составитель Е.МАНОХА

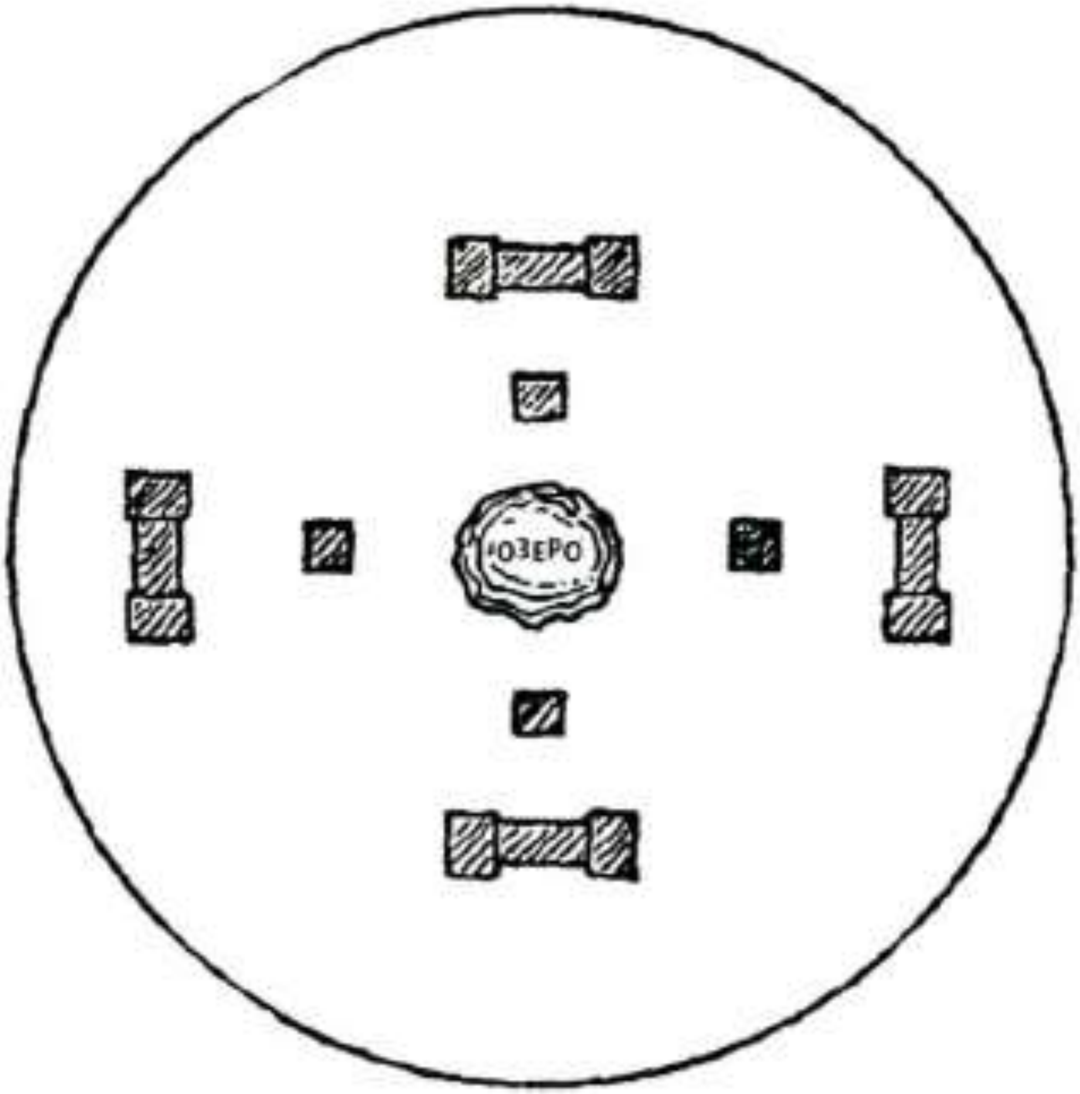
занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

7

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

1. Задача о стене

Четверо бедняков построили свои хижины вокруг небольшого озера. Затем четверо богачей построили свои поместья так, как показано на рисунке, и решили прибрать озеро к рукам. Они попросили архитектора построить стену наименьшей длины так, чтобы отгородить бедняков от озера, а самим беспрепятственно проходить к нему. Как следует построить стену?



