А.Г. Мерзляк,
В.Б. Полонский,
Е.М. Рабинович,
М.С. Якир

СБОРНИК

задач и заданий для тематического оценивания по алгебре и началам анализа для 11 класса

Рекомендовано Министерством науки и образования Украины

Харьков
«Гимназия»

Тематическое распределение тренировочных упражнений

Тема	Номера упражнений
Модуль действительного числа. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля	1–10
Предел числовой последовательности	11–13
Предел функции. Непрерывность функции	14–18
Определение производной функции	19–21
Правила вычисления производных	22–32
Производная сложной функции	33; 34
Производные тригонометрических функций	35–39
Производные высших порядков	40–42
Решение неравенств методом интервалов	43–51
Касательная к графику функции	52–65
Физический смысл производной	66–68
Исследование функции на возрастание (убывание)	69–72
Критические точки, максимумы и минимумы функции	73–77
Построение графиков функций	78; 79
Наибольшее и наименьшее значение функции	80–86
Первообразная. Основное свойство первообразной	87–90
Правила нахождения первообразных	91–102
Интеграл. Формула Ньютона — Лейбница	103–106
Площадь криволинейной трапеции	107–114
Объем тела вращения	115; 116

Тема	Номера упражнений
Применение интеграла в физике	117; 118
Производная показательной функции и ее применение	119–130
Производная логарифмической функции и ее применение	131–139
Первообразная показательной функции	140–144
Производная и первообразная степенной функции	145–157
Дифференциальные уравнения	158–160
Перестановки	161–168
Сочетания	169–184
Размещения	185–193
Бином Ньютона	194–207
Классическое определение вероятности	208–216
Применение формул комбинаторики для вычисления вероятности событий	217–227
Теорема сложения вероятностей несовместных событий	228–234
Теорема умножения вероятностей независимых событий	235–248
Схема Бернулли	249–255

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Вариант 1

Модуль действительного числа. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля

1. Раскрыть знак модуля:

1) $|\pi - 3|$; 3) $|x^2 + 3|$; 5) $|8 - x|$;

2) $|2 - \sqrt{5}|$; 4) $|x + 2|$; 6) $|x^2 + 2x + 3|$.

2. Решить уравнение:

1) $|x^2 - 3x + 2| = -2$; 3) $|x| = x$;

2) $|x| = -x^2$; 4) $|x| = -x^2 - 1$.

3. Решить неравенство:

1) $|x| > -x$; 3) $\dfrac{x}{|x|} \le 1$; 5) $x|x + 1| < 0$;

2) $|x| \ge -x$; 4) $x|x + 1| \ge 0$; 6) $\dfrac{x}{|x + 1|} \le 0$.

4. Решить уравнение:

1) $|x| = -a$; 2) $|x| = -a^2$.

5. Решить неравенство:

1) $a|x| < 0$; 2) $a|x| \ge 0$.

6. Построить график функции:

1) $y = |x - 4|$;

2) $y = |x| + x$;

3) $y = |2x + 1| - x$;

4) $y = \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$;

5) $y = |x|(x + 2)$;

6) $y = \dfrac{|x|}{x}(x^2 - 5x + 6)$;

7) $y = x^2 + 4|x| + 3$;

8) $y = x^2 - 5x \cdot \dfrac{x - 2}{|x - 2|} - 14$;

9) $y = x^2 - 4|x + 1| + 5x + 4$;

10) $y = \dfrac{4}{|x| - x}$;

11) $y = \dfrac{x^2 - 9}{|x| - 3}$;

12) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{|x - 2|}$;

13) $y = |x - 3| + |x + 4|$;

14) $y = |x + 3| - |x - 1|$;

15) $y = |x + 2| + |x| - |x - 4|$;

16) $y = |x^2 - 2x - 8|$;

17) $y = |x^2 - |x| - 2|$;

18) $y = ||x| - 3|$.

7. Построить график уравнения:

1) $|x| = 1$;

2) $|y| = 3$;

3) $|xy| = 8$;

4) $|x + y| = 4$;

5) $|2x - y| = 5$;

6) $|x| + |y| = 5$;

7) $|x| - 2|y| = 4$;

8) $|y| = |x|$.

8. Решить уравнение:

1) $|x + 4{,}2| = 5{,}1$;

2) $|3x - 5| = 4{,}8$;

3) $||x| - 2| = 2$;

4) $|x^2 - x - 1| = 1$;

5) $x^2 - |x| - 2 = 0$;

6) $x|x| + 8x - 7 = 0$;

7) $|x - 4| + x = 8$;

8) $|x + 3| - x = 2$;

9) $2(x-2)^2 + |x-2| - 1 = 0$;

10) $x^2 - 5x \cdot \dfrac{|x + 2|}{x + 2} - 14 = 0$;

11) $||x^2 - 8x + 4| - 3| = 7$;

12) $|x^2 - 3|x| + 2| = 1$;

13) $|x^2 - 2x| = 3 - 2x$;

14) $|x| + |x - 4| = 5$;

15) $|x + 1| + |x - 3| = 4$;

16) $|x| - |x - 5| = 6$;

17) $|2x - 3| - |x + 2| = 4x + 5$;

18) $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 5x + 6| = 1$.

9. Решить неравенство:

1) $|x| < 3$;

2) $|x - 1| \le 4{,}2$;

3) $|7x + 8| \le 2$;

4) $|10 - 3x| < 5$;

5) $|x| > 8$;

6) $|x + 5| \ge 7{,}8$;

7) $|0{,}5x + 6| \ge 1$;

8) $|11 - 4x| > 6$;

9) $|x + 2| + 3x \ge 6$;

10) $|x - 6| - 7x < 18$;

11) $|x + 1| + |x - 1| \le 2$;

12) $|x + 3| + |x - 4| > 6$;

13) $|x + 2{,}5| - |x - 1{,}5| \le 3$;

14) $|3x + 8| - |2x - 7| > 4$;

15) $|x^2 - x - 3| < 9$;

16) $|x^2 + 5x| > 6$;

17) $|x - 4|(x + 2) \ge 4x$;

18) $x^2 - 4|x| < 12$;

19) $x^2 - 5x + 9 > |x - 6|$;

20) $x^2 + 2|x - 1| + 7 \le 4|x - 2|$;

21) $|3x - 4| > |2x + 1|$;

22) $\dfrac{|4 - x| - x}{|x - 6| - 2} > 2$.

10. Исследовать количество решений уравнения в зависимости от значения параметра a:

1) $|x^2 + x - 6| = a$;
2) $|x + 3| + |x - 2| = a$;
3) $|x^2 - 2|x|| = a$;
4) $||x| - 3| = a - x$;
5) $|x - 4| - |x + 2| = a$;
6) $5 + 4|x| - x^2 = a$.

Предел числовой последовательности

11. Последовательность задана формулой общего члена $a_n = \frac{n+1}{n}$. Для заданного числа ε указать такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|a_n - 1| < \varepsilon$: 1) $\varepsilon = \frac{1}{2}$; 2) $\varepsilon = 0{,}1$; 3) $\varepsilon = 0{,}01$.

12. Используя определение предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n - 2}{2n + 1} = \frac{3}{2}$.

13. Вычислить предел:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n + 3}{3n - 4}$;
2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n - 3n^2 + 4}{6n^2 - 3n + 7}$;
3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin(n + 3)}{n + 3}$;
4) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2}$.

Предел функции. Непрерывность функции

14. Для каждой из функций, график которой изображен на рис. 1, установить:
1) Определена ли эта функция в точке x_0?
2) Существует ли предел функции в точке x_0?
3) Если предел в точке x_0 существует, то равен ли он значению функции в этой точке?

15. Используя определение предела функции, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3$;
2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

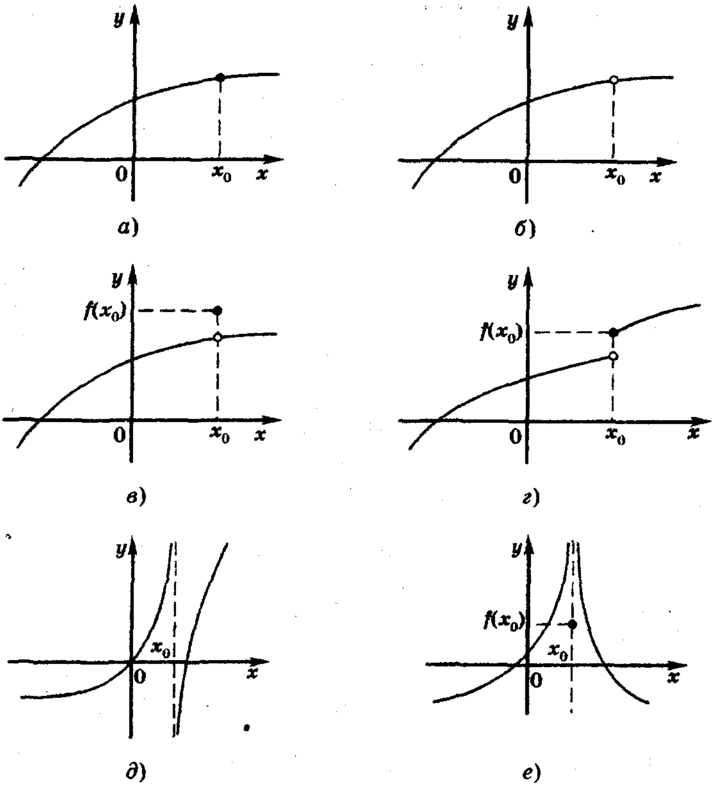


Рис. 1

16. Вычислить предел:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - 3x + 4)$;

2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$;

3) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x - 7}{2 - \sqrt{x - 3}}$;

4) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{6}{x^2 - 9} \right)$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \frac{x}{3}}{3x}$;

6) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \cos \dfrac{1}{x}$.

17. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0:

1) $f(x) = 3x - 1$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } x < 4, \\ 3x, & \text{если } x \geq 4, \end{cases}$ $x_0 = 4$.

18. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \neq 1, \\ -1, & \text{если} \quad x = 1, \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x_0 = 1$.

Определение производной функции

19. Найти приращение функции f в точке x_0 при указанном приращении аргумента Δx:

1) $f(x) = 3x - 2$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}3$;

2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $\Delta x = \frac{\pi}{6}$.

20. Для функции $f(x) = \cos 3x$ найти $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

21. Используя определение, найти производную функции:

1) $f(x) = 1 - 2x$; 2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

Правила вычисления производных

22. Найти производную функции:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x$; 5) $f(x) = x^8$; 9) $f(x) = \frac{1}{x^4}$;

2) $f(x) = \sqrt{5}x$; 6) $f(x) = -4x^4$; 10) $h(x) = \frac{5}{x^6}$;

3) $g(x) = 3x^2$; 7) $h(x) = x^{-3}$; 11) $\varphi(x) = \frac{1}{2x^8}$;

4) $\varphi(x) = -\frac{x^2}{6}$; 8) $g(x) = -2x^{-10}$; 12) $g(x) = \frac{3}{5x^{10}}$.

23. Найти производную функции:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$; 3) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 5) $f(x) = \frac{1}{2x^{\frac{2}{9}}}$;

2) $H(x) = 5x^{-\frac{2}{5}}$; 4) $\varphi(x) = \sqrt[5]{x^3}$; 6) $g(x) = \frac{7}{\sqrt[4]{x}}$.

24. Найти производную функции:

1) $f(x) = 3x\sqrt[3]{x}$; 3) $\varphi(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[3]{x}}$;

2) $y = \frac{4}{x\sqrt{x}}$; 4) $h(t) = \sqrt{t\sqrt{t}}$.

25. Найти производную функции:

1) $y = 3x^7 - 6x^5 - 4x^2 + 17$; 3) $y = x - \frac{4}{x}$;

2) $y = \frac{1}{3}x^6 - 8\sqrt{x} + 2x$; 4) $y = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$.

26. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \sqrt{3}$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = \sqrt{x} - 16x^2$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

27. Найти производную функции:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$; 3) $y = (\sqrt{x} + 1)(3 - 2\sqrt{x})$;

2) $y = \sqrt{x}\,(3x^2 + 2)$; 4) $y = (x^2 - 3x + 1)(x^4 - 3x + 2)$.

28. Найти производную функции:

1) $y = \frac{3x - 7}{5 - 2x}$; 3) $y = \frac{x^2 + 5x}{x - 3}$; 5) $y = \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$;

2) $y = \frac{4x + 1}{x^2 - 2}$; 4) $y = \frac{2x^2 + 3x}{x^2 - 4}$; 6) $y = \frac{\sqrt{x}}{4x - 1}$.

29. Вычислить значения производных данных функций при указанных значениях независимой переменной:

1) $f(x) = \frac{2 - 3x}{x - 1}$, $f'(2)$ – ? 2) $f(x) = \frac{x^3 - 5}{x^3 + 5}$, $f'(-3)$ – ?

30. Верно ли, что $f'(1) < g'(1)$, если $f(x) = 4\sqrt{x}$, $g(x) = \frac{2x + 5}{3 - 4x}$?

31. Решить неравенство $f'(x) + g'(x) \le 0$, если $f(x) = 2x^3 + 12x^2$, $g(x) = 9x^2 + 72x$.

32. Найти, при каких значениях x равна нулю производная функции $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2$.

Производная сложной функции

33. Найти производную функции:

1) $y = (3 - x)^5$;
2) $y = (6x^5 - 2x)^8$;
3) $y = \frac{1}{(x^2 - 3x)^3}$;
4) $y = 3\,(x - 2)^5 + 2\,(1 - x)^4$;
5) $y = \sqrt{2x - 1}$;
6) $y = \sqrt{x^3 - 2x}$.

34. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x) = (x^2 - 5x + 1)^{10}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^5$, $x_0 = 4$;
3) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \frac{3x^2 - 7}{\sqrt{2x - 3}}$, $x_0 = 2$.

Производные тригонометрических функций

35. Найти производную функции:

1) $y = \frac{x^3}{3} + \sqrt{3}\sin x - \cos\frac{\pi}{3} - 3x^2$;
2) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
3) $y = x^2 \sin x$;
4) $y = 3x \operatorname{tg} x$;
5) $y = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$;
6) $y = \frac{3\cos x}{x^3}$.

36. Найти производную функции:

1) $y = \cos 6x$;
2) $y = \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$;
3) $y = \sin^2 x$;
4) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}$;
5) $y = x^2 \cos\frac{1}{x}$;
6) $y = \frac{\sin 3x}{x - 1}$.

37. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x) = \sin\frac{x}{5}$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$;
2) $f(x) = \operatorname{tg} x^2$, $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;
3) $f(x) = \cos^4 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{9}$;
4) $f(x) = 3x \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

38. Решить уравнение $f'(x) = g(x)$, если $f(x) = 2x^2\cos^2\frac{x}{2}$, $g(x) = x - x^2 \sin x$.

39. При каких значениях x производная функции $f(x) = 3\sin\frac{x}{3} + + x\frac{\sqrt{3}}{2}$ больше нуля?

Производные высших порядков

40. Найти вторую производную функции:

1) $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$;

2) $y = 3\sin\frac{x}{3}$;

3) $y = \frac{x^2 - 4}{x}$;

4) $y = x\cos x$.

41. Найти производную третьего порядка функции $y = \frac{4}{x}$.

42. Найти производную четвертого порядка функции:

1) $y = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 10$; 2) $y = \cos 2x$.

Решение неравенств методом интервалов

43. Решить неравенство:

1) $(x + 7)(x - 6)(x - 14) \le 0$;

2) $(2x + 3)(4x - 3)(x - 9) > 0$;

3) $(x + 6{,}8)(1 - x)(2 - x) \ge 0$;

4) $(5x + 20)(6x - 2)(6x - 12)(9 - 2x) \ge 0$.

44. Решить неравенство:

1) $\frac{x - 9}{x + 11} > 0$;

2) $\frac{x + 6{,}2}{x - 1{,}6} \le 0$;

3) $\frac{6 - x}{2x + 1{,}8} \le 0$;

4) $\frac{(x + 13)(x + 2)}{x - 13} \ge 0$;

5) $\frac{x - 2{,}5}{(x + 5)(x - 10)} > 0$;

6) $\frac{x + 7{,}2}{(8 - x)(x - 2)} \ge 0$.

45. Найти множество решений неравенства:

1) $(x^2 + 4x)(x^2 - 25) \le 0$; 2) $(x^2 + 6x + 5)(x^2 - 4x) > 0$;

3) $\dfrac{x^2+10x+9}{x^2-4x+3}<0$;

4) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-64}\ge 0$;

5) $\dfrac{x+2}{x-2}\ge\dfrac{4x-10}{x-2}$;

6) $\dfrac{3x}{2x-7}\le 1$;

7) $\dfrac{x^2+5x}{x-1}\ge\dfrac{14}{x-1}$;

8) $\dfrac{x^2-4x}{x-3}\le 4$;

9) $\dfrac{(x+3)(4-x)(2x+5)}{(3x-1)(x+4)}\ge 0$;

10) $\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{4}{x+4}\ge 1$.

46. Решить неравенство:

1) $(x^2+4)(x^2-4x+3)\ge 0$;

2) $(x+4)^2(x^2+8x+12)<0$;

3) $(x+4)^2(x^2+8x+12)\le 0$;

4) $(x+4)^2(x^2+8x+12)>0$;

5) $(x+4)^2(x^2+8x+12)\ge 0$;

6) $(x-5)^2(x^2-2x-3)>0$;

7) $(x-5)^2(x^2-2x-3)\ge 0$;

8) $(x-5)^2(x^2-2x-3)<0$;

9) $(x-5)^2(x^2-2x-3)\le 0$;

10) $(x-1)^2(x-2)^3(x-4)^4>0$;

11) $(x-1)^2(x-2)^3(x-4)^4\ge 0$;

12) $(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(x-4)^5\le 0$;

13) $(x^2+9x+18)(x^2+4x+5)\ge 0$;

14) $(x^2-2x-7)(3x-x^2-6)\le 0$.

47. Решить неравенство:

1) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-4x+4}>0$;

2) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-4x+4}\ge 0$;

3) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-4x+4}<0$;

4) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-4x+4}\le 0$;

5) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x-10}>0$;

6) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x-10}\ge 0$;

7) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x-10}<0$;

8) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x-10}\le 0$;

9) $\dfrac{x^2+x-6}{|x-4|}\ge 0$;

10) $\dfrac{|x+5|}{x^2-2x-63}\ge 0$.

48. Найти множество решений неравенства:

1) $\frac{x^2 - 6x}{x^2 - 36} \geq 0$; 2) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x - 4} \leq 0$.

49. Найти наибольшее целое решение неравенства $\frac{f'(x)}{(x - 4)(x + 5)} \leq 0$, где $f(x) = x^3 - 12x + 7$.

50. Найти множество решений неравенства $f'(x) \geq 0$, если:

1) $f(x) = 5 + 2x^2 - 2x^3 - x^4$; 3) $f(x) = \frac{3x - 1}{1 - 4x}$;

2) $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{2 - x}$; 4) $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$.

51. Решить неравенство:

1) $(x - 4)(x - a) < 0$; 5) $(x - a)(x + 2)^2 \leq 0$;

2) $(x - 4)(x - a)^2 > 0$; 6) $\frac{x - 7}{x - a} \leq 0$;

3) $(x - 4)(x - a)^2 \geq 0$; 7) $\frac{(x - 5)(x - a)}{x - 5} \geq 0$;

4) $(x - a)(x + 2)^2 < 0$; 8) $\frac{(x - 5)(x - a)}{x - a} \leq 0$.

Касательная к графику функции

52. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x - 2$ в точке $x_0 = -2$.

53. Найти тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $f(x) = \text{tg}\, 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{\pi}{12}$.

54. Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = x^3 - 5x$ в точке $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \sqrt{5x - 3 - x^2}$ в точке $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \cos^3 x$ в точке $x_0 = \pi$.

55. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ в точке пересечения его с осью ординат.

56. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x-4}{x^2-2}$ в точке пересечения его с осью абсцисс.

57. Найти абсциссу точки графика функции $f(x) = x^3 - 2{,}5x^2 + x + 4$, в которой касательная к этому графику параллельна прямой $y = 3x - 5$.

58. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x + 6$, параллельной прямой $y = 4x + 7$.

59. Найти уравнение горизонтальных касательных к графику функции $f(x) = x^4 - 4x^2 - 8$.

60. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ в точке $x_0 = 2$.

61. Найти, в какой точке графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 7$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

62. Под какими углами парабола $y = x^2 + 3x - 18$ пересекает ось абсцисс?

63. Вычислить площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = x^3 - x^2 + 6x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

64. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + 2$, проходящей через точку M (0; 1).

65. При каких значениях b и c парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 3x - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$?

Физический смысл производной

66. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^2 - 5t + 8$ (время t измеряется в секундах, перемещение x — в метрах). Найти скорость движения в момент времени $t = 4$.

