

составитель Е.МАНОХА

занимательные
ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ D'AGOSTINI

9





Прогулки в колонне

Дети идут в колонне один за другим. Как следует построить детей в колонны, чтобы каждый ребенок стоял рядом со всеми остальными ровно один раз?

Обозначим число детей за n . Во-первых, заметим, что если каждый ребенок должен стоять рядом со всеми остальными, то общее число расположений составит $1/2 \cdot n(n-1)$ — таково число сочетаний из n по два. Однако каждый ряд допускает $n-1$ «соседств», следовательно, число возможных колонн равно $1/2 \cdot n$. Таким образом, чтобы задача имела решение, число детей должно быть четным. Чтобы построить детей в колонны, обозначим их буквами, припишем еще одну дополнительную букву и сформируем все возможные последовательности из $n+1$ буквы, затем рассмотрим последовательность, к которой мы добавили букву, и удалим ее. Таким образом мы получим все перестановки, требуемые по условию задачи.

НАБЛЮДЕНИЕ. Каждый ребенок окажется отделен от остальных всего один раз, когда окажется в начале или в конце колонны. Можно уд-

вонть число возможных колонн, построив детей в обратном порядке, однако в этом случае каждый ребенок будет стоять по соседству с каждым из остальных ровно два раза: в первый раз, когда колонна будет идти вперед, во второй — когда колонна будет идти назад.

Прогулки в пансионе

В пансионе проживает четное число девушек, которые каждый день прогуливаются парами. Как разбить их на пары так, чтобы каждая девушка поочередно прогуливалась со всеми остальными, но не более одного раза?

Допустим, что в пансионе живет 12 девушек, которых мы обозначим буквами алфавита. Разделим окружность (см. рисунок ниже) на 11 равных частей. Расположим в центре одну из букв, L, остальные буквы — в точках, которые делят

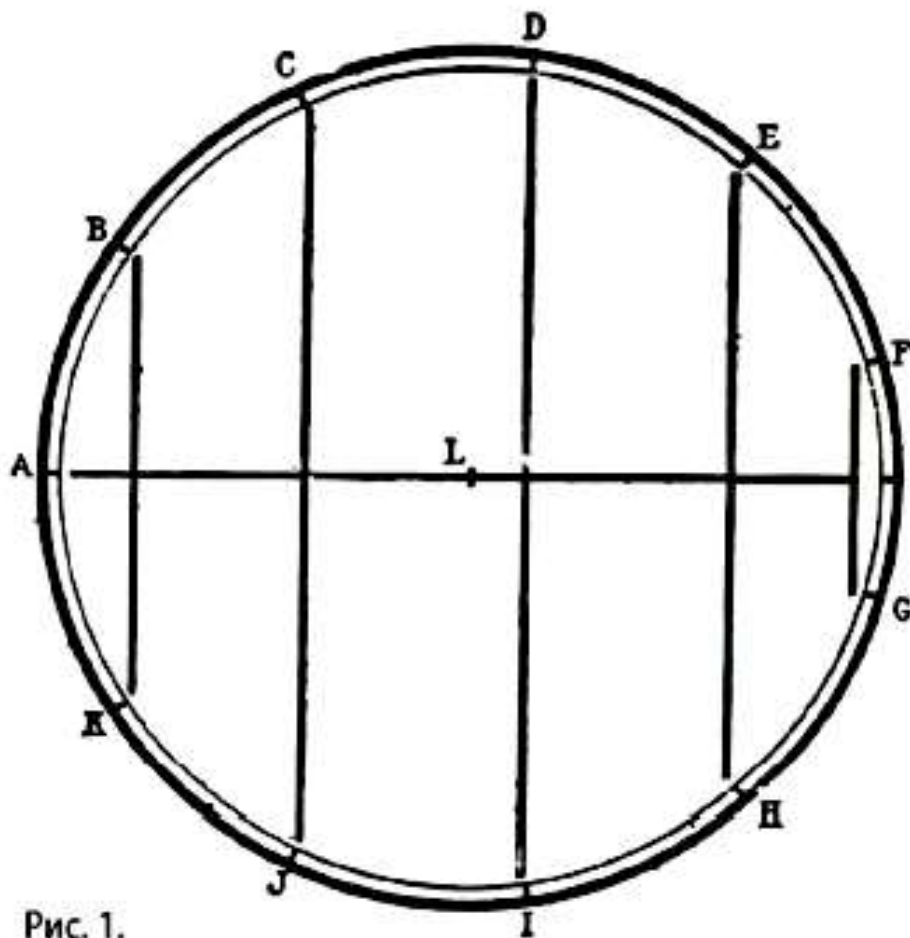


Рис. 1.

окружность на части, произвольным образом. Далее проведем прямые линии так, как показано на рисунке. Объединим девушек в пары для первой прогулки, соединив сначала А с L, затем все остальные буквы параллельными линиями. Таким образом, на первой прогулке состав пар будет выглядеть так:

I. AL, BK, CJ, DI, EH, FG.

Чтобы определить пары для второй прогулки, будем рассматривать множество прямых линий на рисунке как подвижную стрелку, закрепленную в центре, которую мы будем последовательно вращать на одно деление по часовой стрелке, при этом буквы будут оставаться неподвижными. Таким образом мы определим пары для второй прогулки:

II. BL, CA, DK, EJ, FI, GH.

Если мы будем поворачивать стрелку последовательно на одно, два и три деления, получим пары для следующих прогулок:

III. CL, DB, EA, FK, GJ, HI.

IV. DL, EC, FB, GA, HK, IJ.

V. EL, FD, GC, HB, IA, JK

и так далее. Всего мы получим 11 вариантов, в каждом из которых для каждой девушки найдется пара. Теперь осталось показать, что девушки, которые гуляли в одной паре в один из дней, во все остальные дни ни разу не окажутся в одной и той же паре. Для этого нужно рассмотреть два случая: в первом одна из букв, обозначающая девушку, находится в центре окружности, во втором — обе буквы расположены на окружности. Чтобы две буквы, одна из которых находится в центре окружности, принадлежали к одной паре, необходимо и достаточно, чтобы стрелка прошла через вторую букву ровно один раз — именно так и происходит. Чтобы две буквы, расположенные на окружности, принадлежали к одной паре, необходимо и достаточно, чтобы соединяющая их прямая была перпендикулярна направлению стрелки. Направление стрелки, а следовательно, и направление, перпендикулярное ему, во всех 11 случаях различно.

Головоломка

Задачу о прогулках в пансионе также можно решить с помощью головоломки с кубиками. Пусть A, B, \dots, K, L — кубики головоломки, которые обозначают девушек. Будем объединять кубики

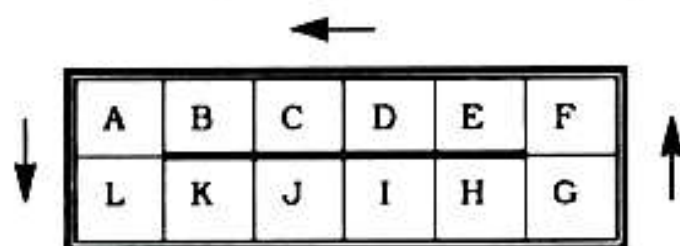


Рис. 2.

в пары по столбцам для каждой прогулки. Для первой прогулки пары будут такими:

$AL, BK, CJ, DI, EH, FG.$

Чтобы определить пары для второй прогулки, достаточно удалить кубик L , передвинуть кубик A вниз, сместить на одну позицию влево кубики верхнего горизонтального ряда, передвинуть кубик G вверх, затем сместить на одну позицию вправо все кубики нижнего ряда и, наконец, снова поместить кубик L в пустую клетку так, чтобы он оказался на прежнем месте.

Таким образом мы получим те же пары, что и в решении со стрелкой: метод с головоломкой равносителен тому, что мы будем полагать стрелку на рис. 1 неподвижной и в то же время будем вращать саму окружность на одно, два или три деления относительно стрелки в противоположном направлении. Если же считать все хорды окружности равными и заменить окружность прямоугольником, то мы в точности воспроизведем метод с головоломкой.

Воспитательницы

В двух предыдущих головоломках мы предполагали, что число девушек в пансионе четное, в противном случае задача не имеет решения. Тем не менее, для нечетного числа девушек задачу можно изменить следующим образом.

В пансионе проживает нечетное число девушек, которые каждый день прогуливаются парами, за исключением одной, которая играет роль воспитательницы. Как нужно разбить девушек на пары так, чтобы каждая поочередно прогуливалась со всеми остальными ровно один раз и ровно один раз исполнила роль воспитательницы?