2. Задача о бумажном змее

Однажды я с моим другом, профессором в одной из областей науки, запускал бумажных змеев на юге Суссекса. Тогда же я провел некоторые вычисления, которые заинтересуют моих читателей. К воздушному змею была привязана веревка, остаток которой был плотно намотан на вал так, что получился идеальный шар. Этот шар имел 24 дюйма в диаметре, диаметр самой веревки равнялся одной сотой дюйма. Какова длина веревки?

Этот простой и понятный вопрос может сбить с толку многих. Посмотрим, сможете ли вы, не углубляясь в вычисления, получить приближенный ответ, скажем, с точностью до 100 000 дюймов. Будем считать, что свернутая веревка имеет форму сплошного шара, и не будем учитывать толщину вала, на который она намотана. Мне интересно, сколько читателей смогут вычислить длину веревки с указанной точностью.

3. Папина головоломка

Я предлагаю читателям задачу Паппа, жившего в Александрии в конце III века. Это пятая задача восьмой книги его «Математического собра-

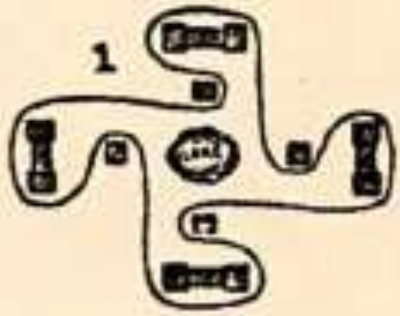
ния». Я привожу ее в том же виде, что и много лет назад, когда я предложил ее читателям под названием «Папина головоломка», чтобы узнать, догадаются ли они, что автором этой задачи является сам Папп.

Отец взял два картонных прямоугольника разной ширины и вырезал из одного из них треугольный фрагмент так, что, если этот кусок картона подвесить на нити, проходящей через точку А, его длинная сторона будет расположена строго горизонтально, как показано на рисунке. Папа предложил дочери найти точку А для другого куска картона такую, что, если отрезать от него треугольную часть аналогичным образом, его длинная сторона также была бы расположена горизонтально.

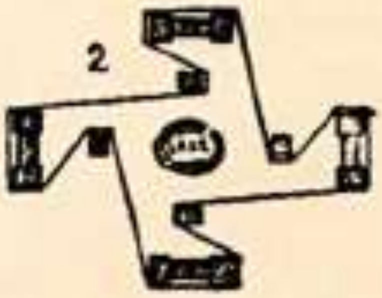
Разумеется, положение этой точки нужно рассчитать, а не определить экспериментально. Эта задача имеет одно очень интересное следствие. Сможете ли вы найти его?

1. Ответ, который приводится в старых книгах, изображен на рис. 1, где показано, как построить криволинейную стену по условиям задачи. Однако нас интересует самая короткая стена из возможных. Вспомним, что кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая, и получим результат, показанный на рис. 2. Разумеется, эта стена короче предыдущей, однако правильным ответом будет тот, что изображен на рис. 3. Если вы измерите длину этой стены, то обнаружите, что она существенно короче той, что изображена на рис. 2.