67. Вращение тела вокруг оси происходит по закону $\varphi(t) = 6t - 2t^2$. Найти, в какой момент времени тело остановится (t — время в секундах, $\varphi(t)$ — угол поворота в радианах).

68. Тело массой 5 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = 4t^3 - 3t^2 + 10t$. Найти кинетическую энергию тела и силу, действующую на него, в момент времени $t = 2$ (t измеряется в секундах, s — в метрах).

Исследование функции на возрастание (убывание)

69. Найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^3 - 18x$;
2) $f(x) = 1 + 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$;
3) $f(x) = 0{,}2x^5 - x^3 + 2x - 9$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 2{,}5x}{x + 2}$;
5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$;
6) $f(x) = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

70. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$ возрастает на множестве всех действительных чисел.

71. Доказать, что функция $f(x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}$ убывает на промежутке $[1; \infty)$.

72. Найти, при каких значениях a возрастает на R функция:

1) $f(x) = ax^2 + 4x + 5$;
2) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + 4x - 10$;
3) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{(2a + 1)\,x^2}{2} + 2ax + a - 3$;
4) $f(x) = (2a - 2)\,x^3 + (3a - 3)\,x^2 + 36x$.

Критические точки, максимумы и минимумы функции

73. Найти критические точки функции:

1) $f(x) = 2x^3 + 2{,}5x^2 - x$;
2) $f(x) = (x + 1)^2\,(x - 3)^2$;
3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

74. Найти, при каких значениях a не имеет критических точек функция $f(x) = \sqrt{(x + 4)^3} - (a - 4)\,x$.

75. Найти точки экстремума функции:

1) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 10$;

2) $f(x) = (x - 3)^3 (x + 2)^2$;

3) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;

4) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$.

76. Найти промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции:

1) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$;

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$;

3) $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$;

4) $f(x) = (x + 1)^3 (x - 2)^4$;

5) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$;

6) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$;

7) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3}$;

8) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

77. Найти, при каких значениях a функция $f(x) = a \sin^2 x - (2a + 1)\, x$:

1) не имеет критических точек;

2) не имеет экстремумов.

Построение графиков функций

78. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$;

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4$;

3) $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)^2$;

4) $f(x) = \frac{x + 3}{x - 1}$;

5) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$;

6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

79. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $f(x) = x - \sqrt{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$; 3) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

Наибольшее и наименьшее значения функции

80. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

1) $f(x) = 1 - 3x^2 - x^3$, $[-1; 2]$;

2) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, $[-2; 1]$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$, $[3; 6]$;

4) $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$, $[0; \pi]$.

81. На какое множество функция $f(x) = 6x - 2x^3$ отображает отрезок $[-1; 3]$?

82. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^3 + 3x\,|x - 3|$ на промежутке $[0; 4]$.

83. Число 60 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

84. Найти положительное число, утроенный квадрат которого больше удвоенного куба этого числа на наибольшее значение.

85. Какими должны быть стороны прямоугольника, периметр которого равен 60 см, чтобы его площадь приняла наибольшее значение?

86. В равнобедренный треугольник, угол при основании которого равен α, вписана окружность радиуса r. Найти площадь треугольника. При каком значении α площадь треугольника будет наименьшей?

Первообразная. Основное свойство первообразной

87. Доказать, что функция F является первообразной для функции f на указанном промежутке:

1) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 9$, $f(x) = 3x^2 - 6x$, $x \in R$;

2) $F(x) = 3x - \dfrac{4}{x}$, $f(x) = 3 + \dfrac{4}{x^2}$, $x \in (-\infty; 0)$;

3) $f(x) = \sqrt{2x - 3}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 3}}$, $x \in (1{,}5; \infty)$;

4) $F(x) = \cos \dfrac{x}{5}$, $f(x) = -\dfrac{1}{5} \sin \dfrac{x}{5}$, $x \in R$;

5) $F(x) = 3 \operatorname{tg} 2x - 10$, $f(x) = \dfrac{6}{\cos^2 2x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

88. Является ли функция $F(x) = \frac{6}{x^2} - 4$ первообразной для функции $f(x) = -\frac{12}{x^3}$ на промежутке:

1) $(0; \infty)$; 2) $(-3; 3)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[-5; 0)$?

89. Является ли функция $F(x) = |x + 3|$ первообразной для функции $f(x) = 1$ на промежутке:

1) $(-1; 3)$; 2) $(-4; 1)$?

90. Для данной функции f найти первообразную, график которой проходит через данную точку M:

1) $f(x) = x^2$, $M\ (1; -2)$;

2) $f(x) = \sin x$, $M\left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$;

3) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $M\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$;

5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $M\ (8; 15)$;

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$, $M\ (-1; 1)$.

Правила нахождения первообразных

91. Для данной функции f найти общий вид первообразной:

1) $f(x) = 3 - x$;

2) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$;

3) $f(x) = 10x^4 + 14x^6$;

4) $f(x) = x^3 + \frac{6}{\sqrt{x}}$;

5) $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$;

6) $f(x) = 3\cos x - \frac{4}{\sin^2 x}$;

7) $f(x) = 4\sqrt{x} - 8x^7$;

8) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$.

92. Для данной функции f найти первообразную F, удовлетворяющую данному условию:

1) $f(x) = 6x^2 + 4x - 3$, $F(-2) = -3$;

2) $f(x) = 15x^{14} - \frac{5}{4\sqrt{x}}$, $F(1) = 0$;

3) $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$, $F(0{,}5) = 7$.

93. Для данной функции f найти общий вид первообразной:

1) $f(x) = (3x - 1)^3$;

2) $f(x) = \cos 7x$;

3) $f(x) = \sin \frac{x}{5}$;

4) $f(x) = \dfrac{4}{\cos^2 \frac{x}{6}}$;

5) $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{2x - 1}}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{(4x + 3)^2}$.

94. Для данной функции f найти первообразную, график которой проходит через данную точку A:

1) $f(x) = \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + 4 \cos 4x$, $A\ (\pi;\ 3)$;

2) $f(x) = \dfrac{2}{\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{12}\right)}$, $A\left(\frac{\pi}{16};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9x - 2}}$, $A\ (3;\ 1)$.

95. Найти первообразную функции $f(x) = 2x - 1$, один из нулей которой равен 3.

96. Найти первообразную функции $f(x) = 3x^2 - 12x + 3$, один из нулей которой равен -1. Найти оставшиеся нули первообразной.

97. Найти первообразную функции $f(x) = -4x + 3$, график которой с прямой $y = 3$ имеет только одну общую точку.

98. Найти первообразную функции $f(x) = 7x - 4$, для графика которой прямая $y = 10x + 3$ является касательной.

99. Скорость движения точки задается уравнением $v = 6t^2 + 1$ (м/с). Найти уравнение движения $s = s(t)$, если в момент времени $t = 3$ с точка находилась на расстоянии $s = 42$ м.

100. Найти общий вид первообразной данной функции:

1) $f(x) = \sin^2 3x$;

2) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{4}$;

3) $f(x) = \dfrac{2x^4 + x^3 - 1}{x^2}$;

4) $f(x) = (x^2 - 3x)^2$;

5) $f(x) = \sin 4x \cos 3x$.

101. $F(x)$ — первообразная функции $f(x) = 3 - 2x$, график которой имеет общую точку с графиком функции $f(x)$, принадлежащую оси ординат. Найти первообразную $F(x)$ и все точки пересечения графиков функций $f(x)$ и $F(x)$.

102. Найти формулу, которой задается функция $y = f(x)$, график которой проходит через точку $M\ (-1;\ 4)$, а угловой коэффициент касательной, проведенной к графику в точке x, равен $2 - 3x^2$.

Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

103. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{-1}^{3} (x + 2)\,dx$;

2) $\int\limits_{0}^{5} (x^2 - 3x)\,dx$;

3) $\int\limits_{-2}^{1} (8x^3 - 6x^2 + 10x - 5)\,dx$;

4) $\int\limits_{-3}^{2} (x - 4)^2\,dx$;

5) $\int\limits_{1}^{2} (5x - 9)^4\,dx$;

6) $\int\limits_{-2,5}^{-2} \frac{8dx}{(2x + 3)^3}$;

7) $\int\limits_{1}^{9} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$;

8) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4x + 5}}$;

9) $\int\limits_{0}^{6} \frac{dx}{\sqrt{4 - \frac{x}{2}}}$;

10) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos x\,dx$;

11) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx$;

12) $\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

13) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\sin^2 3x}$;

14) $\int\limits_{0}^{2\pi} \left(\sin 2x - \cos\frac{x}{4}\right) dx$;

15) $\int\limits_{4}^{9} \sqrt{x}\,dx$;

16) $\int\limits_{-8}^{27} \sqrt[3]{x}\,dx$;

17) $\int\limits_{1}^{16} \sqrt[4]{x^3}\,dx$;

18) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x}\,dx$;

19) $\int\limits_{0}^{1,5} \sqrt[3]{6x-1}\,dx$;

20) $\int\limits_{2}^{8} x\sqrt{x}\,dx$;

21) $\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

22) $\int\limits_{-78}^{42} \frac{3dx}{\sqrt[4]{100-2x}}$;

23) $\int\limits_{1}^{14} \frac{6dx}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}}$;

24) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)dx$.

104. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{24}} \mathrm{tg}^2 4x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\pi}^{0} 2\cos^2\frac{x}{8}\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x\,dx$;

4) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x\cos 3x\,dx$;

5) $\int\limits_{-3}^{2} (4x-x^2)^2\,dx$;

6) $\int\limits_{0}^{4} (x^2-\sqrt{x})^2\,dx$;

7) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x^2-x^3+4}{x^5}\,dx$;

8) $\int\limits_{4}^{9} \frac{x-7-5x^2}{\sqrt{x}}\,dx$.

105. Вычислить интеграл $\int\limits_{-3}^{1} f(x)\,dx$, если

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ при } x<-2, \\ x+6 \text{ при } x\ge -2. \end{cases}$$

106. При каких значениях a выполняется неравенство:

1) $\int\limits_{1}^{a} 3x^2\,dx < 26$;

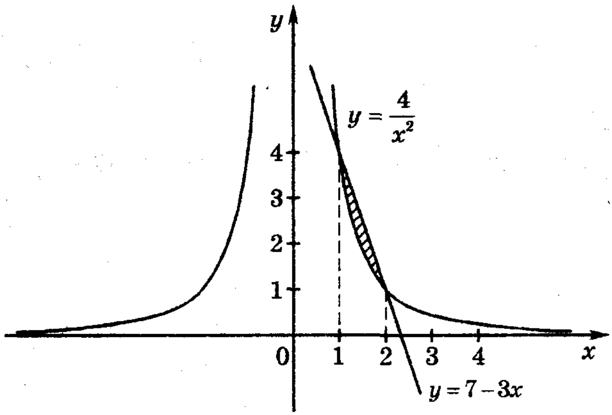
2) $\int\limits_{3}^{a} 2x\,dx > 7$?

Площадь криволинейной трапеции

107. Найти площадь фигуры, ограниченной:

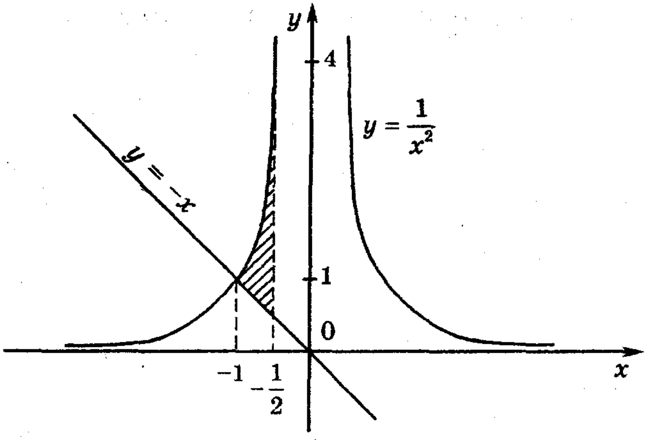
1) параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$;
2) графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$;
3) графиком функции $y = \cos x$ и прямыми $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$;
4) параболой $y = 4 - x^2$ и осью абсцисс;
5) параболой $y = x^2 - 2x$, осью абсцисс и прямой $x = 4$;
6) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 9$;
7) графиком функции $y = \sqrt{x - 3}$ и прямыми $y = 0$, $x = 7$;
8) графиком функции $y = \sin 2x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{8}$, $x = \frac{3\pi}{8}$.

108. Вычислить площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рис. 2.

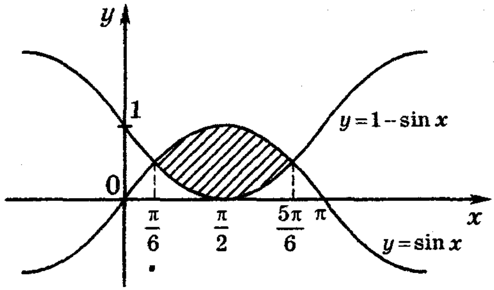


а)

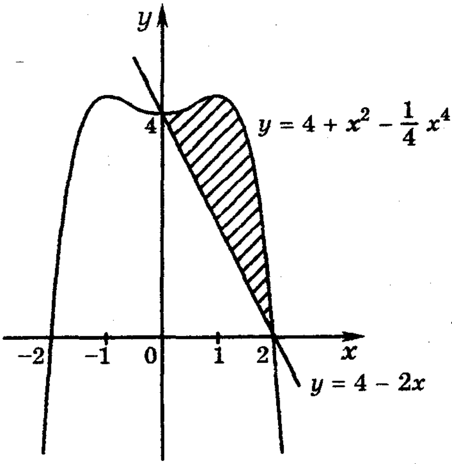
Рис. 2



б)

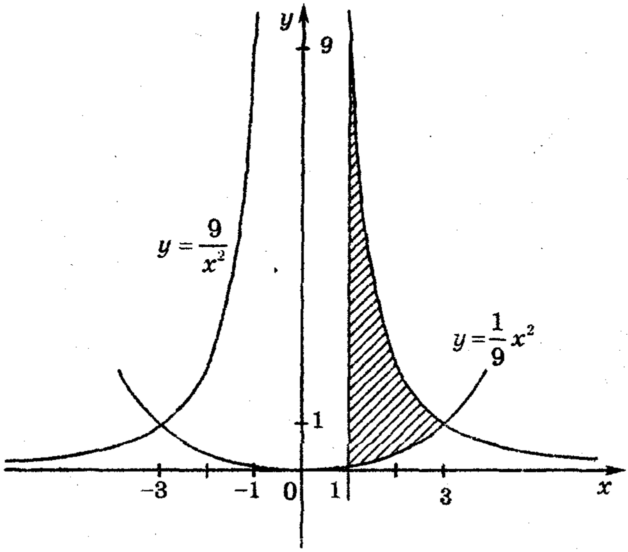


в)



г)

Рис. 2 (продолжение)



е)

Рис. 2 (окончание)

109. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y = 6 - x^2$ и прямой $y = 2$;
2) параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = x + 2$;
3) параболой $y = -x^2 - 4x$, прямой $y = 4$ и осью ординат;
4) параболой $y = x^2 - 6x + 9$ и прямой $y = -x + 5$;
5) графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{3}x$;
6) параболой $y = x^2 + 2x + 2$ и прямой $y = 2x + 3$;
7) параболами $y = -x^2 + 2x + 1$ и $y = x^2 - 4x + 5$;
8) графиками функций $y = \sqrt{x + 2}$ и $y = 0{,}5x + 1$.

110. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) графиками функций $y = \sqrt{x + 1}$, $y = \sqrt{7 - x}$ и осью абсцисс;
2) графиком функции $y = \begin{cases} 2\cos x \text{ при } -\frac{\pi}{2} \le x \le 0, \\ 2 - x \text{ при } 0 < x \le 2 \end{cases}$ и осью абсцисс;
3) графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ и осью абсцисс.

111. Используя геометрический смысл интеграла, вычислить:

1) $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{3}^{6} \sqrt{6x - x^2}\, dx$; 3) $\int\limits_{-9}^{-4} \sqrt{9 - 8x - x^2}\, dx$.

112. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x - x^2$, касательной, проведенной к данной параболе в точке с абсциссой $x_0 = 3$, и осью ординат.

113. Найти, при каком значении a площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 6x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = a - 2$, $x = a$ будет принимать наименьшее значение.

114. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = |x^2 - 2x|$ и $y = x$.

Объем тела вращения

115. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямыми $x = 4$, $y = 0$;

2) синусоидой $y = \sin x$ и прямыми $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $y = 0$;

3) графиком функции $y = x^2 + 1$ и прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

116. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^4$ и $y = x$.

Применение интеграла в физике

117. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 18t - 3t^2$ (м/с). Вычислить путь, пройденный телом:

1) за интервал времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 5$ с;

2) от начала движения до остановки.

118. Груз массой $m = 5$ кг растягивает пружину, подвешенную вертикально, на длину $l = 0{,}15$ м. Вычислить работу, при этом выполненную.

Производная показательной функции и ее применение

119. Найти производную функции:

1) $y = e^{6x}$;
2) $y = e^{x^3}$;
3) $y = e^{4x - x^2}$;
4) $y = e^{\sin x}$;
5) $y = 5^{-x}$;
6) $y = 6^{2x - 5}$;
7) $y = 0{,}4^{\operatorname{tg} x}$;
8) $y = 10 \cdot 7^{4 - 0{,}2x^2}$;
9) $y = e^x(x^2 + 3x - 6)$;
10) $y = e^x \cos x$;
11) $y = 2^{-x}\sqrt{x}$;
12) $y = 3^{\sqrt{x}}(x - 5)$;
13) $y = \dfrac{e^x}{x - 1}$;
14) $y = \dfrac{5^x - 4}{5^x + 2}$;
15) $y = e^{\operatorname{ctg} 4x}$;
16) $y = \sin 2^{x^2 + 5}$.

120. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x) = e^{2x} - e^{-3x^2}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = 2^{4x - 5x^2 + 1}$, $x_0 = 1$;
3) $f(x) = e^{3x}(x^2 + 1)$, $x_0 = -1$;
4) $f(x) = \dfrac{e^{4x}}{\sin 2x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

121. Решить неравенство $f'(x) \le g'(x)$, если:

1) $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$, $g(x) = 2xe^x$;
2) $f(x) = 9^{4x - 1}$, $g(x) = 4 \cdot 3^{2x}$.

122. Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = xe^{-x}$ в точке $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^{x^2 - 5x + 6}$ в точке $x_0 = 1$;
3) $f(x) = 5^{3x - 4}$ в точке $x_0 = 2$.

123. Найти уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$, параллельной прямой $y = e^2x - 10$;
2) $f(x) = e^{3x - 2}$, параллельной прямой $y = 3x + 17$.

124. Найти уравнение горизонтальной касательной к графику функции $f(x) = (3^x + 6)(3^x - 60)$.

125. Найти промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции:

1) $f(x) = x - e^x$;
2) $f(x) = e^{6x - x^2 + 5}$;

3) $f(x) = e^{x^3}$;

4) $f(x) = (2x - 1)\, e^{4x}$;

5) $f(x) = xe^{-\frac{x}{3}}$;

6) $f(x) = \dfrac{e^x}{x - 1}$;

7) $f(x) = 3^{3x-1} - 6 \cdot 3^{2x} + 27 \cdot 3^x$.

126. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $f(x) = 4xe^{\frac{x}{2}}$;

2) $f(x) = xe^{-x^2}$;

3) $f(x) = x^2\, e^{-x^2}$;

4) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

127. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

1) $f(x) = xe^{\frac{x}{4}}$, $[-8; 0]$;

2) $f(x) = 8^{x^2 + 2x - 1}$, $[-2; 0]$;

3) $f(x) = 3^{-x} + 3^x$, $[-1; 2]$;

4) $f(x) = e^{3x+2}\,(4x^2 - 5x)$, $[0; 2]$;

5) $f(x) = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x$, $[-1; 1]$.

128. При каких значениях a функция $f(x) = 4e^{-x} - ax + 6$ не имеет критических точек?

129. При каких значениях a функция $f(x) = 3^a\, x \ln 3 - 27x \ln 3 - 3^{3x-2}$ является убывающей на множестве всех действительных чисел?

130. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = e^x - x - 1$ и доказать неравенство $e^x > x + 1$ при $x > 0$.

Производная логарифмической функции и ее применение

131. Найти производную функции:

1) $y = \log_8 x$;

2) $y = \ln 4x$;

3) $y = \ln (x^2 + 2x)$;

4) $y = \lg \sin x$;

5) $y = \ln^4 x$;

6) $y = x^3 \ln x$;

7) $y = (5x^2 - 3) \ln^2 x$;

8) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$;

9) $y = \dfrac{x^3}{\ln^2 x}$;

10) $y = x^2 \ln (x^3 + 1)$;

11) $y = \log_4 (4^x + 10^x)$;

12) $y = \sqrt{\lg x - 2}$;

13) $y = \log_{0,3}(2x^2 - 4x + 3)$;

14) $y = \dfrac{x \ln x}{x - 1}$.

132. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x) = \ln (2x + 1)$, $x_0 = 1,5$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{6} \ln (-9x)$, $x_0 = -\dfrac{1}{12}$;

3) $f(x) = \log_4 (x^2 + 4x - 3)$, $x_0 = -5$;

4) $f(x) = \ln \cos \dfrac{x}{2}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

133. Решить неравенство $f'(x) \geq g'(x)$, если $f(x) = 1,5x^2 + 2x$, $g(x) = \ln (-2x)$.

134. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = x^2 \ln (x^2 + 5x - 23)$ в точке $x_0 = 3$.

135. Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = \ln (4x + 5)$ в точке $x_0 = -1$;

2) $f(x) = 2 - \ln (x + 1)$ в точке пересечения с осью ординат;

3) $f(x) = \log_5 (2x + 7)$ в точке $x_0 = 9$.

136. В какой точке графика функции $f(x) = \ln (3x - 2)$ касательная к нему наклонена к оси абсцисс под углом $\alpha = 45^\circ$?

137. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = 1 - x \ln x$;

2) $f(x) = x^2 \ln x$;

3) $f(x) = 3x \ln^2 x$;

4) $f(x) = x^3 \log_3 x$;

5) $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$;

6) $f(x) = \ln^3 x - 3 \ln x$;

7) $f(x) = \log_2^4 x - 2 \log_2^2 x + 8$;

8) $f(x) = \dfrac{1}{2} x^2 - 2x - 3 \ln (-x) + 6$;

9) $f(x) = 2 \ln(x + 1) - x^2 - 2x + 4$;

10) $f(x) = x \ln^3 x - 4x \ln x + 4x + 2$.

138. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $f(x) = 2\ln x - x^2$;

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

3) $f(x) = \ln (4 - x^2)$;

4) $f(x) = \ln \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

139. Исследовать на монотонность функцию $f(x) = x - \ln(1 + x)$ и доказать неравенство $x \geq \ln(x + 1)$ при всех $x > -1$.

Первообразная показательной функции

140. Для данной функции f найти общий вид первообразной:

1) $f(x) = 4^x$;
2) $f(x) = 3^{2x} \ln 3$;
3) $f(x) = e^{-5x}$;
4) $f(x) = e^{2x} - 7^{\frac{x}{3}}$;
5) $f(x) = 2^{-x} \ln 2 + e^{-0,5x}$;
6) $f(x) = 6e^{3x-4} + 8e^{1-4x}$.

141. Для данной функции f найти первообразную, график которой проходит через данную точку A:

1) $f(x) = 6^x \ln 6 - e^{-x}$, $A\,(1;\ 6)$;
2) $f(x) = 2e^x + \cos x$, $A\,(0;\ -3)$;
3) $f(x) = 6x^2 + e^{4x}$, $A\left(\frac{1}{2};\ \frac{e^2}{4}\right)$.

142. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^{\ln 5} e^x\,dx$;
2) $\int\limits_2^{3} 5^x\,dx$;
3) $\int\limits_0^{1} (3e^x - 5 \cdot 8^x + 1)\,dx$;
4) $\int\limits_{-8}^{0} e^{-\frac{x}{8}}\,dx$;
5) $\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} \ln 3\,dx$;
6) $\int\limits_{-4}^{4} \left(10^{\frac{x}{4}} - \sin\pi x\right) dx$.

143. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} (1 - e^{3x})^2\,dx$;
2) $\int\limits_0^{\ln 4} (e^{2x} + e^{-2x})^2\,dx$;
3) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{2^x + 5 \cdot 3^x}{6^x}\,dx$;
4) $\int\limits_1^{2} \frac{x^2 + e^x}{x^2 e^x}\,dx$.

144. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = 3^x$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;

2) графиком функции $y = e^{3x-2}$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

3) графиком функции $y = e^{-x}$ и прямыми $y = 1$, $x = -3$;

4) графиком функции $y = 2^x$ и прямыми $x = 0$, $y = 4$;

5) графиками функций $y = 4^x - 1$, $y = 7 - 4^x$ и прямой $x = 0$.

Производная и первообразная степенной функции

145. Найти производную функции:

1) $y = x^{\frac{1}{3}}$;

2) $y = x^{\frac{2}{7}}$;

3) $y = x^{-\frac{1}{6}}$;

4) $y = x^{-\frac{3}{5}}$;

5) $y = x^{\sqrt{3}}$;

6) $y = \sqrt[4]{x}$;

7) $y = \sqrt[5]{x^2}$;

8) $y = \frac{14}{\sqrt[7]{x}}$;

9) $y = \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$;

10) $y = x\sqrt[4]{x^3}$;

11) $y = x^2\sqrt[6]{x}$;

12) $y = \frac{8}{x\sqrt{x}}$;

13) $y = -\frac{0,3}{x^3\sqrt[3]{x}}$;

14) $y = (x + 2)\,x^{\sqrt{2}}$;

15) $y = \sqrt[3]{x}\,(x^2 - 4)$;

16) $y = (2x - 4)^{\frac{1}{6}}$;

17) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 9x}$;

18) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{2x^2 + 8x}}$.

146. Исследовать на монотонность функцию:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}(1 - x)$; 2) $f(x) = x^{\sqrt{3}}(x - 2)$.

147. Найти общий вид первообразной функции:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$;

2) $f(x) = x^{\frac{2}{7}}$;

3) $f(x) = x^{-\frac{1}{6}}$;

4) $f(x) = x^{-\frac{3}{5}}$;

5) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$;

6) $f(x) = \sqrt[4]{x}$;

7) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$;

8) $f(x) = \frac{14}{\sqrt[7]{x}}$;

9) $f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$;

10) $f(x) = x\sqrt[4]{x^3}$;

11) $f(x) = x^2 \sqrt[6]{x}$;

12) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$;

13) $f(x) = (2x-4)^{\frac{1}{6}}$;

14) $f(x) = \sqrt[3]{5x-4}$;

15) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{\dfrac{x}{3}+1}}$;

16) $f(x) = \dfrac{9}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$;

17) $f(x) = x^{\sqrt{2}} - 8x^3 + \dfrac{1}{(x+3)^2}$;

18) $f(x) = (x-1)\,x^{\sqrt{5}} + e^{0,5x}$.

148. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^1 x^{\sqrt{6}}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 \sqrt[7]{x^3}\,dx$; 3) $\int\limits_1^{16} x\sqrt[4]{x}\,dx$; 4) $\int\limits_4^{56} \sqrt[3]{\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2}$.

149. Вычислить площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = x^{\frac{1}{5}}$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 32$;

2) графиком функции $y = x^{\pi}$ и прямыми $y = 0$, $x = \pi$;

3) графиком функции $y = x^{-6}$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

4) графиками функций $y = x^{\sqrt{7}}$ и $y = x^{\sqrt{3}}$.

150. Доказать, что функция $F(x) = x^2 - \ln x^5$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{2x^2-5}{x}$ на промежутке $(0;\ \infty)$.

151. Для данной функции f найти первообразную, график которой проходит через данную точку M:

1) $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x}$, $M\ (1;\ 1)$;

2) $f(x) = \dfrac{4}{2x-3}$, $M\ (4;\ \ln 0{,}2)$;

3) $f(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{3x-1}$, $M\ (0;\ 0)$;

4) $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x+4}} + \dfrac{4}{x-4}$, $M\ (5;\ -2)$.

152. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_3^{27} \dfrac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_e^{e^5} \dfrac{3}{x}\,dx$; 3) $\int\limits_6^{24} \dfrac{dx}{x\ln 2}$; 4) $\int\limits_{-3}^{-1} \left(\dfrac{4}{x} - x\right)dx$;

5) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{7x+5}$; 6) $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{3x-2}$; 7) $\int\limits_{20}^{84} \frac{dx}{\frac{x}{4}-1}$; 8) $\int\limits_2^7 \left(\frac{6}{2x+1} - x^2\right) dx$.

153. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_1^4 \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{4x^3+x-3}{x^4} dx$.

154. Доказать, что площади криволинейных трапеций, заштрихованных на рис. 3, равны.

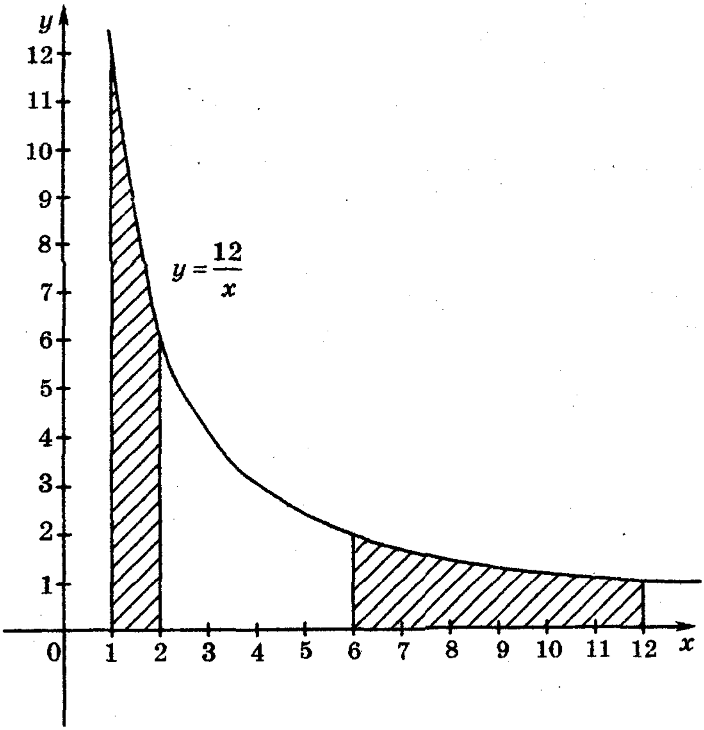


Рис. 3

155. Вычислить площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = \frac{1}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;

2) графиками уравнений $xy = 6$, $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $y = 0$;

3) графиком функции $y = \frac{4}{x}$ и прямыми $x = 1$, $y = 2$;

4) графиком функции $y = \frac{5}{x}$ и прямыми $y = 5$, $x = 5$;

5) графиком функции $y = \frac{7}{x}$ и прямой $x + y = 8$;

6) графиком функции $y = \frac{2}{x}$ и прямыми $y = x - 1$, $x = 3$;

7) графиками функций $y = x^4$, $y = \frac{1}{x}$ и прямой $x = 2$;

8) графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ и прямой $x = 4$;

9) графиком функции $y = \frac{3}{x - 2}$ и прямыми $x = 4$, $x = 6$.

156. При каком положительном значении a прямая $x = 5$ делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 2$, $x = a + 5$, пополам?

157. При каком значении a прямая $x = a$ делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{4}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$, пополам?

Дифференциальные уравнения

158. Является ли данная функция решением данного дифференциального уравнения:

1) $y = 4e^{3x}$, $y' = 3y$;

2) $y = e^{-x} + 2x - 4$, $y' + y = 2x$;

3) $y = 3\sin 2x - 4\cos 2x$, $y'' = -4y$;

4) $y = e^x \sin x$, $y'' - 2y' + 2y = 0$?

159. При каком значении a функция $y = x \ln x$ является решением уравнения $xy' = ax + y$?

160. Найти общее решение дифференциального уравнения и его частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям:

1) $y' = 5y$, $y(0) = 3$;

2) $y' = -3y$, $y(1) = e$;

3) $y'' = -9y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$;

4) $y'' = -2y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Перестановки

161. Сократить дробь:

1) $\frac{n!}{(n+1)!}$; 2) $\frac{n!}{(n-2)!}$; 3) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$; 4) $\frac{n!}{(n-k)!}$, $n > k$.

162. Упростить выражение:

1) $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$; 2) $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$.

163. Решить уравнение: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$.

164. Вычислить:

1) $\frac{P_5 + P_4}{P_3}$; 2) $\frac{P_{10} - P_9}{9P_8}$; 3) $\frac{P_{3k}}{P_{3k-2}}$.

165. Сколькими способами можно составить список из пяти учеников?

166. В лицее «Лидер» n классов и n классоводов. Сколькими способами можно распределить классное руководство между учителями?

167. Сколько разных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, если каждую из них использовать только один раз?

168. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова: 1) «лицей»; 2) «галушка»; 3) «шаровары»?

Сочетания

169. Вычислить:

1) C_8^4; 2) C_7^6; 3) $C_6^2 + C_6^0$; 4) C_{27}^1; 5) $C_{1999}^{1999} + C_{1999}^1$.

170. Доказать, что:

1) $C_6^3 + C_6^2 = C_7^3$; 2) $C_9^4 + C_9^3 = C_{10}^4$.

171. Упростить выражение:

1) $\frac{2}{n} C_{n+1}^{n-1}$; 2) $\frac{3}{n} C_{2n}^{2n-1}$.

172. Вычислить:

1) C_{25}^{24}; 2) C_{19}^{17}; 3) C_{1000}^{999}.

173. Доказать, что:

1) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$;

2) $C_6^0 + C_6^2 + C_6^4 + C_6^6 = C_6^1 + C_6^3 + C_6^5$.

174. Решить уравнение:

1) $C_x^{19} = C_x^6$; 2) $C_{27}^8 + C_{27}^7 = C_{28}^x$; 3) $C_{23}^9 + C_{23}^x = C_{24}^9$.

175. Решить уравнение:

1) $C_x^2 = 153$; 3) $C_x^{x-2} = 45$; 5) $3C_{2x}^{x+1} = 2C_{2x+1}^{x-1}$;

2) $C_{x+2}^3 = 8(x+1)$; 4) $\dfrac{C_{x+1}^2}{C_x^3} = \dfrac{4}{5}$; 6) $11C_{2x}^x = 6C_{2x+1}^{x+1}$.

176. В классе 32 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?

177. На плоскости расположены 25 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

178. Сколько можно составить из простых делителей числа 2730 составных чисел, имеющих только два простых делителя?

179. Сколькими способами можно группу из 17 учащихся разделить на две группы так, чтобы в одной группе было 5 человек, а в другой — 12 человек?

180. В классе учатся 15 мальчиков и 12 девочек. В генеральной уборке класса участвуют 3 мальчика и 4 девочки. Сколькими способами можно составить группу дежурных?

181. У одного мальчика имеется 10 марок для обмена, а у другого — 8. Сколькими способами они могут обменять две марки одного на две марки другого?

182. На одной параллельной прямой отмечены 7 точек, на другой — 12. Сколько существует четырехугольников с вершинами в этих точках?

183. В баскетбольной команде, состоящей из 15 человек, необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

184. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы среди них было ровно три туза?

Размещения

185. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{A_{15}^4 + A_{14}^5}{A_{15}^3}$; 2) $\dfrac{A_{12}^4 \cdot P_7}{A_{11}^9}$.

186. Доказать, что $A_n^{n-1} = P_n$.

187. Решить уравнение:

1) $A_x^2 = 20$;
2) $A_{x+1}^2 = 156$;
3) $A_x^2 + C_x^1 = 256$;
4) $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = x$;
5) $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14\,(x+1)$.

188. В футбольной команде (11 человек) необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

189. В лицее «Лидер» в 9 классе изучают 12 предметов. Дневное расписание содержит 6 уроков. Сколькими способами можно составить дневное расписание?

190. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых нечетные и различные?

191. Сколько существует обыкновенных дробей, числитель и знаменатель которых — различные простые числа не больше 20?

192. Сколько существует правильных дробей, числитель и знаменатель которых простые числа не больше 20?

193. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых различные и четные?

Бином Ньютона

194. Найти разложение степени бинома:

1) $(a+b)^5$;
2) $(m+n)^7$;
3) $(x-y)^4$;
4) $(\sqrt{u}-\sqrt{v})^4$;
5) $\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^5$;
6) $(3x-1)^4$;
7) $(a+2b)^5$;
8) $(a^2-1)^4$;
9) $\left(\frac{1}{x}-1\right)^5$;
10) $(2-y^{-2})^4$.

195. Сумма всех биномиальных коэффициентов в разложении бинома $(a+b)^n$ равна 256. Найти n.

196. Сумма всех биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах в разложении бинома $(x+y)^n$, равна 512. Найти n.

197. Чему равна сумма биномиальных коэффициентов разложения бинома $(x+a)^9$, стоящих на нечетных местах?

198. Доказать, что сумма всех коэффициентов разложения бинома $(2a-b)^n$ при любом натуральном n равна 1.

199. Доказать, что сумма всех коэффициентов разложения бинома $(x-2y)^n$ при любом нечетном n равна -1.

200. Доказать тождество:

$$C_n^0 \cdot 2^n + C_n^1 \cdot 2^{n-1} + C_n^2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 2^1 + C_n^n \cdot 2^0 = 3^n.$$

201. Какой член в разложении бинома $(a+b)^{24}$ содержит ab в степени 5?

202. Найти шестой член в разложении бинома $\left(\frac{1}{x} + x^2\right)^{12}$.

203. Найти четвертый член в разложении бинома $(a^3 - \sqrt[3]{b})^{10}$.

204. Найти средний член в разложении бинома $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6$.

205. В разложении бинома $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^8$ найти номер члена, не содержащего x.

206. Найти член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, не содержащий x.

207. Найти член разложения бинома $\left(\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x}\right)^{12}$, содержащий x во второй степени.

Классическое определение вероятности

208. Какова вероятность того, что при одном броске игрального кубика выпадет число очков, равное:

1) двум; 3) четному числу;
2) пяти; 4) числу, кратному 6?

209. Представь себе, что в классе, в котором ты учишься, разыгрывается одна бесплатная туристическая поездка в Париж. Какова вероятность того, что в Париж поедешь именно ты?

210. Чтобы сдать экзамен по математике, нужно выучить 30 билетов. Ученик выучил на отлично 25 билетов. Какова вероятность того, что, отвечая на один билет, он получит отличную оценку?

211. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта:

1) туз; 2) червовый туз?

212. Из 28 учащихся одного класса 12 знают английский язык. Какова вероятность того, что обращение королевы Елизаветы на английском к наугад выбранному ученику будет ему понятным?

213. Бросают две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что выпадут:

1) два герба; 2) герб и цифра?

214. Какова вероятность того, что ваш будущий ребенок родится:

1) 7 числа; 2) 31 числа; 3) 29 числа?

215. В ящике находятся 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли два не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад один шарик будет белым?

216. Какова вероятность того, что наугад выбранное двузначное число делится на 12?

Применение формул комбинаторики для вычисления вероятности событий

217. В ящике лежат 8 шариков, два из которых белые. Какова вероятность того, что выбранные наугад два шарика будут белыми?

218. Четыре карточки пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4. Какова вероятность того, что номера выбранных наугад трех карточек образуют возрастающую арифметическую прогрессию?

219. На карточках написаны натуральные числа от 1 до 10. Наугад выбираются две из них. Какова вероятность того, что произведение номеров выбранных карточек будет нечетным числом?

220. Выбирают наугад четыре буквы слова «закон». Какова вероятность того, что из выбранных четырех букв можно сложить слово «коза»?

221. Наугад выбирают четыре буквы слова «сладости». Какова вероятность того, что выбранные четыре буквы в последовательности выбора образуют слово «сало»?

222. Среди 30 деталей 8 бракованных. Какова вероятность того, что взятые наугад 5 деталей будут без дефекта?

223. Из колоды в 36 карт наугад выбирают две карты. Какова вероятность того, что выбранные карты — два туза?

224. На экзамен по математике выносят 40 вопросов. Ученик подготовил только 35. Билет состоит из четырех вопросов. Какова вероятность того, что ученик получит отличную оценку?

225. На экзамен по математике выносят 50 вопросов. Ученик подготовил только 40. Билет состоит из пяти вопросов. Чтобы получить отличную оценку, достаточно ответить на четыре вопроса. Какова вероятность того, что ученик получит отличную оценку?

226. В ящике лежат 8 белых и 6 черных шариков. Какова вероятность того, что из пяти выбранных наугад шариков три будут белыми?

227. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек выпадают на разные месяцы года.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

228. В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 40% рыжиков. Какова вероятность того, что выбранный наугад гриб белый или рыжик?

229. Завод выпускает 15% продукции высшего сорта, 25% — первого сорта, 40% — второго сорта, а все остальное — брак. Найти вероятность того, что наугад выбранное изделие не будет бракованным.

230. Музыкальная школа проводит набор учащихся. Вероятность быть не зачисленным во время проверки музыкального слуха составляет 0,4, а чувства ритма — 0,1. Какова вероятность положительного тестирования?

231. Три опытных хирурга делают сложные операции. Вероятность отрицательного результата операции у первого хирурга составляет 0,05, у второго — 0,09, у третьего — 0,1. Больной наугад выбирает врача. Какова вероятность положительного результата?

232. На соревнованиях по стрельбе стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,04, в девятку — 0,1, в восьмерку — 0,2. Какова вероятность того, что одним выстрелом стрелок наберет: 1) не менее девяти очков; 2) не менее восьми очков; 3) меньше восьми очков?