Предположив, что девушек 11, разделим окружность на 11 равных частей и воспроизведем рис. 1 без учета буквы L, расположенной в центре. Будем поворачивать стрелку на одно, два, три деления и так далее. Воспитательницу будет обозначать буква, расположенная на конце стрелки, а все остальные девушки окажутся разбитыми на пары хордами, перпендикулярными стрелке.

Эта задача выводится из задачи о 12 девушках, если исключить из рассмотрения букву L. Для решения этого варианта задачи также можно использовать метод с головоломкой.

НАБЛЮДЕНИЕ. Если записать все пары девушек вне зависимости от того, является их число четным или нечетным, то мы получим полный список всех возможных сочетаний девушек в пары, что нетрудно подтвердить прямыми подсчетами.

Лучшее от Сэма Лойда

Головоломки с перестановками



◀ *Покажите, как можно превратить символ пиковой масти в символ масти червовой, разрезав его на три части.*

1. Задача о красной пике

Во время недавнего визита в Клуб виста и шахмат Крессент Сити мое внимание привлекла красная пика любопытной формы, украшавшая одно из окон зала собраний. Этот узор был выполнен дрезденскими мастерами и, подобно витражам церквей, состоял из множества крохотных кусочков цветного стекла, умело составленных в общую фигуру.

Никто никогда не задавался вопросом о том, почему пика имеет красный, а не привычный черный цвет. Сначала все считали это досадной ошибкой, затем узор полюбился посетителям клуба не только по причине новизны, которую символизировала красная пика, но и потому, что черная пика излишне затенила бы помещение.

Поняв, что мастер совершил ошибку, так как эмблемой клуба должен был стать туз червей, я решил внимательно рассмотреть окно. Узор был составлен из трех частей, и я быстро обнаружил, что их можно переставить так, чтобы они образовали символ червовой масти, как и было задумано вначале.

Члены клуба настолько привыкли к этой любопытной эмблеме и так обожали ее, что выступили против любых изменений. Тем не менее, эта ситуация вдохновила меня на создание интересной, но простой головоломки.

2. Лоскутное одеяло

На рисунке изображены члены общества волонтеров, которые удивили приходского священника, сшив ему прекрасное лоскутное одеяло в знак любви и признательности. Каждая из участниц общества сшила часть одеяла в форме идеального квадрата, составленного из одного или нескольких маленьких квадратов.

Все дамы хотели, чтобы сшитые ими квадраты непременно стали частью одеяла, поэтому сделать большое одеяло оказалось непросто. Мимоходом замечу, что поскольку все дамы сшили по квадратной части одеяла, вы легко сможете определить их число, когда узнаете минимально возможное число квадратных кусочков, на которые можно разделить одеяло. Это простая головоломка, которая требует немалой доли терпения и смекалки.



◀ Каково минимально возможное число квадратов, состоящих из одного или нескольких кусочков, на которое можно разделить одеяло?



◀ Определите размеры креста, площадь поверхности которого будет равна площади остальной части флага.

3. Задача о датском флаге

По завершении бесплодных переговоров Дяди Сэма о покупке Датской Вест-Индии на свет родились различные легенды, связанные с названием этого архипелага Виргинских островов.

Острова Сент-Джон, Сент-Томас и Санта-Крус, входящие в состав Датской Вест-Индии, были в числе первых островов, открытых Колумбом в 1492 году. В течение многих веков эти острова считались малоценными, поэтому никто не стал протестовать, когда группа датчан, потерпевших кораблекрушение, подняла над островами свой флаг. Заняв острова, датчане назвали их по своему обычаю именами святых — покровителей моряков.

Датский флаг встречается редко, поэтому относительно немногие знают, что он представляет собой белый крест на красном фоне. Я никогда бы не подумал, что рисунок флага строится по определенным правилам, согласно которым ровно половина его общей площади должна быть окрашена в белый цвет. Предположим, что флаг имеет пять футов в ширину и семь с половиной в длину. Сможете ли вы найти простое правило, которое позволит найти ширину линий белого креста, который будет занимать точно половину площади флага?

4. Мозаики Гвидо

Немногим известно, что знаменитая венецианская мозаика Доменикино изначально была разделена на две квадратные группы, которые были открыты в разное время. Чтобы восстановить предполагаемую исходную форму, в 1671 году их

объединили в одну коллекцию. Скорее всего, по счастливой случайности кто-то заметил, что каждый квадрат состоял из нескольких частей, которые можно было соединить между собой и получить один большой квадрат размером 5×5 , как показано на рисунке.

Эту красивую головоломку, подобно многим другим головоломкам и математическим задачам, удобнее решать в обратном порядке. Поэтому мы заменим исходную задачу на противоположную и попросим вас разделить большой квадрат на минимально возможное число частей, которые можно переупорядочить так, что получатся два квадрата. Эта головоломка отличается от пифагорейской задачи, в которой два малых квадрата можно разделить диагональными линиями, чтобы получить большой квадрат. В нашей головоломке разрезы можно проводить только вдоль вертикальных и горизонтальных линий, чтобы не повредить узор мозаики. Также заметим, что тот, кто способен решить пифагорейскую задачу, не испытает особых трудностей при решении этой головоломки и быстро укажет, сколько голов будет содержаться в двух искомых квадратах.

Подобные задачи, в которых требуется найти наименьшее число частей, требуют немалой смекалки. В этой головоломке разрезать головы и поворачивать их нельзя.



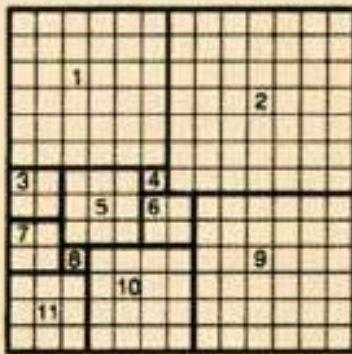
▼ Разрежьте мозаику на две части, из которых можно составить квадраты.

Решения

1.

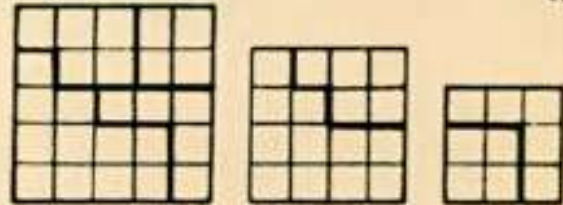


2. На следующем рисунке показано, как можно разделить одеяло 13×13 на 11 маленьких квадратов — это минимально возможное число частей, на которые можно разрезать одеяло, не нарушив узора.



3. Решить эту задачу можно многими математическими методами, однако чтобы упростить решение, я сказал бедным датским морякам, которые не знали ничего о квадратных корнях, что нужно вычесть половину диагонали из четверти периметра флага. Так как периметр флага равен ровно 25 футам, а диагональ равна 9,01388, нужно вычесть 4,50694 из 6,25. В результате получим, что толщина линии креста должна равняться 1,74306 фута.

4.



Генри Э. Дьюдени
Задачи обхода



Я вижу их на их извѣстном пути.
Реджинальд Хесбер

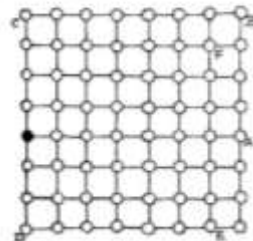
Решение заключается в том, чтобы проложить единственное возможное непрерывное «Каждый шаг прямой и кратчайший», «Как выйти наружу и не вернуться на место, откуда вы вышли?»», «Как добраться еще дальше, не войдя на территорию креста?»». Это оригинальные задачи обхода могут стать прекрасными головоломками, если их необходимо усложнить, тогда достаточно усложнить длину единственного возможного пути. Другим примером является задача обхода лабиринта. Это тоже головоломка, позволяющая обходить лабиринт фактически по непрерывному пути, — отличный вариант для ума.

можно отравить не будучи, равно как и можно прожить свою жизнь до конца. По-прежнему, вы будете так же фактически живыми, как и прежде, но вы будете находиться вдали от жизни.

В другом варианте задачи эту фигуру можно считать вырезанной из листа бумаги, а затем сложить, чтобы получить крест.

2. Пятнадцать поворотов

Это еще одна интересная задача обхода. Чтобы решить ее, вам потребуется высокая гибкость ума. В этой задаче необходимо обойти квадратную область, обозначенную черной точкой, и сделать это за 15 поворотов и на протяжении всего пути не допустить повторения.

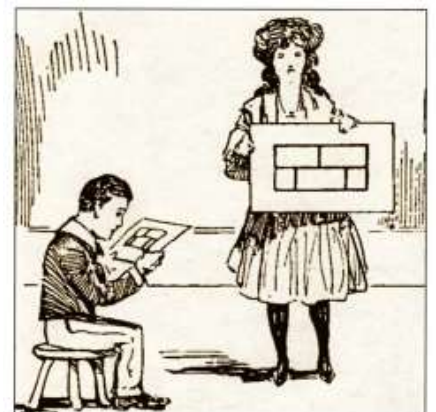


Генри Э. Дьюдени
Задачи обхода



Я вижу их на их извѣстном пути.

