равно: 1) 4; 2) 12; 3) 72.
187. Центральный угол правильного многоугольника равен 24° . Найти количество сторон многоугольника.
188. Какой наименьший внутренний угол может иметь правильный многоугольник?

189. На рис. 62 изображен правильный шестиугольник, в который вписана окружность. Как проще всего на этом рисунке построить правильный двенадцатиугольник, вписанный в окружность?
190. По данной стороне a построить правильный двенадцатиугольник.
191. Описать около данной окружности правильный восьмиугольник.
192. Доказать, что сумма центрального угла правильного многоугольника вместе с одним из внутренних углов составляет 180° .
193. В окружность вписан многоугольник, все стороны которого равны. Могут ли быть неравными его углы?
194. Доказать, что вершины правильного $2n$ -угольника, взятые через одну, являются вершинами правильного n -угольника.
195. Доказать, что если около многоугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность с тем же центром, то этот многоугольник правильный.

**Зависимость между сторонами и радиусами
вписанной и описанной окружностей
правильного многоугольника**

196. Сторона квадрата равна 6 см. Найти радиусы его вписанной и описанной окружностей.
197. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен 2 см. Найти сторону квадрата и радиус вписанной в него окружности.
198. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $4\sqrt{3}$ см. Найти радиус окружности, описанной около треугольника и сторону треугольника.
199. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен 6 см, а радиус вписанной в него окружности — $3\sqrt{2}$ см. Найти сторону многоугольника и количество его сторон.
200. Существует ли правильный многоугольник, у которого отношение стороны к радиусу вписанной окружности равно 2?
201. В квадрат со стороной 8 см вписана окружность. Найти сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

202. Найти радиусы окружностей, вписанной в правильный шестиугольник и описанной около него, если их разность равна 4 см.
203. В окружность вписан и около нее описан правильный треугольник. Найти отношение сторон этих треугольников.
204. В правильный треугольник со стороной a вписана окружность, а в окружность вписан квадрат. Найти радиус окружности, вписанной в квадрат.
205. Около правильного шестиугольника со стороной a описана окружность. Около окружности описан правильный треугольник. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.
206. Радиус окружности равен 8 см. В окружность вписан правильный треугольник и на его стороне построен квадрат. Найти радиус окружности, описанной около квадрата.
207. Середины сторон правильного восьмиугольника соединены через одну так, что образовался квадрат. Найти сторону квадрата, если сторона восьмиугольника равна a .
208. Найти длины диагоналей правильного восьмиугольника по радиусу R описанной окружности.
209. Центры двух пересекающихся окружностей лежат по одну сторону от общей хорды длиной 6 см, служащей для одной из этих окружностей стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной вписанного правильного шестиугольника. Найти расстояние между центрами окружностей.
210. Из одной вершины правильного шестиугольника проведены диагонали, которые делят его на четыре треугольника. Найти отношение высот этих треугольников, проведенных из общей вершины.
211. Углы правильного треугольника срезали так, что получили правильный шестиугольник. Найти сторону шестиугольника, если сторона треугольника равна a .
212. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две вершины квадрата лежали на одной стороне треугольника, а две других — на двух других сторонах треугольника.
213. В данный квадрат вписать другой квадрат с данной стороной.

214. Около правильного шестиугольника со стороной a описана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин шестиугольника является величиной постоянной. Найти ее.

Длина окружности и ее частей

215. Найти длину окружности, радиус которой равен:
1) 3 см; 2) 0,5 см; 3) 2π см; 4) $\frac{1}{\pi}$ см.
216. Найти длину окружности, радиус которой на π см меньше диаметра.
217. Чему равен радиус окружности, длина которой равна:
1) 1 см; 2) 8 см; 3) 3π см; 4) $9\pi^2$ см?
218. Как построить окружность, длина которой равна разности длин двух данных окружностей?
219. Радиус окружности уменьшили: 1) в 4 раза; 2) на 4 см. Как при этом изменилась длина окружности?
220. В окружности по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды длиной 12 см и 16 см. Расстояние между хордами равно 14 см. Найти длину окружности.
221. На катушку радиусом 1,5 см намотали 40 см веревки. Сколько сделали полных витков?
222. Найти скорость велосипедиста, проезжающего круговой маршрут диаметром 100 метров 45 раз за час. Результат округлить до целых.
223. Построить график зависимости радиуса окружности от его длины.
224. Радиус окружности равен 4 см. Найти длину дуги окружности, содержащей: 1) 1° ; 2) 45° ; 3) 135° ; 4) 180° ; 5) 345° .
225. Длина дуги окружности равна 8π см, а ее градусная мера — 24° . Найти радиус окружности.
226. Длина дуги окружности радиуса 20 см равна 5π см. Найти градусную меру дуги.
227. Начертить в тетради окружность радиуса 8 см. Отметить на ней дугу длиной 2π см.

228. Дуга окружности радиуса 6 см содержит 240° . Найти радиус окружности, длина которой равна длине этой дуги.

229. CA и CB — два равных перпендикулярных отрезка длины m . Проведена дуга AB окружности с центром C , а на отрезке AC как на диаметре построена полуокружность (рис. 63). Найти периметр фигуры, ограниченной дугой AB , отрезком BC и дугой AC .

230. Катеты AB и BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равны 8 см. Окружность с центром в точке B касается гипотенузы треугольника. Найти длину дуги окружности, расположенной внутри треугольника.

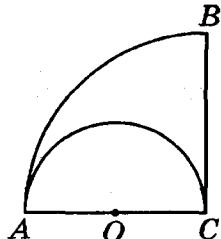


Рис. 63

231. На высоте BD равностороннего треугольника ABC , $AB = 6$ см, как на диаметре построена окружность. Найти длину дуги окружности, расположенной внутри треугольника.

232. В окружность радиусом $R = 1$ вписан квадрат, а около окружности описан правильный шестиугольник. Сделать рисунок и, используя его, доказать, что $2\sqrt{2} < \pi < 2\sqrt{3}$.

Радианная мера угла

233. Найти радианную меру углов: 12° ; 45° ; 72° ; 105° ; 135° ; 330° .

234. Найти градусную меру угла, радианная мера которого равна: $\frac{\pi}{30}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5}{6}\pi$; $1\frac{3}{4}\pi$; 5π .

235. Радиус окружности равен 2 см. Найти длину дуги окружности, соответствующей углу в 5 радиан.

236. Существует ли выпуклый многоугольник, все углы которого равны целому числу радиан?

Площадь квадрата. Площадь прямоугольника

237. Найти площадь квадрата, сторона которого равна:
1) 16 см; 2) 5,5 см; 3) \sqrt{a} см.

238. Найти площадь квадрата, диагональ которого равна:
1) 6 см; 2) $8\sqrt{2}$ см; 3) $a\sqrt{2}$ см.

239. Найти площадь прямоугольника, стороны которого равны: 1) 9 см и 16 см; 2) 0,6 см и 4,9 см.
240. Найти сторону квадрата, если его площадь равна: 1) 256 дм^2 ; 2) $6,76 \text{ см}^2$; 3) 20 м^2 ; 4) $8a \text{ см}^2$.
241. Одна из сторон прямоугольника равна $8\sqrt{2}$ см, а его площадь — 48 см^2 . Найти другую сторону прямоугольника.
242. Диагональ прямоугольника равна $12\sqrt{3}$ см и образует со стороной угол 60° . Найти площадь прямоугольника.
243. Площадь прямоугольника равна 144 см^2 . Найти его стороны, если одна из них в 8 раз больше другой.
244. Площадь прямоугольника равна 48 см^2 . Найти его стороны, если их полусумма равна 7 см.
245. Площадь квадрата в 2 раза больше площади прямоугольника. Сторона квадрата равна 6 см, а одна из сторон прямоугольника — 9 см. Найти другую сторону прямоугольника.

246. Найти площадь квадрата, если радиус окружности, вписанной в него, равен r .

247. Площадь квадрата численно в 2 раза больше его периметра. Найти сторону квадрата.

248. $ABCD$ — квадрат (рис. 64). Отрезки MP и EF параллельны его сторонам, $AB = a$, $CP = CE = b$. Используя рисунок, доказать формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

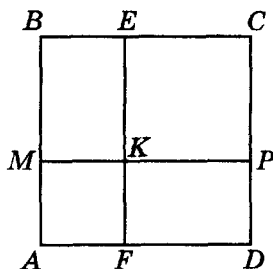


Рис. 64

249. Могут ли квадраты, имеющие равные площади, быть неравными?
250. Как изменится площадь квадрата, если его сторону: 1) уменьшить в 9 раз; 3) увеличить в n раз? 2) увеличить в $\sqrt{3}$ раз;
251. Как изменится площадь квадрата, если его диагональ уменьшить в 9 раз? Как при этом изменится периметр квадрата?
252. Как изменится площадь прямоугольника, если: 1) одну из его сторон увеличить в 8 раз; 2) одну из его сторон уменьшить в 3 раза; 3) обе стороны уменьшить в $\sqrt{5}$ раз;

- 4) одну сторону уменьшить в 11 раз, а другую — в 10 раз;
- 5) одну сторону увеличить в $\sqrt{8}$ раз, а другую уменьшить в $\sqrt{2}$ раз;
- 6) одну сторону уменьшить в m раз, а другую — в n раз;
- 7) одну сторону увеличить в a раз, а другую уменьшить в b раз?
253. Отношение периметров двух квадратов равно 8. Найти отношение их площадей.
254. Построить квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов.
255. Построить квадрат, площадь которого в 5 раз меньше площади данного квадрата.
256. Построить квадрат, площадь которого в два раза больше площади данного прямоугольника.
257. Как разрезать двумя линиями квадрат, чтобы из полученных частей можно было сложить два равных квадрата?
258. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна $4\sqrt{2}$ см. Найти площадь квадрата, описанного около этой окружности.

Площадь параллелограмма. Площадь ромба

259. Найти площадь параллелограмма, сторона которого равна 16 см, а высота, проведенная ней, — 9 см.
260. На рис. 65 указать параллелограммы, имеющие равные площади.
261. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны 8 см и 14 см, а угол между ними — 150° .

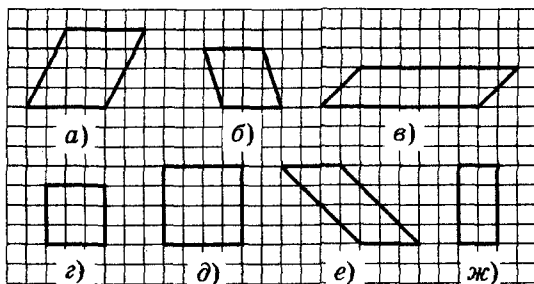


Рис. 65

262. Найти площадь ромба, сторона которого равна $9\sqrt{2}$ см, а один из углов — 45° .
263. Среди всех параллелограммов с заданными сторонами указать параллелограмм наибольшей площади.
264. Найти площадь ромба, если один из его углов на 120° больше другого, а сторона ромба равна $6\sqrt{3}$ см.
265. Площадь параллелограмма равна 56 см², а расстояние между двумя противоположными сторонами — 14 см. Найти длины этих сторон.
266. Площадь параллелограмма равна 120 см², а две его стороны — 15 см и 10 см. Найти высоты параллелограмма.
267. Угол между сторонами параллелограмма равен 60° , одна из сторон — 8 см, а площадь параллелограмма — 56 см². Найти другую сторону параллелограмма.
268. Площадь параллелограмма равна 112 см², а его высота в 7 раз меньше стороны, к которой она проведена. Найти эти сторону и высоту параллелограмма.
269. Сторона квадрата равна стороне ромба, а острый угол ромба равен 45° . Найти отношение площади квадрата к площади ромба.
270. Существует ли параллелограмм, стороны которого равны 4 см и 6 см, а соответствующие высоты — 5 см и 3 см?
271. Стороны параллелограмма равны 24 см и 30 см, а угол между высотами — 30° . Найти площадь параллелограмма.
272. Найти площадь параллелограмма, диагонали которого равны 16 см и 20 см, и одна из диагоналей перпендикулярна стороне.
273. Доказать, что у параллелограмма из двух высот больше та, которая проведена к меньшей стороне.

Площадь треугольника

274. Сторона треугольника равна 12 см, а высота, проведенная к ней, — $2,5$ см. Найти площадь треугольника.
275. Площадь треугольника равна 98 см². Найти сторону треугольника, если высота, проведенная к ней, равна 14 см.
276. Найти площадь прямоугольного треугольника, катет которого равен 8 см, а гипотенуза — 17 см.

277. На рис. 66 указать треугольники, имеющие равные площади.

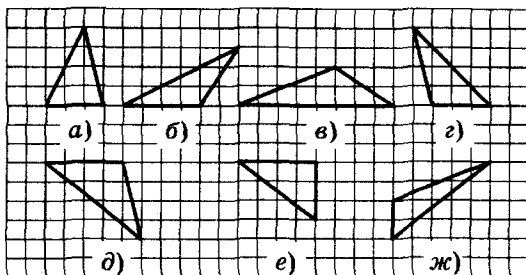


Рис. 66

278. Найти площадь треугольника, две стороны которого 9 см и $3\sqrt{2}$ см, а угол между ними равен: 1) 45° ; 2) 150° .
279. Две стороны треугольника равны 7 см и 6 см. Может ли его площадь быть равной: 1) 23 см^2 ; 2) 21 см^2 ; 3) 17 см^2 ?
280. Основание первого треугольника 6 см, а основание второго — 9 см. Каким должно быть отношение высот первого и второго треугольников, чтобы площадь второго треугольника была в 2 раза больше площади первого?
281. Найти площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 17 см, а высота, проведенная к основанию, — 5 см.
282. Катет прямоугольного треугольника равен 10 см, а гипотенуза — 26 см. Найти высоту треугольника, проведенную к гипотенузе.
283. Как изменится площадь треугольника, если:
- 1) его основание увеличить в 8 раз;
 - 2) его высоту уменьшить в 5 раз;
 - 3) основание увеличить в 12 раз, а высоту уменьшить в 4 раза;
 - 4) основание уменьшить в 9 раз, а высоту — в 7 раз?
284. В треугольнике ABC отношение высот, проведенных из вершин A и B , равно $\frac{7}{9}$. Найти отношение сторон BC и AC .
285. Доказать, что стороны треугольника обратно пропорциональны соответствующим высотам.
286. Точка K — середина медианы CM треугольника ABC . Доказать, что треугольники ACK , BCK , AKM и BKM имеют равные площади.

287. Доказать, что диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.
288. Перпендикуляр, проведенный из середины основания равнобедренного треугольника к боковой стороне, делит ее на отрезки длиной 8 см и 18 см, считая от вершины угла при основании. Найти площадь треугольника.
289. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 50 см, а основание треугольника в 1,5 раза больше высоты, проведенной к нему. Найти площадь треугольника.
290. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30° , а площадь треугольника — $72\sqrt{3}$ см². Найти стороны треугольника.
291. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3:4, а гипотенуза равна 35 см. Найти площадь треугольника.
292. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 16 см, а другой меньше гипотенузы на 4 см. Найти площадь треугольника.
293. Разность отрезков, на которые высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу, равна 10 см. Найти площадь треугольника, если высота равна 12 см.
294. Найти площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 24 см и 51 см.
295. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной 10 см и 24 см. Найти площадь треугольника.
296. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписана окружность с центром O (рис. 67). Найти площадь треугольника ABC , если $OA = 8$ см, $\angle ABO = 15^\circ$.
297. Сторона квадрата $ABCD$ равна 9 см, $AK = 4$ см, $CE = 3$ см, $FD = 5$ см (рис. 68). Найти площадь четырехугольника $BEFK$.

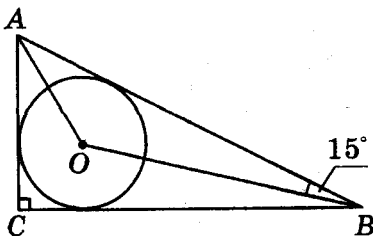


Рис. 67

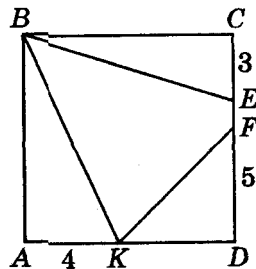


Рис. 68

298. Найти площадь треугольника, изображенного на рис. 69.

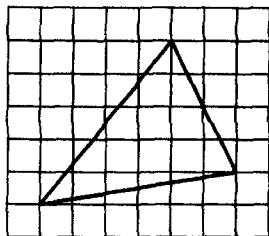


Рис. 69

299. В треугольник ABC , основание AC которого равно 6 см, а высота, проведенная к нему, — 3 см, вписан квадрат $KDEF$ (рис. 70). Найти площадь квадрата.

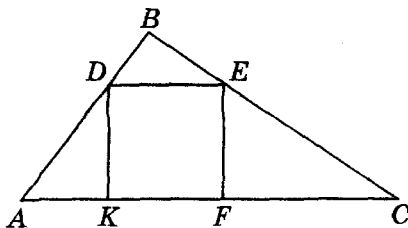


Рис. 70

300. Площадь треугольника ABC равна 98 см^2 . Точка K делит медиану BM в отношении $4:3$, считая от точки B . Найти площади треугольников ABK , BKC , CKM и AKM .