233. В коробке лежат 5 красных, 8 синих, 3 зеленых, 4 желтых шариков. Из коробки наугад взяли один шарик. Какова вероятность того, что этот шарик не будет синим?

234. На экзамене по математике для усиления контроля класс из 35 учащихся рассадили в три аудитории. В первую посадили 10 человек, во вторую — 12, в третью — всех остальных. Какова вероятность того, что два друга окажутся в одной аудитории?

Теорема умножения вероятностей независимых событий

235. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две единицы?

236. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две четные цифры?

237. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут два герба и одна цифра?

238. *Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность того, что шестерка выпадет только во второй раз?*

239. Три выключателя соединены параллельно. Вероятность выхода из строя первого выключателя равна 3%, второго — 4%, третьего — 1%. Какова вероятность того, что цепь будет разомкнута?

240. В ящике лежат 4 белых и 3 черных шарика. Наугад из ящика достают два шарика и кладут их обратно. Эту же операцию повторяют еще раз. Какова вероятность того, что все взятые шарики были белого цвета?

241. Магазин снабжают три молокозавода. Продукция первого завода составляет 40%, второго — 30%, причем 80% продукции второго завода высшего сорта. Какова вероятность купить продукт второго завода высшего сорта?

242. Вступительный экзамен в лицей состоит из трех туров. Вероятность отсева в первом туре составляет 60%, во втором — 40%, в третьем — 30%. Какова вероятность поступления в лицей?

243. *Трое рабочих изготовляют соответственно 40%,* 30%, 30% всех изделий. В их работе брак соответственно составляет 2%, 3%, 1%. Какова вероятность того, что взятое наугад изделие будет бракованным?

244. Три стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в цель. Вероятность попадания первого стрелка составляет 0,7, второго — 0,8, третьего — 0,6. Какова вероятность того, что было: 1) три попадания; 2) три промаха; 3) ровно одно попадание?

245. В одном ящике лежат 5 красных, 9 белых, 8 черных шариков, а в другом — 3 красных, 7 белых, 10 черных шариков. Наугад из каждого ящика берут по одному шарику. Какова вероятность того, что они будут одного цвета?

246. Монету подбрасывают восемь раз. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб.

247. Два ученика независимо друг от друга решают одну задачу. Первый ученик может решить эту задачу с вероятностью 0,9, а второй — 0,7. Найти вероятность того, что: 1) оба ученика решат задачу; 2) ни один из учеников не решит задачу; 3) хотя бы один из учеников решит задачу; 4) только один из учеников решит задачу.

248. Семь стрелков одновременно независимо друг от друга стреляют в одну цель. Вероятность попадания каждого стрелка равна 0,8. Поражение цели происходит за одно попадание. Найти вероятность поражения цели.

Схема Бернулли

249. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет: 1) три раза; 2) ни одного раза; 3) не более двух раз; 4) не менее трех раз?

250. В кардиологическом центре, где работают профессионалы высшего класса, вероятность положительного результата операции равна $\frac{6}{7}$. В течение дня в центре делают 10 операций. Какова вероятность успеха во всех операциях?

251. По мишени стреляют восемь раз. Вероятность попадания в мишень во время каждого выстрела равна $\frac{3}{5}$. Какова вероятность того, что из восьми выстрелов в мишень попадут пять раз?

252. В ящике лежат 7 белых и 4 черных шарика. Из ящика семь раз наугад выбирают по одному шарику и кладут обратно перед следующим испытанием. Найти вероятность того, что из семи вынутых шариков белый шарик вынимали: 1) три раза; 2) менее двух раз; 3) не менее трех раз.

253. Игральный кубик подбрасывают девять раз. Какова вероятность того, что шестерка выпадет: 1) четыре раза; 2) более трех, но менее шести раз?

254. Игральный кубик подбрасывают семь раз. Какова вероятность того, что четная цифра выпадет: 1) два раза; 2) не более трех раз; 3) более пяти раз?

255. Что более вероятно: выиграть у равноценного игрока четыре партии из пяти или шесть партий из девяти?

Вариант 2

Модуль действительного числа. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля

1. Раскрыть знак модуля:

1) $|\pi - 4|$; 3) $|-x^2 - 2|$; 5) $|6 + x|$;

2) $|\sqrt{10} - 3|$; 4) $|x - 5|$; 6) $|x^2 - 4x + 5|$.

2. Решить уравнение:

1) $|x^2 + 5x - 9| = -3$; 3) $|x - 1| = 1 - x$;

2) $|x| = -\frac{1}{x^2}$; 4) $x^2 + x + 1 = -|x|$.

3. Решить неравенство:

1) $|x| > x$; 3) $\frac{|x|}{x} \geq 1$; 5) $x|x - 1| \leq 0$;

2) $|x| \geq x$; 4) $x|x - 1| > 0$; 6) $\frac{x}{|x - 1|} > 0$.

4. Решить уравнение:

1) $|x| = a - 1$; 2) $|x| = -a^2$.

5. Решить неравенство:

1) $a|x| > 0$; 2) $a|x| \leq 0$.

6. Построить график функции:

1) $y = |x + 3|$; 6) $y = \frac{x}{|x|}(x^2 - 6x + 9)$;

2) $y = x - |x|$; 7) $y = x^2 - 5|x| + 4$;

3) $y = |3x - 2| + x$; 8) $y = x^2 + x \cdot \frac{|x + 1|}{x + 1} - 6$;

4) $y = \frac{x + 2}{|x + 2|}$; 9) $y = x^2 + 3|x - 1| - x + 3$;

5) $y = |x|(x - 4)$; 10) $y = \frac{6}{|x| + x}$;

11) $y = \dfrac{16 - x^2}{|x| - 4}$;

12) $y = \dfrac{x^2 - 5x - 6}{|x + 1|}$;

13) $y = |x + 5| + |x - 4|$;

14) $y = |x - 2| - |x + 1|$;

15) $y = |x + 4| - |x| + |x - 3|$;

16) $y = |x^2 - 2x - 3|$;

17) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$;

18) $y = ||x| - 5|$.

7. Построить график уравнения:

1) $|x| = 2$;

2) $|y| = 1$;

3) $|xy| = 6$;

4) $|x + y| = 2$;

5) $|x - 2y| = 6$;

6) $|x| + |y| = 3$;

7) $2|x| - |y| = 3$;

8) $|x - 1| = |y|$.

8. Решить уравнение:

1) $|x - 2{,}8| = 1{,}4$;

2) $|4x + 7| = 2{,}6$;

3) $||x| - 4| = 3$;

4) $|x^2 + 5x - 3| = 3$;

5) $x^2 - 2|x| - 8 = 0$;

6) $x|x| + 6x - 5 = 0$;

7) $|x - 2| + x = 8$;

8) $|x + 2| - x = 6$;

9) $2(x+4)^2 - 5|x+4| + 2 = 0$;

10) $x^2 + 3x - 18 \cdot \dfrac{x - 3}{|x - 3|} = 0$;

11) $||x^2 - 6x + 3| - 5| = 2$;

12) $|x^2 + 4|x| - 2| = 3$;

13) $|3x^2 - x| = 8 + x$;

14) $|x + 4| + |x| = 8$;

15) $|x - 2| + |x + 3| = 5$;

16) $|x| - |x - 3| = 4$;

17) $|3x + 1| - |x - 4| = 2x - 3$;

18) $|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 5x + 6| = 2$.

9. Решить неравенство:

1) $|x| < 7$;

2) $|x - 1| < 3{,}8$;

3) $|7x - 5| \le 3$;

4) $|5 - 4x| < 6$;

5) $|x| > 9$;

6) $|x - 4| \ge 3{,}2$;

7) $|0{,}4x + 3| \ge 2$;

8) $|7 - 8x| > 9$;

9) $|x + 3| + 4x \ge 6$;

10) $|x - 4| - 5x < 12$;

11) $|x + 3| + |x - 3| \le 6$;

12) $|x + 2| + |x - 3| > 4$;

13) $|x + 2{,}2| - |x - 1{,}8| \le 4$;

14) $|3x + 16| - |2x - 14| > 8$;

15) $|x^2 - x - 8| < 12$;

16) $|x^2 - 2x| \ge 3$;

17) $|x - 3|(x + 1) \ge 4x$;

18) $x^2 - 2|x| < 15$;

19) $x^2 - 7x + 12 > |x - 4|$;

20) $|x| \cdot |x - 3| + x - 2 < 0$;

21) $|2x - 1| < |x + 2|$;

22) $\dfrac{|2 - x| - x}{|x - 3| - 1} \le 2$.

10. Исследовать количество решений уравнения в зависимости от значения параметра a:

1) $|x^2 + 3x - 4| = a$;
2) $|x + 4| + |x - 3| = a$;
3) $|x^2 - 3|x|| = a$;
4) $||x| - 2| = x + a$;
5) $|x + 5| - |x - 1| = a$;
6) $2 + |x| - x^2 = a$.

Предел числовой последовательности

11. Последовательность задана формулой общего члена $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Для заданного числа ε указать такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|a_n - 1| < \varepsilon$: 1) $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$; 2) $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$; 3) $\varepsilon = 0{,}001$.

12. Используя определение предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2$.

13. Вычислить предел:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n-7}{4n+6}$;
2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^2-5}{8n^2+n-1}$;
3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+4}$;
4) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1+2+4+\ldots+2^{n-1}}{2^{n+1}}$.

Предел функции. Непрерывность функции

14. Для каждой из функций, график которой изображен на рис. 4, установить:

1) Определена ли эта функция в точке x_0?
2) Существует ли предел функции в точке x_0?
3) Если предел в точке x_0 существует, то равен ли он значению функции в этой точке?

15. Используя определение предела функции, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to -1} (3x + 2) = -1$;
2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x = \dfrac{1}{2}$.

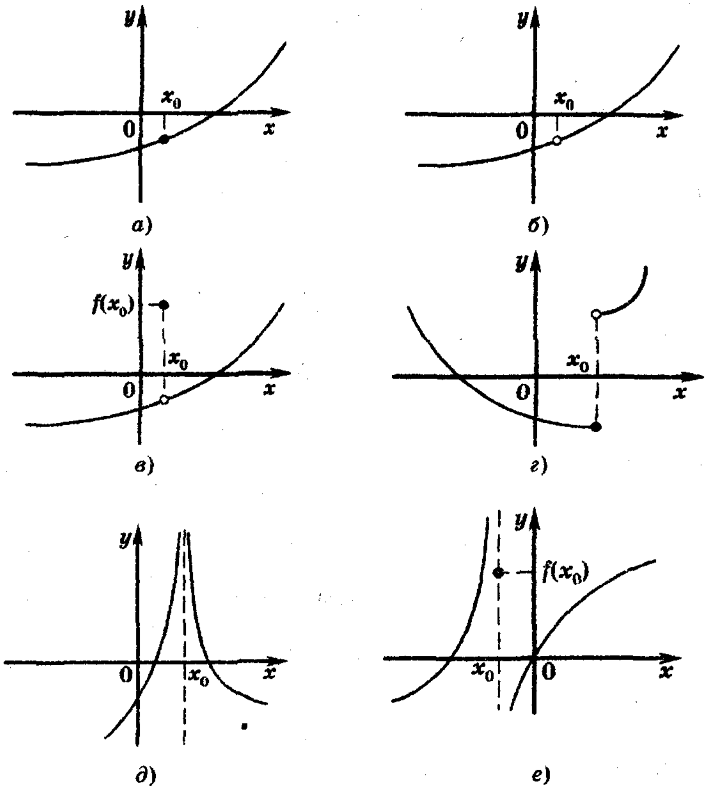


Рис. 4

16. Вычислить предел:

1) $\lim\limits_{x \to -2} (2x^2 - 3x + 6)$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$;

3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{2x + 10} - 4}$;

4) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{3}{x^2 - x - 2} - \dfrac{1}{x - 2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{6x}$;

6) $\lim\limits_{x \to 1} \sin (x - 1) \cos \left(\dfrac{\pi}{x - 1}\right)$.

17. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0:

1) $f(x) = 4 - 0{,}5x$, $x_0 = 4$;

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{если } x \neq 3, \\ 6, & \text{если } x = 3, \end{cases}$ $\quad x_0 = 3$.

18. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin \dfrac{x}{2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x_0 = 0$.

Определение производной функции

19. Найти приращение функции f в точке x_0 при указанном приращении аргумента Δx:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;

2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = \frac{\pi}{12}$.

20. Для функции $f(x) = \operatorname{tg} 4x$ найти $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

21. Используя определение, найти производную функции:

1) $f(x) = 3x + 7$; 2) $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Правила вычисления производных

22. Найти производную функции:

1) $f(x) = \frac{x}{4}$; 5) $g(x) = x^{12}$; 9) $f(x) = \frac{1}{x^7}$;

2) $f(x) = \sqrt{3}x$; 6) $\varphi(x) = -3x^5$; 10) $h(x) = \frac{4}{x^5}$;

3) $g(x) = 4x^2$; 7) $h(x) = x^{-6}$; 11) $\varphi(x) = \frac{1}{6x^6}$;

4) $\varphi(x) = -\frac{x^2}{8}$; 8) $f(x) = -5x^{-8}$; 12) $g(x) = \frac{2}{9x^3}$.

23. Найти производную функции:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$; 3) $y = x^{\frac{7}{6}}$; 5) $g(x) = \frac{1}{4x^{\frac{2}{5}}}$;

2) $h(x) = 4x^{-\frac{3}{4}}$; 4) $\varphi(x) = \sqrt[6]{x^5}$; 6) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[8]{x}}$.

24. Найти производную функции:

1) $f(x) = 8x^2\sqrt{x}$;

2) $y = \dfrac{5}{x\sqrt[3]{x}}$;

3) $\varphi(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt[4]{x}}$;

4) $h(t) = \sqrt{t\sqrt[3]{t^2}}$.

25. Найти производную функции:

1) $y = 4x^6 - 2x^4 + 3x^2 + 6$;

2) $y = \dfrac{1}{4}x^8 + 6\sqrt{x} - 7x$;

3) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$;

4) $y = \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{6}{x^2}$.

26. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x$, $x_0 = -2$;

2) $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^4}{4} + x - \sqrt{2}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = x^3 - 12\sqrt{x}$, $x_0 = 9$.

27. Найти производную функции:

1) $y = (x^3 + 4)(x^2 - 3)$;

2) $y = \sqrt{x}\,(4x - 3)$;

3) $y = (\sqrt{x} - 2)(5 - 6\sqrt{x})$;

4) $y = (x^3 + x^2 - 4)(x^2 - 4x + 1)$.

28. Найти производную функции:

1) $y = \dfrac{6x + 5}{4 - 3x}$;

2) $y = \dfrac{1 - 2x}{x^2 + 3}$;

3) $y = \dfrac{x^2 - 4x}{x - 2}$;

4) $y = \dfrac{x^2 + 6x}{x^2 - 1}$;

5) $y = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x}}$;

6) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2x + 1}$.

29. Вычислить значение производных данных функций при указанных значениях независимой переменной:

1) $f(x) = \dfrac{7 - 10x}{5x + 2}$, $f'(0{,}2)$ – ?

2) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2}{x^4 - 2}$, $f'(2)$ – ?

30. Верно ли, что $f'(0) > g'(0)$, если $f(x) = x^2 - 8x$, $g(x) = \dfrac{3x - 2}{2x - 3}$?

31. Решить неравенство $f'(x) - h'(x) \geq 0$, если $f(x) = 2x^3 - 36x$, $h(x) = 15x^2 - 49$.

32. Найти, при каких значениях x равна нулю производная функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

Производная сложной функции

33. Найти производную функции:

1) $y=(2x-7)^6$;
2) $y=(3x^4+8x)^7$;
3) $y=\frac{1}{(x^2+x)^4}$;
4) $y=2\,(x-1)^6+4\,(3-x)^5$;
5) $y=\sqrt{3x-14}$;
6) $y=\sqrt{2x^3+4x}$.

34. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x)=(x^2-2x-3)^5,\ x_0=2$;
2) $f(x)=(\sqrt{x}+2)^4,\ x_0=1$;
3) $f(x)=\sqrt{4x^2-5x},\ x_0=-1$;
4) $f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8}},\ x_0=3$.

Производные тригонометрических функций

35. Найти производную функции:

1) $y=\frac{x^9}{9}+\sqrt{2}\cos x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-2x^4$;
2) $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$;
3) $y=x^2\cos x$;
4) $y=4x\operatorname{ctg} x$;
5) $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$;
6) $y=\frac{2x^2}{\sin x}$.

36. Найти производную функции:

1) $y=\sin\frac{x}{4}$;
2) $y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$;
3) $y=\operatorname{tg}^2 x$;
4) $y=\sqrt{\cos 3x}$;
5) $y=x^3\sin\frac{1}{x}$;
6) $y=\frac{\cos\frac{x}{2}}{x+1}$.

37. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{8},\ x_0=-4\pi$;
2) $f(x)=\cos\sqrt{x},\ x_0=\frac{\pi^2}{4}$;
3) $f(x)=\sin^3 2x,\ x_0=\frac{\pi}{12}$;
4) $f(x)=\frac{x}{5}\operatorname{tg} 3x,\ x_0=\pi$.

38. Решить уравнение $f(x) = g(x)$, если $f(x) = 4x\cos^2\frac{x}{2}$, $g(x) = 8\cos\frac{x}{2} - 3 - 2x\sin x$.

39. При каких значениях x производная функции $f(x) = 4\cos\frac{x}{2} - - x\sqrt{2}$ меньше нуля?

Производные высших порядков

40. Найти вторую производную функции:

1) $y = x^4 - 3x^2 + 4x - 6$;
2) $y = 0{,}5\cos 4x$;
3) $y = \frac{3x + 4}{x}$;
4) $y = x\sin x$.

41. Найти производную третьего порядка функции $y = -\frac{6}{x^2}$.

42. Найти производную четвертого порядка функции:

1) $y = 0{,}5x^2 + 6x - 7$;
2) $y = \sin 5x$.

Решение неравенств методом интервалов

43. Решить неравенство:

1) $(x + 6)(x - 1)(x - 7) > 0$;
2) $(4x + 3)(2x - 3)(x - 5) \le 0$;
3) $(2 + x)(x + 7)(2 - x) \le 0$;
4) $(3x + 20)(3 - 6x)(2x - 3)(7 - 3x) \ge 0$.

44. Решить неравенство:

1) $\frac{x + 3}{x - 6} < 0$;
2) $\frac{x - 1{,}4}{x + 2{,}6} \ge 0$;
3) $\frac{3 - x}{4x + 1{,}2} \le 0$;
4) $\frac{(x + 5)(x + 7)}{x - 11} \le 0$;
5) $\frac{x - 6{,}5}{(x + 3)(x - 14)} \ge 0$;
6) $\frac{x + 6{,}8}{(7 - x)(x - 4)} \le 0$.

45. Найти множество решений неравенства:

1) $(x^2 + 5x)(x^2 - 16) \ge 0$; 2) $(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 2x) < 0$;

3) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-3x+2}<0;$

4) $\frac{x^2+6x-7}{x^2-25}\geq 0;$

5) $\frac{5x-8}{x+1}\leq\frac{x-4}{x+1};$

6) $\frac{2x}{3x+5}\leq 2;$

7) $\frac{x^2+7x}{x+3}\leq\frac{8}{x+3};$

8) $\frac{x^2-x}{x+3}\geq 1;$

9) $\frac{(x+5{,}2)(3-x)(2x+7)}{(6x-1)(x-2{,}8)}\leq 0;$

10) $\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x+3}\leq 1.$

46. Решить неравенство:

1) $(x^2+9)(x^2+x-12)\leq 0;$

2) $(x+2)^2(x^2+2x-3)<0;$

3) $(x+2)^2(x^2+2x-3)\leq 0;$

4) $(x+2)^2(x^2+2x-3)>0;$

5) $(x+2)^2(x^2+2x-3)\geq 0;$

6) $(x-4)^2(x^2+x-2)>0;$

7) $(x-4)^2(x^2+x-2)\geq 0;$

8) $(x-4)^2(x^2+x-2)<0;$

9) $(x-4)^2(x^2+x-2)\leq 0;$

10) $(x+1)^3(x-1)^2(x-3)^6>0;$

11) $(x+1)^3(x-1)^2(x-3)^6\geq 0;$

12) $(x+3)^3(x-1)^2(x-3)^6(x-4)^5\geq 0;$

13) $(x^2+9x+14)(x^2+5x+7)\geq 0;$

14) $(x^2-3x+1)(5x-x^2-9)\geq 0.$

47. Решить неравенство:

1) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9}>0;$

2) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9}\geq 0;$

3) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9}<0;$

4) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9}\leq 0;$

5) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-12}>0;$

6) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-12}\geq 0;$

7) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-12}<0;$

8) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-12}\leq 0;$

9) $\frac{x^2+2x-3}{|x+1|}\leq 0;$

10) $\frac{|x-3|}{x^2-5x-36}\geq 0.$

48. Найти множество решений неравенства:

1) $\dfrac{x^2+5x}{x^2-25} \ge 0;$ 2) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2} \le 0.$

49. Найти наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{f(x)}{(x-5)(x-8)} \le 0$, где $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 18x + 15.$

50. Найти множество решений неравенства $f(x) \le 0$, если:

1) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 7;$ 3) $f(x) = \dfrac{2x+3}{5-3x};$

2) $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x+1};$ 4) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-2}.$

51. Решить неравенство:

1) $(x-2)(x-a) < 0;$ 5) $(x-a)(x+4)^2 \le 0;$

2) $(x-2)(x-a)^2 > 0;$ 6) $\dfrac{x-3}{x-a} \ge 0;$

3) $(x-2)(x-a)^2 \ge 0;$ 7) $\dfrac{(x+3)(x-a)}{x+3} \ge 0;$

4) $(x-a)(x+4)^2 < 0;$ 8) $\dfrac{(x-1)(x-a)}{x-a} \le 0.$

Касательная к графику функции

52. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 17$ в точке $x_0 = -1.$

53. Найти тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $f(x) = \cos\dfrac{x}{4}$ в точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}.$

54. Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + 4x$ в точке $x_0 = -2;$

2) $f(x) = \sqrt{3x^2+2x}$ в точке $x_0 = -1;$

3) $f(x) = \sin^4 x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

55. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$ в точке пересечения его с осью ординат.

56. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x+1}{3-x^2}$ в точке пересечения его с осью абсцисс.

57. Найти абсциссу точки графика функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{8} + x + \sqrt{5}$, в которой касательная к этому графику параллельна прямой $y = 0{,}5x + 3$.

58. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = 0{,}3x^2 + 2x - 7$, параллельной прямой $y = 0{,}8x - 5$.

59. Найти уравнение горизонтальных касательных к графику функции $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x - 15$.

60. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ в точке $x_0 = -1$.

61. Найти, в какой точке графика функции $f(x) = \sqrt{3}\,(x^3 - 2)$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

62. Под какими углами парабола $y = x^2 - 4x + 3$ пересекает ось абсцисс?

63. Вычислить площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

64. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = 1 - x^2$, проходящей через точку M (1; 1).

65. При каких значениях a и b парабола $y = ax^2 + bx + 3$ касается прямой $y = -2x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$?

Физический смысл производной

66. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 0{,}2t^5 - 4t^2 + 6$ (время t измеряется в секундах, перемещение x — в метрах). Найти скорость движения в момент времени $t = 2$.

67. Вращение тела вокруг оси осуществляется по закону $\varphi(t) = 18t - 3t^2$. Найти, в какой момент времени тело остановится (t — время в секундах, $\varphi(t)$ — угол поворота в радианах).

68. Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 7t$. Найти импульс тела и силу, действующую на него, в момент времени $t = 5$ (t измеряется в секундах, s — в метрах).

Исследование функции на возрастание (убывание)

69. Найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6$;
2) $f(x) = 5 + 4x - 2x^2 - x^3$;
3) $f(x) = x^4 - 8x^3 - 10$;
4) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{4x - 1}$;
5) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$;
6) $f(x) = \cos x + \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

70. Доказать, что функция $f(x) = 6 - 6x + 3x^2 - 2x^3$ убывает на множестве всех действительных чисел.

71. Доказать, что функция $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 18x^2 + 36x$ возрастает на промежутке $[-1; \infty)$.

72. Найти, при каких значениях a возрастает на R функция:

1) $f(x) = (a - 1)\, x^2 + 6x - 7$;
2) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + 9x - 5$;
3) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{(a - 2)\, x^2}{2} - 2ax + 3a + 1$;
4) $f(x) = 2ax^3 + 3ax^2 + 12x$.

Критические точки, максимумы и минимумы функции

73. Найти критические точки функции:

1) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 4$;
2) $f(x) = (x + 5)^2\, (x - 4)^2$;
3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

74. Найти, при каких значениях a не имеет критических точек функция $f(x) = \sqrt{(x - 3)^3} - (3 + 5a)\, x$.

75. Найти точки экстремума функции:

1) $f(x) = 36x - 3x^2 - 2x^3$;

2) $f(x) = (x + 3)^3 (x - 1)^2$;

3) $f(x) = x^2 - \frac{54}{x}$;

4) $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$.

76. Найти промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 12$;

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 72x - 4$;

3) $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 4}$;

4) $f(x) = (x + 2)^4 (x - 5)^3$;

5) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2 - x}$;

6) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$;

7) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$;

8) $f(x) = \frac{16}{9 - x^2}$.

77. Найти, при каких значениях a функция $f(x) = (a - 1)\cos^2 x + (3a - 4)x$:

1) не имеет критических точек;

2) не имеет экстремумов.

Построение графиков функций

78. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $f(x) = x^3 - 3x$;

2) $f(x) = 3 + 2x^2 - x^4$;

3) $f(x) = (x - 3)^2 (x - 1)^2$;

4) $f(x) = \frac{x + 4}{x - 2}$;

5) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$;

6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

79. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $f(x) = (x - 2)\sqrt{x}$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$;

3) $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.

Наибольшее и наименьшее значения функции

80. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x + 1$, $[0; 6]$;

2) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 30$, $[-2; 1]$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 4}$, $[-1; 3]$;

4) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

81. На какое множество функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ отображает отрезок $[1; 3]$?

82. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 2x\,|x - 2|$ на промежутке $[0; 3]$.

83. Число 36 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

84. Найти положительное число, удвоенный квадратный корень которого больше этого числа на наибольшее значение.

85. Площадь прямоугольника равна 400 см^2. Какими должны быть его стороны, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

86. Большее основание равнобедренной трапеции равно a, а острый угол — α. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найти площадь трапеции. При каком значении α площадь трапеции буде наибольшей?

Первообразная. Основное свойство первообразной

87. Доказать, что функция F является первообразной для функции f на указанном промежутке:

1) $F(x) = x^2 - 4x^3 - 6$, $f(x) = 2x - 12x^2$, $x \in R$;

2) $F(x) = 5x + \dfrac{7}{x}$, $f(x) = 5 - \dfrac{7}{x^2}$, $x \in (0; \infty)$;

3) $F(x) = \sqrt{4x + 9}$, $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x + 9}}$, $x \in (-2{,}25; \infty)$;

4) $F(x) = \sin 3x$, $f(x) = 3\cos 3x$, $x \in R$;

5) $F(x) = 9 - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$, $f(x) = \dfrac{1}{3\sin^2\dfrac{x}{3}}$, $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

88. Является ли функция $F(x) = 3 - \frac{2}{x^3}$ первообразной для функции $f(x) = \frac{6}{x^4}$ на промежутке:

1) $(-\infty; 0)$; 2) $(-5; 5)$; 3) $[0; \infty)$; 4) $(0; 7]$?

89. Является ли функция $F(x) = |4 - x|$ первообразной для функции $f(x) = -1$ на промежутке:

1) $(-2; 3)$; 2) $(-1; 5)$?

90. Для данной функции f найти первообразную, график которой проходит через данную точку M:

1) $f(x) = x^3$, $M(-1; 4)$;

2) $f(x) = \cos x$, $M\left(\frac{\pi}{6}; 1{,}5\right)$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^5}$, $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$;

5) $f(x) = \sqrt{x}$, $M(16; 2)$;

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $M(1; -4)$.

Правила нахождения первообразных

91. Для данной функции f найти общий вид первообразной:

1) $f(x) = x + 6$;

2) $f(x) = 4x^3 + 8x - 1$;

3) $f(x) = 12x^2 - 6x^5$;

4) $f(x) = x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}}$;

5) $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{4}{x^3}$;

6) $f(x) = \frac{7}{\cos^2 x} + 2\sin x$;

7) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - 9x^8$;

8) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} - \frac{9}{\sqrt[4]{x}}$.

92. Для данной функции f найти первообразную F, удовлетворяющую данному условию:

1) $f(x) = 5 + 6x - 9x^2$, $F(-3) = 100$;

2) $f(x) = 13x^{12} + \frac{7}{6\sqrt{x}}$, $F(1) = 0$;

3) $f(x) = \frac{3}{x^2} - 4$, $F(1{,}5) = -3$.

93. Для данной функции f найти общий вид первообразной:

1) $f(x) = (7 - 4x)^4$;

2) $f(x) = \sin 9x$;

3) $f(x) = \cos \frac{x}{8}$;

4) $f(x) = \frac{2}{\sin^2 \frac{x}{4}}$;

5) $f(x) = \frac{10}{\sqrt{3 + 2x}}$;

6) $f(x) = \frac{1}{(3x - 2)^3}$.

94. Для данной функции f найти первообразную, график которой проходит через данную точку A:

1) $f(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \sin 5x$, $A\ (\pi;\ 0)$;

2) $f(x) = \frac{6}{\cos^2\left(6x + \frac{\pi}{12}\right)}$, $A\left(\frac{\pi}{24};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{7x - 5}}$, $A\ (3;\ 2)$.

95. Найти первообразную функции $f(x) = 4x + 1$, один из нулей которой равен -4.

96. Найти первообразную функции $f(x) = 6x^2 + 4x - 5$, один из нулей которой равен 1. Найти остальные нули первообразной.

97. Найти первообразную функции $f(x) = 5x - 3$, график которой с прямой $y = 2$ имеет только одну общую точку.

98. Найти первообразную функции $f(x) = 8 - 3x$, для графика которой прямая $y = 2x - 16$ является касательной.

99. Скорость движения точки задается уравнением $v = 5 - 2t$ (м/с). Найти уравнение движения $s = s(t)$, если в момент времени $t = 4$ с точка находилась на расстоянии $s = 32$ м.

100. Найти общий вид первообразной данной функции:

1) $f(x) = \cos^2 4x$;

2) $f(x) = \mathrm{tg}^2 \frac{x}{3}$;

3) $f(x) = \frac{5x^5 + x^6 - 2}{x^3}$;

4) $f(x) = (6x - x^2)^2$;

5) $f(x) = \cos 7x \cos 4x$.

101. $F(x)$ — первообразная функции $f(x) = 4x + 8$, график которой имеет общую точку с графиком функции $f(x)$, принадлежащую оси абсцисс. Найти первообразную $F(x)$ и все точки пересечения графиков функций $f(x)$ и $F(x)$.

102. Найти формулу, которой задается функция $y = f(x)$, график которой проходит через точку M (2; 10), а угловой коэффициент касательной, проведенной к графику в точке x, равен $4x^3 - 1$.

Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

103. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{-4}^{3} (4 - x)\,dx$;

2) $\int\limits_{-2}^{0} (x^2 + 6x)\,dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{2} (16x^3 + 9x^2 - 12x + 1)\,dx$;

4) $\int\limits_{-5}^{-1} (x + 2)^2\,dx$;

5) $\int\limits_{-1,5}^{-1} (6x + 5)^5\,dx$;

6) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{12dx}{(4x - 3)^4}$;

7) $\int\limits_{4}^{49} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$;

8) $\int\limits_{1}^{13} \frac{dx}{\sqrt{6x + 3}}$;

9) $\int\limits_{-4}^{16} \frac{dx}{\sqrt{8 - \frac{x}{4}}}$;

10) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;

11) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \cos\frac{x}{3}\,dx$;

12) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

13) $\int\limits_{-\frac{\pi}{15}}^{-\frac{\pi}{30}} \frac{dx}{\cos^2 5x}$;

14) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\frac{x}{3} + \sin 3x\right) dx$;

15) $\int\limits_{1}^{16} \sqrt{x}\,dx$;

16) $\int\limits_{16}^{625} \sqrt[4]{x}\,dx$;

17) $\int\limits_{-27}^{8} \sqrt[3]{x^2}\, dx$;

18) $\int\limits_{-20}^{-5} \sqrt{4 - x}\, dx$;

19) $\int\limits_{-8}^{2} \sqrt[4]{8x + 65}\, dx$;

20) $\int\limits_{0}^{2} x^2\sqrt{x}\, dx$;

21) $\int\limits_{1}^{81} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$;

22) $\int\limits_{0}^{11} \frac{4dx}{\sqrt[5]{243 - 22x}}$;

23) $\int\limits_{10}^{78} \frac{32dx}{\sqrt[4]{(8x + 1)^3}}$;

24) $\int\limits_{\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) dx$.

104. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{ctg}^2 2x\, dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\frac{x}{4}\, dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^4 x\, dx$;

4) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sin 3x \sin x\, dx$;

5) $\int\limits_{-2}^{1} (x^2 + x)^2\, dx$;

6) $\int\limits_{0}^{1} (x^3 + \sqrt{x})^2\, dx$;

7) $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2 - x + 2}{x^4}\, dx$;

8) $\int\limits_{1}^{4} \frac{2x^2 + 0{,}5x + 3}{\sqrt{x}}\, dx$.

105. Вычислить интеграл $\int\limits_{-2}^{3} f(x)\, dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ при } x < 1, \\ x^2 + 1 \text{ при } x \geq 1. \end{cases}$$

106. При каких значениях a выполняется неравенство:

1) $\int\limits_{2}^{a} x^2\, dx > 39$;

2) $\int\limits_{a}^{1} 4x\, dx < -8$?

Площадь криволинейной трапеции

107. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$;
2) графиком функции $y = x^4$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$;
3) графиком функции $y = \sin x$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$;
4) параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс;
5) параболой $y = x^2 + 2x$, осью абсцисс и прямой $x = -3$;
6) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;
7) графиком функции $y = \sqrt{x + 4}$ и прямыми $y = 0$, $x = 5$;
8) графиком функции $y = \cos\frac{x}{2}$ и прямыми $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

108. Вычислить площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рис. 5.

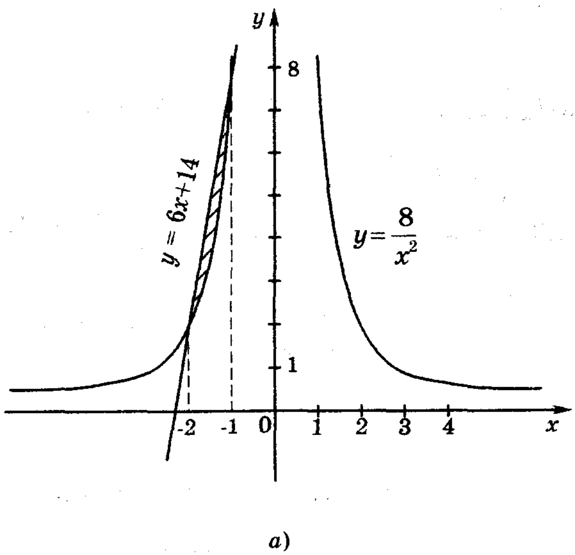
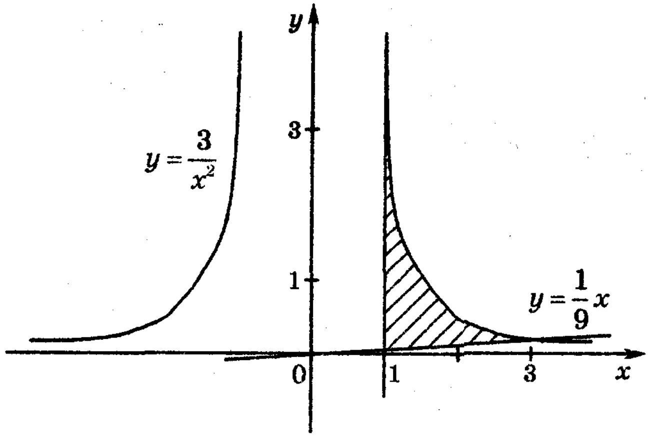
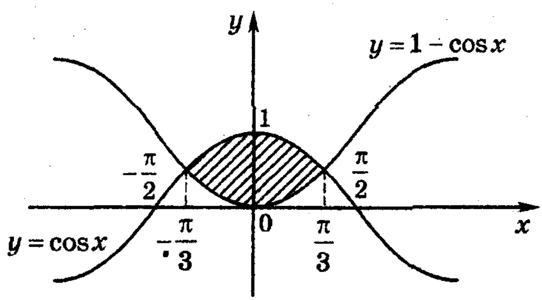


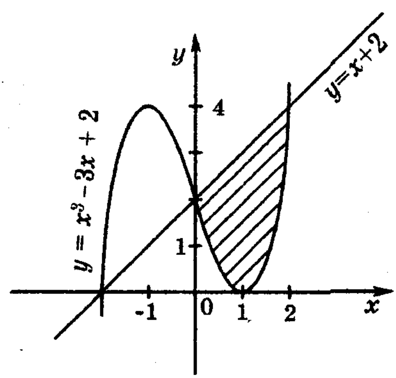
Рис. 5



б)

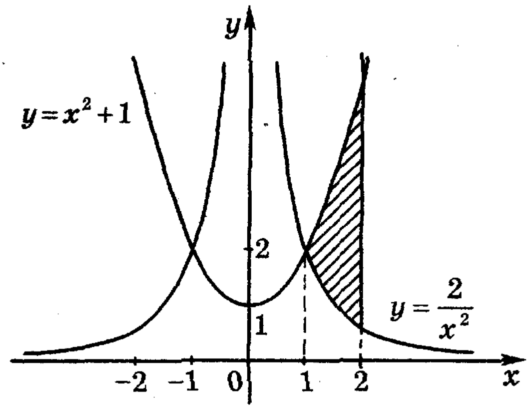


в)



г)

Рис. 5 (продолжение)



е)

Рис. 5 (окончание)

109. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y = 5 - x^2$ и прямой $y = 4$;
2) параболой $y = 4x - x^2$ и прямой $y = -x + 4$;
3) параболой $y = 2x - x^2$, прямой $y = 1$ и осью ординат;
4) параболой $y = x^2 + 2x + 1$ и прямой $y = x + 3$;
5) графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x$;
6) параболой $y = x^2 - 4x + 5$ и прямой $y = 5 - x$;
7) параболами $y = x^2 + 2x + 2$ и $y = 6 - x^2$;
8) графиками функций $y = \sqrt{x+4}$ и $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

110. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) графиками функций $y = \sqrt{3-x}$ и $y = \sqrt{5+x}$ и осью абсцисс;
2) графиком функции $y = \begin{cases} \frac{6}{\pi}x \text{ при } 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 3\sin x \text{ при } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$ и осью абсцисс;
3) графиками функций $y = 4 - x^2$, $y = -1{,}5x + 1{,}5$ и осью абсцисс.

111. Используя геометрический смысл интеграла, вычислить:

1) $\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4x - x^2}\, dx$; 3) $\int\limits_{-3}^{1} \sqrt{7 - 6x - x^2}\, dx$.

112. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 - 2x$, касательной, проведенной к данной параболе в точке с абсциссой $x_0 = -2$, и осью ординат.

113. Найти, при каком значении a площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = a + 3$, будет принимать наименьшее значение.

114. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = |x^2 - 4|$ и $y = 2 - x$.

Объем тела вращения

115. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямыми $x = 9$, $y = 0$;

2) косинусоидой $y = \cos x$ и прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $y = 0$;

3) графиком функции $y = 5 - x^2$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

116. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3$, $x \geq 0$, и $y = 4x$.

Применение интеграла в физике

117. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 30t - 6t^2$ (м/с). Вычислить путь, который прошло тело:

1) за интервал времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с;

2) от начала движения до остановки.

118. Груз массой $m = 3$ кг растягивает пружину, подвешенную вертикально, на длину $l = 0{,}04$ м. Вычислить работу, выполненную при этом.

Производная показательной функции и ее применение

119. Найти производную функции:

1) $y = e^{8x}$; 7) $y = 0{,}2^{\operatorname{ctg} x}$; 12) $y = 6^{x^2}(2 - x)$;

2) $y = e^{x^4}$; 8) $y = 5 \cdot 4^{0{,}6x^2 - 8}$; 13) $y = \dfrac{10^x}{x + 8}$;

3) $y = e^{x^2 - 3x}$; 9) $y = e^x(x^2 - 5x + 6)$; 14) $y = \dfrac{e^x + 9}{e^x - 7}$;

4) $y = e^{\cos x}$; 10) $y = e^x \sin x$; 15) $y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{3}}$;

5) $y = 8^{-x}$; 11) $y = 3^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}$; 16) $y = \cos 5^{9 - x^2}$.

6) $y = 9^{3x + 7}$;

120. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x) = e^{4x} + e^{-2x^2}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = 5^{2x^2 - 3x + 1}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = e^{2x}(x^2 - 3)$, $x_0 = 2$;

4) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\cos 3x}$, $x_0 = \pi$.

121. Решить неравенство $f(x) \le g(x)$, если:

1) $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x - 3)$, $g(x) = xe^{-x}$;

2) $f(x) = 4^{-5x}$, $g(x) = 5 \cdot 2^{1 - x}$.

122. Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = x^2 e^{2x}$ в точке $x_0 = 1$;

2) $f(x) = e^{x^2 - 3x - 4}$ в точке $x_0 = -1$;

3) $f(x) = 3^{2x + 3}$ в точке $x_0 = -1$.