Реджинальд Хесбер



Разумно предполагать, что с самого зарождения цивилизации человек задавался вопросами: «Каков кратчайший путь к дому?», «Какой путь самый простой и приятный?», «Как найти дорогу и не наткнуться на мастодонта или плезнозавра?», «Как добраться куда нужно, не зайдя на вражескую тропу?». Эти простейшие задачи обхода могут стать прекрасными головоломками, если их несколько усложнить, введя дополнительные условия. Далее вы прочтете несколько подобных усложненных задач. Эти головоломки, позволяющие обобщить некоторые факты о геометрических фигурах, — отличная разминка для ума.

1. Детская головоломка

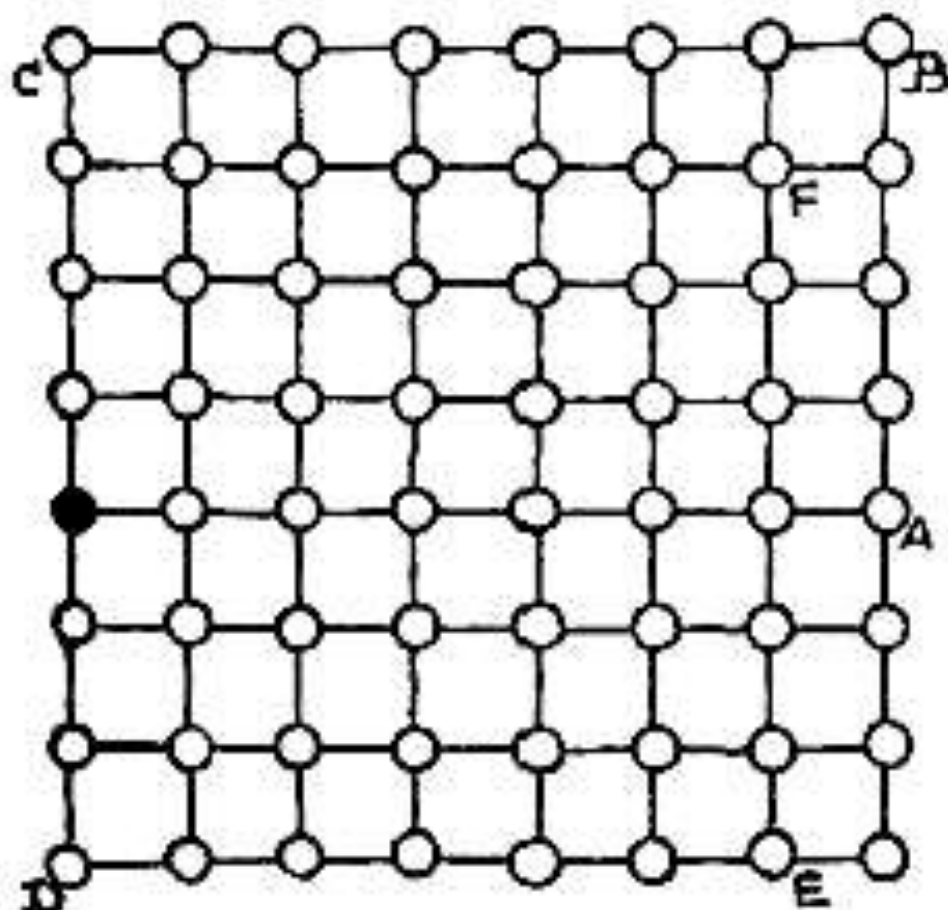
Много лет мои юные друзья спрашивают меня об этой маленькой головоломке. По-видимому, она известна большинству детей, но, что удивительно, никто из них не знает на нее ответа. Дети всегда просят, чтобы я прояснил ее суть. Мне кажется, эту головоломку любил показывать своим маленьким друзьям маг Гудини, но мне неизвестно, был ли он ее истинным автором. Я не буду извиняться за то, что привел в этом сборнике такую старую задачу, поскольку, несомненно, многие мои читатели будут рады тому, что я посвящу их в тайну ее решения.

Она заключается в том, что нужно изобразить тремя ломаными линиями схему, которую держит в руках девочка на иллюстрации. Разумеется, при построении ломаной линии карандаш нельзя отрывать от бумаги, равно как и нельзя проводить одну линию дважды. Вы обнаружите, что большую часть фигуры можно изобразить одной ломаной линией, но чтобы закончить ее, всегда будет требоваться четыре линии.

В другом варианте задачи эту фигуру нужно сначала нарисовать мелом на доске, а затем стереть тремя движениями.

2. Пятнадцать поворотов

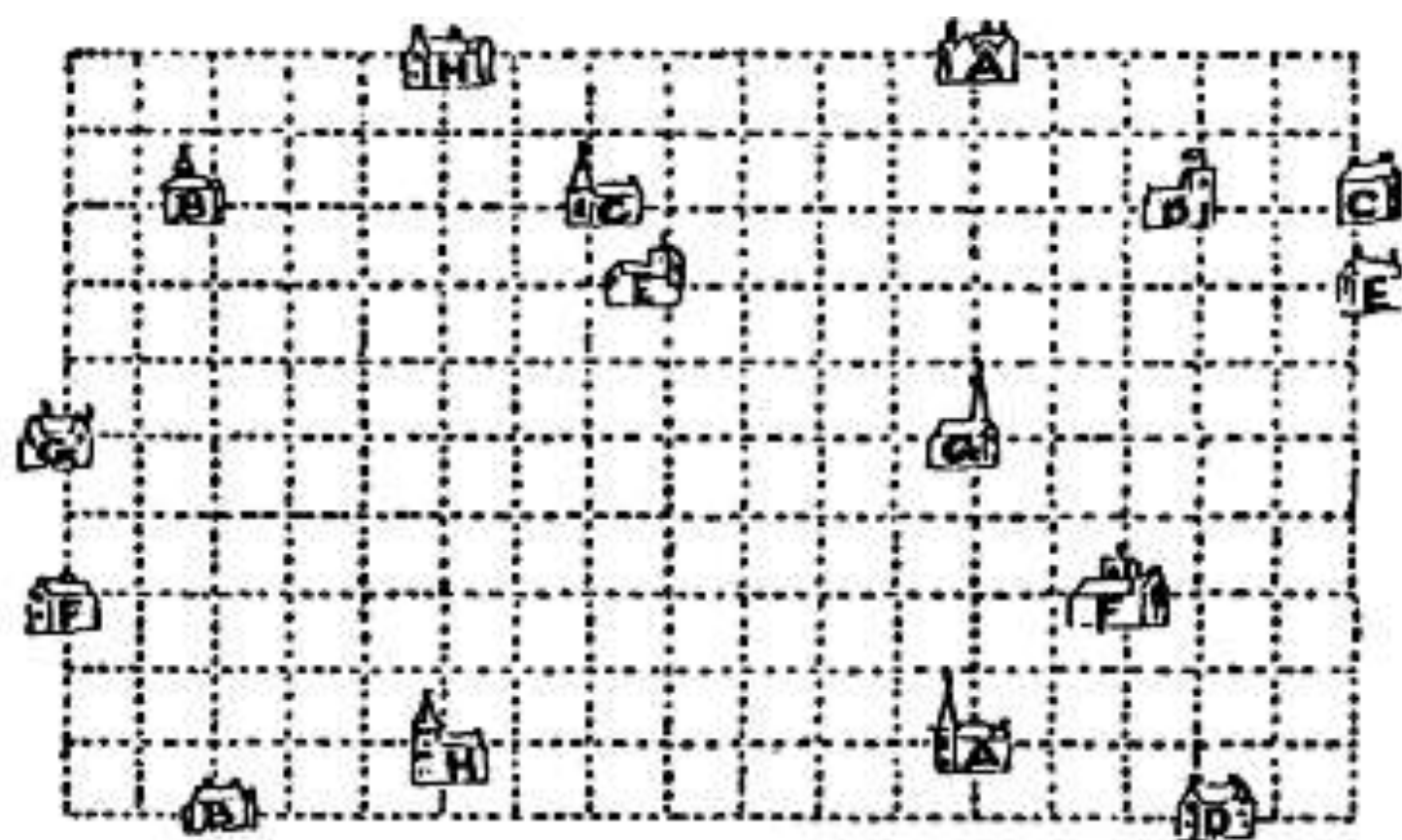
Это еще одна интересная задача обхода. Чтобы решить ее, вам потребуется немалая сообразительность. В этой задаче путешественник начинает путь в городе, обозначенном черной точкой, и хочет пройти как можно большее расстояние, совершив всего 15 поворотов и не проходя ни по какой дороге дважды.