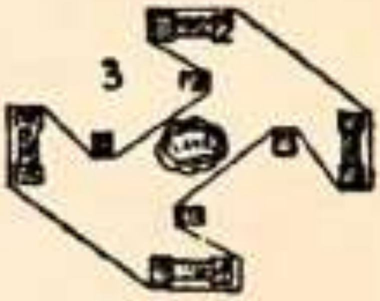
1



2

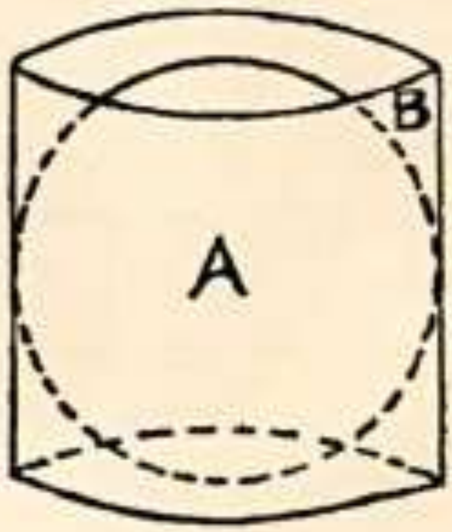


3



2. Я обнаружил, что тех, кто пытается решить эту задачу, можно разделить на две группы. Первые пытаются найти ответ с помощью более или менее сложных вычислений, в которых используется число π, вторые используют более простые расчеты, которые, увы, дают результат, неимоверно далекий от правильного. Я представлю сравнительно простой

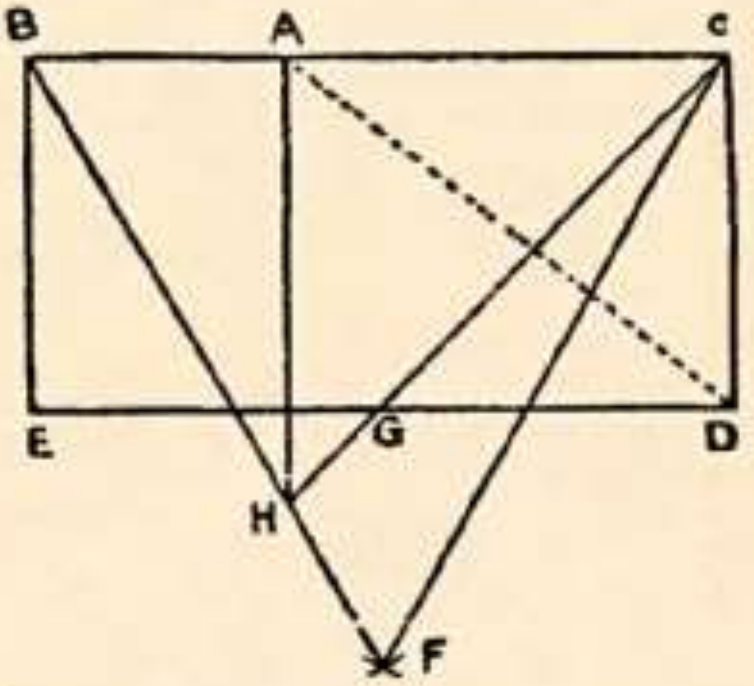
Я представлю сравнительно простой метод, в котором не используется расчет диаметра окружности. Я назвал его методом шляпного мастера.



Представим, что мы положили наш шар из веревки (A) в коробку для шляпы цилиндрической формы (B) так, что шар идеально вписывается в коробку, касаясь ее боковых граней, а также верхней и нижней стороны. Согласно правилу, которое должен знать каждый, в эту коробку может поместиться еще половина объема сферы. Следовательно, так как сфера имеет диаметр 24 дюйма, коробка для шляпы того же диаметра и высотой, равной 2/3 диаметра сферы (иными словами, 16 дюймов), будет точно равна шару по объему.

Теперь предположим, что эта коробка для шляпы — металлический цилиндр, составленный из множества веревочных цилиндров, скрепленных подобно волоскам кисточки. По условию задачи свободное пространство между веревками отсутствует. Сколько нужно таких цилиндров толщиной в одну сотую дюйма, чтобы составить большой цилиндр шириной в 24 дюйма? Площади окружностей относятся между собой как квадраты их диаметров. $(1/100)^2 = 1/10\,000$, $24^2 = 576$. Следовательно, большой цилиндр вместит 5 760 000 маленьких цилиндров. Но мы уже показали, что каждый из этих маленьких цилиндров имеет длину 16 дюймов. Следовательно, общая длина веревки составит $16 \times 5\,760\,000 = 92\,160\,000$ дюймов. Если мы переведем эту величину в мили, получим, что длина веревки, к которой прикреплен воздушный змей профессора, равна примерно 1 454,5 мили (2 240 километра). Оставим в стороне размышления о том, действительно ли змей может подняться на такую высоту и не оборвется ли веревка под собственной тяжестью.