301. Биссектриса угла A треугольника ABC делит площадь треугольника в отношении $4:7$. Найти отношение сторон AB и AC треугольника.

302. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 71), $AO = 9 \text{ см}$, $OB = 4 \text{ см}$, $CO = 5 \text{ см}$, $OD = 6 \text{ см}$. Найти отношение площадей треугольников AOD и COB .

303. На сторонах OB и OD угла O отложены отрезки $OA = 8 \text{ см}$, $AB = 3 \text{ см}$, $OC = 5 \text{ см}$, $CD = 7 \text{ см}$ (рис. 72). Найти отношение площадей треугольника OBD и четырехугольника $ABDC$.

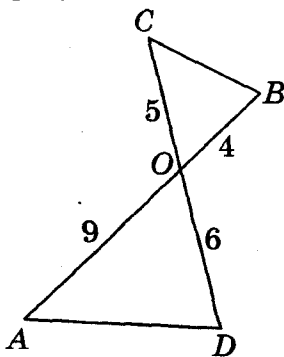


Рис. 71

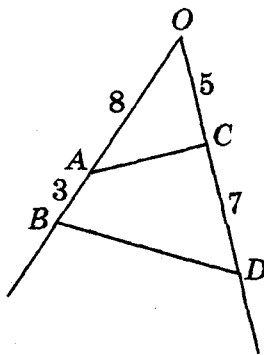


Рис. 72

304. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки E и F так, что $AE : EB = 9 : 2$, $BF : FC = 2 : 5$. Найти площадь треугольника BEF , если площадь квадрата равна 154 см^2 .
305. Через вершину треугольника провести прямую так, чтобы она разделила его площадь в отношении: 1) $1:3$; 2) $4:5$.
306. Через вершину параллелограмма провести прямую так, чтобы она разделила его площадь в отношении $3:5$.
307. Построить равнобедренный треугольник, равновеликий данному треугольнику, так, чтобы основание равнобедренного треугольника было равно одной из сторон данного.
308. Найти площадь ромба, диагонали которого равны $5\sqrt{2}$ см и 4 см.
309. Найти площадь ромба, сторона которого равна 25 см, а разность диагоналей — 10 см.
310. Найти площадь ромба, если его сторона относится к одной из диагоналей как $5:8$, а диаметр окружности, вписанной в ромб, равен 24 см.
311. Перпендикуляр, проведенный из вершины тупого угла ромба, делит сторону на отрезки длиной 7 см и 8 см, считая от вершины тупого угла. Найти площадь ромба.
312. Найти катеты прямоугольного треугольника, площадь которого равна 24 см^2 , а биссектриса прямого угла образует с гипотенузой угол 75° .
313. В квадрат, сторона которого равна 1 см, вписан второй квадрат, стороны которого образуют со сторонами первого квадрата углы, равные 60° . Найти площадь второго квадрата.
314. Найти площадь треугольника, стороны которого равны 13 см, 14 см и 15 см.
315. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на отрезки, один из которых на 3 см больше другого. Две другие стороны треугольника равны 14 см и 21 см. Найти площадь треугольника.
316. Найти наибольшую высоту треугольника, стороны которого равны 9 см, 10 см и 11 см.
317. Три окружности, радиусы которых равны 9 см, 11 см и 12 см, попарно касаются друг друга. Определить площадь треугольника, вершины которого лежат в центрах этих окружностей.
318. В треугольник ABC вписана окружность с центром O . Найти стороны треугольника ABC , если площади треугольников AOB , BOC , AOC соответственно равны 90 см^2 , 246 см^2 и 168 см^2 .

Площадь трапеции

319. Найти площадь трапеции, основания которой равны 12 см и 15 см, а высота — 6 см.
320. Основания трапеции равны 9 см и 11 см, а ее площадь — 150 см^2 . Найти высоту трапеции.
321. Площадь трапеции равна 92 см^2 , а ее высота — 8 см. Найти основания трапеции, если их разность равна 9 см.
322. Найти площадь трапеции, основания которой — 8 см и 14 см, а диагональ длиной $8\sqrt{3}$ см образует с большим основанием угол 30° .

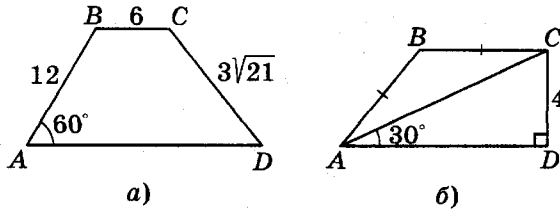


Рис. 73

323. Найти площадь трапеции $ABCD$ (рис. 73).
324. Основания равнобедренной трапеции равны 12 см и 18 см, а боковая сторона — 17 см. Найти площадь трапеции.
325. Найти площадь равнобедренной трапеции, меньшее основание которой равно 10 см, боковая сторона — 6 см, а тупой угол — 120° .
326. Найти площадь равнобедренной трапеции, основания которой равны 7 см и 25 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.
327. Найти площадь равнобедренной трапеции, основания которой равны 22 см и 50 см, а диагонали являются биссектрисами ее тупых углов.
328. Разность оснований прямоугольной трапеции равна 14 см, а большее основание — 50 см. Найти площадь трапеции, если большая диагональ является биссектрисой прямого угла.
329. Найти площадь прямоугольной трапеции, меньшее основание которой равно $5\sqrt{3}$ см, большая боковая сторона — 18 см, а тупой угол — 150° .
330. Разность оснований прямоугольной трапеции равна 9 см, а ее меньшая диагональ — 13 см. Найти площадь трапеции, если ее боковые стороны относятся как 4:5.
331. Высота равнобедренной трапеции равна $4\sqrt{3}$ см, а тупой угол равен 120° . Найти площадь трапеции, если ее диагональ является биссектрисой острого угла.

332. Найти площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 8 см.
333. Найти площадь трапеции, меньшее основание которой равно 4 см, высота — 8 см, а углы при меньшем основании — 120° и 135° .
334. Площадь трапеции равна 72 см^2 , а ее высота — 9 см. Найти основания трапеции, если одно из них в 3 раза больше другого.
335. Найти площадь трапеции, основания которой равны 15 см и 36 см, а боковые стороны — 13 см и 20 см.
336. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 8 см, а один из отрезков, на которые точка касания вписанной окружности делит боковую сторону, — 4 см. Найти площадь трапеции.
337. Площадь равнобедренной трапеции равна $64\sqrt{3} \text{ см}^2$, а тупой угол — 120° . Найти боковую сторону трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.
338. Боковые стороны трапеции равны 26 см и 30 см, а разность оснований — 28 см. Найти площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.
339. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит большую боковую сторону на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найти площадь трапеции.
340. Найти площадь равнобедренной трапеции, высота которой равна 4 см, а угол между радиусами описанной окружности, проведенными к концам боковой стороны, составляет 60° .

Площадь многоугольника

341. Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Доказать, что его площадь равна полупроизведению диагоналей.
342. На сторонах равностороннего треугольника вне его построены квадраты. Вершины квадратов последовательно соединены. Найти площадь образовавшегося шестиугольника, если сторона треугольника равна 2 см.
343. Выразить площадь правильного восьмиугольника через длину его меньшей диагонали.
344. Определить площадь правильного восьмиугольника, вписанного в окружность радиуса 6 см.
345. Найти отношение площадей правильного треугольника, четырехугольника и шестиугольника, периметры которых равны.
346. Сторона правильного восьмиугольника равна 2 см. Его стороны, взятые через одну, продолжены до пересечения так, что образовался квадрат. Найти площадь этого квадрата.

347. Сторона квадрата равна $3\sqrt{2}$ см. Около него описана окружность, а около окружности — правильный шестиугольник. Найти площадь шестиугольника.
348. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Площадь треугольника AOB равна 3 см^2 , а площадь треугольника BOC — 6 см^2 . Найти площадь треугольника COD , если она на 9 см^2 больше площади треугольника AOD .
349. В окружность вписан четырехугольник, стороны которого последовательно равны 4 см, 6 см, 8 см, 12 см. Найти его площадь.

Площади подобных фигур

350. Стороны двух квадратов относятся как 5:7. Как относятся их площади?
351. Высота одного равностороннего треугольника равна стороне другого. Как относятся их площади?
352. Средние линии делят данный треугольник на четыре треугольника. Площадь одного из этих треугольников равна 5 см^2 . Найти площадь данного треугольника.
353. Стороны двух правильных треугольников относятся как 4:7, а площадь большего из них равна 98 см^2 . Найти площадь меньшего треугольника.
354. Площадь многоугольника равна 60 см^2 . Найти площадь подобного ему многоугольника, если соответствующие стороны этих многоугольников равны 8 см и 12 см. Сколько решений имеет задача?
355. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на две части равной площади. Найти периметр меньшего треугольника, если периметр данного треугольника равен 28 см.
356. Сторона DE треугольника DEF поделена на части в отношении 4:5:6, считая от вершины E , и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне DF . Найти отношение площадей полученных частей.
357. Медиана треугольника равна 9 см. Прямая, параллельная медиане, делит треугольник на части, площади которых относятся как 1:17. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.
358. Точка K делит сторону BC квадрата $ABCD$ в отношении 3:2, считая от точки B . Отрезки AC и DK пересекаются в точке F . Найти площадь треугольника CFK , если площадь треугольника ADF равна 50 см^2 .
359. Провести отрезок, параллельный медиане данного треугольника, так, чтобы он отсекал $\frac{1}{32}$ его площади.

360. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Высота, проведенная к наибольшей стороне, поделена в отношении 2:3, считая от вершины, и через точку деления проведена прямая, параллельная наибольшей стороне. Найти площадь образовавшейся трапеции.

Площадь круга и его частей

361. Найти площадь круга, радиус которого равен: 1) 4 см; 2) $\frac{2}{\pi}$ см; 3) $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ см.
362. Найти с точностью до десятых радиус круга, площадь которого равна 9 см^2 .
363. Площадь одного круга в 16 раз больше площади другого круга. Чему равно отношение радиусов этих кругов?
364. Найти площадь круга, длина окружности которого равна 6л см.
365. Площади двух кругов равны $p \text{ см}^2$ и $k \text{ см}^2$. Чему равно отношение длин окружностей этих кругов?
366. Найти площадь круга, описанного около квадрата, площадь которого равна 8 см^2 .
367. Найти отношение площадей вписанного и описанного кругов правильного четырехугольника.
368. Найти площадь кольца, расположенного между двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны 5 см и 8 см.
369. Найти площадь сектора круга радиуса 6 см, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) 18° ; 2) 135° ; 3) 330° .
370. Какую часть площади круга составляет площадь сектора, если соответствующий сектору центральный угол равен: 1) 25° ; 2) 165° ; 3) 225° ?
371. Площадь сектора составляет $\frac{8}{15}$ площади круга. Найти градусную меру центрального угла, соответствующего данному сектору.
372. Найти радиус круга, если площадь сектора этого круга равна 45 см^2 , а центральный угол, соответствующий этому сектору, равен 72° .
373. Найти площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 8 см, а дуга содержит: 1) 60° ; 2) 150° ; 3) 225° .
374. Найти площадь кругового сегмента, если его основание равно 6 см, а дуга содержит: 1) 30° ; 2) 240° .
375. При каком условии сегмент круга можно разделить на секторы?
376. Найти площади заштрихованных фигур, изображенных на рис. 74.

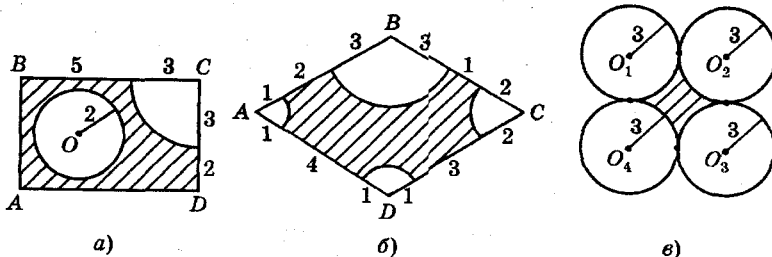


Рис. 74

- 377.** Стороны треугольника равны 26 см, 28 см и 30 см. Найти площади описанного и вписанного в этот треугольник кругов.
- 378.** Площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, равна 12π см², а острый угол трапеции равен 60° . Найти площадь трапеции.
- 379.** Два круга имеют общую хорду. Найти отношение площадей этих кругов, если из центра первого круга общую хорду видно под углом 90° , а из центра второго — под углом 120° .
- 380.** В правильный шестиугольник вписана окружность и около него описана окружность. Найти площадь кругового кольца, расположенного между этими окружностями, если сторона шестиугольника равна 6 см.
- 381.** Длины сторон треугольника равны 13 см, 20 см и 21 см. В треугольник вписан полукруг, центр которого лежит на средней стороне треугольника. Найти площадь полукруга.
- 382.** В полукруг, диаметр которого равен 16 см, вписан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого совпадает с диаметром полукруга, а один из углов равен 30° . Определить площадь той части полукруга, которая лежит вне треугольника.
- 383.** Радиус круга равен 8 см. В нем проведена хорда, длина которой равна длине стороны вписанного квадрата. Найти площадь меньшего из сегментов, определяемого этой хордой.
- 384.** Найти площадь круга, вписанного в сектор круга радиуса 3 см с хордой 2 см.
- 385.** Радиус круга равен 2 см. По разные стороны от центра круга проведены две параллельные хорды, одна из которых равна стороне правильного вписанного треугольника, а другая — стороне правильного вписанного шестиугольника. Найти площадь части круга, расположенной между хордами.

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

386. Сколько различных плоскостей можно провести через одну прямую?
387. Сколько различных плоскостей можно провести через три точки, не лежащие на одной прямой?
388. Можно ли утверждать, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой: 1) на плоскости; 2) в пространстве?
389. Точка M не лежит в плоскости треугольника DEF . Могут ли прямые MD и EF пересекаться?
390. Через точки A и B прямой l проведены к ней перпендикулярные прямые и на них отмечены такие точки C и D , что $AC = BD$. Верно ли, что прямые AD и BC параллельны: 1) на плоскости; 2) в пространстве?
391. Прямые a и b параллельны. Прямая c пересекает прямую a . Верно ли, что прямая c пересекает прямую b ?
392. Через точку A , не принадлежащую плоскости α , проведена прямая a , параллельная плоскости α . Сколько существует в плоскости α прямых, параллельных прямой a ?
393. Прямые a и b параллельны плоскости α . Могут ли прямые a и b пересекаться?
394. Плоскости α и β параллельны прямой a . Верно ли, что плоскости α и β параллельны?
395. Прямая a перпендикулярна прямой b , лежащей в плоскости α . Перпендикулярна ли прямая a плоскости α ?
396. Плоскости α и β перпендикулярны. Прямая a лежит в плоскости α . Перпендикулярна ли прямая a плоскости β ?

Призма

397. На рис. 75 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Указать:

- 1) ребра, параллельные ребру AA_1 ;
- 2) ребра, перпендикулярные ребру BC ;

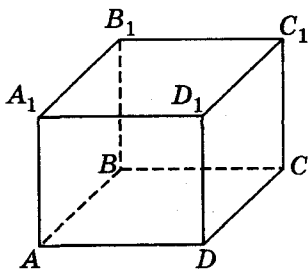


Рис. 75

- 3) ребра, скрещивающиеся с ребром AB ;
 4) ребра, параллельные грани AA_1B_1 ;
 5) ребра, перпендикулярные грани ABC ;
 6) грани, перпендикулярные грани BB_1C_1 .
398. Найти полную поверхность и объем куба с ребром 5 см.
 399. Найти площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда (рис. 75), если $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $BB_1 = 4$ см.
 400. В основании прямой призмы лежит параллелограмм, стороны которого равны 5 см и 6 см, а тупой угол — 150° . Найти площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем призмы, если ее высота равна 8 см.
 401. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 4 см, а высота — 3 см. Найти площадь боковой поверхности и объем призмы.
 402. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием 8 см и боковой стороной 5 см. Найти площадь боковой поверхности и объем призмы, если ее высота равна 12 см.
 403. В основании прямой призмы лежит прямоугольная трапеция с основаниями 10 см и 15 см и боковой стороной 17 см. Найти площадь полной поверхности и объем призмы, если ее высота равна 6 см.

Пирамида

404. На рис. 76 изображена пирамида $MDEF$. Назвать:
 1) основание пирамиды; 3) боковые ребра пирамиды;
 2) вершину пирамиды; 4) боковые грани пирамиды.
 405. Все боковые грани правильной четырехугольной пирамиды — правильные треугольники со стороной 4 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

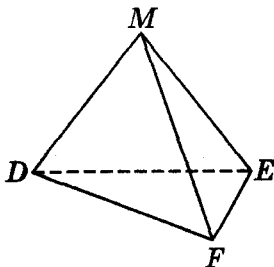


Рис. 76

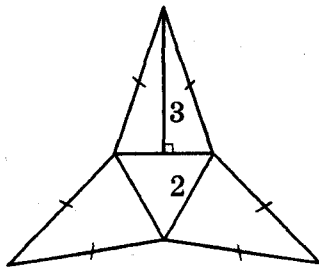


Рис. 77

406. Вычислить площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, развертка которой изображена на рис. 77.
407. Боковые ребра DA , DB и DC треугольной пирамиды $DABC$ равны между собой, $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 60^\circ$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если $AD = 4$ см.
408. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник со стороной 2 см. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 10 см.
409. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды (рис. 78), основание которой — квадрат $ABCD$ со стороной 4 см, SO — высота пирамиды, $SO = 5$ см.
410. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник DKP , $DK = DP = 17$ см. Найти объем пирамиды, если высота DE треугольника DKP равна 8 см, а высота пирамиды — 6 см.