Допустим, что города расположены в миле друг от друга. Если предположить, например, что путешественник пойдет по прямой в город А, затем по прямой в В, С, D, E и F, то он пройдет 37 миль, совершив 5 поворотов. Какое максимальное расстояние он может пройти, совершив 15 поворотов?

3. Задача для автомобилистов

Как-то утром восемь автомобилистов приехали в церковь на машинах. Их дома, церкви и единственно возможные пути (выделены пунктирной линией) изображены на рисунке на следующей странице. Первый автомобилист поехал из своего дома А в церковь А, второй — из дома В в церковь В, третий — из С в С и так далее. Оказалось, что ни один из водителей не пересек маршрут другого

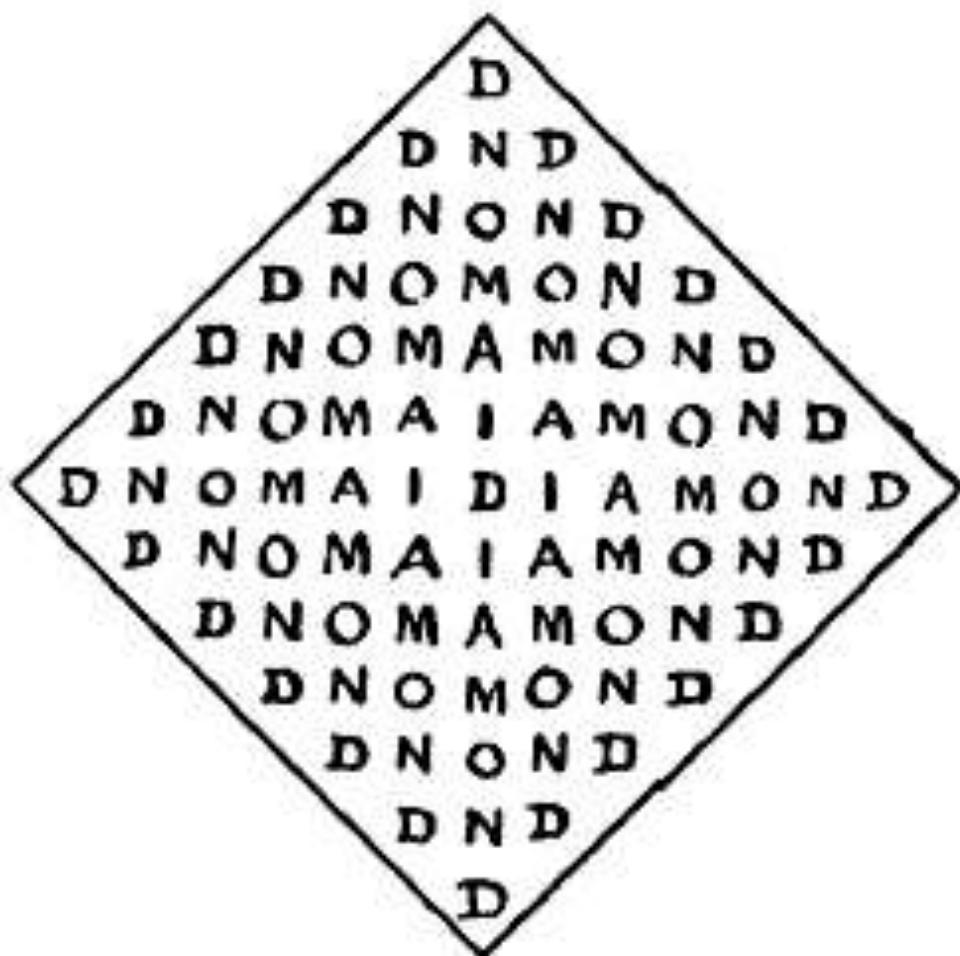


автомобиля. Возьмите в руки карандаш и нарисуйте, как ехали автомобилисты.

4. Задача о бриллианте

Сколькими способами можно прочесть слово DIAMOND («бриллиант») на рисунке справа?

Начать можно с любой буквы D, затем можно двигаться вверх, вниз, назад и вперед — в любом направлении между смежными буквами. Сколькими способами это можно сделать?



Решения

1. В обычных условиях задача не имеет решения. Доказать это нетрудно. Поэтому нужно найти подвох или хитрость в ее формулировке.



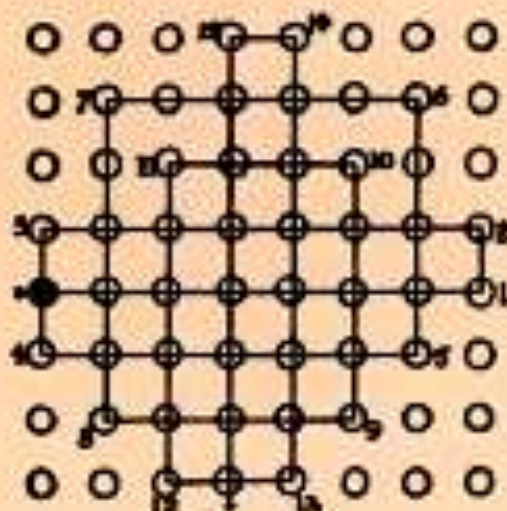
Если мы согнем лист бумаги гармошкой и проведем линию точно вдоль сгиба, то сможем провести сразу две линии фигуры — CD и EF. Затем нужно будет

Наконец, нужно будет добавить к рисунку линию GH, и все условия задачи будут выполнены, так как сгибать лист бумаги не запрещено. Разумеется, на рисунке линии не соединены, чтобы сделать построение более понятным.

В варианте задачи, где нужно стереть фигуру, сначала нужно стереть линию, соединяющую точки A и B, одним движением. Затем нужно стереть линию GH одним пальцем. Наконец, нужно стереть оставшиеся две вертикальные линии двумя пальцами одновременно. Все условия задачи выполнены!

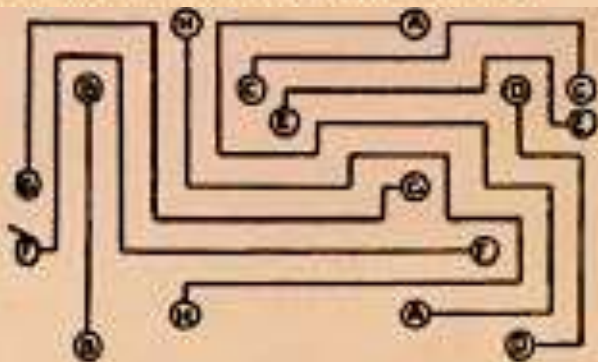
2. Как вы можете видеть на рисунке, где изображены только те дороги, по которым прошел путешественник, он может пройти 70 миль, совершив 15 поворотов.

Повороты пронумерованы по порядку. Обратите внимание, что непосещенными остались 19 городов. Путешественник может посетить все города, совершив 15 по-

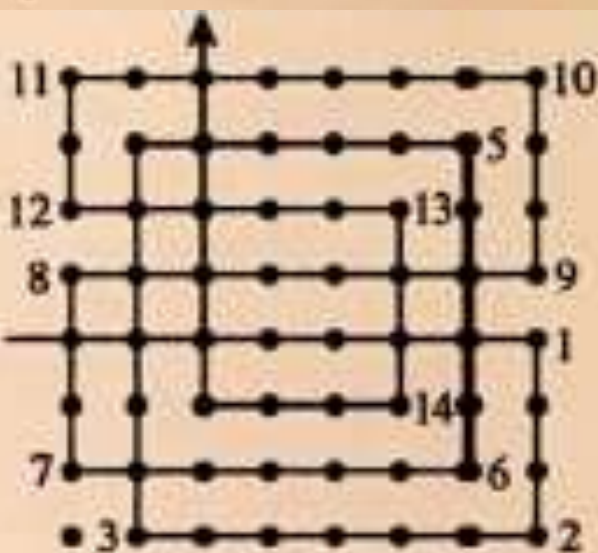


воротов, при этом не заходя ни в один город дважды и закончив путь в том же городе, из которого вышел (он отмечен черной точкой), однако в этом случае он пройдет лишь 64 мили, в то время как по условию задачи требуется пройти максимально возможное расстояние.

Примечание редактора. Виктор Милли обнаружил более оптимальное решение, чем Дьюдени, в котором путешественник пройдет 76 миль, при этом непосещенным останется всего 1 город. Это решение представлено на следующем рисунке. Является ли это решение наилучшим из всех возможных, неизвестно.



3. Маршруты, которыми ехали восемь автомобилистов, представлены на рисунке. Дороги, отмеченные пунктирными линиями, не показаны, чтобы сделать решение более понятным.