3. Многие считают, что ниже представлен верный ответ к задаче. Они утверждают, что если расстояние будет BA равно одной трети BC, и, как следствие, площадь прямоугольника ABE будет равна щадь прямоугольника ABE будет равна площади оставшегося треугольника, то при подвешивании длинная сторона фигуры будет располагаться строго горизонтально.



Читатели наверняка помнят шутку Карла II, который предложил Королевскому обществу обсудить вопрос, почему уровень воды в сосуде не поднимается, если опустить туда живую рыбу. Посреди жарких споров один из членов Общества незаметно вышел из комнаты и провел эксперимент, обнаружив, что уровень воды в сосуде в действительности поднимается. Если читатель проведет экспери-

мент с куском картона, то мгновенно обнаружит, что вышеприведенные расчеты неверны. Площадь фигуры — одно дело, сила притяжения — совершенно другое. Треугольник будет наклонен в сторону вершины D. Это нужно скомпенсировать, увеличив площадь прямоугольника.
В действительности отношение длин отрезков BA и AC равно $1/\sqrt{3}$. Это число нельзя выразить абсолютно точно, $\sqrt{3} \approx 1{,}732$. Рассмотрим правильное решение в общем виде. Его можно получить многими способами, но приведенный мной кажется мне наиболее простым.

Нарисуйте равносторонний треугольник BCF, где BF = CF = BC. Обозначьте точку G так, чтобы DG равнялось DC. Проведите линию CG до пересечения с BF в точке H. Проведем HA параллельно BE. Именно вдоль линии, соединяющей точку A и угол D, и должен пройти разрез, обозначенный пунктирной линией.

С этой задачей связан любопытный факт: положение точки A не зависит от размера стороны CD. Это лучше всего видно в приведенном мной решении, чем в остальных. Я предпочел изложить здесь этот вариант решения именно по этой причине, хотя задачу можно решить так, что все линии при построении пройдут внутри картонного прямоугольника. Если мы начнем уменьпрямоугольника. Если мы начнем уменьшать ширину прямоугольника и будем приближать E к B и D к C, то линия CG, которая является диагональю квадрата, всегда будет указывать в неизменном направлении и будет пересекать BF в точке H. Наконец, если мы захотим рассчитать приближенное значение длины BA, нужно всего лишь умножить длину прямоугольника на 0,366. Так, если длина прямоугольника равна 7 дюймам, получим $7 \times 0,366 = 2,562$, то есть немногим больше двух с половиной дюймов.

Однако задача любопытна еще и по другой причине. Вы увидели, что положение точки A не зависит от ширины картонного прямоугольника, а только от его длины. Следовательно, чтобы решить задачу, девочке нужно положить обрезанный прямоугольник поверх другого и обозначить точку A на том же расстоянии от верхнего левого угла. Поэтому с задачей Паппа вполне может справиться и ребенок, который не знает ни физики, ни геометрии.

◄ *Стол был сервирован как для банкета с той лишь разницей, что вместо привычных приборов на нем были разложены письменные принадлежности.*

Узелок 10
Пирожки (часть вторая)

Пирожки, пирожки, горячие пирожки!

— Добро пожаловать, м'м, милости просим! — приветствовал тетушку представительный дворецкий. (Заметим кстати, что произнести подряд три «м», не вставив между ними ни единого гласного, может далеко не всякий. Это под силу лишь дворецкому, искушенному во всех тонкостях своей профессии.) — Вас уже ожидают в библиотеке.

Полный аншлаг!

— Как он смеет говорить о твоем отце «дуршлаг», да к тому же «полный»! — негодующе прошипела на ухо племяннице Безумная Математильда, когда они пересекали просторную гостиную. — Да нет же, тетя, он просто хотел сказать, что все в сборе, — едва успела прошептать в ответ Клара, как дворецкий ввел их в библиотеку. При виде открывшегося перед ней зрелища Клара лишилась дара речи. За столом в торжественном молчании замерли пять человек: Хью, Ламберт, Норман и Бальбус.