Цилиндр

411. На рис. 79 изображен цилиндр. Назвать отрезок, который является:
- 1) высотой цилиндра;
 - 2) образующей цилиндра;
 - 3) радиусом нижнего основания цилиндра;
 - 4) радиусом верхнего основания цилиндра.
412. Радиус основания цилиндра равен 6 см, а его высота — 5 см. Найти площадь полной поверхности и объем цилиндра.

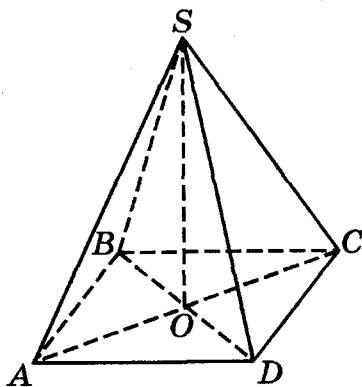


Рис. 78

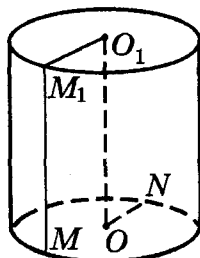


Рис. 79

413. Прямоугольник, стороны которого равны 12 см и 8 см, вращается вокруг меньшей стороны. Найти площадь полной поверхности и объем полученного цилиндра.

Конус

414. На рис. 80 изображен конус. Назвать отрезок, который является:
- 1) высотой конуса;
 - 2) образующей конуса;
 - 3) радиусом основания конуса.
415. Радиус основания конуса равен 12 см, а высота конуса — 5 см. Найти площадь полной поверхности и объем конуса.
416. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 24 см и 10 см, вращается вокруг большего катета. Найти площадь полной поверхности и объем полученного конуса.

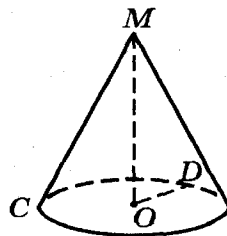


Рис. 80

417. Катеты прямоугольного треугольника равны m и n . Он вращается сначала вокруг катета m , а затем вокруг катета n . Найти отношение площадей боковых поверхностей полученных конусов.

Шар

418. Найти площадь поверхности и объем шара, радиус которого равен 7 см.
419. Полукруг, диаметр которого равен 6 см, вращается вокруг этого диаметра. Найти площадь поверхности и объем полученного шара.
420. Радиус шара уменьшили в 4 раза. Как при этом изменились площадь поверхности и объем шара?

Вариант 3

Подобие фигур. Гомотетия

1. Начертить в тетради отрезок $MN = 3$ см и отметить точку O , не принадлежащую этому отрезку. Построить отрезок, гомотетичный отрезку MN с центром гомотетии в точке O и коэффициентом $k = 2$.
2. Начертить в тетради острый угол и отметить точку M , лежащую вне угла. Построить угол, гомотетичный данному углу с центром гомотетии в точке M и коэффициентом $k = \frac{1}{3}$.
3. Построить ромб, гомотетичный данному ромбу с центром гомотетии в точке пересечения его диагоналей и коэффициентом гомотетии $k = \frac{1}{2}$.
4. Отметить в тетради две точки M и N . Найти такую точку K , чтобы точка M переходила в точку N при гомотетии с центром K и коэффициентом $k = 3$.
5. Гомотетия с центром в начале координат переводит точку $Q(1; -3)$ в точку $P(2; -6)$. Найти коэффициент гомотетии.
6. Даны две концентрические окружности. Можно ли одну из них преобразовать в другую с помощью гомотетии? Как это сделать?
7. Могут ли два треугольника быть подобными, но не гомотетичными?

Свойства подобных треугольников

8. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (рис. 81). Найти неизвестные стороны этих треугольников.

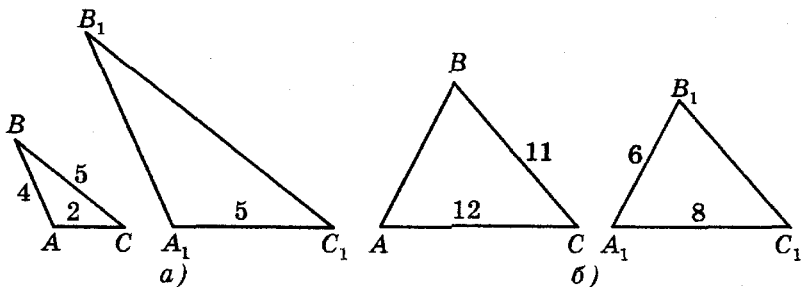


Рис. 81

9. Стороны треугольника относятся как 7:5:9. Найти стороны подобного ему треугольника, если у него:
 - 1) периметр равен 42 см;
 - 2) большая сторона равна 27 см;
 - 3) средняя по величине сторона равна 28 см;
 - 4) сумма большей и меньшей сторон равна 84 см.
10. Стороны многоугольника относятся как 3:7:2:5:11:4. Найти стороны подобного ему многоугольника, если его периметр равен 128 см.
11. Стороны треугольника относятся как 4:8:9, а меньшая сторона подобного ему треугольника равна 24 см. Найти другие стороны второго треугольника.
12. Периметры подобных треугольников относятся как 2:5, а сумма их больших сторон равна 56 см. Найти стороны треугольников, если стороны одного из них относятся как 2:3:4.

Признаки подобия треугольников

13. Указать пары подобных треугольников и доказать их подобие (рис. 82).
14. Доказать, что равнобедренные треугольники подобны, если равны их углы при основании.

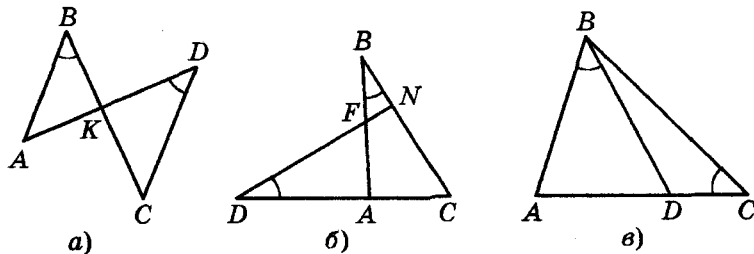


Рис. 82

15. У двух равнобедренных треугольников углы при вершине равны. Периметр первого треугольника равен 144 см. Найти его стороны, если стороны второго треугольника относятся как: 1) 5:2; 2) 7:10.
16. У двух равнобедренных треугольников углы при основании равны. Основание первого треугольника равно 10 см, а высота, проведенная к ней, — 12 см. Найти стороны второго треугольника, если его периметр равен 72 см.
17. Два прямоугольных треугольника имеют по равному острому углу. Катеты первого треугольника относятся как 12:35. Найти гипотенузу второго треугольника, если его периметр равен 420 см.
18. Углы одного треугольника относятся как 5:12:18, а один из углов другого треугольника на 35° больше второго и на 35° меньше третьего угла. Подобны ли эти треугольники?

19. Доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 83).

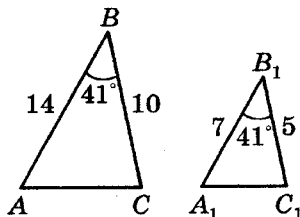


Рис. 83

20. Найти пары подобных треугольников и доказать их подобие (рис. 84).

21. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$, а стороны треугольника ABC , образующие угол B , в 2,5 раза меньше сторон, образующих угол B_1 . Найти стороны AC и A_1C_1 , если их сумма равна 10,5 см.

22. В треугольнике ABC $AB = 24$ см, $BC = 18$ см. На стороне AB отложили отрезок $BK = 16$ см, а на стороне BC — отрезок $CD = 6$ см. Подобны ли треугольники ABC и DBK ?

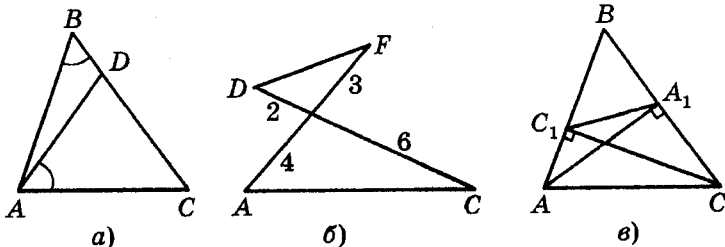


Рис. 84

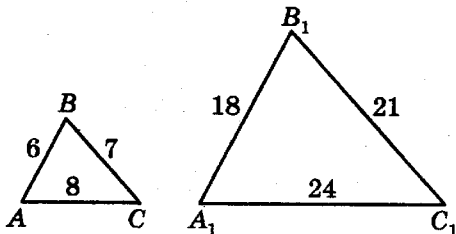


Рис. 85

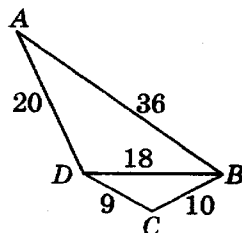


Рис. 86

23. Доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 85).
24. Указать пару подобных треугольников и доказать их подобие (рис. 86).
25. Определить, подобны ли треугольники, если стороны их равны:
- 1) 6 см, 10 см, 7 см и 30 см, 50 см, 35 см;
 - 2) 4 см, 11 см, 12 см и 12 см, 22 см, 26 см.
26. Стороны одного треугольника относятся как 6:8:9, а стороны второго треугольника равны 24 см, 32 см и 36 см. Подобны ли эти треугольники?
27. Катеты одного прямоугольного треугольника равны 12 см и 35 см, а гипотенуза и высота, проведенная к ней, второго треугольника соответственно равны 1369 см и 420 см. Подобны ли эти треугольники?
28. На рис. 87 $NK \parallel FA$. Записать пропорции, начинающиеся с отношений:
- 1) $\frac{MK}{MN}$;
 - 2) $\frac{MF}{MN}$;
 - 3) $\frac{FA}{NK}$;
 - 4) $\frac{MA}{FA}$.
29. В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BK и CF (рис. 88). Доказать подобие треугольников CBK и DCF .

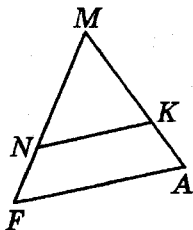


Рис. 87

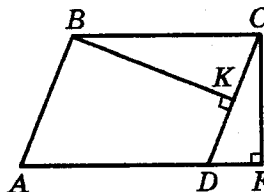


Рис. 88

30. Стороны параллелограмма равны 16 см и 12 см, а расстояние между большими сторонами равно 10 см. Найти расстояние между меньшими сторонами параллелограмма.
31. Периметр параллелограмма равен 44 см, а его высоты — 5 см и 6 см. Найти стороны параллелограмма.
32. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке L . Меньшее основание BC равно 4 см, $LB = 5$ см, $AB = 7$ см. Найти большее основание трапеции.
33. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , $AM = 20$ см. Найти AB , если $DC : CM = 3 : 2$.
34. Основания трапеции равны 6 см и 14 см, а диагонали — 15 см и 20 см. Найти отрезки, на которые каждая диагональ делится точкой пересечения.
35. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) M — точка пересечения диагоналей. $BM : MC = 1 : 3$, а средняя линия трапеции равна 8 см. Найти основания трапеции.
36. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K так, что $\angle CAK = \angle ABC$, $CK = 4$ см, $KB = 5$ см. Найти AC .
37. В треугольник ABC вписан параллелограмм $MNCP$ (рис. 89). $AC = 10$ см, $BC = 12$ см, $MN = 3$ см. Найти MP .
38. В треугольник ABC вписан ромб $DKFC$ так, что угол C у них общий, а вершина K принадлежит стороне AB . Стороны ромба равны 4 см, $BF = 3$ см. Найти AC .
39. В треугольник с основанием 10 см и высотой 7 см вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 4:7, причем меньшая сторона принадлежит основанию треугольника. Найти стороны прямоугольника.
40. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 40 см, а высота, проведенная к боковой стороне, — 48 см. Найти стороны треугольника.
41. Основание равнобедренного треугольника равно 14 см, а боковая сторона — 25 см. Вычислить:
- 1) радиус окружности, вписанной в треугольник;
 - 2) радиус окружности, описанной около треугольника.

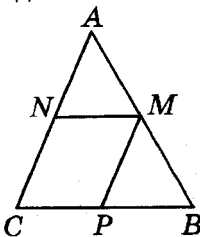


Рис. 89

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

42. Найти высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если она делит гипотенузу на отрезки длиной 9 см и 25 см.
43. Катет прямоугольного треугольника равен 12 см, а его проекция на гипотенузу — 8 см. Найти гипотенузу.
44. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки длиной 6 см и 24 см. Найти катеты треугольника.
45. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6 см, а проекция второго катета на гипотенузу — 5 см. Найти второй катет и гипотенузу.
46. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 см и 12 см. Найти высоту треугольника, проведенную из вершины прямого угла.
47. Найти высоту и боковую сторону равнобедренной трапеции, основания которой равны 12 см и 20 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.
48. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне, а проекция этой диагонали на большее основание равна 10 см. Боковая сторона трапеции равна 12 см. Найти высоту и основания трапеции.
49. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей ромба к его стороне, делит ее на отрезки длиной 8 см и 18 см. Найти диагонали ромба.
50. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию, делит точкой касания боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 50 см. Найти радиус окружности и основания трапеции.

Углы, вписанные в окружность

51. Определить градусную меру угла, вписанного в окружность, если соответствующий ему центральный угол равен:
1) 38° ; 2) 142° ; 3) 180° ; 4) 226° ; 5) γ .
52. Определить градусную меру центрального угла окружности, если градусная мера соответствующего ему вписанного угла равна: 1) 23° ; 2) 76° ; 3) 90° ; 4) 167° ; 5) γ .
53. Точка M окружности и ее центр O лежат по разные стороны от хорды AB . Найти: 1) угол AMB , если $\angle AOB = 152^\circ$; 2) угол AOB , если $\angle AMB = 73^\circ$.

54. Точки M и N лежат на окружности по одну сторону от хорды AB . Известно, что $\angle AMB = 63^\circ$. Найти угол $\angle ANB$.
55. Точки M и N лежат на окружности по разные стороны от хорды AB , $\angle ANB = 82^\circ$. Найти угол $\angle AMB$.
56. Около треугольника ABC описана окружность с центром O . Найти угол $\angle AOB$, если: 1) $\angle C = 54^\circ$; 2) $\angle C = 136^\circ$.
57. В треугольнике ABC $\angle A = 48^\circ$, $\angle C = 62^\circ$, O — центр описанной окружности. Найти: $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle COB$.
58. Определить углы равнобедренного треугольника, вписанного в окружность, основание которого стягивает дугу в 100° .
59. Хорда делит окружность в отношении 5:13. Определить величины вписанных углов, опирающихся на эту хорду.
60. Хорда AB делит окружность на две дуги. Градусная мера большей из них равна 260° , а меньшая делится точкой M в отношении 7:18, считая от точки B . Найти $\angle MBA$.

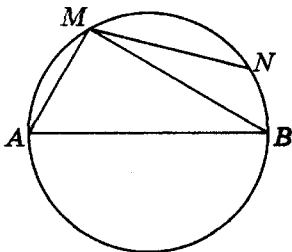


Рис. 90

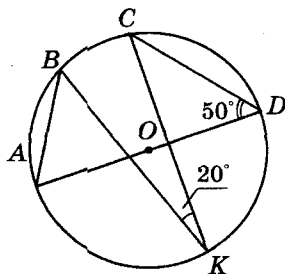


Рис. 91

61. Окружность разделена тремя точками на части, относящиеся между собой, как 2:9:7. Точки деления соединены между собой. Определить углы образовавшегося треугольника.
62. Точки M и N окружности лежат по одну сторону от диаметра AB (рис. 90). Найти угол $\angle BMN$, если $\angle AMN = 110^\circ$.
63. AD — диаметр окружности с центром O (рис. 91). Найти $\angle BAD$, если $\angle CDA = 50^\circ$, $\angle BKC = 20^\circ$.
64. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 62° . Полуокружность, построенная на боковой стороне треугольника, как на диаметре, делится этими сторонами на три дуги. Какова градусная мера этих дуг?

65. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC , проведенных из вершин A , B и C , пересекают описанную окружность в точках K , F и M соответственно. Доказать, что $\angle KFB \approx \angle MFB$.
66. Две окружности пересекаются в точках C и D . Через точки C и D проведены секущие MK и EF соответственно. Доказать, что $\angle MDK = \angle ECF$.
67. O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC . Найти углы треугольника ABC , если $\angle BOC = 32^\circ$. Сколько решений имеет задача?
68. Доказать, что точка, симметричная точке пересечения высот треугольника относительно его стороны, лежит на описанной около этого треугольника окружности.
69. Найти геометрическое место точек, из которых данные отрезки AB и CD видны под заданными углами α и β соответственно.