123. Найти уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = e^x$, параллельной прямой $y = ex + 5$;

2) $f(x) = e^{4x + 1}$, параллельной прямой $y = 4x - 10$.

124. Найти уравнение горизонтальной касательной к графику функции $f(x) = (2^x - 5)(2^x - 3)$.

125. Найти промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции:

1) $f(x) = e^x - xe$; 2) $f(x) = e^{x^2 - 8x + 3}$;

3) $f(x) = e^{x^4}$;

4) $f(x) = (3x + 2)\, e^{3x}$;

5) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$;

6) $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 2}$;

7) $f(x) = 5^{3x} - 9 \cdot 5^{2x} + 15 \cdot 5^x$.

126. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $f(x) = xe^{-x}$;

2) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

3) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

4) $f(x) = e^{-x^2}$.

127. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

1) $f(x) = xe^{-2x}$, $[0; 1]$;

2) $f(x) = 5^{x^2 + 4x + 5}$, $[-4; -1]$;

3) $f(x) = 4^x + 4^{-x}$, $[-2; 1]$;

4) $f(x) = e^{4x + 5}\,(3x^2 + 2x)$, $[-2; -0{,}5]$;

5) $f(x) = 2^{3x + 1} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x$, $[0; 2]$.

128. При каких значениях a функция $f(x) = 3e^x + ax - 5$ не имеет критических точек?

129. При каких значениях a функция $f(x) = 2^{2x+1} - 2^a x \ln 2 + 8x \ln 2$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел?

130. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = e^{-x} + x - 1$ и доказать неравенство $e^{-x} < 1 - x$ при $x < 0$.

Производная логарифмической функции и ее применение

131. Найти производную функции:

1) $y = \log_6 x$;

2) $y = \ln 7x$;

3) $y = \ln\,(x^2 - 5x)$;

4) $y = \lg \cos x$;

5) $y = \ln^5 x$;

6) $y = x^4 \ln x$;

7) $y = (3x^2 - 4)\ln^3 x$;

8) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$;

9) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x^3}$;

10) $y = x \ln\,(x^2 - 1)$;

11) $y = \log_3 (e^x + 3^x)$; 13) $y = \log_{\frac{1}{2}} (3x^2 - 7x + 6)$;

12) $y = \sqrt{\ln x + 1}$; 14) $y = \frac{x \ln x}{1 - x^2}$.

132. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x) = \ln (5x - 4)$, $x_0 = 3$;

2) $f(x) = \frac{1}{4} \ln (-2x)$, $x_0 = -\frac{1}{8}$;

3) $f(x) = \log_5 (x^2 - 5x + 7)$, $x_0 = 2$;

4) $f(x) = \ln \sin \frac{x}{3}$, $x_0 = \pi$.

133. Решить неравенство $f(x) \le g(x)$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 9$, $g(x) = 5 \ln (x - 1)$.

134. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = x \ln (x^2 + 2x - 7)$ в точке $x_0 = 2$.

135. Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = \ln (3 - 2x)$ в точке $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \ln (x^2 - 4x + 5)$ в точке пересечения с осью абсцисс;

3) $f(x) = \log_2 (x + 5)$ в точке $x_0 = 3$.

136. В какой точке графика функции $f(x) = \ln (4 - 5x)$ касательная к нему наклонена к оси абсцисс под углом $\alpha = 135°$?

137. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x \ln x - 2x$; 6) $f(x) = 1{,}5 \ln^2 x - \frac{1}{3} \ln^3 x$;

2) $f(x) = x^3 \ln x$; 7) $f(x) = \lg^3 x - 12 \lg x - 7$;

3) $f(x) = \ln^2 x - \ln x$; 8) $f(x) = x^2 - 8x - 10\ln(-x) - 3$;

4) $f(x) = x^2 \log_2 x$; 9) $f(x) = x^2 - 4x - 1 - 2\ln(x - 2)$;

5) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$; 10) $f(x) = x\ln^2 x + x\ln x + x + 1$.

138. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $f(x) = x - \ln x$; 3) $f(x) = \log_2 (4x - x^2)$;

2) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$; 4) $f(x) = \ln \frac{x}{x - 1}$.

139. Исследовать на монотонность функцию $f(x) = 1 + \ln(1 + x) - e^x$ и доказать неравенство $1 + \ln(1 + x) < e^x$ при всех $x > -1$.

Первообразная показательной функции

140. Для данной функции f найти общий вид первообразной:

1) $f(x) = 7^x$;
2) $f(x) = 6^{3x} \ln 6$;
3) $f(x) = e^{0{,}25x}$;
4) $f(x) = e^{-x} + 2^{\frac{x}{2}}$;
5) $f(x) = 3^{7x} \ln 3 - e^{-2x}$;
6) $f(x) = 16e^{4x-3} - 12e^{5-6x}$.

141. Для данной функции f найти первообразную, график которой проходит через данную точку B:

1) $f(x) = 5^x \ln 5 + 2^x \ln 2$, $B(2; -3)$;
2) $f(x) = \sin x - 3e^x$, $B(0; 5)$;
3) $f(x) = 16x^3 - e^{\frac{x}{2}}$, $B(1; -2\sqrt{e})$.

142. Вычислить интеграл:

1) $\int_1^4 e^x\,dx$;
2) $\int_2^{\log_2 5} 2^x\,dx$;
3) $\int_0^2 (3 \cdot 4^x - 4e^x + 2)\,dx$;
4) $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-2x}\,dx$;
5) $\int_{-1}^0 2^{2x+3} \ln 0{,}5\,dx$;
6) $\int_{-2}^2 (7^{2x} + \cos 2\pi x)\,dx$.

143. Вычислить интеграл:

1) $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} + 2)^2\,dx$;
2) $\int_{\ln 0{,}125}^{\ln 8} \left(e^{-\frac{x}{3}} - e^{\frac{x}{3}}\right)^2 dx$;
3) $\int_0^2 \frac{12^x - 7 \cdot 2^x}{4^x}\,dx$;
4) $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x - x^3}{x^3 e^x}\,dx$.

144. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = 2^x$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

2) графиком функции $y = e^{2x-1}$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

3) графиком функции $y = e^x$ и прямыми $y = 1$, $x = 2$;

4) графиком функции $y = 0{,}2^x$ и прямыми $x = 0$, $y = 5$;

5) графиками функций $y = e^x + 1$, $y = 3 - e^x$ и прямой $x = 1$.

Производная и первообразная степенной функции

145. Найти производную функции:

1) $y = x^{\frac{1}{8}}$; 7) $y = \sqrt[10]{x^7}$; 13) $y = -\dfrac{20}{x^2\sqrt[4]{x}}$;

2) $y = x^{\frac{4}{9}}$; 8) $y = \dfrac{36}{\sqrt[12]{x}}$; 14) $y = (x - 4)\,x^{\sqrt{6}}$;

3) $y = x^{-\frac{1}{7}}$; 9) $y = \dfrac{10}{\sqrt[5]{x^4}}$; 15) $y = \sqrt[4]{x}\,(x^2 + 3)$;

4) $y = x^{-\frac{3}{11}}$; 10) $y = x\sqrt[3]{x^2}$; 16) $y = (5x + 3)^{\frac{1}{7}}$;

5) $y = x^{\sqrt{5}}$; 11) $y = x^3\sqrt[4]{x}$; 17) $y = \sqrt[4]{x^4 - 2x^2 + 12x}$;

6) $y = \sqrt[5]{x}$; 12) $y = \dfrac{9}{x\sqrt[3]{x}}$; 18) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 6x}}$.

146. Исследовать на монотонность функцию:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x - 2)$; 2) $f(x) = x^{\sqrt{2}}(3 - x)$.

147. Найти общий вид первообразной функции:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{8}}$; 6) $f(x) = \sqrt[5]{x}$;

2) $f(x) = x^{\frac{4}{9}}$; 7) $f(x) = \sqrt[10]{x^3}$;

3) $f(x) = x^{-\frac{1}{7}}$; 8) $f(x) = \dfrac{33}{\sqrt[12]{x}}$;

4) $f(x) = x^{-\frac{3}{11}}$; 9) $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt[5]{x^4}}$;

5) $f(x) = x^{\sqrt{5}}$; 10) $f(x) = x\sqrt[3]{x^2}$;

11) $f(x) = x^3 \sqrt[4]{x}$;

15) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt[3]{\dfrac{x}{2} - 5}}$;

12) $f(x) = \dfrac{1}{x \sqrt[3]{x}}$;

16) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[4]{(6x-1)^3}}$;

13) $f(x) = (5x+3)^{\frac{1}{7}}$;

17) $f(x) = 10x^4 - x^{\sqrt{7}} - \dfrac{1}{(x-5)^3}$;

14) $f(x) = \sqrt[4]{4x+7}$;

18) $f(x) = e^{3x} - (x+2)\, x^{\sqrt{2}}$.

148. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^1 x^{\sqrt{3}}dx$; 2) $\int\limits_0^1 \sqrt[8]{x^5}\, dx$; 3) $\int\limits_8^{27} x\sqrt[3]{x}\, dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{39} \sqrt[4]{(2x+3)^3}$.

149. Вычислить площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = x^{\frac{1}{4}}$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 16$;

2) графиком функции $y = x^e$ и прямыми $y = 0$, $x = e$;

3) графиком функции $y = x^{-5}$ и прямыми $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$;

4) графиками функций $y = x^{\sqrt{2}}$ и $y = x^{\sqrt{5}}$.

150. Доказать, что функция $F(x) = \ln x^6 - x^3$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{3(2 - x^3)}{x}$ на промежутке $(0; \infty)$.

151. Для данной функции f найти первообразную, график которой проходит через данную точку M:

1) $f(x) = 10x^9 - \dfrac{4}{x}$, $M\ (1;\ 2)$;

2) $f(x) = \dfrac{12}{3x+2}$, $M\ (2;\ \ln 8)$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{4x-1} - e^{-2x}$, $M\ (0;\ 1)$;

4) $f(x) = \dfrac{5}{x+3} - \dfrac{7}{2\sqrt{x+18}}$, $M\ (-2;\ -30)$.

152. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_5^{625} \dfrac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_e^{e^9} \dfrac{4}{x}\, dx$; 3) $\int\limits_{10}^{30} \dfrac{dx}{x \ln 3}$; 4) $\int\limits_{-2}^{-1} \left(x^2 + \dfrac{6}{x}\right) dx$;

5) $\int\limits_0^9 \frac{dx}{6x+2}$; 6) $\int\limits_{-10}^0 \frac{dx}{2x-5}$; 7) $\int\limits_7^{49} \frac{dx}{\frac{x}{7}+1}$; 8) $\int\limits_{-5}^{10} \left(6x - \frac{5}{0{,}2x+4}\right) dx$.

153. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{0,5}^{2} \left(\frac{x+2}{x}\right)^2 dx$; 2) $\int\limits_{-9}^{-1} \frac{2x^2 + \sqrt{-x} - 3}{x} dx$.

154. Доказать, что площади криволинейных трапеций, заштрихованных на рис. 6, равны.

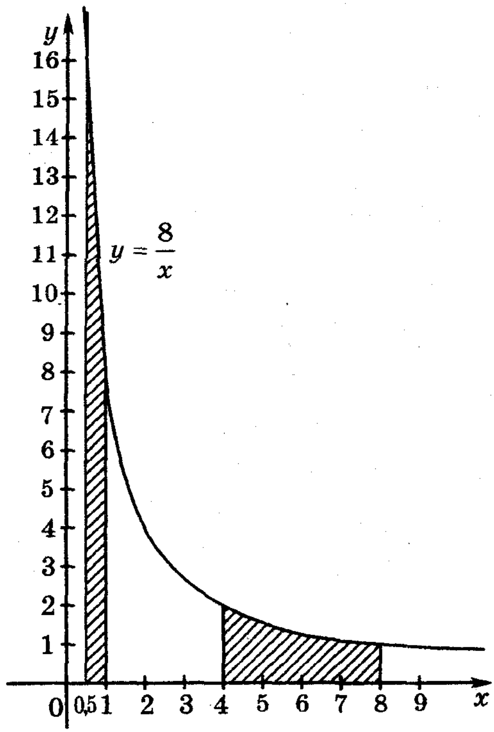


Рис. 6

155. Вычислить площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = \frac{1}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 3$, $x = 6$;

2) графиками уравнений $xy = 7$, $x^2 - 8x + 7 = 0$ и $y = 0$;

3) графиком функции $y = \frac{12}{x}$ и прямыми $x = 2$, $y = 4$;

4) графиком функции $y = \frac{6}{x}$ и прямыми $y = 3$, $x = 4$;

5) графиком функции $y = \frac{5}{x}$ и прямой $x + y = 6$;

6) графиком функции $y = \frac{4}{x}$ и прямыми $y = 3x + 1$, $x = 2$;

7) графиками функций $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ и прямой $x = 3$;

8) графиками функций $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{x}$ и прямой $x = 8$;

9) графиком функции $y = \frac{2}{x+1}$ и прямыми $x = 3$, $x = -0{,}5$.

156. При каком положительном значении a прямая $x = 6$ делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 3$, $x = a + 6$, пополам?

157. При каком значении a прямая $x = a$ делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{8}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 2$, $x = 10$, пополам?

Дифференциальные уравнения

158. Является ли данная функция решением данного дифференциального уравнения:

1) $y = 3e^{-4x}$, $y \ = -4y$;

2) $y = e^{-x^2}$, $y \ + 2xy = 0$;

3) $y = 2\cos 5x + 7\sin 5x$, $y \ \ = -25y$;

4) $y = e^x \cos x$, $y \ \ - 2y \ - 2y = 0$?

159. При каком значении b функция $y = e^{-2x} + 1$ является решением уравнения $y \ + by = 2$?

160. Найти общее решение дифференциального уравнения и его частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям:

1) $y \ = 7y$, $y(0) = 2$;

2) $y \ = -2y$, $y(2) = e$;

3) $y \ \ = -3y$, $y(0) = 2$, $y \ (0) = 6$;

4) $y \ \ = -4y$, $y(0) = 0$, $y \ (0) = 1$.

Перестановки

161. Сократить дробь:

1) $\frac{(n-1)!}{n!}$; 2) $\frac{n!}{(n-3)!}$; 3) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$; 4) $\frac{(n+1)!}{(n-k+1)!}$, $n > k$.

162. Упростить выражение:

1) $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$; 2) $\frac{(n-2)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$.

163. Решить уравнение: $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$.

164. Вычислить:

1) $\frac{P_6 + P_5}{P_4}$; 2) $\frac{P_{12} - P_{11}}{11P_{10}}$; 3) $\frac{P_{3k+2}}{P_{3k+1}}$.

165. Сколькими способами можно расставить 6 книжек на книжной полке?

166. На танцевальной площадке собрались n юношей и n девушек. Сколькими способами они могут образовать пары для участия в очередном танце?

167. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждую из них использовать только один раз?

168. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова:

1) «школа»;
2) «алгебра»;
3) «математика»?

Сочетания

169. Вычислить:

1) C_7^3; 2) C_9^4; 3) $C_4^2 + C_4^0$; 4) C_{21}^1; 5) $C_{2000}^{2000} + C_{2000}^1$.

170. Доказать, что:

1) $C_7^2 + C_7^3 = C_8^3$; 2) $C_8^4 + C_8^3 = C_9^4$.

171. Упростить выражение:

1) $\frac{6}{n+2} C_{n+2}^n$; 2) $\frac{1}{2n-1} C_{2n+1}^{2n-2}$.

172. Вычислить:

1) C_{21}^{20}; 2) C_{18}^{16}; 3) C_{100}^{99}.

173. Доказать, что:

1) $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7$;

2) $C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = C_5^1 + C_5^3 + C_5^5$.

174. Решить уравнение:

1) $C_x^{15} = C_x^6$; 2) $C_{30}^7 + C_{30}^6 = C_{31}^x$; 3) $C_{19}^8 + C_{19}^x = C_{20}^8$.

175. Решить уравнение:

1) $C_x^2 = 120$; 3) $C_x^{x-2} = 66$; 5) $13C_{2x}^{x+1} = 7C_{2x+1}^{x-1}$;

2) $C_{x+2}^3 = 7(x+2)$; 4) $\dfrac{C_{x+1}^3}{C_x^4} = \dfrac{6}{5}$; 6) $17C_{2x-1}^x = 9C_{2x}^{x-1}$.

176. На бригаду рабочих из 8 человек выделили всего три путевки в санаторий. Сколькими способами можно сформировать группы обиженных рабочих?

177. На плоскости расположены 20 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует прямых, проходящих через эти точки?

178. Сколько можно составить из простых делителей числа 14 630 составных чисел, имеющих только два простых делителя?

179. Сколькими способами группу туристов из 10 человек можно разместить в четырехместной и шестиместной палатках?

180. В отряде 7 офицеров и 20 рядовых. Сколькими способами можно сформировать отряд разведчиков, в который входят 3 офицера и 12 рядовых?

181. В футбольной команде 11 основных игроков и 8 запасных. Сколькими способами можно сделать замену сразу двух игроков?

182. На одной параллельной прямой отмечены 7 точек, на другой — 12. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

183. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

184. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 8 карт так, чтобы среди них было ровно два туза?

Размещения

185. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{A_{13}^3}{A_{14}^4 - A_{13}^4}$; 2) $\dfrac{A_{15}^{12}}{A_{16}^3 \cdot P_{12}}$.

186. Доказать, что $A_n^n = n!$.

187. Решить уравнение:

1) $A_x^2 = 42$;

2) $A_x^2 = 182$;

3) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$;

4) $3C_{x+1}^2 + 2x = 4A_x^2$;

5) $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$.

188. Сколькими способами в команде спортсменов из 10 человек можно распределить три призовых места?

189. В лицее «Лидер» в 11 классе изучают 16 предметов. Дневное расписание содержит 7 уроков. Сколькими способами можно составить дневное расписание?

190. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых четные, различные и не содержат нуль?

191. Сколько существует обыкновенных дробей, числитель и знаменатель которых — различные простые числа не больше 30?

192. Сколько существует правильных дробей, числитель и знаменатель которых простые числа не больше 30?

193. Сколько существует четырехзначных чисел, все цифры которых различные и четные?

Бином Ньютона

194. Найти разложение степени бинома:

1) $(x + y)^4$;

2) $(u + v)^5$;

3) $(a - b)^6$;

4) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4$;

5) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^5$;

6) $(2x + 1)^5$;

7) $(m - 3n)^4$;

8) $(b^2 + 1)^5$;

9) $\left(2 + \frac{1}{y}\right)^4$;

10) $(1 + a^{-2})^4$.

195. Сумма всех биномиальных коэффициентов в разложении бинома $(x + y)^n$ равна 512. Найти n.

196. Сумма всех биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах в разложении бинома $(a + b)^n$, равна 256. Найти n.

197. Чему равна сумма биномиальных коэффициентов разложения бинома $(x + a)^{10}$, стоящих на четных местах?

198. Доказать, что сумма всех коэффициентов разложения бинома $(3x - 2y)^n$ при любом натуральном n равна 1.

199. Доказать, что сумма всех коэффициентов разложения бинома $(3x - 4y)^n$ при любом нечетном n равна -1.

200. Доказать тождество:

$$C_n^0 \cdot 2^n - C_n^1 \cdot 2^{n-1} + C_n^2 \cdot 2^{n-2} - \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} \cdot 2^1 \cdot (-1)^{n-1} + C_n^n \cdot 2^0 \cdot (-1)^n = 1.$$

201. Какой член в разложении бинома $(a + b)^{15}$ содержит b в степени 7?

202. Найти пятый член в разложении бинома $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{12}$.

203. Найти шестой член в разложении бинома $(\sqrt[3]{a} - a)^{15}$.

204. Найти средний член в разложении бинома $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$.

205. В разложении бинома $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ найти номер члена, не содержащего x.

206. Найти член разложения бинома $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, не содержащий a.

207. Найти член разложения бинома $(\sqrt[3]{x^{-2}} + x)^7$, содержащий x во второй степени.

Классическое определение вероятности

208. Какова вероятность того, что при одном броске игрального кубика выпадет число очков, равное:

1) единице;
2) четырем;
3) нечетному числу;
4) числу, кратному 5?

209. Представь себе, что в классе, в котором ты учишься, разыгрывается одна бесплатная туристическая поездка в Лондон. Какова вероятность того, что в Лондон поедешь именно ты?

210. Чтобы сдать экзамен по математике, надо выучить 25 билетов. Ученик не выучил только один билет. Какова вероятность того, что он не сдаст экзамен?

211. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта:

1) король;
2) бубновый король?

212. В классе учится 12 девочек и 17 мальчиков. Один ученик опоздал в школу. Какова вероятность того, что это был мальчик?

213. Бросают две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что выпадут:

1) две цифры; 2) разные стороны монет?

214. Какова вероятность того, что ваш будущий ребенок родится:

1) 5 числа; 2) 30 числа; 3) 28 числа?