Во главе стола восседал отец. Не нарушая тишины, он молча указал Кларе и Безумной Математильде на пустые кресла справа и слева от себя. Стол был сервирован как для банкета с той лишь разницей, что вместо привычных приборов на нем были разложены письменные принадлежности. По всему было видно, что дворецкий вложил много выдумки в эту злую шутку. Вместо тарелок перед каждым из присутствовавших был положен лист бумаги, вместо ложки и вилки слева и справа от каждого прибора лежали ручка с пером и карандаш. Роль ломтика хлеба исполняла перочистка, а там, где обычно стоит бокал для вина, красовалась чернильница. Украшением стола — главным блюдом — служила обтянутая зеленым сукном шкатулка. Когда пожилой джентльмен, сидевший во главе стола, встряхивал ее, а делал он это беспрерывно, она издавала мелодичный звон, словно внутри ее находилось бесчисленное множество золотых гиней. — Сестра! Дочь моя! Сыновья! И... и Бальбус! — начал пожилой джентльмен столь неуверенно, что Бальбус счел необходимым заявить о полном согласии со сказанным, а Хью — забарабанить кулаками по столу. Столь лестные знаки внимания окончательно сбили с толку неопытного оратора. — Сестра! — начал он снова, затем помолчал и, встряхнув шкатулку, продолжил с лихорадочной поспешностью: — Сегодня я... некоторым образом... э... собрал вас... э... по поводу знаменательного события... В этом году... одному из моих сыновей исполняется... — и тут он снова умолк в полном замешательстве, ибо достиг середины речи намного раньше намеченного времени, но возвращаться было уже поздно. — Совершенно верно! — воскликнул Бальбус. — Вот именно! — ответствовал пожилой джентльмен, который понемногу начал приходить в себя. — Мысль о том, чтобы ежегодно дарить каждому из сыновей столько гиней, сколько лет ему исполняется в текущем году, пришла мне в голову в весьма знаменательное время. Надеюсь, мой друг Бальбус поправит меня («Еще как поправит! Ремнем!» —

прошептал Хью, но его никто не услышал, кроме Ламберта, который нахмурился и укоризненно покачал головой), если я ошибаюсь. Так вот, эта мысль, повторяю, пришла мне в голову именно в тот год, когда, как сообщил мне Бальбус, сумма возрастов двух из вас была равна возрасту третьего. По этому случаю, как вы все, конечно, помните, я произнес речь... Бальбус счел, что настал подходящий момент для того, чтобы вставить несколько слов, и начал: — Это была самая... — Произнес речь... — уколол его предостерегающим взглядом пожилой джентльмен. — Несколько лет назад Бальбус сообщил мне... — Совершенно верно, — подтвердил Бальбус. — Вот именно, — кивнул благодарный оратор и продолжил: — ... Я говорю, Бальбус сообщил мне о другом не менее знаменательном событии — что сумма возрастов двух из вас в тот год оказалась вдвое больше возраста третьего. По этому поводу я тоже произнес речь, — разумеется, не ту, что в первом случае. В этом году — как утверждает Бальбус — мы присутствуем при третьем знаменательном событии, и я... (тут Безумная Математильда многозначительно посмотрела на часы) ...я тороплюсь изо всех сил, — воскликнул пожилой джентльмен, демонстрируя ясность духа и полное самообладание, — и перехожу к существу дела. Число лет, протекших со времени первого знаменательного события, составляет ровно две третьих от числа гиней, которые я вам тогда подарил. Мальчики! Пользуясь этими данными, вычислите свой возраст, и вы получите от меня ежегодный подарок! — Но мы и так знаем свой возраст! — воскликнул Хью.

— Замолчите, сэр! — вне себя от негодования вскричал отец, выпрямляясь во весь рост (составлявший ровно пять футов и пять дюймов). — Я сказал, что при решении вы имеете право пользоваться только данными задачи, а не гадать о том, сколько кому лет.

— Ты также получишь от меня такой же подарок, как мальчики, если сумеешь решить задачу, — шепнула Безумная Математильда племяннице и вышла вслед за братом.