70. Построить параллелограмм по двум сторонами и углу между диагоналями.

71. M — точка, лежащая на хорде AB окружности с центром O и радиуса R (рис. 92). Доказать, что

$$AM \cdot MB = R^2 - OM^2.$$

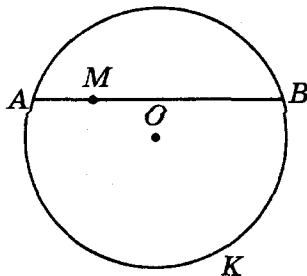


Рис. 92

72. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M . Найти длину хорды AB , если $AM = 6$ см, $CM = 8$ см, $MD = 9$ см.
73. Дана точка P , удаленная на 7 см от центра окружности радиуса 11 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Найти длины отрезков, на которые делится эта хорда точкой P .

Угол, образованный касательной и хордой

74. Хорда AB стягивает дугу в 46° . Определить углы, образуемые хордой и касательной, проведенной к окружности в точке B .
75. В угол ABC вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках M и N . Эти точки делят окружность на части, относящиеся как 5:13. Найти углы треугольника BMN .

76. Около треугольника ABC описана окружность (рис. 93). Через точку C к окружности проведена касательная, а из точки B на касательную опущен перпендикуляр BK . Найти $\angle BAC$, если $\angle KBC = 25^\circ$.
77. Из точки M проведена секущая, пересекающая окружность с центром O в точках A и B (рис. 94). Доказать, что $MA \cdot MB = MO^2 - R^2$ (где R — радиус окружности).
78. Из точки M к окружности проведены касательная MK длиной 5 см и секущая ME длиной 12 см. Найти длину отрезка MF секущей, расположенного вне окружности.

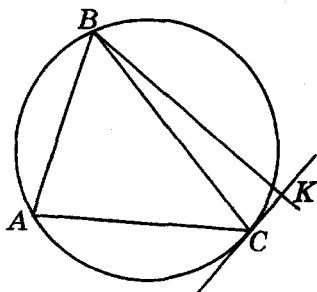


Рис. 93

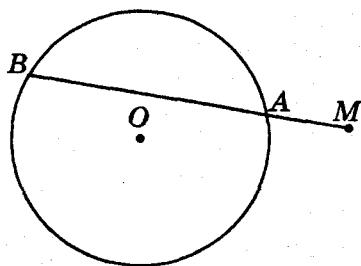


Рис. 94

79. Из точки к окружности проведены секущая длиной 12 см и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найти длину касательной.

Четырехугольник, вписанный в окружность

80. Можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, если:
- 1) $\angle A = 56^\circ$, $\angle C = 124^\circ$;
 - 2) $\angle B = 64^\circ$, $\angle D = 106^\circ$?
81. Найти углы A и B четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если $\angle C = 38^\circ$, $\angle D = 134^\circ$.
82. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого в порядке следования относятся как:
- 1) $4 : 9 : 13 : 8$;
 - 2) $6 : 7 : 10 : 8$?
83. Три угла четырехугольника, вписанного в окружность, взятые в порядке следования, относятся как $4:8:11$. Найти углы четырехугольника.

84. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC этого четырехугольника является диаметром окружности. Найти $\angle BAC$, если $\angle CAD = 35^\circ$, а угол между диагоналями четырехугольника, лежащий против стороны AD , равен 64° .
85. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны AB и AC треугольника в точках M и N соответственно. Доказать, что треугольники BAC и NAM подобны. Найти AM и AN , если $AB = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = 12$ см, $MN = 4$ см.
86. Равнобедренная трапеция, один из углов которой равен 130° , вписана в окружность. Угол между диагоналями трапеции, лежащий против боковой стороны, равен 80° . Найти положение центра окружности, описанной около трапеции, относительно трапеции.

Теорема косинусов

87. Найти сторону AB треугольника ABC , если:
- 1) $BC = 5$ см, $AC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45^\circ$;
 - 2) $BC = 8$ см, $AC = 11$ см, $\angle C = 120^\circ$.
88. Найти косинусы углов треугольника, стороны которого равны 9 см, 10 см и 15 см.
89. Две стороны треугольника равны 5 см и 8 см, а синус угла между ними равен $\frac{8}{15}$. Найти третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?
90. Стороны параллелограмма равны 7 см и $6\sqrt{2}$ см, а угол между ними — 45° . Найти диагонали параллелограмма.
91. На продолжениях сторон AB и AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) взяты соответственно точки M и N . Найти длину отрезка MN , если $AC = 25$ см, $BC = 7$ см, $BM = 3$ см, $CN = 5$ см.
92. На продолжении стороны AC за точку C равностороннего треугольника ABC взята точка D так, что отрезок CD равен медиане треугольника ABC . Найти длину отрезка BD , если сторона треугольника ABC равна 3 см.

93. Одна сторона треугольника на 4 см меньше другой, а угол между ними равен 120° . Найти периметр треугольника, если третья его сторона равна $\sqrt{79}$ см.
94. Две стороны треугольника относятся как $3\sqrt{2} : 7$, а угол между ними равен 45° . Найти эти стороны, если третья сторона треугольника равна 30 см.
95. Две стороны треугольника равны 6 см и $\sqrt{76}$ см, а угол против большей из них — 120° . Найти третью сторону треугольника.
96. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 4$ см, $AD = 10$ см, $AB = CD = 5$ см. Найти длины диагоналей трапеции, используя теорему косинусов.
97. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна b , а угол при основании — α . Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне треугольника.
98. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Известно, что $BC = CD = a$, $\angle ABC = \alpha$. Найти разность сторон AB и AD .
99. Для сторон треугольника выполняется равенство $b^2 = a^2 + c^2 + ac\sqrt{2}$. Доказать, что угол, лежащий против стороны b , равен 135° .
100. Стороны треугольника равны 7 см и 10 см, а угол между ними — 45° . Найти длину медианы, проведенной к третьей стороне треугольника.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма

101. Найти диагонали параллелограмма, если их длины относятся как 1:7, а стороны параллелограмма равны 9 см и 12 см.
102. Одна из сторон параллелограмма на 2 см меньше другой, а диагонали параллелограмма равны 6 см и 2 см. Найти стороны параллелограмма.
103. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Найти длину медианы треугольника, проведенной к средней стороне.
104. В треугольнике ABC $AC = 22$ см, $AB : BC = 7 : 12$, AK — медиана, $AK = 14$ см. Найти стороны BC и AB .
105. Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, а медиана, проведенная к боковой стороне, — 8 см. Найти боковую сторону треугольника.

106. Медианы AM и CN треугольника ABC равны 6 см и 10 см, а угол BOC равен 120° (O — точка пересечения медиан). Найти длину третьей медианы.
107. Доказать, что если в трапеции сумма квадратов диагоналей вдвое больше квадрата средней линии, то диагонали трапеции перпендикулярны.

Теорема синусов

108. В треугольнике ABC $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AB = 7\sqrt{2}$ см. Найти сторону AC .
109. В треугольнике ABC $AB = 9\sqrt{3}$ см, $\angle B = 75^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Найти сторону BC .
110. В треугольнике ABC $AC = 8$ см, $BC = 15$ см. Может ли $\sin \angle A = \frac{3}{5}$?
111. В треугольнике ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найти стороны AB и BC .
112. На рис. 95 $\angle BAC = 90^\circ$, $BC = a$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle DAC = \beta$, $\angle DCA = \varphi$. Найти DC .
113. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла равна l , а острый угол — α . Найти катеты треугольника.
114. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна a , диагональ BD образует со сторонами AB и AD углы α и β соответственно. Найти другую сторону и диагонали параллелограмма.

115. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна b , а угол при вершине α . Найти длину биссектрисы угла при основании треугольника.

116. Два угла треугольника равны α и β , а биссектриса третьего угла делит его сторону на отрезки a и b . Найти стороны треугольника и длину биссектрисы.

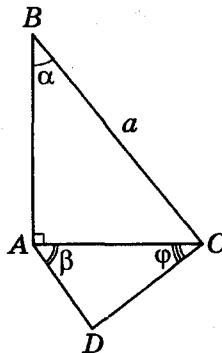


Рис. 95

117. На рис. 96 $AC = CB$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CBD = \alpha$, $\angle CDB = \beta$, $\angle DAB = \varphi$, $DC = a$. Найти AD .

118. Сумма сторон BC и AC треугольника ABC равна 2 см, $\angle A = 150^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Найти стороны BC и AC треугольника.

119. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD . Доказать, что

$$CD^2 = \frac{AD \cdot BD \sin A \sin B}{\sin^2 \frac{C}{2}}$$

120. Доказать, что из отрезков с D длинами $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ можно составить треугольник (α , β , γ — углы треугольника).

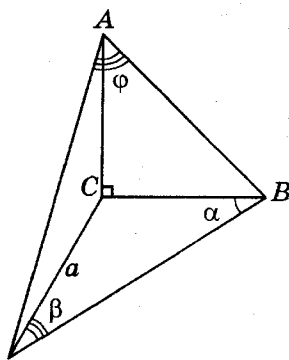


Рис. 96

Соотношения между углами треугольника и противоположными сторонами

121. В треугольнике ABC $BC > AB > AC$. Сравнить углы A , B и C .

122. В треугольнике ABC $\angle B = 56^\circ$, $\angle C = 35^\circ$. Сравнить стороны AB , BC и CA .

123. В треугольнике ABC BC — наибольшая сторона. Может ли угол A быть равным 58° ?

124. Определить вид треугольника, стороны которого равны:

1) 5 см, 8 см, 10 см; 3) 25 см, 24 см, 7 см.

2) 9 см, 10 см, 12 см;

125. На стороне AB равностороннего треугольника ABC взята произвольная точка M . Доказать, что $CM < AB$.

126. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD . Известно, что $CD > AD$. Доказать, что $\angle A > \angle C$.

127. У треугольников ABC и MNP $AB = MN$, $BC = NP$, $AC < MP$. Доказать, что $\angle P < \angle B$.

128. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CD — высота, $AD < BD$. Доказать, что $\angle A > \angle B$.

129. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{6}$ см. Найти $\angle B$.

130. В треугольнике ABC $AC = 4$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle B = 30^\circ$. Найти угол A . Сколько решений имеет задача?

Свойство биссектрисы угла

- 131.** AK — биссектриса угла A треугольника ABC . Найти:
- 1) отрезки BK и KC , если $AB = 10$ см, $AC = 12$ см, $BC = 11$ см;
 - 2) сторону AC , если $BK : KC = 4 : 9$, $AB = 16$ см;
 - 3) сторону BC , если $AB : AC = 5 : 3$, $BK - KC = 4$ см;
 - 4) стороны AB , BC и CA , если $AB + AC = 68$ см, $BK = 8$ см, $KC = 9$ см.
- 132.** Точка N лежит на стороне BC треугольника ABC . Сравнить углы BAN и NAC , если $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $BN = 5$ см, $NC = 6$ см.
- 133.** Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит противолежащий катет в отношении $2 : \sqrt{2}$. Найти острые углы треугольника.
- 134.** Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см. Найти катеты.
- 135.** Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет в отношении 8:15, а разность этих отрезков равна 14 см. Найти стороны треугольника.
- 136.** Высота AK треугольника ABC равна 8 см и делит сторону BC на отрезки $BK = 6$ см и $KC = 15$ см. На какие отрезки делит сторону BC биссектриса угла A ?
- 137.** Разность двух сторон прямоугольника равна 34 см, а его диагональ делится биссектрисой прямого угла на отрезки, длины которых относятся как 7:24. Найти диагональ прямоугольника.
- 138.** Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит его противолежащий катет на отрезки длиной 10 см и 26 см. На какие отрезки делит эта биссектриса медиану, проведенную из вершины прямого угла?
- 139.** Диагональ равнобедренной трапеции делит высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки, длины которых относятся как 4:5, а боковая сторона трапеции равна ее меньшему основанию. Найти отношение оснований трапеции.
- 140.** В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной 6 см так, что угол 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти стороны треугольника.

141. В параллелограмме биссектриса острого угла, равно-го 45° , делит диагональ на отрезки длиной $4\sqrt{2}$ см и 7 см. Найти длины отрезков, на которые эта биссектриса делит сторону параллелограмма.
142. В треугольнике со сторонами, равными 13 см, 14 см и 15 см, проведена полуокружность, центр которой принадлежит большей стороне треугольника, касающаяся двух других сторон. На какие отрезки центр полуокружности делит большую сторону?
143. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки длиной 8 см и 17 см. Найти стороны треугольника.
144. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 26 см, а высота, проведенная к основанию, — 20 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.
145. В равнобедренном треугольнике радиус вписанной окружности на 4 см меньше высоты, проведенной к основанию. Боковая сторона равна 20 см. Найти периметр треугольника.
146. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами, равными 24 см и 18 см.

$$\text{Формула } \frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

147. В треугольнике ABC $AC = 5\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника.
148. В треугольнике ABC $\angle C = 45^\circ$, а радиус описанной окружности $R = 8\sqrt{2}$ см. Найти сторону AB .
149. В треугольнике ABC $AC = 12$ см, $AB = 8$ см, $R = 4\sqrt{3}$ см, где R — радиус описанной окружности. Найти сторону BC . Сколько решений имеет задача?
150. В треугольнике ABC BD — биссектриса, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если радиус окружности, описанной около треугольника BDC , равен $8\sqrt{6}$ см.
151. В треугольнике ABC H — точка пересечения высот. Найти радиус окружности описанной около треугольника AHB , если радиус окружности, описанной около треугольника AHC , равен 5 см.

152. Основание равнобедренного треугольника равно 70 см, а боковая сторона — 37 см. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.
153. Основания равнобедренной трапеции равны 2 см и 14 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти радиус окружности, описанной около трапеции.
154. В окружность, радиус которой равен 8 см, вписана трапеция, одно основание которой в 2 раза меньше каждой из трех других сторон. Найти диагонали трапеции.
155. В треугольнике ABC O — точка пересечения биссектрис. Известно, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AOB , равны. Доказать, что $\angle C = 60^\circ$.

Решение треугольников

156. Найти неизвестные стороны и углы треугольника ABC , если:
- 1) $AC = 10$ см, $\angle C = 26^\circ$, $\angle B = 62^\circ$;
 - 2) $AB = 16$ см, $\angle A = 38^\circ$, $\angle B = 49^\circ$;
 - 3) $AB = 15$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 65^\circ$;
 - 4) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $\angle B = 96^\circ$;
 - 5) $AB = 9$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см;
 - 6) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $AC = 16$ см;
 - 7) $AB = 18$ см, $BC = 20$ см, $\angle A = 110^\circ$;
 - 8) $AB = 12$ см, $BC = 15$ см, $\angle A = 50^\circ$;
 - 9) $AB = 14$ см, $BC = 9$ см, $\angle A = 25^\circ$;
 - 10) $AB = 28$ см, $BC = 12$ см, $\angle A = 35^\circ$.
157. В треугольнике ABC $AC = CB = 10$ см, $\angle A = 70^\circ$. Найти: 1) сторону AB ; 2) высоту BK ; 3) медиану BM ; 4) биссектрису AD ; 5) радиус описанной окружности; 6) радиус вписанной окружности.
158. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 6 см, $\angle CAD = 42^\circ$, $\angle BAD = 74^\circ$. Найти: 1) стороны трапеции; 2) радиус окружности, описанной около треугольника ABC ; 3) радиус окружности, вписанной в треугольник COD (O — точка пересечения диагоналей трапеции).

159. Меньшая сторона треугольника, вписанного в окружность, равна 8 см, а вершины треугольника делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 2:3:7. Найти неизвестные стороны треугольника.
160. На сторонах треугольника ABC ($AC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \varphi$) вне его построены квадраты и их центры последовательно соединены. Определить периметр образовавшегося треугольника. Решить задачу в общем виде, а также вычислить, если $AC = 6$ см, $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Ломаная. Выпуклый многоугольник

161. Какие из приведенных на рисунке 97 фигур можно назвать ломаными? Ответ обосновать. Среди выбранных ломаных указать простые.

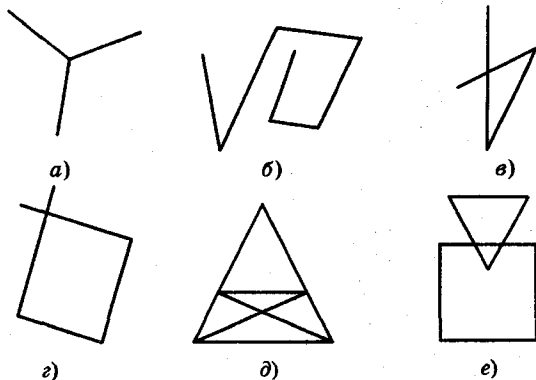


Рис. 97

162. Могут ли звенья замкнутой ломаной быть равными:
 1) 2 см, 4 см, 7 см, 12 см; 2) 3 см, 17 см, 8 см, 5 см;
 3) 11 см, 5 см, 26 см, 4 см, 6 см? Ответ обосновать.
163. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого десятиугольника? Найти общее количество диагоналей выпуклого десятиугольника.
164. Доказать, что в выпуклом шестиугольнике сумма длин диагоналей больше суммы длин сторон.