4. Общая формула такова: для слов из n букв, которые не являются палиндромами, при расположении букв подобным образом существует $(2n + 1) \times 4$ способов прочтения. В этом случае не допускается прочтение по диагонали, возможное, например, для слова DIGGING («раскопки»), где можно перейти от одной буквы G к другой по диагонали.

Математика и мистика
Сакральная геометрия



▲ *Пять платоновых тел
для греков обозначали огонь,
землю, воздух, эфир и воду.*

Слово «символ» происходит от греческого слова *σύμβολον*, указывающего на две половины одного и того же объекта и означающего, что полное представление об объекте можно получить лишь тогда, когда две его половины соединяются. Таким образом, символ сам по себе есть не более чем одна из двух половин. Вторая часть создается благодаря интеллекту. Например, геометрическая фигура — не более чем множество отрезков, соединенных между собой. Это всего одна половина символа. Вторую половину образует культурное наполнение. Когда обе половины соединяются, фигура обретает конкретное значение: речь может идти, например, о прямоугольном треугольнике, скрывающем в себе великое множество понятий и наводящем на многие

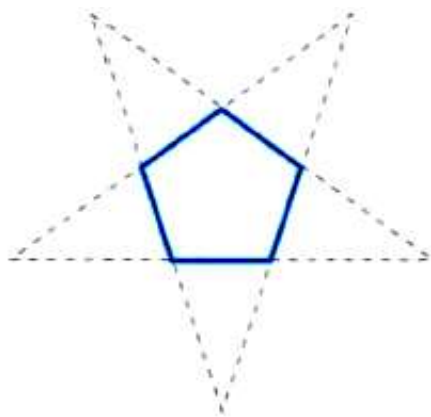


◀ Традиционный отказ от изображения человеческого тела в исламской культуре привел к широкому использованию геометрических фигур в орнаментах, особенно в религиозных сооружениях. На иллюстрации изображен главный вход в медресе Сердар, построенное в Самарканде в начале XVII века.

размышления. Для математика эти размышления будут знакомыми, так как многие из них рассматриваются в курсе средней школы. Для мистиков-пифагорейцев прямоугольный треугольник был символом иррациональности, перехода к другому уровню знаний, так как в нем могло быть заключено число $\sqrt{2}$. Математика в целом и геометрия в частности служила основным, если не единственным источником вдохновения в мистическом символизме почти всех культур. Хорошо известно, какую роль в этом контексте сыграли такие понятия, как золотое сечение, сфера, платоновы тела, спирали и числа Фибоначчи, не говоря уже о многих других, более известных примерах.

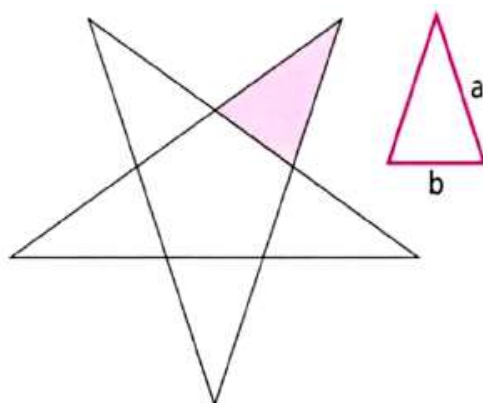
Наиболее интересными среди них являются пентаграммы и геометрические фигуры, образованные окружностями. Будучи не слишком широко известными, они являются частью древнейших религиозных символов.

Пентаграммы



Пентаграмма — это звездчатый многоугольник, получаемый продолжением сторон правильного пятиугольника.

Одно из его интересных геометрических свойств звучит так: если рассмотреть пентаграмму как пятиугольник, к которому добавлены пять треугольников, то каждый из них будет треугольником золотого сечения.



Это означает, что речь идет о равнобедренных треугольниках, в которых соотношение между боковыми сторонами и основанием равно золотому сечению:

$$a/b = \Phi = 1,6180339887\dots$$

Взяв за основу пентаграмму, радиус вписанной окружности которой равен единице, можно последовательно вписывать пентаграммы в эту окружность и построить таким образом фрактальную структуру. Она будет обладать следующим свойством: радиусы последовательных вписанных окружностей будут равны $r_n = \Phi^{-n}$, что гарантирует присутствие золотого сечения *ad infinitum* — до бесконечности. Пентаграмма, также известная как пентаккл, была важнейшим геометрическим символом пифагорейской школы и основным элементом ее мистического символизма.





▲ Пентаграмма, высеченная на купели кафедрального собора в словацком городе Шибенике.

Звезда Давида

Шестиконечная звезда, известная как гексаграмма, или звезда Давида, — один из самых известных символов иудаизма. Он образован двумя равносторонними треугольниками, вписанными в окружность.



Считается, что шестиконечная звезда представляет собой единство противоположностей, символ гармонии и совершенства. Треугольник, вершина которого обращена вниз, символизирует воду и женское начало. Треугольник, вершина которого обращена вверх, символизирует огонь и мужское начало.

По иудейской традиции царь Соломон, сын Давида, с помощью этой звезды изгонял демонов и призывал ангелов. Сегодня этот символ можно увидеть на флаге Израиля.

Круги

Одной из наиболее часто используемых фигур в сакральной геометрии является окружность или круг. Круг считается знаком совершенной

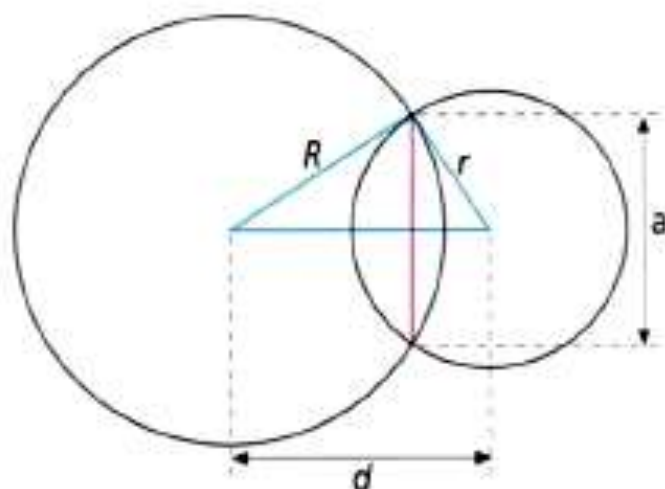
мудрости, так как является проекцией сферы на плоскость, а сфера, в свою очередь, есть символ неделимого духа Вселенной. Как геометрическая фигура круг порождает число π , поэтому некоторые мистики видят в этой фигуре символ трансцендентности. Корни этого символизма не уходят в глубокую древность, как можно было бы подумать, ведь трансцендентность π как числа была доказана лишь в 1882 году. Самое интересное свойство круга как сакральной фигуры заключается в том, что круг порождает множество сочетаний. Некоторые из них представляют интерес с точки зрения математики и нашли воплощение во множестве орнаментов, созданных очень древними культурами.

► *Монограмма имени Иисуса Христа в Келлской книге — миниатюре IX века, где использование окружностей в орнаментах достигает непревзойденного уровня.*



Линзы

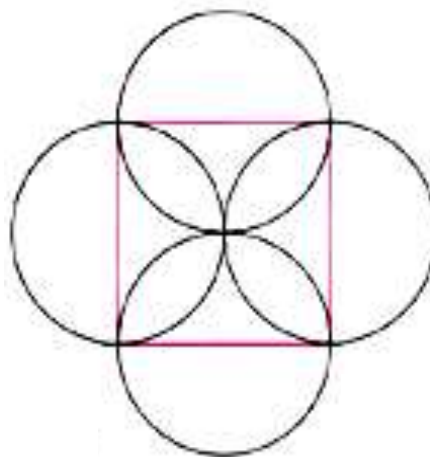
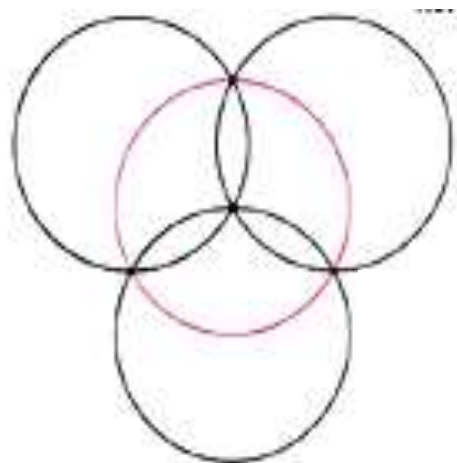
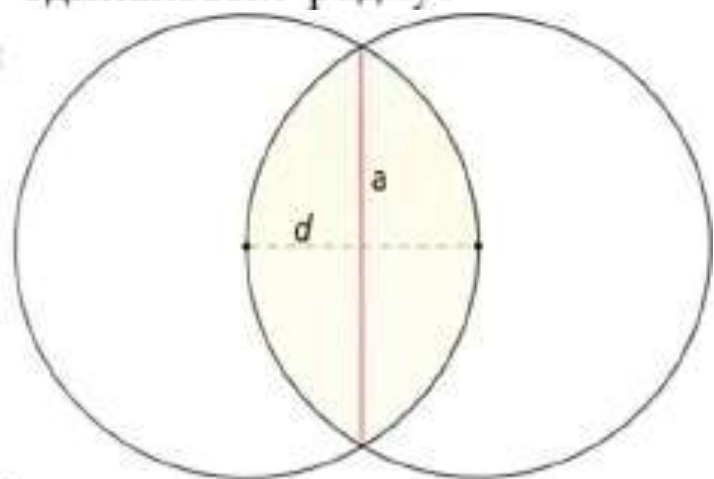
Два круга, имеющие общие точки и при этом не касающиеся друг друга, неизбежно пересекутся в двух точках. Их пересечением будет геометрическая фигура, имеющая форму двояковыпуклой линзы.