Перо бессильно передать, с какой торжественностью встали из-за стола брат и сестра. Мог ли, спрашиваем мы, отец хитро улыбнуться в такую минуту при виде своих удрученных сыновей? Могла ли, спрашиваем мы, тетушка лукаво подмигнуть своей приунывшей племяннице? Были ли похожи на сдавленный смех те звуки, которые раздались, когда Бальбус, выйдя из комнаты вслед за хозяином дома и его сестрой, прикрывал за собой дверь? Нет, нет и нет! И все же дворецкий рассказал потом кухарке, что... Впрочем, не станем же мы повторять всякие сплетни.

Ночные тени сжалились над молчаливой мольбой несчастных и «не сомкнулись над ними» (поскольку дворецкий внес лампу). «Во тьме ночной (те же услужливые тени, но в концентрированном виде) было слышно порой, как где-то залает собака» (на заднем дворе всю ночь напролет пес выл на луну). Но ни «когда утро настало», ни позже сестра и трое братьев «не воспрянули духом» — они так и не смогли обрести былое душевное спокойствие, навсегда покинувшее их после того, как все эти задачи обрушились на них и увлекли на путь нескончаемых страданий.

— Вряд ли честно, — пробормотал Хью, — задавать нам такие головоломные задачи.

— Нечего сказать — честно! — с горечью подхватила Клара. Всем моим читателям я могу лишь повторить слова Клары и честно признаться:

— **Больше мне сказать нечего! До свиданья!**

Решение

ЗАДАЧА О ВОЗРАСТЕ СЫНОВЕЙ

Условие

Некогда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего сына. Через несколько лет сумма их возрастов стала равна удвоенному возрасту третьего сына. Когда число лет, прошедших с тех пор, когда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего, составит 2/3 от суммы возрастов всех трех сыновей, третьему сыну исполнится 21 год. Сколько лет будет двум другим сыновьям?

Ответ

15 и 18 лет.

Решение

Обозначим возраст сыновей в момент первого знаменательного события x, y, $(x + y)$. Заметим, что если $a + b = 2c$, то $(a - n) + (b - n) - 2(c - n)$ при любых n. Следовательно, последнее соотношение, коль скоро оно выполняется хоть когда-нибудь, выполняется всегда, в частности в момент первого знаменательного события. Но по условию задачи сумма возрастов двух сыновей (x и y) в этот момент равна возрасту третьего и, следовательно, не может быть вдвое больше возраста третьего $(x + y)$. Следовательно, условие должно выполняться для суммы возраста третьего сына $(x + y)$ и возраста какого-нибудь из первых двух сыновей, то есть x или y (какого именно, безразлично).

Предположим, например, что $x + y + x = 2y$, тогда $y = 2x$. Таким образом, в момент первого знаменательного события возрасты сыновей образуют арифметическую прогрессию x, $2x$, $3x$, а число лет, прошедших с тех пор, составляет 2/3 от $6x$, то есть равно $4x$. Итак, в момент, когда отец произносил свою последнюю торжественную речь, его сыновьям исполнилось по $5x$, $6x$ и $7x$ лет. Возраст любого из сыновей выражается целым числом. Об этом свидетельствует то место в речи отца, где говорится: «В этом году одному из моих сыновей исполняется…». Поэтому $7x = 21$, $x = 3$, $5x = 15$ и $6x = 18$.

Игра со множеством решений

Треугольный солитер

Многие игры существуют в большом количестве вариантов и версий. Некоторые из них благодаря их новизне и оригинальности по праву можно назвать отдельными играми. Такой игрой является треугольный солитер, который отличается от обычной игры солитер тем, что доска имеет треугольную форму, из-за чего в игре возникает множество новых и интересных ситуаций. Цель и правила игры ничем не отличаются от цели и правил обычного солитера.

История о прыжках

По классификации головоломок Джерри Слокума треугольный солитер относится к головоломкам с последовательным перемещением элементов.