215. В ящике находятся 50 шариков, из которых 20 белых. Потеряли один белый и два не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад один шарик будет белым?

216. Какова вероятность того, что наугад выбранное двузначное число делится на 15?

Применение формул комбинаторики для вычисления вероятности событий

217. В ящике лежат 10 шариков, три из которых красные. Какова вероятность того, что выбранные наугад три шарика будут красными?

218. Четыре карточки пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4. Какова вероятность того, что номера выбранных наугад трех карточек образуют убывающую арифметическую прогрессию?

219. На карточках написаны натуральные числа от 1 до 7. Наугад выбираются две из них. Какова вероятность того, что сумма номеров выбранных карточек равна 5?

220. Наугад выбирают четыре буквы слова «сладости». Какова вероятность того, что из выбранных четырех букв можно сложить слово «сало»?

221. Выбирают наугад четыре буквы слова «закон». Какова вероятность того, что выбранные четыре буквы в последовательности выбора образуют слово «коза»?

222. В партии из 40 лампочек 7 бракованных. Какова вероятность того, что взятые наугад 4 лампочки будут без дефекта?

223. Из колоды в 36 карт наугад выбирают три карты. Какова вероятность того, что выбранные карты — три туза?

224. На экзамен по математике выносят 50 вопросов. Ученик подготовил только 40. Билет состоит из трех вопросов. Какова вероятность того, что ученик получит отличную оценку?

225. На экзамен по математике выносят 40 вопросов. Ученик подготовил только 35. Билет состоит из пяти вопросов. Чтобы получить отличную оценку, достаточно ответить на четыре вопроса. Какова вероятность того, что ученик получит отличную оценку?

226. В ящике лежат 7 красных и 4 черных шарика. Какова вероятность того, что из четырех выбранных наугад шариков два будут красными?

227. Найти вероятность того, что дни рождения 7 человек выпадают на различные дни недели.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

228. В корзине лежат фрукты, среди которых 30% бананов и 60% яблок. Какова вероятность того, что выбранный наугад фрукт будет бананом или яблоком?

229. Завод выпускает 16% продукции высшего сорта, 24% — первого сорта, 48% — второго сорта, а все остальное — брак. Найти вероятность того, что наугад выбранное изделие не будет бракованным.

230. Известный журнал мод нанимает на работу фотомоделей. Вероятность быть зачисленной по форме составляет 0,6, а по размерам — 0,3. Какова вероятность положительного тестирования?

231. Магазин снабжается тремя молокозаводами. Вероятность доставки некачественной продукции с первого завода равна 0,04, со второго — 0,02, с третьего — 0,03. Покупатель купил сыр, не обращая внимание на то, где он был изготовлен. Какова вероятность того, что сыр будет хорошего качества?

232. На соревнованиях по стрельбе стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,03, в девятку — 0,2, в восьмерку — 0,3. Какова вероятность того, что одним выстрелом стрелок наберет: 1) больше восьми очков; 2) меньше восьми очков; 3) не меньше восьми очков?

233. В коробке лежат 4 голубых, 3 красных, 9 зеленых, 6 желтых шариков. Из коробки наугад взяли один шарик. Какова вероятность того, что этот шарик будет не зеленым?

234. 25 выпускников désinституте направили работать в три села. В Хацепетовку попало 7 молодых специалистов, в Хачапуровку — 12, в Красные Опупейцы — остальные. Какова вероятность того, что три друга будут сеять разумное, доброе, вечное в одном селе?

Теорема умножения вероятностей независимых событий

235. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две шестерки?

236. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две нечетные цифры?

237. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут две цифры и герб?

238. Игральный кубик бросают три раза. Какова вероятность того, что шестерка выпадет только во второй раз?

239. На насосной станции параллельно работают три насоса. Вероятность поломки первого насоса равна 10%, второго — 8%, третьего — 5%. Какова вероятность того, что будет совсем прекращена подача воды?

240. В ящике лежат 5 красных и 4 черных шарика. Наугад из ящика достают два шарика и кладут их обратно. Эту же операцию повторяют еще раз. Какова вероятность того, что все взятые шарики были красного цвета?

241. Магазин снабжается тремя молокозаводами. Продукция первого завода составляет 60%, второго — 20%, причем 90% продукции первого завода высшего сорта. Какова вероятность покупки продукта первого завода высшего сорта?

242. Три контролера последовательно друг за другом проверяют качество продукции, выпускаемой заводом. Первый контролер выявляет брак с вероятностью 95%, второй — 96%, третий — 98%. Какова вероятность того, что бракованное изделие не будет выявлено?

243. Три станка изготовляют соответственно 50%, 40%, 10% всех изделий. В их работе брак соответственно составляете 1%, 2%, 4%. Какова вероятность того, что взятое наугад изделие будет бракованным?

244. Три стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в цель. Вероятность попадания первого стрелка составляет 0,6, второго — 0,8, третьего — 0,7. Какова вероятность того, что было: 1) три промаха; 2) хотя бы одно попадание; 3) ровно два попадания?

245. В одном ящике лежат 6 красных, 5 синих, 9 зеленых шариков, а в другом — 7 красных, 1 синий, 5 зеленых шариков. Наугад из каждого ящика берут по одному шарику. Какова вероятность того, что они будут одного цвета?

246. Монету подбрасывают десять раз. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет цифра.

247. Два ученика независимо друг от друга решают одну задачу. Первый ученик может решить эту задачу с вероятностью 0,8, а второй — 0,9. Найти вероятность того, что: 1) оба ученика решат задачу; 2) ни один из учеников не решит задачу; 3) хотя бы один из учеников решит задачу; 4) только один из учеников решит задачу.

248. Пять стрелков одновременно независимо друг от друга стреляют в одну цель. Вероятность попадания каждого стрелка равна 0,7. Поражение цели происходит за одно попадание. Найти вероятность поражения цели.

Схема Бернулли

249. Монету подбрасывают 7 раз. Какова вероятность того, что цифра выпадет: 1) два раза; 2) ни одного раза; 3) меньше двух раз; 4) не менее двух раз?

250. Станок с программным управлением изготовляет бракованную деталь с вероятностью $\frac{1}{20}$. Какова вероятность того, что в партии из 15 деталей не будет бракованных?

251. По мишени стреляют десять раз. Вероятность попадания в мишень во время каждого выстрела равна $\frac{5}{7}$. Какова вероятность того, что в десяти выстрелах будет сделано три промаха?

252. В ящике лежат 5 белых и 6 черных шариков. Из ящика шесть раз наугад берут по одному шарику и кладут обратно перед следующим испытанием. Найти вероятность того, что из шести взятых шариков белый шарик вынимали: 1) ни одного раза; 2) менее трех раз; 3) не менее двух раз.

253. Игральный кубик подбрасывают восемь раз. Какова вероятность того, что единица выпадет: 1) три раза; 2) более трех, но менее пяти раз?

254. Игральный кубик подбрасывают девять раз. Какова вероятность того, что нечетная цифра выпадет: 1) четыре раза; 2) не более двух раз; 3) более шести раз?

255. Что более вероятно: выиграть у равноценного игрока две партии из трех или четыре партии из семи?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 1

Тематическое оценивание № 1

Тема. *Производная. Геометрический смысл производной*

1°. Найти производную функции:

1) $f(x) = 2x^5 - \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 4$;

2) $f(x) = (3x - 5)\sqrt{x}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 + 9x}{x - 4}$;

4) $f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^6}$.

2•. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^4 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

3•. Найти производную данной функции и вычислить ее значение в данной точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt{3x + 1}$, $x_0 = 5$;

2) $f(x) = \sin^5 x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

4••. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 3x - 8$, параллельной прямой $y = 9x - 1$.

Тематическое оценивание № 2

Тема. *Применение производной*

1°. Тело движется по закону $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2{,}5t^2 + 24t - 7$, где $s(t)$ измеряется в метрах, t — в секундах. Найти скорость тела через 3 с после начала движения.

2°. Найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 3x^4$;

2) $f(x) = x^2 - 6x + 10$.

3•. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 36$.

4•. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{x^2 + 7x}{x - 9}$ на промежутке $[-4; 1]$.

5•. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$ и построить ее график.

6••. Число 24 представить в виде суммы трех положительных слагаемых так, что первое относится ко второму как 1 : 2, а сумма кубов первого и второго и квадрата третьего принимает наименьшее значение.

Тематическое оценивание № 3

Тема. *Интеграл и его применение*

1°. Найти для функции $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$ первообразную, график которой проходит через точку A (1; –2).

2°. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$;

3°. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 0$, $x = 2$.

4•. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(3 \cos 3x + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}\right) dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{4} \left(\frac{3}{2\sqrt{3x + 4}} - x\right) dx$.

5•. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 2 - x$.

6••. Используя геометрический смысл интеграла, вычислить $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

Тематическое оценивание № 4

Тема. *Элементы комбинаторики. Начала теории вероятностей*

1°. Вычислить: 1) $\frac{P_2 + P_3}{P_4}$; 2) C_8^6; 3) A_5^3.

2°. В классе учится 18 мальчиков. Сколькими способами можно сформировать команду из 11 человек для участия в футбольном турнире?

3•. В ящике лежат 9 шариков, два из которых белые. Какова вероятность того, что выбранные наугад два шарика будут белыми?

4•. Найти пятый член в разложении бинома $(\sqrt[3]{x} + x^2)^{11}$.

5•. На карточках написаны натуральные числа от 1 до 10. Наугад выбирают две из них. Какова вероятность того, что произведение номеров выбранных карточек будет делиться на три?

6••. Игральный кубик подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что шестерка выпадет три раза?

Тематическое оценивание № 5

Тема. *Обобщение и систематизация знаний учащихся*

1°. Найти производную функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 6}{x + 3}$ и вычислить ее значение в точке $x_0 = -2$.

2°. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^1 (5x^4 - 6x^2 + 4)\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{dx}{\sin^2 x}$.

3•. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = 6\sqrt{x} - 5x$ в точке с абсциссой $x_0 = 9$.

4•. Найти первообразную функции $f(x) = 4\sin 4x + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, график которой проходит через точку $A\left(\frac{\pi}{3}; -1\right)$.

5•. Исследовать функцию $f(x) = 2x^2 - x^4 - 1$ и построить ее график.

6••. При каких значениях b и c парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 4x + 1$ в точке $A\,(1;\,5)$?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 2

Тематическое оценивание № 1

Тема. *Производная. Геометрический смысл производной*

1°. Найти производную функции:

1) $f(x) = 3x^6 + \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x$; 3) $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 2}$;

2) $f(x) = (2 - 5x)\sqrt{x}$; 4) $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^4}$.

2•. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 - x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

3•. Найти производную данной функции и вычислить ее значение в данной точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt{6x + 7}$, $x_0 = 3$; 2) $f(x) = \cos^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4••. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x - 10$, параллельной прямой $y = -6x + 7$.

Тематическое оценивание № 2

Тема. *Применение производной*

1°. Тело движется по закону $s(t) = 8 + 15t + t^2 - \frac{1}{3}t^3$, где $s(t)$ измеряется в метрах, t — в секундах. Найти скорость тела через 4 с после начала движения.

2°. Найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 5x^4$; 2) $f(x) = x^2 - 4x - 3$.

3•. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции $f(x) = 12 + 72x + 3x^2 - x^3$.

4•. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 1}$ на промежутке $[-5; -2]$.

5•. Исследовать функцию $f(x) = 2x^2 - x^4$ и построить ее график.

6••. Число 14 представить в виде суммы трех положительных слагаемых так, что первое относится ко второму как 1:3, а сумма куба первого и квадратов второго и третьего принимает наименьшее значение.

Тематическое оценивание № 3

Тема. *Интеграл и его применение*

1°. Найти для функции $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 7$ первообразную, график которой проходит через точку A (1; –4).

2°. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) dx$;

3°. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^4$ и прямыми $y = 0$, $x = 2$.

4•. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \sin 2x - \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3}\right) dx$; 2) $\int\limits_0^6 \left(x + \frac{5}{\sqrt{0{,}5x + 1}}\right) dx$.

5•. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x + 3$.

6••. Используя геометрический смысл интеграла, вычислить $\int\limits_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$.

Тематическое оценивание № 4

Тема. *Элементы комбинаторики. Начала теории вероятностей*

1°. Вычислить: 1) $\frac{P_3 + P_5}{P_4}$; 2) C_7^5; 3) A_6^4.

2°. В классе учится 12 девочек. Сколькими способами можно сформировать из них команду из 5 человек для участия в соревнованиях по легкой атлетике?

3•. В ящике лежат 8 шариков, три из которых зеленые. Какова вероятность того, что выбранные наугад три шарика будут зелеными?

4•. Найти шестой член в разложении бинома $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$.

5•. На карточках написаны четные числа от 2 до 16. Наугад выбирают две из них. Какова вероятность того, что произведение номеров выбранных карточек является степенью двойки?

6••. Из колоды в 36 карт 12 раз вытягивают по одной карте и кладут карту назад в колоду перед следующим испытанием. Какова вероятность того, что среди 12 вытянутых карт будут три туза?

Тематическое оценивание № 5

Тема. *Обобщение и систематизация знаний учащихся*

1°. Найти производную функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$ и вычислить ее значение в точке $x_0 = 4$.

2°. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_1^2 (9x^2 - 8x^3 + 2)\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

3•. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

4•. Найти первообразную функции $f(x) = 10\cos 10x - \frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$, график которой проходит через точку $B\left(\frac{5\pi}{2}; -3\right)$.

5•. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ и построить ее график.

6••. При каких значениях b и c парабола $y = 3x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 7x - 2$ в точке B (1; 5)?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ТРЕНИРОВОЧНЫМ УПРАЖНЕНИЯМ

Вариант 1

4. 1) Если $a > 0$, то корней нет, если $a = 0$, то $x = 0$, если $a < 0$, то $x = -a$ или $x = a$; 2) если $a < 0$ или $a > 0$, то корней нет, если $a = 0$, то $x = 0$. **5.** 1) Если $a \geq 0$, то нет решений, если $a < 0$, то x — любое действительное число, кроме 0; 2) если $a \geq 0$, то $x \in R$, если $a < 0$, то $x = 0$. **6.** 4) рис. 7; 6) рис. 8; 10) рис. 9; 11) рис. 10; 12) рис. 11; 1) рис. 12; 17) рис. 13. **7.** 6) рис. 14; 7) рис. 15. **8.** 5) -2; 2; 6) $\sqrt{23} - 4$; 7) 6; 9) 2,5; 1,5; 10) 7; -7; 11) $4 \pm\sqrt{22}$; $4 \pm\sqrt{2}$; 12) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$; 13) $-\sqrt{3}$; 1; 15) $[-1; 3]$; 16) нет корней; 18) 2; 2,5; $\frac{9+\sqrt{17}}{4}$. **9.** 9) $[1; \infty)$; 11) $[-1; 1]$; 12) $x \in R$; 14) $(-\infty; -19) \cup (0{,}6; \infty)$; 15) $(-3; 4)$; 16) $(-\infty; -6) \cup (-3; -2) \cup (1; \infty)$; 17) $[-4; 2] \cup [3+\sqrt{17}; \infty)$; 18) $(-6; 6)$; 19) $(-\infty; 1) \cup (3; \infty)$; 20) -1; 21) $(-\infty; 0{,}6) \cup (5; \infty)$; 22) $(4; 6) \cup (6; 8)$. **10.** 1) Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$ или $a > 6{,}25$, то два корня; если $0 < a < 6{,}25$, то 4 корня; если $a = 6{,}25$, то 3 корня; 2) если $a < 5$, то нет корней; если $a = 5$, то бесконечное множество корней; если $a > 5$, то два корня; 3) если $a < 0$, то нет корней; если $a = 0$, то 3 корня; если $0 < a < 1$, то 6 корней; если $a = 1$, то 4 корня; если $a > 1$, то 2 корня; 4) если $a < -3$, то нет корней; если $a = -3$ или $a = 3$, то бесконечное

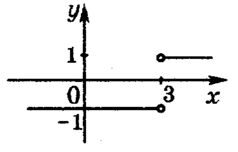


Рис. 7

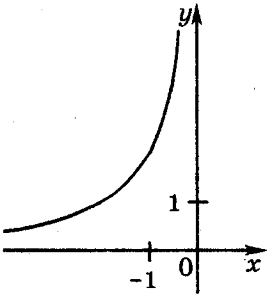


Рис. 9

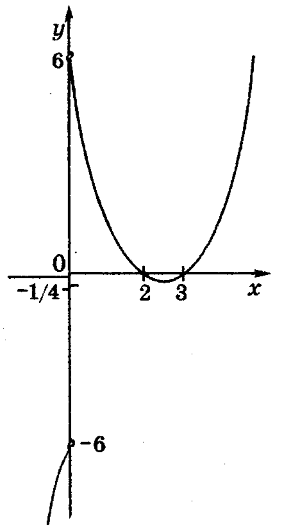


Рис. 8

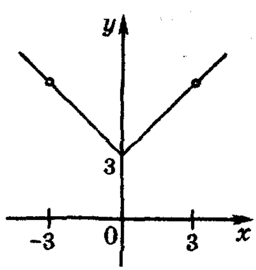


Рис. 10

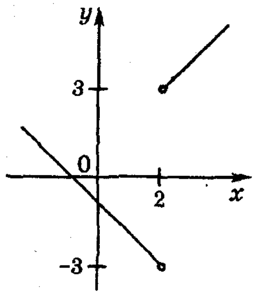


Рис. 11

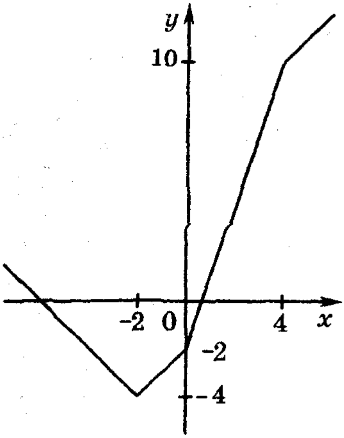


Рис. 12

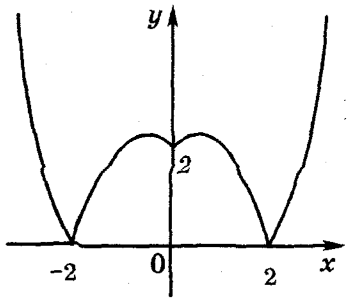


Рис. 13

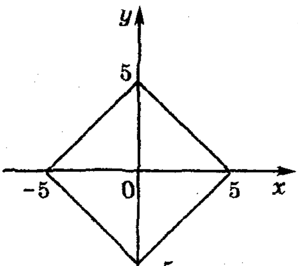


Рис. 14

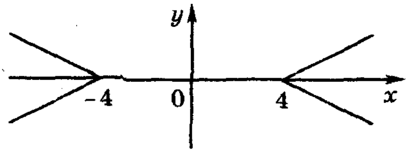


Рис. 15

множество корней; если $-3 < a < 3$ или $a > 3$, то один корень; 5) если $a < -6$ или $a > 6$, то нет корней; если $a = -6$ или $a = 6$, то бесконечное множество корней; если $-6 < a < 6$, то один корень; 6) если $a < 5$ или $a = 9$, то два корня; если $a = 5$, то три корня; если $5 < a < 9$, то 4 корня; если $a > 9$, то нет корней. **11.** 1) $n_0 = 3$;

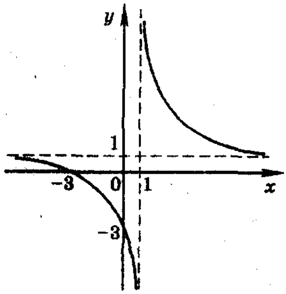


Рис. 16

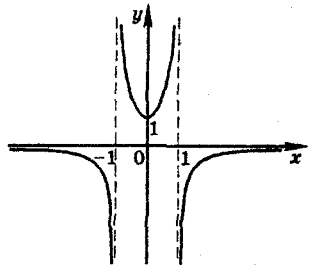


Рис. 17

2) $n_0 = 11$; 3) $n_0 = 101$. **16.** 2) 4; 3) 4; 4) $-\frac{1}{6}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) 0. **17.** 2) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} (x^2 - 4) = 12 = f(4)$. **18.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1 \neq f(1) = -1$. **38.** $x = 0$ или $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **39.** $-\frac{5\pi}{2} + 6\pi k < x < \frac{5\pi}{2} + 6\pi k$, $k \in Z$. **47.** 1) $(-\infty; -4) \cup (3; \infty)$; 2) $(-\infty; -4] \cup [3; \infty)$; 3) $(-4; 2) \cup (2; 3)$; 4) $[-4; 2) \cup (2; 3]$; 5) $(-\infty; -5) \cup (2; \infty)$; 6) $(-\infty; -5) \cup (2; \infty) \cup \{-3\}$; 7) $(-5; -3) \cup (-3; 2)$; 8) $[-5; 2]$; 9) $(-\infty; -3] \cup [2; 4) \cup (4; \infty)$; 10) $(-\infty; -7) \cup (9; \infty) \cup \{-5\}$. **51.** 1) Если $a < 4$, то $a < x < 4$; если $a > 4$, то $4 < x < a$; если $a = 4$, то решений нет; 2) если $a \le 4$, то $x > 4$; если $a > 4$, то $4 < x < a$ или $x > a$; 3) если $a < 4$, то $x \ge 4$ или $x = a$; если $a \ge 4$, то $x \ge 4$; 4) если $a \le -2$, то $x < a$; если $a > -2$, то $x < -2$ или $-2 < x < a$; 5) если $a < -2$, то $x \le a$ или $x = -2$; если $a \ge -2$, то $x \le a$; 6) если $a < 7$, то $a < x \le 7$; если $a > 7$, то $7 \le x < a$; если $a = 7$, то решений нет; 7) если $a < 5$, то $a \le x < 5$ или $x > 5$; если $a > 5$, то $x \ge a$; если $a = 5$, то $x > 5$; 8) если $a < 5$, то $x < a$ или $a < x \le 5$; если $a > 5$, то $x \le 5$; если $a = 5$, то $x < 5$. **64.** $y = 2\sqrt{2}x + 1$, $y = -2\sqrt{2}x + 1$. *Указание.* Искомое уравнение имеет вид $y - (2x_0^2 + 2) = 4x_0(x - x_0)$, где x_0 — точка касания. Воспользуйтесь тем, что указанная прямая проходит через точку M (0; 1). **65.** $b = 1$, $c = 0$. *Указание.* Значения b и c можно найти, решив систему $\begin{cases} f(1) = 3, \\ f(1) = 2, \end{cases}$ где $f(x) = x^2 + bx + c$. **72.** 1) $a = 0$; 2) $|a| \le 4$; 3) $a = \frac{1}{2}$; 4) $1 \le a \le 25$. **74.** $a \le 4$. *Указание.* При $a = 4$ корень уравнения $f(x) = 0$ не является критической точкой. **77.** 1) $a < -1$ или $a > -\frac{1}{3}$; 2) $a \le -1$ или $a \ge -\frac{1}{3}$. *Указание.* Рассмотрите случай $a = 0$. Кроме того нужно заметить, что при $a = -1$ и $a = -\frac{1}{3}$ корни уравнения $f(x) = 0$ не являются точками экстремума. **78.** 4) рис. 16; 5) рис. 17; 6) рис. 18. **79.** 2) рис. 19; 3) рис. 20. **82.** $\max\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(1) = 5$, $\min\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(4) = -52$.