В частном случае окружности имеют одинаковый радиус и пересекаются так, что центр каждой из них лежит на другой окружности.

Линза, получаемая в этом случае, имеет особое мистическое значение и носит название *Vesica Pisces*, так как по форме напоминает рыбу.

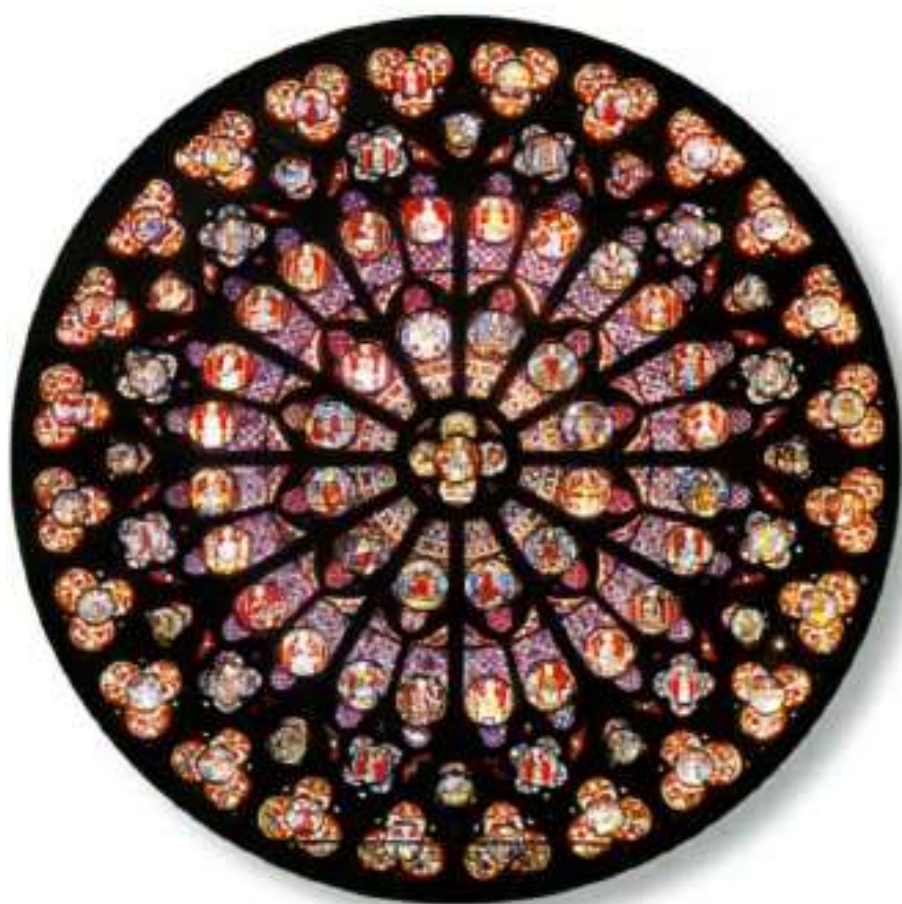
Рыба, которая являлась мистическим символом раннего христианства, не только изображается как *Vesica Pisces* во множестве орнаментов, но также используется в качестве архитектурного элемента, особенно в готике.





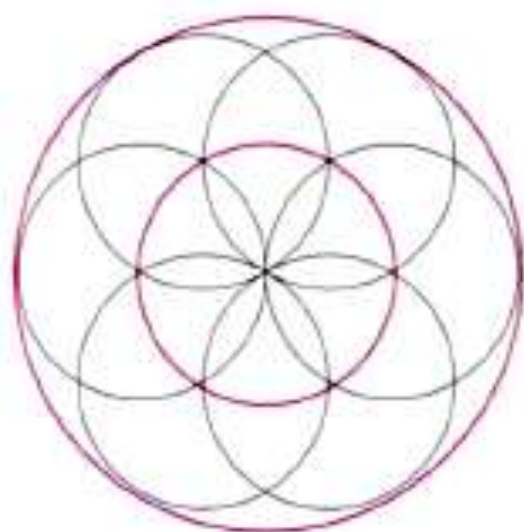
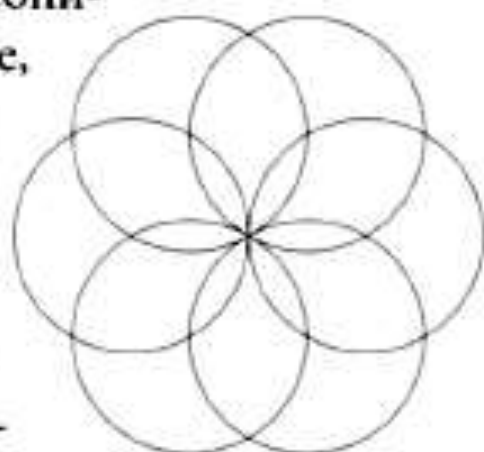
Мандорла — это особая форма шимбы, сияние овальной формы, вытянутое в вертикальном направлении, внутри которого помещается изображение Христа. Мандорлы можно увидеть на многих изображениях Христа в романтическом стиле. Они содержат отсылку к трансцендентной природе божественного, а их истоки в иконографии восходят напрямую к *Vesica Pisces*. На иллюстрации — «Спас в силах» из базилики Святого Исидора в Леоне (возм., до 1149 г.). ◀

► Роза южного трансепта собора Парижской богородицы, строительство которого было начато в середине XIII века. Убранство собора содержит множество архитектурных элементов в форме линз.



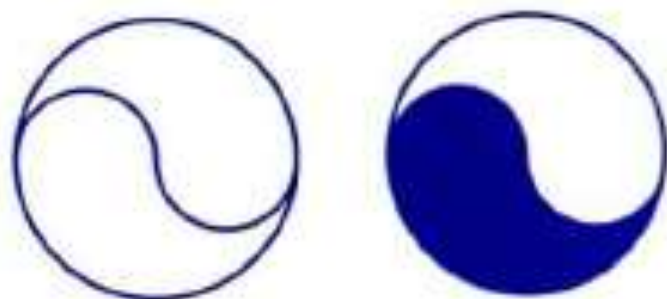
Семя жизни

Рассмотрим, как будет выглядеть роза, образованная шестью линзами. Следуя вышеописанной схеме, мы проведем построение, взяв за основу правильный шестиугольник и расположив шесть кругов симметрично относительно друг друга так, чтобы они пересеклись в одной точке. Эта фигура, которую часто используют профессиональные гипнотизеры, носит название «семя жизни». Точнее, так называется фигура, которая получается, если описать окружность вокруг этих шести пересекающихся окружностей.



Инь и ян

Один из самых распространенных символов восточных культур — это символ «инь и ян», изображающий природу противоположностей: мужчины и женщины, неба и земли, дня и ночи, жары и холода. Этот символ строится так: нужно взять две полуокружности радиуса $1/2$, затем соединить их концами, после чего построить круг единичного радиуса, который пройдет через свободные концы полуокружностей. Закрасив одну из двух частей фигуры черным цветом и оставив вторую часть белой, мы получим символ «инь и ян».





Вороны, шимпанзе и счет

Часто говорят, что вороны умеют считать до пяти. Далее мы объясним происхождение этого утверждения. Прозорливый наблюдатель Лерой провел эксперимент, чтобы определить, насколько разумны животные. Заметив, что вороны не возвращаются в гнездо, если вблизи него находится человек, он поставил рядом с гнездом шалаш. Затем он попросил человека войти в шалаш и заметил, что вороны приближались к гнезду только после того, как человек выходил из шалаша. На следующий день Лерой попросил зайти в шалаш двух человек. Один из них покинул шалаш, второй остался внутри. Вороны вернулись в гнездо только после того, как второй человек также покинул шалаш. Затем он отправил в шалаш трех человек, и результат эксперимента был таким же: вороны не приближались к гнезду, пока из шалаша не вышли все люди. Когда в шалаше находилось пять человек, эксперимент завершился аналогично. Наконец, Лерой отправил в шалаш шесть человек, чтобы обмануть воронов. Этот пример доказывает, что птицы умеют считать до пяти.