165. Доказать, что сумма двух сторон треугольника больше удвоенной медианы, проведенной к третьей стороне.
166. Доказать, что сумма двух медиан треугольника больше его третьей медианы.

Сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника

167. Можно ли построить выпуклый многоугольник, все углы которого острые?
168. Может ли наименьший угол выпуклого семиугольника быть равным 136° ?
169. Как изменится сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, если количество его сторон увеличится на два?
170. Определить углы выпуклого шестиугольника, если их градусные меры относятся как $3:5:4:7:2:3$.
171. Найти углы выпуклого четырехугольника, если один из них на 30° больше второго, третий — на 10° больше второго, а четвертый равен полусумме первого и третьего углов.
172. Все углы выпуклого n -угольника острые. Найти n .
173. Может ли в выпуклом четырехугольнике один из углов быть больше суммы трех других углов?
174. В выпуклом многоугольнике сумма его внутренних углов равна 2700° . Найти количество его сторон и диагоналей.
175. В выпуклом многоугольнике 152 диагонали. Найти количество его сторон и сумму углов.
176. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника в 4 раза больше суммы его внешних углов. Сколько сторон у этого многоугольника?
177. Найти количество сторон выпуклого многоугольника, у которого сумма внутренних углов больше суммы внешних на 720° .

Правильный многоугольник

178. Существует ли пятиугольник, не являющийся правильным, все стороны которого равны?

179. Какие правильные многоугольники имеют ось симметрии и центр симметрии?
180. Найти величины внутренних и внешних углов правильного n -угольника, если n равно: 1) 6; 2) 24; 3) 10.
181. Найти количество сторон правильного многоугольника, если: 1) его внутренний угол равен 164° ; 2) его внешний угол равен 12° .
182. Определить количество сторон правильного многоугольника, у которого внутренний угол вдвое больше внешнего.
183. Сумма внутренних углов правильного многоугольника вместе с одним из внешних углов составляет 1125° . Найти количество сторон многоугольника.
184. На рис. 98 изображен правильный пятиугольник $ABCDE$, M — точка пересечения прямых AE и CD . Найти угол AMC .
185. На рис. 99 изображены несколько последовательных сторон правильного многоугольника. Как определить количество его сторон?

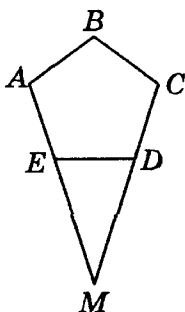


Рис. 98

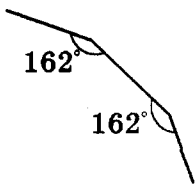


Рис. 99

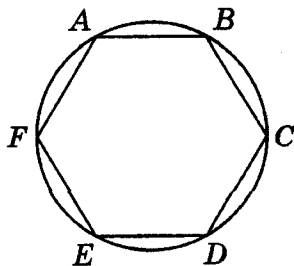


Рис. 100

186. Найти величину центрального угла правильного n -угольника, если n равно: 1) 5; 2) 8; 3) 40.
187. Центральный угол правильного многоугольника равен 20° . Найти количество сторон многоугольника.
188. Какое наибольшее значение может принимать внешний угол правильного многоугольника?

189. На рис. 100 изображен правильный шестиугольник, вписанный в окружность. Как проще всего на этом рисунке построить правильный двенадцатиугольник?
190. По данной стороне a построить правильный пятиугольник.
191. Описать около данной окружности правильный двенадцатиугольник.
192. AB , BC и CD — три последовательные стороны правильного многоугольника. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M , $\angle BMC = 140^\circ$. Найти количество сторон многоугольника.
193. Окружность вписана в многоугольник, все углы которого равны. Могут ли быть неравными его стороны?
194. Середины сторон многоугольника соединили последовательными отрезками и получили правильный многоугольник. Можно ли утверждать, что данный многоугольник также правильный?
195. Четырехугольник имеет две оси симметрии. Доказать, что он правильный.

**Зависимость между сторонами и радиусами
вписанной и описанной окружностей
правильного многоугольника**

196. Сторона правильного треугольника равна 6 см. Найти радиусы его вписанной и описанной окружностей.
197. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 8 см. Найти сторону квадрата и радиус описанной около него окружности.
198. Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен $5\sqrt{3}$ см. Найти сторону шестиугольника и радиус вписанной в него окружности.
199. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен 12 см, а радиус окружности, вписанной в него, — $6\sqrt{3}$ см. Найти сторону многоугольника и количество его сторон.
200. Существует ли правильный многоугольник, у которого отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно 0,8?
201. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна 4 см. Найти сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

202. Найти радиусы окружностей, вписанной в правильный треугольник и описанной около него, если их сумма равна 12 см.
203. В окружность вписан и около нее описан квадрат. Найти отношение сторон этих квадратов.
204. Квадрат вписан в окружность радиуса R . В этот квадрат вписана другая окружность, в которую вписан правильный треугольник. Найти сторону этого треугольника.
205. Около правильного треугольника со стороной $2\sqrt{3}$ см описана окружность, а около окружности описан правильный шестиугольник, около которого описана окружность. Найти радиус этой окружности.
206. Около окружности радиуса $4\sqrt{3}$ см описан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник и в него вписана окружность. Найти радиус этой окружности.
207. Середины сторон правильного восьмиугольника соединены через одну так, что полученной фигурой является квадрат. Найти сторону восьмиугольника, если сторона квадрата равна 6 см.
208. Радиус окружности, вписанной в правильный восьмиугольник $ABCDEFKM$, равен 4 см. Найти длины диагоналей AC , AD и AE .
209. Длина общей хорды двух окружностей равна 2 см. Для одной из окружностей хорда служит стороной правильного вписанного шестиугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Найти расстояние между центрами окружностей, если они лежат по разные стороны от хорды.
210. В квадрат со стороной a вписана окружность. Четыре маленьких окружности касаются этой окружности и двух сторон квадрата. Найти радиусы маленьких окружностей.
211. Углы правильного треугольника срезали так, что получили правильный шестиугольник со стороной 5 см. Найти сторону треугольника.
212. В данный правильный треугольник вписать квадрат так, чтобы одна из сторон квадрата была параллельна стороне треугольника.
213. Квадрат со стороной 6 см повернули около его центра на угол 45° . Найти периметр образовавшегося восьмиугольника.

214. Около правильного треугольника описана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин треугольника является величиной постоянной.

Длина окружности и его частей

215. Найти длину окружности, радиус которой равен:
 1) 3 см; 2) 8 см; 3) $\sqrt{\pi}$ см; 4) $\frac{5}{\pi}$ см.
216. Найти длину окружности, диаметр которой на 3 см длиннее радиуса.
217. Чему равен радиус окружности, длина которого равна: 1) 4 см; 2) 6 см; 3) π^2 см; 4) $\frac{2}{\pi}$ см?

218. Как построить окружность, длина которой равна разности суммы длин двух данных окружностей и длины третьей данной окружности?

219. Радиус окружности уменьшили: 1) в 3 раза; 2) на 1 см. Как при этом изменилась длина окружности?

220. Отрезок $AB = 10$ см разделили на несколько отрезков (не обязательно равных). На каждом из полученных отрезков как на диаметре построили окружности. Найти сумму длин полученных окружностей.

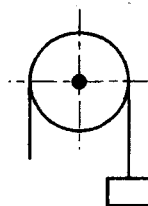


Рис. 101

221. Груз поднимается с помощью блока (рис. 101). На сколько поднимется груз за 8 оборотов блока, если радиус блока равен 5 см?
222. Диаметр колеса автомобиля равен 0,9 м. Найти его скорость, если колесо за одну минуту делает 250 оборотов.
223. Построить график зависимости диаметра окружности от его длины.
224. Радиус окружности равен 8 см. Найти длину дуги, содержащей: 1) 2° ; 2) 20° ; 3) 125° ; 4) 240° ; 5) 315° .
225. Длина дуги окружности равна 20 см, а ее градусная мера — 15° . Найти радиус окружности.
226. Длина дуги окружности радиуса 40 см равна π см. Найти градусную меру дуги.
227. Начертить в тетради окружность радиуса 4 см. Отметить на ней дугу длиной 3л см.

228. Длина окружности радиуса 12 см равна длине дуги другой окружности, содержащей 135° . Найти радиус другой окружности.

229. $ABCD$ — квадрат со стороной a . На его сторонах как на диаметрах построены полуокружности (рис. 102). Найти периметр полученного «цветка».

230. На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) как на диаметре построена окружность. Найти длину дуги этой окружности, расположенной внутри треугольника и отсекаемой гипотенузой AB , если $\angle A = 40^\circ$, $AC = 10$ см.

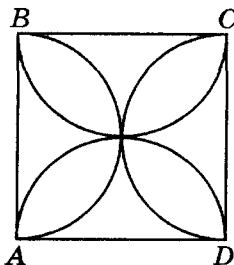


Рис. 102

231. В треугольнике ABC $AB = 6$

см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Найти длину дуги окружности с центром в вершине B , касающейся стороны AC и содержащейся внутри треугольника.

232. В окружность радиуса $R = 1$ вписан правильный двенадцатиугольник и около этой окружности описан правильный шестиугольник. Сделать рисунок и, используя его, доказать, что $3 < \pi < 3,5$.

Радианная мера угла

233. Найти радианную меру углов: 10° ; 20° ; 54° ; 60° ; 125° ; 270° .

234. Найти градусную меру угла, радианная мера которого равна: $\frac{\pi}{15}$; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$.

235. Радиус окружности равен единице. Найти длину дуги окружности, соответствующей углу в 6 радиан.

236. Могут ли все углы четырехугольника быть равными целому числу радиан?

Площадь квадрата. Площадь прямоугольника

237. Найти площадь квадрата, сторона которого равна:
1) 14 см; 2) 2,5 см; 3) a см.

238. Найти площадь квадрата, диагональ которого равна:
1) 6 см; 2) $6\sqrt{2}$ см; 3) \sqrt{a} см.

239. Найти площадь прямоугольника, стороны которого равны: 1) 5 см и 15 см; 2) 0,3 см и 4,2 см.
240. Найти сторону квадрата, если его площадь равна: 1) 225 см^2 ; 2) $6,76 \text{ см}^2$; 3) 24 м^2 ; 4) $a \text{ см}^2$.
241. Одна из сторон прямоугольника равна 14 см, а его площадь — 210 см^2 . Найти другую сторону прямоугольника.
242. Сторона прямоугольника равна 10 см и образует с диагональю угол 60° . Найти площадь прямоугольника.
243. Найти стороны прямоугольника, если они относятся как 3 : 8, а площадь прямоугольника равна 96 см^2 .
244. Площадь прямоугольника равна 88 см^2 . Найти стороны прямоугольника, если одна из них на 3 см меньше другой.
245. Квадрат и прямоугольник имеют равные площади. Сторона квадрата равна 12 см, а стороны прямоугольника относятся как 4:9. Найти стороны прямоугольника.
246. Найти радиус окружности, описанной около квадрата, если площадь квадрата равна $S \text{ см}^2$.
247. Площадь квадрата численно равна его диагонали. Найти сторону квадрата.
248. $ABCD$ — квадрат (рис. 103). Отрезки MF и KE параллельны его сторонам. Используя рисунок, доказать формулу $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.
249. Могут ли два неравных прямоугольника иметь равные площади?
250. Как изменится площадь квадрата, если его сторону: 1) увеличить в 5 раз; 3) уменьшить в a раза? 2) уменьшить в 3 раза;
251. Как изменится площадь квадрата, если его диагональ уменьшить в 2 раза? Как изменится при этом периметр квадрата?
252. Как изменится площадь прямоугольника, если: 1) одну из его сторон увеличить в 4 раза; 2) одну из его сторон уменьшить в 6 раз; 3) обе стороны уменьшить в 3 раза;

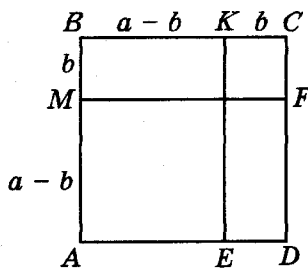


Рис. 103

- 4) одну сторону увеличить в 3 раза, а другую — в 5 раз;
- 5) одну сторону уменьшить в 9 раз, а другую — в 2 раза;
- 6) одну сторону увеличить в a раз, а другую — в b раз;
- 7) одну сторону увеличить в t раз, а другую уменьшить в l раз?
253. Отношение площадей двух квадратов равно 5. Найти отношение их периметров.
254. Построить квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов.
255. Построить квадрат, площадь которого в 5 раз больше площади данного квадрата.
256. Стороны двух квадратов равны соответственно a и b . Построить квадрат, площадь которого равна ab .
257. Как разрезать квадрат на три равновеликих прямоугольника?
258. Площадь квадрата, вписанного в окружность, равна 5 см^2 . Найти сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

Площадь параллелограмма. Площадь ромба

259. Найти площадь параллелограмма, сторона которого равна 14 см, а высота, проведенная к ней, — 8 см.
260. На рис. 104 указать параллелограммы, имеющие равные площади.
261. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны 8 см и 14 см, а угол между ними — 45° .

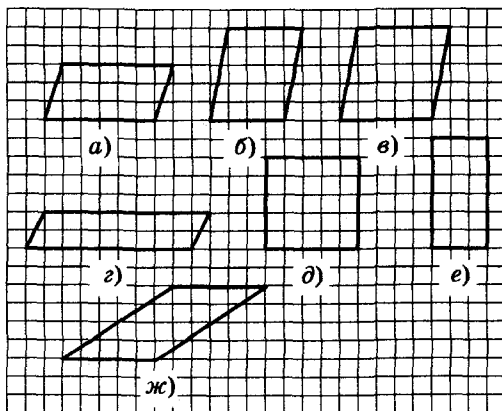


Рис. 104

262. Найти площадь ромба, сторона которого равна $7\sqrt{2}$ см, а один из углов — 135° .
263. Среди всех параллелограммов с заданными высотами указать параллелограмм наибольшей площади.
264. Углы ромба относятся как 2:1, а его сторона равна 6 см. Найти площадь ромба.
265. Площадь параллелограмма равна 56 см^2 . Найти расстояние между сторонами параллелограмма, длины которых 8 см.
266. Одна из сторон параллелограмма равна 5 см, а высота, проведенная к другой стороне, — 4 см. Найти неизвестные стороны и высоту параллелограмма, если его площадь равна 40 см^2 .
267. Стороны параллелограмма равны 8 см и 10 см, а одна из высот — 6 см. Найти вторую высоту параллелограмма. Сколько решений имеет задача?
268. Площадь параллелограмма равна 45 см^2 , а его высота на 4 см меньше стороны, к которой она проведена. Найти эту сторону параллелограмма и высоту, проведенную к ней.
269. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны, а отношение их площадей равно 2. Найти углы параллелограмма.
270. Стороны параллелограмма равны 7 см и 9 см. Может ли его площадь быть равной 64 см^2 ?
271. Высоты параллелограмма равны 14 см и 12 см, а угол между ними — 45° . Найти площадь параллелограмма.
272. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны 25 см и 7 см, а одна из диагоналей перпендикулярна стороне.
273. Доказать, что прямая, делящая параллелограмм на две равные части, проходит через его центр симметрии.

Площадь треугольника

274. Сторона треугольника равна 10 см, а высота, проведенная к ней, — 3,5 см. Найти площадь треугольника.
275. Площадь треугольника равна 92 см^2 . Найти высоту треугольника, проведенную к стороне длиной 4 см.
276. Найти площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны 5 см и 11 см.

277. На рис. 105 указать треугольники, имеющие равные площади.