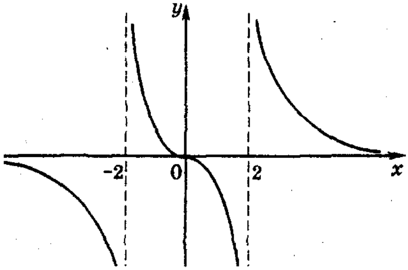


Рис. 18

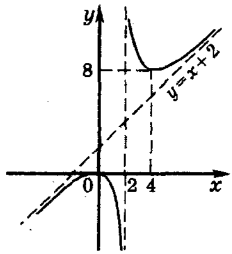


Рис. 19

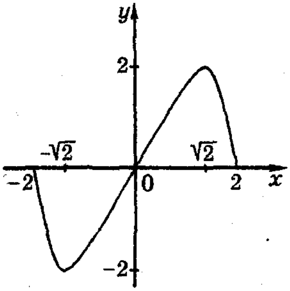


Рис. 20

84. 1. *Указание*. Рассмотрите функцию $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ при $x \in (0; \infty)$.

86. $S = r^2\text{ctg}^2\,\frac{\alpha}{2}\,\text{tg}\alpha$, $S_{\min} = S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}\,r^2$.

89. 1) Да; 2) нет. **90.** 4) $F(x) = -\frac{1}{3x^3} - 1$; 5) $F(x) = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + 3$; 6) $F(x) = 2{,}5\sqrt[5]{x^2} - 1{,}5$. **91.** 7) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x^8 + C$; 8) $F(x) = 0{,}6x\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x^2} + C$.

94. 2) $F(x) = -\frac{1}{2}\text{ctg}\left(4x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3}$; 3) $F(x) = \frac{2}{9}\sqrt{9x-2} - \frac{1}{9}$. **95.** $F(x) = x^2 - x - 6$. **96.** $F(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$. **97.** $F(x) = -2x^2 + 3x + \frac{15}{8}$. **98.** $F(x) = 3{,}5x^2 - 4x + 17$. Указание. Угловой коэффициент касательной к графику искомой первообразной в произвольной точке x равен $7x - 4$. **100.** 1) $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$; 2) $F(x) = -4\text{ctg}\,\frac{x}{4} - x + C$; 3) $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + C$; 4) $F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 + C$; 5) $F(x) = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{2}\cos x + C$. **101.** $F(x) = 3x - x^2 + 3$; (0; 3); (5; −7). **102.** $f(x) = 2x - x^3 + 5$. **103.** 8) 1; 9) 4; 15) $12\,\frac{2}{3}$; 16) $48\,\frac{3}{4}$; 18) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; 19) $1\,\frac{7}{8}$; 22) 112; 23) 6; 24) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **104.** 3) $\frac{4\pi - 7\sqrt{3}}{64}$. *Указание*. Применить последовательно формулы понижения степени, квадрата разности, понижения степени. 4) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$. *Указание*. Применить формулу преобразования произведения косинусов в сумму. 6) $139\,\frac{23}{35}$; 7) $\frac{13}{16}$; 8) $-423\,\frac{1}{3}$.

105. $22\frac{5}{6}$. *Указание.* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. **106.** 1) $a < 3$; 2) $a < -4$ или $a > 4$. **109.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) 4,5; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) 4,5; 5) 4,5; 6) $1\frac{1}{3}$; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $1\frac{1}{3}$. **110.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) 4; 3) $2\frac{1}{3}$. **111.** 1) 2π; 2) $\frac{9\pi}{4}$; 3) $\frac{25\pi}{4}$. **112.** 9. **113.** $a = 1$. **114.** $2\frac{1}{6}$. *Указание.* Искомая площадь равна сумме площадей трех заштрихованных фигур, изображенных на рис. 21. **116.** $\frac{2\pi}{9}$. **117.** 2) 108 м. **119.** 16) $y = \cos 2^{x^2+5} \cdot 2^{x^2+5} \ln 2 \cdot 2x$. **120.** 3) $\frac{4}{e^3}$; 4) $4e^x$. **121.** 1) $[-1; 4]$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. **122.** 2) $y = -3e^2x + 4e^2$; 3) $y = 75x \ln 5 + 25 - 150 \ln 5$. **123.** 1) $y = e^2x - \frac{1}{2}e^2$; 2) $y = 3x - 1$. **124.** $y = -1089$. **125.** 2) Возрастает на $(-\infty; 3]$; убывает на $[3; \infty)$; $f_{max} = f(3) = e^{14}$; 3) возрастает на R, экстремумов нет; 4) возрастает на $\left[\frac{1}{4}; \infty\right)$; убывает на $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$, $f_{min} = f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}e$; 5) возрастает на $(-\infty; 3]$; убывает на $[3; \infty)$; $f_{max} = f(3) = \frac{3}{e}$; 6) возрастает на $[2; \infty)$;

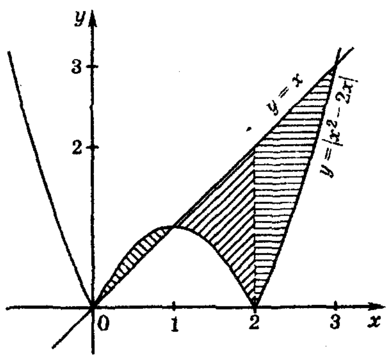


Рис. 21

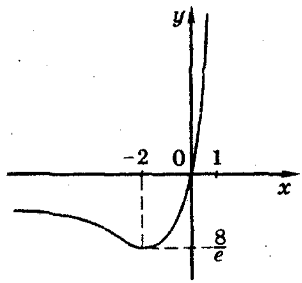


Рис. 22

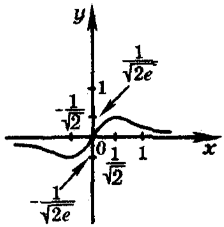


Рис. 23

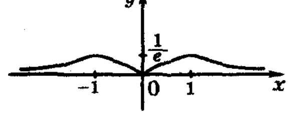


Рис. 24

убывает на $(-\infty; 1)$ і $(1; 2]$; $f_{min} = f(2) = e^2$; 7) возрастает на $(-\infty; 1]$ и $[2; \infty)$; убывает на $[1; 2]$; $f_{max} = f(1) = 36$; $f_{min} = f(2) = 0$. **126.** 1) рис. 22; 2) рис. 23; 3) рис. 24; 4) рис. 25. **127.** 2) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{64}$; 3) $9\frac{1}{9}$; 2; 4) $6e^8$; $-e^5$; 5) 24; 0. **128.** $a \geq 0$. **129.** $a \leq 3$. **130.** Поскольку функция $f(x)$ возрастает на $[0; \infty)$, то при $x > 0$ $f(x) > f(0)$. **131.** 8) $y = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$; 9) $y = \frac{x^2(3\ln x - 2)}{\ln^3 x}$; 10) $y = 2x\ln(x^3 + 1) + \frac{3x^4}{x^3 + 1}$; 11) $y = \frac{2^x \ln 4 + 5^x \ln 10}{(2^x + 5^x)\ln 4}$; 12) $y = \frac{\lg e}{2x\sqrt{\lg x - 2}}$;

13) $y = \frac{4x - 4}{(2x^2 - 4x + 3)\ln 0{,}3}$; 14) $y = \frac{x - \ln x - 1}{(x - 1)^2}$.

133. $[-1; 0)$. **135.** 1) $y = 4x + 4$; 2) $y = 2 - x$; 3) $y = \frac{2}{25\ln 5}x + 2 - \frac{18}{25\ln 5}$. **136.** $x_0 = \frac{5}{3}$. **137.** 3) Возрастает на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ и $[1; \infty)$; убывает на $\left[\frac{1}{e^2}; 1\right]$; $x_{min} = 1$, $x_{max} = \frac{1}{e^2}$; 4) возрастает на $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{e}}; \infty\right)$; убывает на $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right]$; $x_{min} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; 5) возрастает на $(0; 1)$ и $[e^2; \infty)$; убывает на $(1; e^2]$; $x_{min} = e^2$; 6) возрастает на $\left(0; \frac{1}{e}\right]$ и $[e; \infty)$; убывает на $\left[\frac{1}{e}; e\right]$; $x_{min} = e$; $x_{max} = \frac{1}{e}$; 7) возрастает на $[0,5; 1]$ и $[2; \infty)$; убывает на

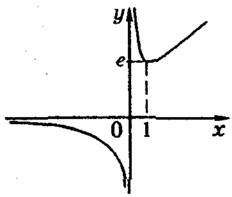


Рис. 25

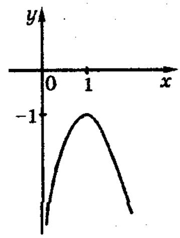


Рис. 26

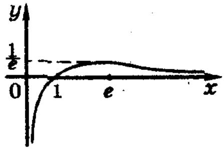


Рис. 27

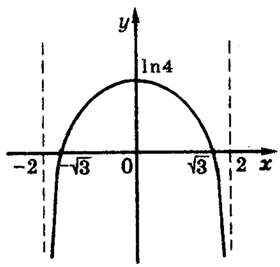


Рис. 28

(0; 0,5] и [1; 2]; $x_{min} = 0,5$ и $x_{min} = 2$; $x_{max} = 1$; 8) возрастает на [–1; 0); убывает на (–∞; –1]; $x_{min} = -1$; 9) возрастает на (–1; 0]; убывает на [0; ∞); $x_{max} = 0$; 10) возрастает на $\left[\frac{1}{e^4}; 1\right]$ и $[e; \infty)$; убывает на $\left(0; \frac{1}{e^4}\right]$ и $[1; e]$; $x_{min} = \frac{1}{e^4}$ і $x_{min} = e$; $x_{max} = 1$.

138. 1) рис. 26; 2) рис. 27; 3) рис. 28; 4) рис. 29.

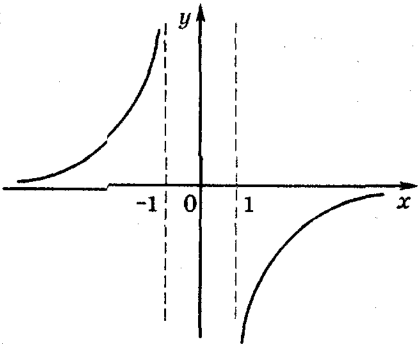


Рис. 29

140. 5) $F(x) = -2^{-x} - 2e^{-0,5x} + C$; 6) $F(x) = 2e^{3x-4} - 2e^{1-4x} + C$.

141. 3) $F(x) = 2x^3 + \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}$. **142.** 3) $3e - 2 - \frac{35}{\ln 8}$; 5) $8\frac{80}{81}$; 6) $\frac{198}{5\ln 10}$.

143. 1) $98\frac{1}{6} + \ln 1,5$; 2) $\frac{4^8 - 1}{1024} + 4\ln 2$; 3) $\frac{2}{\ln 3} + \frac{5}{\ln 2}$; 4) $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}$.

144. 3) $e^3 - 4$; 4) $8 - \frac{3}{\ln 2}$; 5) $8 - \frac{3}{\ln 2}$. **146.** 1) Возрастает на $\left[0; \frac{1}{6}\right]$; убывает на $\left[\frac{1}{6}; \infty\right)$; 2) возрастает на $[3 - \sqrt{3}; \infty)$; убывает на $[0; 3 - \sqrt{3}]$.

147. 14) $F(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x-4)^4} + C$; 15) $F(x) = 8\sqrt[4]{\left(\frac{x}{3} + 1\right)^3} + C$; 16) $F(x) = 9\sqrt[3]{3x+1} + C$; 17) $F(x) = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} - 2x^4 - \frac{1}{x+3} + C$; 18) $F(x) = \frac{x^{\sqrt{5}+2}}{\sqrt{5}+2} - \frac{x^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1} + 2e^{0,5x} + C$. **148.** 3) $\frac{2044}{9}$; 4) 290,4. **149.** 2) $\frac{\pi^{\pi+1}}{\pi+1}$; 4) $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7} - 2}{6}$. **151.** 3) $F(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}\ln(1 - 3x) + 1$; 4) $F(x) = 3\sqrt{x+4} + 4\ln(x-4) - 11$. **153.** 1) $8,25 - 4\ln 2$; 2) $-1,25 - 4\ln 2$. **155.** 5) $24 - 7\ln 7$; 6) $1,5 - 2\ln 1,5$; 7) $6,2 - \ln 2$; 8) $\frac{14}{3} - \ln 4$. **156.** $a = 7,5$. **157.** $a = 6$. **159.** $a = 1$. **160.** 2) $y = Ce^{-3x}$; $y = e^{4-3x}$; 3) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$; $y = -\frac{2}{3}\sin 3x$. **161.** 4) $(n-k+1)\ldots(n-1)n$. **166.** $n!$. **167.** $4! - 3! = 18$. **168.** 1) $5! = 120$; 2) $\frac{7!}{2!} = 2520$; 3) $\frac{8!}{2!\,2!} = 10\,080$.

174. 1) 25; 2) 8; 3) 8. **175.** 1) 18; 2) 6; 3) 10; 4) 7; 5) 4; 6) 5. **176.** $C_{32}^4 = 35\,960$. **177.** $C_{25}^3 = 2300$. **178.** $C_5^2 = 10$. **179.** $C_{17}^5 = 6188$. **180.** $C_{15}^3 \cdot C_{12}^4 = 225\,225$. **181.** $C_{10}^2 \cdot C_8^2 = 1260$. **182.** $C_{12}^2 \cdot C_7^2 = 1386$. **183.**

$C_{15}^1 \cdot C_{14}^1 = 210$. **184.** $C_4^3 \cdot C_{48}^7$. **187.** 1) 5; 2) 12; 3) 16; 4) 6; 5) 4. **188.** $A_{11}^2 = 110$. **190.** $A_5^3 = 60$. **191.** $A_8^2 = 56$. **192.** $\frac{1}{2} A_8^2 = 28$. **193.** $A_5^3 - A_4^2 = 48$. **195.** $n = 8$. **196.** $n = 10$. **197.** 256. **198.** *Указание.* Положить в разложении бинома $a = b = 1$. **201.** 19. **202.** $792 \cdot x^{6,5}$. **203.** $-120a^{21}b$. **204.** $20x^{-1,5}$. **205.** 3. **206.** -5005. **207.** $495x^2$. **208.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{6}$. **210.** $\frac{5}{6}$. **211.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{36}$. **212.** $\frac{3}{7}$. **213.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **214.** 1) $\frac{12}{365}$ или $\frac{12}{366}$; 2) $\frac{7}{365}$ или $\frac{7}{366}$; 3) $\frac{11}{365}$ или $\frac{12}{365}$. **215.** $\frac{17}{43}$. **216.** $\frac{4}{45}$. **217.** $\frac{1}{C_8^2} = \frac{1}{28}$. **218.** $\frac{1}{12}$. **219.** $\frac{10}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$. **220.** $\frac{1}{C_5^4} = \frac{1}{5}$. **221.** $\frac{1}{A_6^4} = \frac{1}{360}$. **222.** $\frac{C_{22}^5}{C_{30}^5}$. **223.** $\frac{C_4^2}{C_{36}^2}$. **224.** $\frac{C_{35}^4}{C_{40}^4}$. **225.** $\frac{C_{40}^4 \cdot C_{10}^1}{C_{50}^5}$. **226.** $\frac{C_8^3 \cdot C_6^2}{C_{14}^5}$. **227.** $\frac{12!}{12^{12}}$. **228.** $\frac{3}{5}$. **229.** $\frac{4}{5}$. **230.** 0,5. **231.** 0,76. **232.** 1) 0,14; 2) 0,34; 3) 0,66. **233.** $\frac{3}{5}$. **234.** $\frac{C_{10}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2}{C_{35}^2}$. **235.** $\frac{1}{36}$. **236.** $\frac{1}{4}$. **237.** $\frac{1}{8}$. **238.** $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$. **239.** $0{,}04 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$. **240.** $\left(\frac{C_4^2}{C_7^2}\right)^2$. **241.** $0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$. **242.** $(1 - 0{,}4) \times (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}7)$. **243.** $0{,}4 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}01$. **244.** 1) $0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6$; 2) $(1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8)(1 - 0{,}6)$; 3) $(1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8) \times 0{,}6 + (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}6) \cdot 0{,}8 + (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}6) \cdot 0{,}7$. **245.** $\frac{5}{22} \cdot \frac{3}{20} + \frac{9}{22} \cdot \frac{7}{20} + \frac{8}{22} \cdot \frac{10}{20}$. **246.** $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8$. **247.** 1) $0{,}9 \cdot 0{,}7$; 2) $(1 - 0{,}9)(1 - 0{,}7)$; 3) $0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}3$ или $1 - (1 - 0{,}9)(1 - 0{,}7)$; 4) $0{,}9 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}7$. **248.** $1 - (1 - 0{,}8)^7$. **249.** 1) $C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3}$; 2) $C_{10}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; 3) $C_{10}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_{10}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} + C_{10}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2}$; 4) $1 - \left(C_{10}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_{10}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} + C_{10}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2}\right)$. **250.** $C_{10}^{10} \left(\frac{6}{7}\right)^{10} \left(\frac{1}{7}\right)^0$. **251.** $C_8^5 \left(\frac{3}{5}\right)^5 \left(\frac{3}{5}\right)^{8-5}$. **252.** 1) $C_7^3 \left(\frac{7}{11}\right)^3 \left(\frac{4}{11}\right)^{7-3}$; 2) $C_7^0 \left(\frac{7}{11}\right)^0 \left(\frac{4}{7}\right)^{7-0} + C_7^1 \left(\frac{7}{11}\right)^1 \left(\frac{4}{11}\right)^{7-1}$; 3) $1 - \left(C_7^0 \left(\frac{7}{11}\right)^0 \left(\frac{4}{7}\right)^{7-0} + C_7^1 \left(\frac{7}{11}\right)^1 \times\right.$

$\times\left(\frac{4}{11}\right)^{7-1} + C_7^2\left(\frac{7}{11}\right)^2\left(\frac{4}{11}\right)^{7-2}\Bigg)$. **253.** 1) $C_9^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{9-4}$;
2) $C_9^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{9-4} + C_9^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{9-5}$. **254.** 1) $C_7^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{7-2}$;
2) $C_7^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_7^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} + C_7^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{7-2} + C_7^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{7-3}$;
3) $C_7^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^{7-6} + C_7^7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^{7-7}$. **255.** *Указание.* Сравните
$C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}$ и $C_9^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^{9-6}$.

СОДЕРЖАНИЕ