М. Романес научил счету шимпанзе из Лондонского зоопарка. Он попросил его взять 1, 2, 3, 4 и 5 соломинок с кровати и принести ему. Он брал соломинки от шимпанзе только тогда, когда тот приносил нужное число соломинок. Спустя некоторое время шимпанзе прекрасно понимал, что от него требуется, и ошибался очень редко. Следовательно, нет никаких сомнений, что животное способно различать первые пять чисел и понимать, как называется каждое из них.



Если верить Монтеню, буйволы способны считать до ста.

«Для орошения царских садов в Сузах воды должны были вращать огромные колеса, к которым были прикреплены наполнявшиеся водой чаны наподобие тех, что часто встречаются в Лангедоке. В течение дня каждый вол должен был сделать до ста оборотов. Воды настолько привыкли к этому числу движений, что никакими силами нельзя было заставить их сделать лишней оборот: выполнив свою работу, они решительно останавливались» (Монтень. «Опыты». Книга II, глава XII).

Среди зулусов

Зулусы выражают число пять как «половина рук». О числе 6 они говорят «взять большой палец», а «один поверх руки другого» означает «двадцать один». Во всем мире арифметика начиналась со счета на пальцах рук и ног, отсюда и происходит обычай использовать числа 5, 10, 20 в качестве основания систем счисления. Так же поступаем и мы, поскольку используем число 5 в качестве основания при работе с римскими цифрами: V, VI, VII. Мы используем 10 как основание нашей десятичной системы, а французы применяют 20, когда говорят «quatre-vingt» (восемьдесят). Эти системы счисления используются во всем мире; тем не менее, они не столь удобны, как системы счисления по основанию 6, 12 и 24. Десятичная система столь широко применяется в математике благодаря нашим предкам: люди каменного века считали на пальцах, и эта традиция осталась неизменной и в наши дни.

В Бенгалии

Интересен метод счета бенгальцев, которые славятся лучшими в счете во всем мире. С помощью



пальцев всего одной руки они могут считать до шестнадцати: на каждом пальце, кроме большого, учитываются три фаланги и кончик. При счете бенгальцы последовательно касаются каждой фаланги кончиком большого пальца руки, начиная с нижней фаланги мизинца. Они делают это столь быстро, что индус-служащий часто предпочитает механически сложить восемь и пять, начиная с фаланги, которая, как ему известно, обозначает восемь (это кончик безымянного пальца), и отсчитав от нее пять, то есть дойдя до основания указательного пальца, которое, как ему известно, обозначает тринадцать.

Если бы в самом начале бенгальцы поняли, что можно использовать только три фаланги, без кончика пальца, то каждая рука обозначала бы двенадцать, и во всем мире, возможно, использовалась бы двенадцатеричная система счисления.

Однако, по всей видимости, система счисления бенгальцев происходит от двончной, которая была известна в Китае уже за 30 веков до нашей эры.

Рейка пекаря

Когда я был маленьким, то часто ходил за хлебом в пекарню возле нашего дома. Пекарь брал маленькую деревянную рейку, которую я приносил с собой, клал ее рядом со своей той же формы и размера и делал на обеих зарубку. Затем я уносил хлеб, а на моей рейке появлялась новая зарубка от пекаря. По прошествии двух недель или месяца зарубки превращались в прекрасные говорящие узоры, так как число зарубок



обозначало число буханок хлеба, взятых в кредит, а сумма к оплате равнялась числу буханок, умноженному на стоимость одной буханки. Не смейтесь над этой маленькой историей, она вполне поучительна, так как напоминает, чему мы научились в детстве. Мы узнали, что число не зависит от формы, природы и того места, где находятся объекты. Мы поняли, что все числа можно получить, прибавляя последовательно единицу к самой себе, и что умножение — это результат сложения равных чисел. Именно об этом рассказывает нам история пекаря.

Ампер и фасоль

Первой способностью, которую проявил юный Андре Мари Ампер, стала способность к арифметике. Еще не зная чисел и не умея записывать их, он выполнял арифметические действия с большими величинами, используя небольшое число камешков или фасолин. Возможно, он следовал тем же путем, что и индийцы; возможно, он располагал камешки в линию подобно тому, как брахманы Пондишери, Калькутты и Варанаси выкладывают зерна в параллельные линии с удивительной быстротой и точностью. Чтобы показать, сколь велика была любовь юного Ампера к вычислениям, скажем, что как-то раз он, будучи разлучен с любимыми фасолками по причине тяжелой болезни, заменил их кусочками бисквита, который ему разрешили съесть после трех дней строжайшей диеты. Закончим эту историю словами Араго: «Я далек от мысли, что этот случай можно считать неоспоримым сви-

детельством того, каким станет призвание Ампера в будущем. Я знаю, что есть дети, лень которых невозможно победить, а другим, напротив, все интересно и их все занимает, даже арифметические действия без определенной цели. Может ли кто-то возмутиться этим обстоятельством? Сочтет ли кто-либо преувеличением поместить действия с числами в один ряд с тем, что мы делаем лишь по необходимости, которая может компенсировать неудовольствие от них? Ответ на этот вопрос мне известен. Я процитирую не простого школьника, а известного мудреца, с которым я поделился своим изумлением, увидев, как посреди заседания академиков он перемножил два огромных ряда чисел, выбранные случайным образом. Он ответил: «Вы забыли об удовольствии, которое я почувствую, доказав правильность моих расчетов последующим делением»».

Вычисления в уме

Развить у детей способности к вычислениям в уме и сделать так, чтобы подобные вычисления доставляли им удовольствие, порой несложно. Когда-то я был знаком с учителем, большинство учеников которого в возрасте от восьми до двенадцати лет знали таблицу умножения вплоть до умножения сто на сто и умели быстро вычислять в уме произведения четырехзначных чисел. Эта способность развивается у некоторых людей поистине удивительным образом; к таким людям относятся сицилийский священник Манджиамелли и священник из Туреня Анри Мондю: оба они выполняли умножение и деление, разбивая числа на группы по три цифры.

Способность к счету в уме нет необходимости развивать чрезмерно, однако, несомненно, будет полезно, если дети овладеют этим навыком в раннем возрасте. Сохранившись до зрелых лет, этот навык поможет при изучении всех наук. Великие математики никогда не относились к вычислениям в уме свысока: и Эйлер, и Валлис были не только выдающимися мудрецами, но и мастерами счета в уме. Без помощи карандаша и бумаги они могли решать сложнейшие арифметические и алгебраические задачи. Валлис обладал удивительной памятью: как-то вечером он вычислил в уме квадратный корень из 15-значного числа, а следующим утром верно продиктовал его. На выполнение аналогичных действий на доске или на листе бумаги мне потребовалось бы свыше часа, но и тогда я не до конца был бы уверен в правильности полученного ответа.

Вычисления возвращают из забытья

Закончим наш рассказ о счете в уме историей из биографии Гаспара Монжа, написанной Араго. Ланьи был известным членом старинной Академии наук. Он любил вычисления и нашел первые 154 знака числа, равного отношению длины окружности к ее диаметру. В конце жизни, будучи тяжело больным, он стал невосприимчив ко всему, в течение многих дней никому не удавалось заставить его проронить хотя бы слово. Однако один из его друзей прошептал ему на ухо: «Сколько будет 12 умножить на 12?», и тот немедленно ответил: «144». Так он вновь вернулся к жизни из забы-



▲► Ампер и Эйлер.



тъя. В другой раз произошло совершенно обратное: когда была потеряна всякая надежда спасти Гаспара Монжа, основателя Политехнической школы, у его постели кто-то спел «Марсельезу». Тот остался равнодушен. Для столь яркого республиканца, как Монж, это было явным знаком близкой кончины.



▲ Сколько воды налил молочник в каждый из двух бидонов с молоком?

1. Хитроумная смесь

Рассказывают, что один честный и простоватый молочник, который гордился своей работой и хвастался тем, что ни один покупатель не оставался недовольным, как-то утром к своему несчастью обнаружил, что его запасов молока не хватит для всех покупателей. И действительно, запасов было недостаточно для всех постоянных покупателей, и не было никакой возможности раздобыть еще молока.

Понимая, как сильно это может ударить по его репутации, не говоря уже о неудобствах для покупателей, он принялся ломать голову над тем, как же выйти из столь затруднительного положения.