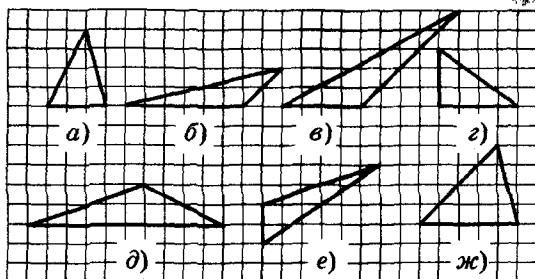


Рис. 105

278. Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 6 см и 5 см, а угол между ними: 1) 60° ; 2) 135° .
279. Две стороны треугольника равны 5 см и 12 см. Может ли его площадь быть равной: 1) 24 см^2 ; 2) 30 см^2 ; 3) 42 см^2 ?
280. Основание треугольника 10 см, а высота, проведенная к ней, — 4 см. Какой должна быть высота другого треугольника с основанием 8 см, чтобы его площадь была в 2 раза меньше площади первого треугольника?
281. Найти площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 16 см, а боковая сторона — 10 см.
282. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 см и 15 см. Найти высоту треугольника, проведенную к гипотенузе.
283. Как изменится площадь треугольника, если:
- 1) его высоту уменьшить в 2 раза;
 - 2) его основание увеличить в 4 раза;
 - 3) высоту уменьшить в 6 раз, а основание увеличить в 4 раза;
 - 4) основание уменьшить в 3 раза, а высоту — в 9 раз?
284. В треугольнике ABC $AC : CB = 2 : 5$. Найти отношение высот треугольника, проведенных из вершин A и B .
285. Доказать, что меньшей стороне треугольника соответствует большая высота.
286. Доказать, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

287. В четырехугольнике $ABCD$ O — точка пересечения его диагоналей. Известно, что площади треугольников AOB и COD равны. Доказать, что $BC \parallel AD$.
288. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, делит ее на отрезки длиной 2 см и 8 см, считая от вершины угла при основании. Найти площадь треугольника.
289. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 48 см. Найти площадь треугольника, если отношение боковой стороны к основанию равно 25:14.
290. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120° , а его площадь — $20\sqrt{3}$ см². Найти стороны треугольника.
291. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 16 см, а синус угла, лежащего против него, равен 0,6. Найти площадь треугольника.
292. Найти площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 37 см, а сумма катетов — 47 см.
293. Найти площадь прямоугольного треугольника, если высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки длиной 9 см и 16 см.
294. Найти площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см.
295. Найти площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 35 см, а радиус вписанной окружности — 7 см.
296. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$) вписана окружность с центром O (рис. 106), K — точка касания окружности со стороной AB , $BK = 4\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30^\circ$. Найти площадь треугольника ABC .
297. В ромб $ABCD$ вписан треугольник AKM (рис. 107), $AB = 10$ см, $BK = 2$ см, $DM = 6$ см, $\angle BCD = 60^\circ$. Найти площадь треугольника AKM .

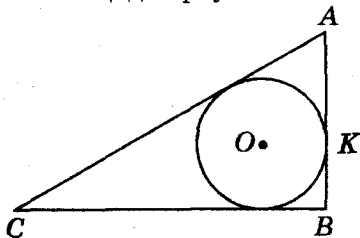


Рис. 106

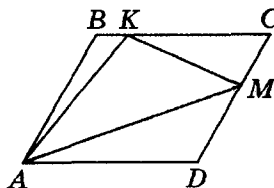


Рис. 107

298. Найти площадь треугольника, изображенного на рис. 108.

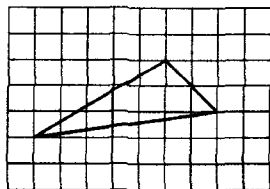


Рис. 108

299. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$) вписан квадрат (рис. 109). Найти его площадь, если $AB = 12$ см, $BC = 16$ см.

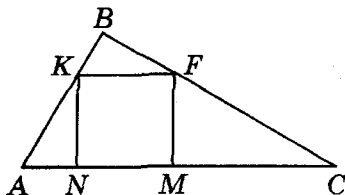


Рис. 109

300. Площадь треугольника ABC равна 42 см². Точка K делит сторону AC в отношении $2:5$, считая от точки A . Найти площади треугольников ABK и KBC .

301. В треугольнике ABC $AC = 10$ см, $CB = 7$ см. В каком отношении делит площадь треугольника ABC биссектриса угла C ?

302. Отрезки AB и CD пересекаются в точке K (рис. 110), $AK = \frac{1}{2} KB$, $CK = 3KD$. Найти отношение площадей треугольников AKC и BKD .

303. На сторонах AB и AC угла BAC отложены отрезки $AM = 6$ см, $AB = 10$ см, $AK = 3$ см, $AC = 12$ см (рис. 111). Найти отношение площадей треугольников AMK и ABC .

304. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки E и K соответственно так, что $AE : EB = 4 : 1$, $AK : KD = 2 : 5$. Площадь треугольника EAK равна 4 см². Найти площадь параллелограмма.

305. Через вершину треугольника провести прямую так, чтобы она разделила его площадь в отношении: 1) $4:1$; 2) $3:4$.

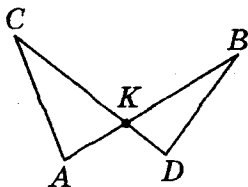


Рис. 110

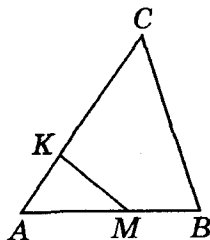


Рис. 111

306. Через вершину параллелограмма провести прямую так, чтобы она разделила его площадь в отношении 1:4.
307. Построить равнобедренный треугольник, площадь которого относится к площади данного треугольника как $1 : \sqrt{3}$, а боковая сторона равна одной из сторон данного треугольника.
308. Найти площадь ромба, диагонали которого равны 12 см и 7 см.
309. Найти площадь ромба, если его сторона равна 20 см, а разность диагоналей — 8 см.
310. Найти площадь ромба, если его диагонали относятся как 12:35, а сторона равна 74 см.
311. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей ромба к стороне, делит ее на отрезки длиной 16 см и 25 см. Найти площадь ромба.
312. Угол между диагоналями прямоугольника равен 30° , а его площадь — 20 см^2 . Найти стороны прямоугольника.
313. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M такие, что треугольник CKM — равносторонний. Найти площадь квадрата, если сторона треугольника равна 1.
314. Найти площадь треугольника, стороны которого равны 3 см, 7 см и 8 см.
315. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найти площадь треугольника, если большая из двух других сторон равна 25 см.
316. Найти наибольшую высоту треугольника, стороны которого равны 13 см, 14 см и 15 см.
317. Три окружности, радиусы которых равны 6 см, 2 см и 1 см, попарно касаются друг друга. Определить площадь треугольника, вершины которого лежат в центрах этих окружностей.
318. В треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см вписана окружность и центр окружности соединен с вершинами треугольника. Найти площади трех полученных треугольников.

Площадь трапеции

319. Найти площадь трапеции, основания которой равны 10 см и 14 см, а высота — 5 см.
320. Площадь трапеции равна 98 см^2 , одно из ее оснований равно 12 см, а высота — 7 см. Найти второе основание трапеции.

321. Площадь трапеции равна 50 см^2 , а ее высота — 5 см. Найти основания трапеции, если они относятся как 1:4.
322. Найти площадь трапеции, основания которой равны 7 см и 9 см, а боковая сторона длиной 6 см образует с большим основанием угол 45° .
323. Найти площадь трапеции $ABCD$ (рис. 112).
324. Основания равнобедренной трапеции равны 30 см и 40 см, а диагональ — 37 см. Найти площадь трапеции.
325. Найти площадь равнобедренной трапеции, меньшее основание которой равно 7 см, боковая сторона — 10 см, а угол при большем основании — 60° .

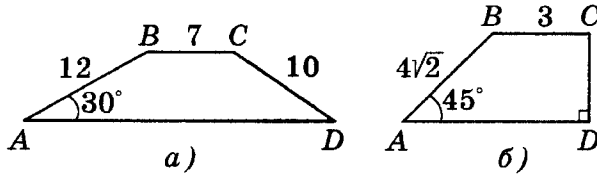


Рис. 112

326. Найти площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой перпендикулярны, а основания равны 12 см и 20 см.
327. Найти площадь равнобедренной трапеции, основания которой равны 4 см и 10 см, а диагонали являются биссектрисами ее тупых углов.
328. Разность оснований прямоугольной трапеции равна 6 см, а меньшее основание — 12 см. Найти площадь трапеции, если меньшая диагональ является биссектрисой прямого угла.
329. Найти площадь прямоугольной трапеции, большее основание которой равно 24 см, меньшая боковая сторона — 10 см, а тупой угол — 135° .
330. Боковые стороны прямоугольной трапеции равны 17 см и 8 см. Основания трапеции относятся как 2:5. Найти площадь трапеции.
331. Высота равнобедренной трапеции равна $7\sqrt{3}$ см. Найти площадь трапеции, если угол между диагоналями равен 120° .
332. Найти площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, а высота равна 10 см.
333. Найти площадь трапеции, основания которой равны 8 см и 18 см, а углы при большем основании — 30° и 60° .
334. Площадь трапеции равна 108 см^2 , а ее высота — 6 см. Найти основания трапеции, если их разность равна 8 см.
335. Найти площадь трапеции, основания которой равны 8 см и 22 см, а боковые стороны — 26 см и 28 см.

336. Точки касания окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, делят ее боковую сторону на отрезки длиной 9 см и 16 см. Найти площадь трапеции.
337. Площадь равнобедренной трапеции равна $50\sqrt{2}$ см², а острый угол — 45° . Найти высоту трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.
338. Боковые стороны трапеции равны 15 см и 13 см, а длины оснований относятся как 1:3. Найти площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.
339. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит большую боковую сторону на отрезки, длины которых относятся как 4:9. Найти площадь трапеции, если меньшая из боковых сторон равна 24 см.
340. Около равнобедренной трапеции описана окружность. Угол между радиусами этой окружности, проведенными к концам боковой стороны, равен 120° . Найти площадь трапеции, если ее средняя линия равна 8 см.

Площадь многоугольника

341. Площадь четырехугольника равна полупроизведению его диагоналей. Доказать, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.
342. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC с внешней стороны построены квадраты $ABDK$ и $CBFN$ соответственно. Найти площадь шестиугольника $AKDFNC$.
343. Выразить площадь правильного шестиугольника через длину его меньшей диагонали.
344. Определить площадь правильного шестиугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 4 см.
345. Найти отношение сторон правильного треугольника, четырехугольника и шестиугольника, площади которых равны.
346. Сторона правильного шестиугольника равна 3 см. Его стороны, взятые через одну, продолжили до пересечения так, что образовался равносторонний треугольник. Найти площадь этого треугольника.
347. Сторона правильного треугольника равна 4 см. Около него описана окружность, а около окружности — правильный шестиугольник. Найти площадь шестиугольника.
348. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M . Площади треугольников AMB , AMD и DMC соответственно равны 4 см², 12 см² и 9 см². Найти площадь четырехугольника.

349. В окружность вписан четырехугольник, последовательные стороны которого равны 7 см, 24 см, 20 см и 15 см. Найти его площадь.

Площади подобных фигур

350. Стороны двух равносторонних треугольников относятся как 2:3. Как относятся их площади?
351. Диагональ одного квадрата вдвое больше диагонали другого квадрата. Как относятся их площади?
352. В треугольнике провели среднюю линию. Как относится площадь полученного треугольника к площади данного треугольника?
353. Стороны двух правильных шестиугольников относятся как 3:5, а площадь меньшего из них равна 72 см^2 . Найти площадь большего шестиугольника.
354. Площадь многоугольника равна 80 см^2 . Найти площадь подобного ему многоугольника, если соответствующие стороны этих многоугольников равны 10 см и 6 см. Сколько решений имеет задача?
355. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на две части — треугольник и трапецию. Площади этих фигур относятся как 1:4 соответственно. Найти периметр данного треугольника, если периметр полученного треугольника равен 20 см.
356. Сторона AB треугольника ABC разделена в отношении 1:2:3, считая от вершины A , и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC . Найти отношение площадей полученных частей.
357. Медиана треугольника равна 6 см. Прямая, параллельная медиане, делит треугольник на части, площади которых относятся как 5:7. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.
358. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $AM : MC = 8 : 3$. Прямая DM пересекает сторону BC в точке N . Найти площадь треугольника AMD , если площадь треугольника NMC равна 12 см^2 .
359. Провести прямую, параллельную медиане данного треугольника, так, чтобы она отсекала $\frac{1}{8}$ часть его площади.
360. Стороны треугольника равны 10 см, 17 см и 24 см. Биссектриса, проведенная к меньшей стороне, разделена в отношении 2:5, считая от вершины, и через точку деления проведена прямая, параллельная стороне. Найти площадь полученной трапеции.

Площадь круга и его частей

361. Найти площадь круга, радиус которого равен: 1) 3 см; 2) $\frac{5}{\pi}$ см; 3) $\frac{7}{\sqrt{\pi}}$ см.
362. Найти с точностью до десятых радиус круга, площадь которого равна 16 см^2 .
363. Площади двух кругов относятся как 4:9. Чему равно отношение их радиусов?
364. Найти площадь круга, длина окружности которого равна 10π см.
365. Площади двух кругов равны $a \text{ см}^2$ и $b \text{ см}^2$. Чему равно отношение длин соответствующих окружностей?
366. Найти площадь круга, вписанного в равносторонний треугольник, площадь которого равна $4\sqrt{3} \text{ см}^2$.
367. Найти отношение площадей вписанного и описанного кругов правильного треугольника.
368. Найти площадь кольца, расположенного между двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны 3 см и 7 см.
369. Найти площадь сектора круга радиуса 4 см, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) 40° ; 2) 100° ; 3) 300° .
370. Какую часть круга составляет площадь сектора, если соответствующий сектору центральный угол равен: 1) 15° ; 2) 110° ; 3) 240° ?
371. Площадь сектора составляет $\frac{9}{20}$ площади круга. Найти градусную меру центрального угла, соответствующего данному сектору.
372. Найти радиус круга, если площадь сектора этого круга равна 60 см^2 , а центральный угол, соответствующий этому сектору, равен 54° .
373. Найти площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 10 см, а дуга содержит: 1) 45° ; 2) 120° ; 3) 240° .
374. Найти площадь кругового сегмента, если его основание равно 8 см, а дуга сектора содержит: 1) 60° ; 2) 225° .
375. При каком условии объединением нескольких секторов является сегмент?
376. Найти площади заштрихованных фигур, изображенных на рис. 113.

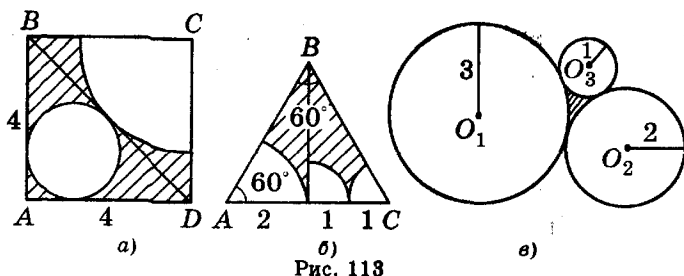


Рис. 113

377. Стороны треугольника равны 20 см, 34 см и 42 см. Найти отношение площадей описанного и вписанного в этот треугольник кругов.
378. Площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, равна 16π см², а тупой угол трапеции равен 150° . Найти площадь трапеции.
379. Два круга имеют общую хорду. Найти отношение площадей этих кругов, если из центра первого круга общую хорду видно под углом 60° , а из центра второго — под углом 90° .
380. В квадрат вписана окружность и около него описана окружность. Найти площадь кругового кольца, расположенного между этими окружностями, если сторона квадрата равна 5 см.
381. Длины сторон треугольника равны 10 см, 17 см и 21 см. В треугольник вписан полукруг, центр которого лежит на большей стороне треугольника. Найти площадь полукруга.
382. В полукруг, диаметр которого равен 10 см, вписана трапеция, большее основание которой совпадает с диаметром полукруга, а острый угол равен 60° . Найти площадь той части полукруга, которая лежит вне трапеции.
383. Радиус круга равен 12 см. В нем проведена хорда, длина которой равна длине стороны вписанного правильного шестиугольника. Найти площадь большего из сегментов, определяемых этой хордой.
384. Найти площадь круга, вписанного в сектор круга радиуса 4 см с центральным углом, равным 120° .
385. Радиус круга равен 6 см. По одну сторону от центра круга проведены две параллельные хорды, одна из которых равна стороне правильного вписанного треугольника, а другая — стороне вписанного квадрата. Найти площадь той части круга, которая расположена между хордами.

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

386. Сколько различных плоскостей можно провести через одну точку?
387. Сколько различных плоскостей можно провести через две пересекающиеся прямые?
388. Можно ли утверждать, что две прямые, не имеющие общих точек, параллельны: 1) на плоскости; 2) в пространстве?
389. Прямые AB и CD скрещивающиеся. Могут ли пересекаться прямые AC и BD ?
390. Через точки A и B прямой l проведены перпендикулярные ей прямые и на них отмечены такие точки C и D соответственно, что $AC = BD$. Верно ли, что прямые AB и CD параллельны: 1) на плоскости; 2) в пространстве?
391. Прямые a и b пересекаются и прямые b и c пересекаются. Верно ли, что прямые a и c пересекаются?
392. Прямая a параллельна прямой b , лежащей в плоскости α . Сколько еще существует в плоскости α прямых, параллельных прямой a ?
393. Прямые a и b параллельны плоскости α . Верно ли, что прямые a и b параллельны?
394. Прямые a и b параллельны. Плоскость α параллельна прямой a , а плоскость β — прямой b . Верно ли, что плоскости α и β параллельны?
395. Прямая a перпендикулярна плоскости α , а прямая b параллельна прямой a . Верно ли, что прямая b перпендикулярна плоскости α ?
396. Плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ . Параллельны ли плоскости α и β ?