Возвращаясь к задаче снова и снова, он решил, что справедливость не позволит ему доставить молоко одним покупателям и обойти вниманием других. Следовало разделить имеющееся молоко между всеми, при этом разбавить молоко водой так, чтобы его хватило всем.

Когда после долгих поисков он раздобыл немного чистой воды, то налил в один из бидонов столько галлонов воды, чтобы разбавленного молока хватило всем покупателям.

Тем не менее, так как он обычно продавал молоко двух сортов, один по восемь, а другой по десять центов за кварту, то он приготовил две смеси следующим хитроумным способом.

Из бидона № 1, в который была налита только вода, он отлил столько воды, чтобы удвоить объем содержимого бидона № 2, в котором было только молоко. Затем он перелил из бидона № 2 в бидон № 1 столько смеси, сколько воды оставалось

в бидоне № 1. После этого, чтобы достичь желаемой пропорции, он перелил из бидона № 1 столько смеси, чтобы удвоить содержимое бидона № 2. При этом, как нетрудно доказать, объем смеси в каждом бидоне оказался одинаковым, однако в бидоне № 2 воды было на 2 галлона больше, чем молока.

Эта задача не так сложна, как может показаться, поскольку достаточно трех переливаний, чтобы объем содержимого в двух бидонах уравнился. Сможете ли вы с точностью определить, сколько молока и воды оказалось в итоге в каждом бидоне?

2. Состязание в стрельбе

Я опытный стрелок и участвовал во многих турнирах, поэтому меня крайне заинтересовало прошедшее недавно состязание в стрельбе, где американцы доказали свое превосходство над французами, пусть и с очень небольшим перевесом: 4 889 к 4 821. Этот турнир проводился одновременно по обе стороны океана, а результаты передавались по телеграфу, что сделало турнир интересным и увлекательным.

Меня позабавили комментарии неискушенных зрителей, заинтригованных особым языком стрелков. Участники турнира постоянно говорили, который час, и при этом всегда ошибались. Многие со всей серьезностью объясняли это разницей во времени между Нью-Йорком и Парижем.



▼ *Покажите, как можно набрать 96 очков с тремя*

«Как ты стрелял?» — спросил один знаток другого. «В половину шестого, но думаю, что попытаюсь в полпятого».

Чтобы объяснить, о чем идет речь, следует указать, что на больших стрельбищах нужно вносить поправку на ветер и расстояние. Поэтому все стрелки смотрели на мишени как на циферблаты часов, и если стрелок целился в центр, а пуля уходила «на пять часов», нужно было целиться «на одиннадцать часов», чтобы попасть точно в центр мишени.

Во время турнира возникло несколько проблем, которые, я уверен, заинтересуют читателей. Например, одна из задач показалась мне столь интересной, что она, вне сомнения, стоит тех усилий, что вам придется потратить на ее решение.

Один из стрелков выбил шестью выстрелами 96 очков, однако после тщательного осмотра мишени выяснилось, что в трех случаях пули дважды прошли через одно отверстие мишени.

На мишени, которую осматривают двое судей, отверстия в мишени обведены кругами. Можете ли вы определить, как тремя дуплетами набрать итоговую сумму в 96 очков?

лий, что вам придется потратить на ее решение.

Один из стрелков выбил шестью выстрелами 96 очков, однако после тщательного осмотра мишени выяснилось, что в трех случаях пули дважды прошли через одно отверстие мишени.

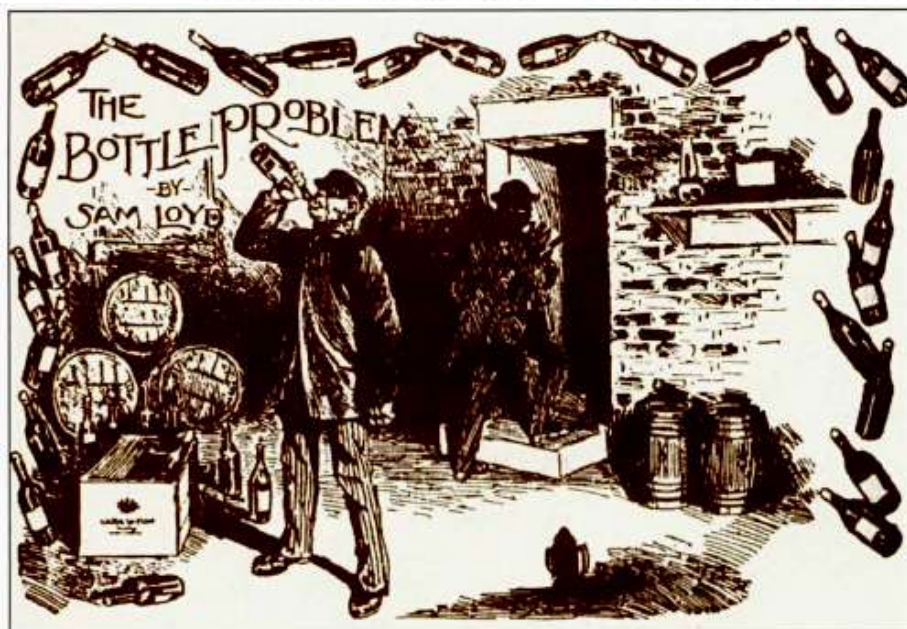
На мишени, которую осматривают двое судей, отверстия в мишени обведены кругами. Сможете ли вы определить, как тремя дуплетами набрать итоговую сумму в 96 очков?

3. Задача о бутылках

Приведу небольшую задачу на вычитание и деление, которая показывает, как важна элементарная арифметика. Тем не менее, любители числа могут попытаться решить эту головоломку, так как она требует скорее проницательности Шерлока Холмса, чем знаний математики.

Винный погреб одного джентльмена, по-видимому, был ограблен: пропало две дюжины бутылок с вином, которые воры унесли с собой. Им удалось бы сохранить награбленное, если бы они смогли разделить бутылки столь же умело, как и отнять.

Воры взяли дюжину бутылок в четверть литра и дюжину бутылок шампанского объемом в одну



▲ Как ворам разделить поровну полные и пустые бутылки?

пинту, но сочли их слишком тяжелыми, чтобы унести с собой. Чтобы облегчить ношу, воры выпили пять бутылок объемом в четверть и пять — объемом в пинту, осушив их в честь кандидатов на предстоящих выборах в муниципалитет. Чтобы не оставлять следов, воры унесли бутылки с собой (кроме того, сами бутылки были весьма ценными). Тем не менее, прибыв в условленное место, они не смогли поровну разделить семь полных и пять пустых бутылок в одну четверть, равно как и семь полных и пять пустых бутылок объемом в одну пинту так, чтобы каждому досталось вина и бутылок на равную сумму. Возможно, разделить бутылки было бы намного проще, если бы воры не выпили так много вина.

Они были настолько глупы, что не хранили молчание, как следует поступать в таких случаях, а стали спорить и устроили перебранку. Это привлекло внимание двух полицейских, которые застали их с полчным и выпили все шампанское, заполучить которое им стоило стольких трудов. Однако это обстоятельство, равно как и то, что произошло с бутылками и как были наказаны воры на следующий день, не имеет никакого отношения к задаче.

Я закончу свой рассказ на этом, чтобы вы не подумали, будто я знаю об этом преступлении слишком много. Я прошу читателей указать, сколько было воров и как они могли поровну разделить между собой семь бутылок с вином и семь пустых бутылок объемом в одну четверть, а также семь бутылок с вином и семь пустых бутылок

объемом в одну пинту. Разумеется, переливать вино из одной бутылки в другую нельзя. Любой опытный вор скажет вам, что с шампанским нельзя поступать подобным образом, поэтому использовать эту уловку в решении нельзя. (Примечание редактора: одна четверть равна двум пинтам.)

Решения

1. У честного молочника было 5 галлонов молока в бидоне № 2 и 11 галлонов воды в бидоне № 1. В результате описанных операций в первом бидоне окажется 6 галлонов воды и 2 галлона молока, во втором бидоне — 5 галлонов воды и 3 галлона молока.

2. Стрелок два раза выбил 25 очков, два раза — 20 и два раза — 3.

3. На рисунке к задаче о бутылках изображены всего два вора, однако не нужно быть Шерлоком Холмсом, чтобы определить, что

воров на самом деле было трое. Им нужно было разделить 21 пинту вина (12 больших бутылок и 12 маленьких), и это число делится без остатка только на 3. Один из воров взял 3 полные бутылки и 1 пустую бутылку объемом в одну четверть, 1 полную и 3 пустых бутылки объемом в пинту. Остальные взяли по 2 полным и 2 пустых бутылки объемом в одну четверть и 3 полным и 1 пустую бутылку объемом в одну пинту. Таким образом, каждому досталось по 3,5 четверти вина, 4 больших и 4 маленьких бутылки.