Призма

397. На рис. 114 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Указать:

- 1) ребра, параллельные ребру BB_1 ;
- 2) ребра, перпендикулярные ребру CD ;

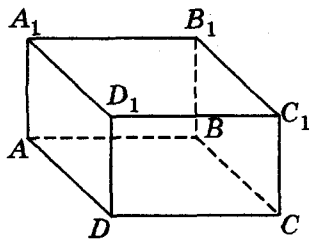


Рис. 114

- 3) ребра, скрещивающиеся с ребром DD_1 ;
- 4) ребра, параллельные грани BB_1C_1 ;
- 5) ребра, перпендикулярные грани AA_1D_1 ;
- 6) грани, перпендикулярные грани DD_1C_1 .
398. Найти полную поверхность и объем куба с ребром 6 см.
399. Найти площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда (рис. 114), если $BC = 10$ см, $CD = 6$ см, $CC_1 = 8$ см.
400. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 4 см и острым углом 30° . Найти площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем призмы, если ее высота равна 9 см.
401. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 2 см, а высота — 9 см. Найти площадь боковой поверхности и объем призмы.
402. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Найти площадь боковой поверхности и объем призмы, если ее высота равна 6 см.
403. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, основания которой равны 4 см и 8 см, а острый угол — 60° . Найти площадь полной поверхности и объем призмы, если ее высота равна 10 см.

Пирамида

404. На рис. 115 изображена пирамида $SABCDE$. Назвать:
- 1) основание пирамиды; 3) боковые ребра пирамиды;
- 2) вершину пирамиды; 4) боковые грани пирамиды.

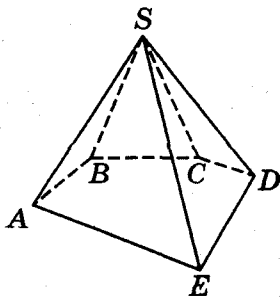


Рис. 115

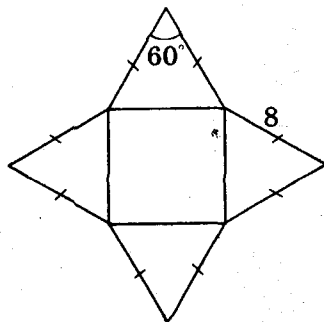


Рис. 116

405. Все боковые грани правильной шестиугольной пирамиды — правильные треугольники со стороной 2 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.
406. Вычислить площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, развертка которой изображена на рис. 116.
407. Боковые ребра MA , MB , MC , MD и ME пятиугольной пирамиды $MABCDE$ равны между собой, $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMD = \angle DME = \angle EMA = 30^\circ$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если $MA = 8$ см.
408. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной 6 см. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 6 см.
409. Найти объем правильной шестиугольной пирамиды (рис. 117), основание которой — шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 3 см, SO — высота пирамиды, $SO = 6$ см.
410. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC$, $BC = 8$ см, $\angle A = 120^\circ$. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 9 см.

Цилиндр

411. На рис. 118 изображен цилиндр. Назвать отрезок, который является:
- 1) высотой цилиндра;
 - 2) образующей цилиндра;
 - 3) радиусом нижнего основания цилиндра;
 - 4) радиусом верхнего основания цилиндра.

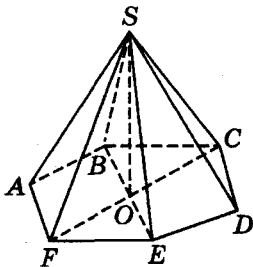


Рис. 117

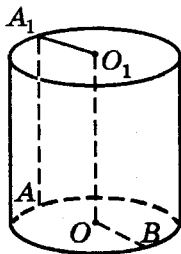


Рис. 118

412. Радиус основания цилиндра равен 8 см, а его высота — 10 см. Найти площадь полной поверхности и объем цилиндра.
413. Прямоугольник, стороны которого равны 14 см и 4 см, вращается вокруг прямой, проходящей через середины противоположных меньших сторон прямоугольника. Найти площадь полной поверхности и объем полученного цилиндра.

Конус

414. На рис. 119 изображен конус. Назвать отрезок, который является:
- 1) высотой конуса;
 - 2) образующей конуса;
 - 3) радиусом основания конуса.
415. Радиус основания конуса равен 10 см, а образующая 26 см. Найти площадь полной поверхности и объем конуса.
416. Равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см вращается вокруг высоты, проведенной к гипотенузе. Найти площадь полной поверхности и объем полученного конуса.
417. Катет прямоугольного треугольника равен a , а гипотенуза c . Треугольник вращается сначала вокруг катета a , а затем вокруг другого катета. Найти отношение объемов полученных конусов.

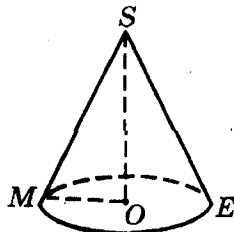


Рис. 119

Шар

418. Найти площадь поверхности и объем шара, радиус которого равен 5 см.
419. Полукруг, диаметр которого равен 10 см, вращается вокруг этого диаметра. Найти площадь поверхности и объем полученного шара.
420. Во сколько раз нужно увеличить радиус шара, чтобы его объем увеличился в 8 раз? Как при этом изменится площадь поверхности шара?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 1

Тематическое оценивание № 1

Тема: *Подобие фигур*

- 1°. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Найти неизвестные стороны этих треугольников, если $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 4$ см, $A_1C_1 = 6$ см.
 - 2°. Точка B окружности и точка O — центр этой окружности — лежат по одну сторону от хорды AC . Найти угол ABC , если $\angle AOC = 146^\circ$.
 - 3°. Стороны треугольника равны 4 см, 7 см и 8 см. Найти стороны подобного ему треугольника, если его периметр равен 57 см.
 - 4°. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 4 см и делит ее на отрезки, разность которых равна 6 см. Найти стороны треугольника.
 - 5°. Через точку M , находящуюся на расстоянии 5 см от центра окружности радиусом 9 см, проведена хорда, которая делится точкой M на отрезки, разность длин которых равна 1 см. Найти длину этой хорды.
-

Тематическое оценивание № 2

Тема: *Решение треугольников*

- 1°. Две стороны треугольника равны 4 см и 8 см, а угол между ними — 60° . Найти длину третьей стороны треугольника.
- 2°. Два угла треугольника равны 30° и 135° , а сторона, лежащая против меньшего из них, равна 4 см. Найти длину стороны треугольника, лежащей против большего из этих углов.
- 3°. Найти неизвестные стороны и углы треугольника ABC , если $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $\angle A = 110^\circ$.

- 4°. Диагональ d параллелограмма образует с его сторонами углы α и β . Найти длины сторон параллелограмма.
- 5°. Острый угол равнобокой трапеции равен 60° , а большее основание больше боковой стороны на 10 см. Найти меньшее основание трапеции, если ее диагональ равна 14 см.
-

Тематическое оценивание № 3

Тема: *Многоугольники*

- 1°. Дан правильный восьмиугольник. Найти:
- 1) величину внутреннего угла восьмиугольника;
 - 2) величину внешнего угла восьмиугольника.
- 2°. Радиус окружности равен 16 м. Найти длину дуги окружности, соответствующей центральному углу в 54° .
- 3°. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, внутренний угол которого в 11 раз больше внешнего?
- 4°. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна $5\sqrt{3}$ см. Найти сторону правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.
- 5°. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен $2\sqrt{3}$ см, а радиус окружности, вписанной в него, — 3 см. Найти сторону многоугольника и количество его сторон.
-

Тематическое оценивание № 4

Тема: *Площади фигур*

- 1°. Две стороны параллелограмма равны 4 см и 6 см, а угол между ними — 30° . Найти площадь параллелограмма.
- 2°. Найти площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 15 см, а высота, проведенная к основанию, — 9 см.
- 3°. Найти площадь круга, вписанного в правильный шестиугольник со стороной 8 см.

- 4°. Периметры подобных многоугольников относятся как 5:7, а сумма их площадей равна 296 см^2 . Найти площади многоугольников.
- 5°. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найти площадь треугольника.
-

Тематическое оценивание № 5

Тема: *Обобщение и систематизация знаний учащихся*

- 1°. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а высота, проведенная к нему, — 8 см. Найти:
- 1) длину средней линии треугольника, параллельную основанию;
 - 2) боковую сторону треугольника;
 - 3) синус угла при основании треугольника;
 - 4) площадь треугольника.
- 2°. Стороны треугольника равны 39 см, 42 см и 45 см. Найти среднюю из высот треугольника.
- 3°. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30^\circ$. Найти третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?
- 4°. Боковая сторона равнобокой трапеции равна $6\sqrt{3}$ см, а тупой угол — 120° . Найти площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.
-

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 2

Тематическое оценивание № 1

Тема: *Подобие фигур*

- 1°. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Найти неизвестные стороны этих треугольников, если $BC = 5$ см, $AB = 6$ см, $B_1C_1 = 15$ см, $A_1C_1 = 21$ см.
 - 2°. Точка D окружности и точка O — центр этой окружности — лежат по одну сторону от хорды EF . Найти угол EOF , если $\angle EDF = 39^\circ$.
 - 3°. Стороны треугольника равны 3 см, 6 см и 8 см. Найти стороны подобного ему треугольника, если в нем сумма наибольшей и наименьшей сторон равна 22 см.
 - 4°. CD — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная к гипотенузе, $AB = 12$ см, $BD = 8$ см. Найти высоту CD треугольника и катеты BC и AC .
 - 5°. Через точку P , лежащую внутри окружности, проведена хорда, которая делится точкой P на отрезки, длины которых равны 4 см и 5 см. Найти расстояние от точки P до центра окружности, если ее радиус равен 6 см.
-

Тематическое оценивание № 2

Тема: *Решение треугольников*

- 1°. Две стороны треугольника равны 6 см и 4 см, а угол между ними — 120° . Найти длину третьей стороны треугольника.
- 2°. Два угла треугольника равны 60° и 45° , а сторона, лежащая против большего из этих углов, равна $3\sqrt{2}$ см. Найти длину стороны треугольника, лежащей против меньшего из этих углов.
- 3°. Найти неизвестные стороны и углы треугольника ABC , если $AB = 9$ см, $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 20^\circ$.

- 4: В параллелограмме $ABCD$ сторона BC равна a , $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$. Найти другую сторону параллелограмма и диагональ AC .
- 5**. Диагональ параллелограмма равна 21 см, противолежащий ей угол — 120° , а одна из сторон параллелограмма на 6 см больше другой. Найти вторую диагональ параллелограмма.
-

Тематическое оценивание № 3

Тема: *Многоугольники*

1. Дан правильный десятиугольник. Найти:
- 1) величину внутреннего угла десятиугольника;
 - 2) величину внешнего угла десятиугольника.
2. Найти радиус окружности, если центральному углу в 225° соответствует дуга длиной 10 м.
3. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, внутренний угол которого на 108° больше внешнего?
4. В окружность вписан правильный шестиугольник со стороной 4 см. Найти сторону квадрата, описанного около этой окружности.
- 5**. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен $4\sqrt{2}$ см, а сторона многоугольника — 8 см. Найти радиус окружности, вписанной в многоугольник, и количество его сторон.
-

Тематическое оценивание № 4

Тема: *Площади фигур*

1. Основания трапеции равны 8 см и 4 см, а ее высота — 3 см. Найти площадь трапеции.
2. Основание равнобедренного треугольника равно 16 см, а боковая сторона — 17 см. Найти площадь треугольника.
3. Найти площадь круга, вписанного в правильный треугольник со стороной 6 см.

- 4°. Площади двух подобных многоугольников относятся как 4:9, а разность их периметров равна 47 см. Найти периметры многоугольников.
- 5°. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найти площадь треугольника.
-

Тематическое оценивание № 5

Тема: *Обобщение и систематизация знаний учащихся*

- 1°. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 13 см, а высота, проведенная к основанию, — 12 см. Найти:
- 1) длину средней линии треугольника, параллельную боковой стороне;
 - 2) основание треугольника;
 - 3) косинус угла при основании треугольника;
 - 4) площадь треугольника.
- 2°. Стороны треугольника равны 26 см, 15 см и 37 см. Найти наименьшую из его высот.
- 3°. Две стороны треугольника равны 9 см и 14 см, а синус угла между ними — $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Найти третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?
- 4°. Найти площадь прямоугольной трапеции, если радиус круга, вписанного в нее, равен 12 см, а тупой угол трапеции равен 150° .
-

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ТРЕНИРОВОЧНЫМ УПРАЖНЕНИЯМ

Вариант 1

5. $k = 0,5$. 9. 1) 3,5 см, 3 см, 1,5 см; 2) 14 см, 12 см, 6 см; 3) 28 см, 24 см, 12 см; 4) 35 см, 30 см, 15 см. 12. 15 см, 35 см, 40 см и 21 см, 49 см, 56 см. 15. 2) 72 см, 72 см, 126 см или 60 см, 105 см, 105 см. 16. 15 см, 15 см, 24 см. 31. 15 см, 20 см. 36. 1,5 см и 4,5 см. 37. 20 см. 38. 2 см. 39. 2,5 см и 4,5 см. 40. 12,5 см, 12,5 см, 15 см. *Указание.* (рис. 120) $\triangle AEC \sim \triangle BDC$, $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AE} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, $BC = 5x$, $DC = 3x$, тогда $BD = 4x$, $4x = 10$, $x = 2,5$. 41. 3 см, 6,25 см. *Указание.* 1) Пусть O — центр вписанной окружности, $OD = OE = r$, $\triangle BOE \sim \triangle BCD$ (рис. 121). $\frac{BO}{BC} = \frac{OE}{DC}$; 2) Провести перпендикуляр из центра окружности

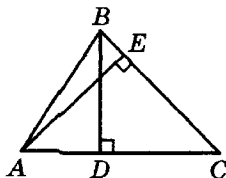


Рис. 120

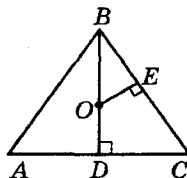


Рис. 121

к боковой стороне. Найти пары подобных треугольников. 46. 7,2 см. 47. 6 см, $2\sqrt{13}$ см. 48. 16 см, 36 см, 12 см. 60. 60° . 63. 37° . *Указание.* $\angle DCK = \angle DMK = 53^\circ$. 64. 24° , 78° , 78° . 66. *Указание.* $\angle ABD = \angle ABC = 90^\circ$. 67. 64° , 58° , 58° , или 52° , 64° , 64° , или 116° , 32° , 32° . *Указание.* Для остроугольного треугольника рассмотреть случаи, когда AB — боковая сторона треугольника, и когда

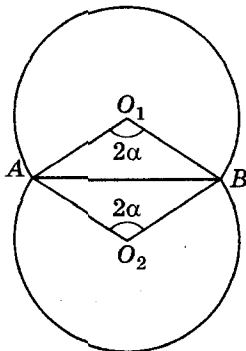


Рис. 122

AB — основание треугольника. Рассмотреть также случай тупоугольного треугольника. 68. *Указание.* Искомое геометрическое место точек — окружность, построенная на отрезке, соединяющем данную точку с центром данной окружности, как на диаметре, исключая саму данную точку. 69. *Указание.* Искомое геометрическое место точек — две дуги окружностей с центрами O_1 и O_2 такие, что $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 2\alpha$ (рис. 122).

70. *Указание.* На основании треугольника, как на хорде, построить геометрическое место точек, из которых ее видно под заданным углом. 72. 6 см. 73. 3 см и 6 см. 75. $54^\circ, 63^\circ, 63^\circ$. 76. $74^\circ, 23^\circ, 83^\circ$. *Указание.* $\angle DAC = \angle ABC$. 77. *Указание.* $\angle CBD = \angle CAB$. 78. 2 см. *Указание.* $AK^2 = AE \cdot AF$. 79. 4 см. 82. 1) нет; 2) да. 83. $40^\circ, 120^\circ, 140^\circ, 60^\circ$. 84. 61° . 85. 1,5 см; 1,25 см. *Указание.* Четырехугольник $ADEB$ вписан в окружность, откуда $\angle CED = 180^\circ - \angle DEB = \angle DAB$. 86. Вне трапеции. 89. 9 см или $3\sqrt{17}$ см. 91. 3 см. *Указание.* Из $\triangle ABC$ найти косинус угла A . 93. 18 см. 94. 3 см, 5 см. 95. 3 см или 5 см. 97. $\frac{a}{4 \cos \alpha} \sqrt{8 \cos^2 \alpha + 1}$.
98. $\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2(ad + bc)}$. 100. $2\sqrt{19}$ см. *Указание.* На продолжении медианы AM треугольника ABC за точку M отложить отрезок MD , равный AM , и рассмотреть $\triangle ABD$. 101. 24 см, 28 см. 102. 10 см, 15 см. 103. 5,5 см. *Указание.* Продолжить медиану треугольника на ее длину и полученную точку соединить с двумя другими вершинами треугольника. Рассмотреть полученный параллелограмм. 105. $2\sqrt{10}$ см. 106. $3\sqrt{61}$ см. *Указание.* $AM : MM_1 = BM : MM_2 = 2 : 1$. Рассмотреть $\triangle AMB$ и найти его медиану MM_3 . 110. Нет. 111. $\frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}, \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$.
112. $\frac{c \sin(\beta + \gamma)}{\cos \alpha \sin \gamma}$, 113. $\frac{c \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(45^\circ + \alpha)}$, 116. $\frac{l \cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \alpha}, \frac{l \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \beta}$,
- $\frac{l \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \alpha \sin \beta} (\sin \alpha + \sin \beta)$. 118. $4(2 + \sqrt{6})$ см, $4(3 + \sqrt{6})$ см.
120. $\frac{P \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}, \frac{P \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}, \frac{P \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}$. 123. Нет. 126. *Указание.* Продолжить медиану BM за точку M на ее длину (точка D). Рассмотреть треугольник ABD . 129. 30° . 130. 60° или 120° . 132. $\angle ACD < \angle BCD$. 134. 21 см, 28 см. 135. 18 см, 24 см, 30 см. 136. $8\frac{1}{3}$ см, $8\frac{2}{3}$ см. 137. 15 см. 139. 45 см, 45 см, 45 см, 117 см. 141. 10,5 см; 17,5 см. 143. 15 см, 15 см, 24 см. 144. 10 см. 145. 27 см, 27 см, 18 см. 149. $\sqrt{10}$ см или $\sqrt{58}$ см. 150. $3\sqrt{3}$ см. 153. $\frac{6\sqrt{105}}{5}$.
- Указание.* Радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, равен радиусу окружности, описанной около треугольника

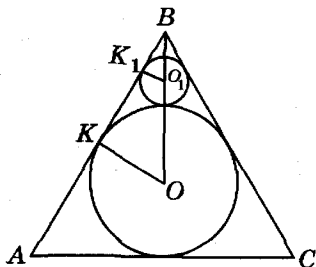


Рис. 123

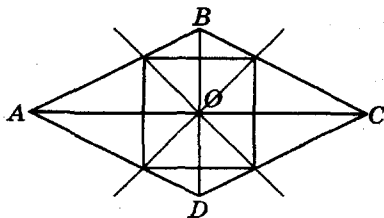


Рис. 124

- ABD.* 155. *Указание.* Доказать равенство синусов углов ABC и AOC . 165. *Указание.* Продолжить третью медиану треугольника на $\frac{1}{3}$ ее длины и соединить полученную точку с одной из вершин треугольника. 168. Нет. 172. Три. 173. Нет. 174. 11; 44. 182. 5. 188. 120° . 200. Нет. *Указание.* Отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной равно косинусу половины центрального угла. Найти косинус половины центрального угла для правильного треугольника и четырехугольника. Учесть, что косинус убывает при увеличении угла от 0° до 90° . 203. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 207. $(2 + \sqrt{3})$ см. 208. $6\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ см, $6(\sqrt{2} + 1)$ см, $6\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ см. 209. $(3 + \sqrt{3})$ см. 210. $\frac{a\sqrt{3}}{18}$. *Указание.* $\frac{O_1K_1}{OK} = \frac{BO_1}{BO} = \frac{1}{3}$ (рис. 123). 211. $(4 + 2\sqrt{2})$ см. 212. *Указание.* Вершины квадрата лежат на пересечении сторон ромба с биссектрисами углов AOB , BOC , COD и DOA (рис. 124). 213. 12 см. 214. $4a^2$. *Указание.* Пусть $ABCD$ — данный квадрат, X — произвольная точка на окружности, описанной около него. Тогда $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2 = AC^2$. 220. Равны. 222. 37,7 км/ч. 228. 24 см. 229. па. 230. $\frac{9\pi}{5}$ см. 231. $\pi\sqrt{3}$ см. 232. *Указание.* Сравнить периметры многоугольников и длину окружности. 247. 4 см. 254. *Указание.* Построить прямоугольный треугольник, катеты которого равны сторонам данных квадратов. 256. *Указание.* Построить отрезок $m = \sqrt{ab}$. 258. 6 см^2 . 269. 45° , 45° , 135° , 135° . 271. $\frac{160\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2$. 282. 7,2 см. 287. *Указание.* $S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD}$, $S_{COD} = S_{ACD} - S_{AOD}$. 288. 78 см^2 . 289. 108 см^2 . 290. $10\sqrt{6}$ см, $10\sqrt{6}$ см, $10\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ см. 292. 120 см^2 . 293. 180 см^2 . 295. 120 см^2 . 296. $(6\sqrt{3} + 9) \text{ см}^2$. 297. 80 см^2 . 299. $5,76 \text{ см}^2$. 301. 7:4. 304. 144 см^2 . 306. *Указание.* Искомая прямая

BE делит сторону *AD* параллелограмма *ABCD* в отношении 1:4, считая от точки *D*. 307. Указание. Высота, проведенная к боковой стороне искомого треугольника, равна высоте, проведенной к равной ей стороне данного треугольника. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте, проведенной к ней. 309. 216 см^2 . 310. 5070 см^2 . 312. $2\sqrt[4]{3}$ см и $2\sqrt[4]{27}$ см. 313. $(2\sqrt{3} - 3) \text{ см}^2$. 315. $22\sqrt{14} \text{ см}^2$. 318. 52 см^2 , 30 см^2 , 74 см^2 . 321. 2 см и 10 см. 326. 256 см^2 . 330. 312 см^2 . 331. $75\sqrt{3} \text{ см}^2$. 334. 12 см, 16 см. 335. 264 см^2 . 336. 180 см^2 . 339. 198 см^2 . 340. $3\sqrt{3} \text{ см}^2$. Указание. Центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции. 344. 48 см^2 . 346. $2(\sqrt{2} - 1) \text{ см}^2$. 347. $2\sqrt{3} \text{ см}^2$. 348. 12 см^2 . Указание. $S_{ABM} \cdot S_{CMD} = S_{BMC} \cdot S_{AMD}$. 349. $20\sqrt{3} \text{ см}^2$. Указание. Найти, используя теорему косинусов, угол между сторонами четырехугольника. 354. 63 см^2 , 448 см^2 . 355. $3\sqrt{2}$ см. 356. 9:40:95. 357. $2\sqrt{3}$. 358. 24 см^2 . 359. Указание. Длина отрезка искомой прямой, лежащего между сторонами треугольника, равна $\frac{1}{3}$ длины данной медианы. 360. 48 см^2 . 377.

$\frac{100}{9} \pi \text{ см}^2$. 378. 48 см^2 . 379. 3:1. 381. $\frac{1568\pi}{81} \text{ см}^2$. Указание.

Построить треугольник, симметричный данному относительно большей стороны. Найти радиус окружности, вписанной в полученный четырехугольник. 382. $\frac{3}{2}(3\sqrt{3} - \pi) \text{ см}^2$. 384. $13,5\pi \text{ см}^2$.

Вариант 2

9. 1) 20 см, 44 см, 56 см; 2) 25 см, 55 см, 70 см; 3) 15 см, 33 см, 42 см; 4) 10 см, 22 см, 28 см. 12. 32 см, 64 см, 56 см и 24 см, 48 см, 42 см. 15. 2) 30 см, 40 см, 40 см или 33 см, 33 см, 44 см. 16. 15 см, 15 см, 24 см. 31. 14 см, 18 см. 36. 12 см. 37. 15 см. 38. 12 см. 39. 15 см. 40. 37,5 см; 37,5 см; 45 см. Указание. $\triangle AEC \sim \triangle BDC$. $\frac{AE}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}$. Тогда

$DC = 3x$ см, $BC = 5x$ см, $BD = 4x$ см = 30 см (рис. 125). 41. $4\frac{1}{2}$ см;

$9\frac{3}{8}$ см. Указание. Смотреть указание к задаче 41 варианта 1. 46.

9,6 см. 47. 3 см, $\sqrt{10}$ см. 50. 4 см, 16 см, 4 см. 60. 252° и 108° .

63. 58° . Указание. $\angle PAE = \angle PKE = 16^\circ$. 64. 86° ; 8° ; 86° . 65. Указание. $\angle ABF = \angle ACF$. 66. Указание. Углы *CED* и *CFD* — постоянные. 67. 58° , 58° , 64° , или 61° , 61° , 58° , или 29° , 29° , 122° .

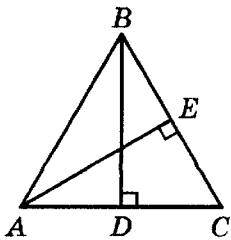


Рис. 125

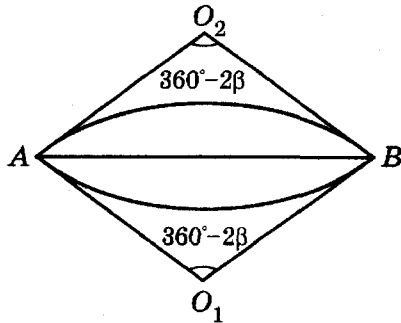


Рис. 126

Указание. См. указание к номеру 67 варианта 1. **68.** *Указание.* Искомое геометрическое место точек — окружность, построенная на отрезке, соединяющем данную точку с центром данной окружности, как на диаметре. **69.** *Указание.* Искомое геометрическое место точек — две дуги окружностей с центрами O_1 и O_2 такие, что $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 360^\circ - 2\beta$ (рис. 126). **70.** *Указание.* См. указание к номеру 70 варианта 1. **72.** 3 см. **73.** 3 см и 12 см. **75.** 39° ; 64° ; 77° . **76.** 34° . *Указание.* Найти $\angle BAC$. **78.** 5 см. **79.** 14 см. **82.** 1) да; 2) нет. **183.** 144° , 86° , 36° , 94° . **84.** 63° . **85.** 8 см и 10 см. *Указание.* $\angle CKP = \angle ABP = \angle CME$. **86.** Внутри трапеции. **89.** $\sqrt{129}$ см или $\sqrt{97}$ см. **91.** $\sqrt{22}$ см. *Указание.* Из $\triangle ABC$ найти косинус угла A. **93.** 60 см. **94.** 15 см и 40 см. **95.** 15 см. **97.**

$$\frac{c}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{5-4\cos\alpha}. \quad \mathbf{98.} \quad \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}. \quad \mathbf{100.} \quad 2\sqrt{97} \text{ см. } \textit{Ука-}$$

зание. См. указание к номеру 100 варианта 1. **101.** 16 см, 38 см. **102.** 10 см, 20 см. **103.** $\sqrt{113}$ см. *Указание.* См. указание к номеру 103 варианта 1. **105.** 10 см. **106.** $3\sqrt{559}$. *Указание.* Рассмотреть треугольник MAV , где M — точка пересечения медиан треугольника, $AV = 42$ см. Медиана MD треугольника MAV равна трети искомой медианы. **110.** Нет. **112.** $\frac{m \sin \beta \sin \gamma}{b}$. **113.**

$$\frac{l \sin \frac{3}{2} \alpha}{\sin \alpha}, \quad \frac{l \sin \frac{3}{2} \alpha}{\sin 2\alpha}. \quad \mathbf{116.} \quad a - \frac{a \sin \frac{\alpha}{5}}{\sin \frac{4}{5} \alpha}, \quad \frac{a \sin \alpha}{\sin \frac{4}{5} \alpha}. \quad \mathbf{118.} \quad 8(1 + \sqrt{2}) \text{ см,}$$

$8(2 + \sqrt{2}) \text{ см. } \mathbf{120.} \quad AV = \frac{2m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AC = \frac{2m \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad BC = \frac{2m}{\sin(\alpha + \beta)} \times$
 $\times \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}. \quad \textit{Указание.} На продолжении медианы AM за точку M отложить отрезок MD , равный$

АМ. Рассмотреть $\triangle ABD$. 123. Нет. 126. Указание. См. указание к номеру 120 варианта 1. 129. 45° . 130. 60° или 120° . 134. 36 см, 45 см. 135. 34 см, 30 см, 16 см. 136. 6,5 см, 7,5 см. 137. 21 см, 28 см. 139. 45 см, 45 см, 27 см, 81 см. 141. $5\frac{8}{11}$ см, $15\frac{3}{11}$ см. 143. 30 см, 30 см, 48 см. 144. 16 см. 145. 90 см. 149. $2\sqrt{7}$ см или $2\sqrt{31}$ см. 150. 8 см. 151. $\frac{R \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. Указание. $\angle AMB =$

$= 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. 153. $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см, 6 см. Указание. См. указание к номеру

153 варианта 1. 155. Указание. Применить теорему синусов к треугольникам ADC и BDC , доказать, что отношение радиусов описанных окружностей равно отношению сторон AC и BC . 163. 6; 27. 165. Указание. Пусть A, B, C и D — середины сторон MK, MN, NP и PK четырехугольника $MNPK$ соответственно. Тогда $ABCD$ — параллелограмм, $MP + NK = 2(AB + BC) < 2(AC + BD)$. 168. Нет. 172. Указание. Рассмотреть сумму внешних углов многоугольника. 173. Нет. 174. 15, 90. 182. 30. 187. 60° . 190. Указание. Построить равнобедренный треугольник, основание которого равно данной стороне двенадцатиугольника, а угол при вершине треугольника равен 30° . 203. 2. 207. $a \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

208. $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $2R$. 209. $2\sqrt{3}$ см. 210. 1:2:2:1. 211. $\frac{a}{3}$.

212. Указание. Выбрать на стороне AB треугольника ABC произвольную точку N и построить квадрат $NPKM$ (рис. 127). P_1 — точка пересечения луча AP и стороны BC . Квадрат $M_1N_1P_1K_1$ — искомый. 213. Указание. Расположить квадраты так, чтобы их центры совпадали (рис. 128). Выполнить поворот квадрата $A_1B_1C_1D_1$ относительно точки O на такой угол, чтобы точка C_1 перешла в C_2 , где C_2 принадлежит стороне CD . 214. $12a^2$.

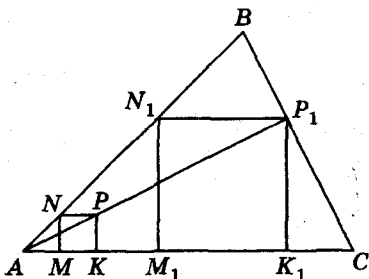


Рис. 127

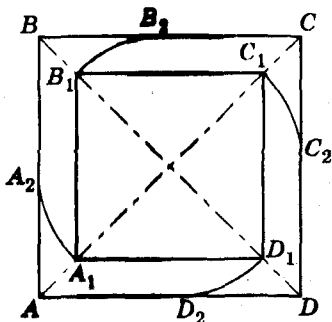


Рис. 128

Указание. Пусть $ABCDEF$ — данный шестиугольник, X — точка на окружности. Тогда $XA^2 + XD^2 = XB^2 + XE^2 = XC^2 + XF^2 = 4a^2$.

220. 20π см. 222. 14 км/ч. 228. 4 см. 229. $(\pi+1)m$. 230. $2\pi\sqrt{2}$ см. 231. $\pi\sqrt{3}$ см. 232. Указание. Сравнить длину окружности и периметры многоугольников. 247. 8 см. 254. Указание. Построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна стороне большего квадрата, а один из катетов — стороне меньшего. 256. Указание. Построить отрезок $m = \sqrt{2ab}$. 258. 64 см². 269. $\sqrt{2}$. 271. 360 см². 282. $9\frac{3}{13}$ см. 288. 312 см². 289. 1200 см². 290. $12\sqrt{2}$ см, $12\sqrt{2}$ см, $12\sqrt{6}$ см. 292. 240 см². 293. 156 см². 295. 240 см². 296. $16\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$ см². 297. 37 см². 299. 4 см². 301. 4:7. 304. 4 см². 306. Указание. Искомая прямая BE делит сторону AD параллелограмма $ABCD$ в отношении 3:1, считая от точки A . 307. Указание. Высота искомого равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна высоте данного треугольника, проведенной к выбранной стороне. 309. 600 см². 310. 600 см². 312. $4\sqrt[4]{3}$ см и $4\sqrt[4]{27}$ см. 313. $(4 - 2\sqrt{3})$ см². 315. $10\sqrt{110}$ см². 318. 30 см, 82 см, 56 см. 321. 7 см и 16 см. 326. 192 см². 330. 114 см². 331. $48\sqrt{3}$ см². 334. 4 см и 12 см. 335. 306 см². 336. 320 см². 339. 162 см². 340. $16\sqrt{3}$ см². Указание. Диагональ трапеции образует с большим основанием угол 30°. 344. $72\sqrt{2}$ см². 346. $4(3 + 2\sqrt{2})$ см². 347. $18\sqrt{3}$ см². 348. 18 см². Указание. $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{AOD} \cdot S_{BOC}$. 349. $3\sqrt{231}$ см². Указание. См. указание к номеру 349 варианта 1. 354. 135 см² или $26\frac{2}{3}$ см². 355. $14\sqrt{2}$ см. 356. 16:65:144. 357. 3 см. 358. 8 см². 359. Указание. Длина искомого отрезка равна $\frac{1}{4}$ длины данной медианы. 360. 70,56 см². 377. $264\frac{1}{16}\pi$ см², 64π см². 378. $32\sqrt{3}$ см². 379. 3:2. 381. $54\frac{270}{289}\pi$ см². Указание. Построить треугольник, симметричный данному относительно средней стороны. Найти радиус окружности, вписанной в полученный четырехугольник. 382. $32(\pi - \sqrt{3})$ см². 384. $\frac{9}{16}\pi$ см².

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов	3
Тематическое распределение тренировочных упражнений	4
Тренировочные упражнения	5
Вариант 1	5
Вариант 2	44
Вариант 3	83
Задания для тематического оценивания . . .	122
Вариант 1	122
Вариант 2	125
Ответы и указания к тренировочным упражнениям	128