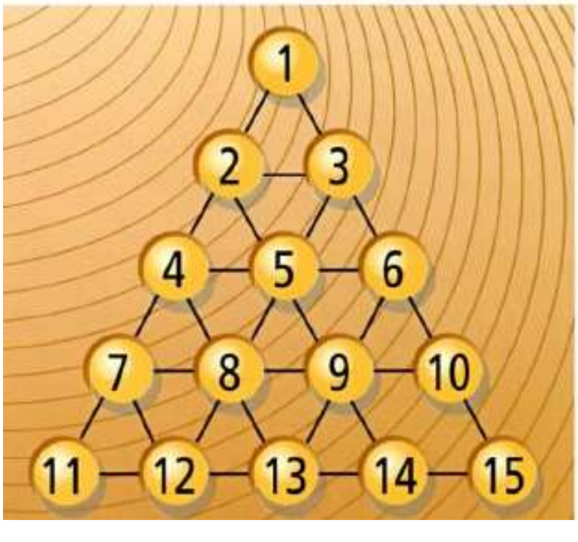
Первой из подобных игр является древняя настольная игра халма (от греческого «прыжок»). Халма также лежит в основе китайских шашек. Правила треугольного солитера таковы: фишки можно перемещать в любую соседнюю клетку; чтобы убрать фишку с поля, через нее нужно перепрыгнуть другой фишкой. Среди множества игр с такими правилами выделяется игра Сэма Лойда «Who will get the nomination?», созданная в 1908 году к очередным президентским выборам в США. На игровом поле 5 × 5 располагались девять фишек с портретами кандидатов. Согласно правилам, нужно было убрать с доски восемь фишек и оставить одну с портретом выбранного кандидата.

Первое упоминание об игре солитер принадлежит Готфриду Вильгельму Лейбницу (1646–1716), который подробно изучил ее и сформулировал несколько интересных задач для традиционной версии и для версии с треугольной доской.

◄ *Цель игры треугольный солитер заключается в том, чтобы найти решение для всех возможных начальных положений шариков на игровом поле. Каждому начальному положению соответствует множество решений. Особо выделяются те решения, где последний шарик остается в ячейке, которая изначально была пустой. Особый интерес также представляют решения, в которых последний шарик остается в одной из трех центральных ячеек.*

Обозначения и симметрия

На рисунке приведены обозначения, которые мы будем использовать далее при всех объяснениях.

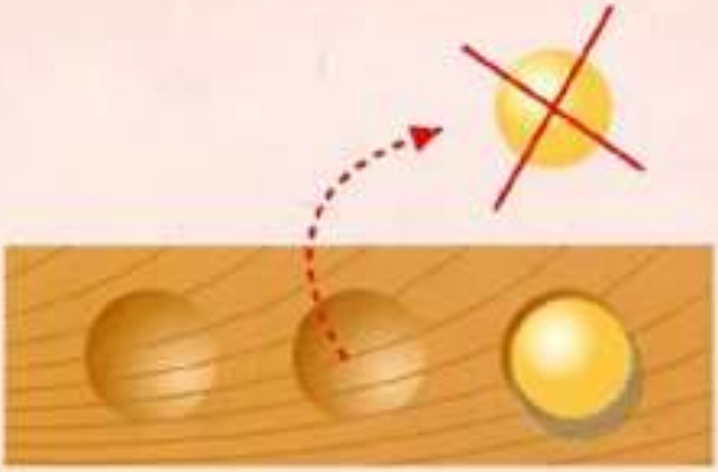


Правила игры

На доске с 15 ячейками расположено 15 шариков. Цель игры — убрать с доски все шарики, кроме одного. В начале игры нужно удалить один из шариков, выбранный произвольно. Далее нужно выбрать один из шариков и перепрыгнуть соседний так, чтобы занять пустую ячейку.

Шарик, через который мы перепрыгиваем, убирается с доски.

Этот ход всегда выполняется по прямой линии, параллельной одной из сторон треугольника. Если мы, например, уберем шарик в одной из вершин игрового поля, то можно будет сделать один из двух возможных ходов, которые являются симметричными.



Так как в начале игры нужно убрать с доски один из шариков, существует 15 возможных исходных позиций. Однако с учетом симметрии и поворотов остается всего четыре начальные позиции.

Начальная позиция 1: равносильна 11 и 15.

Начальная позиция 2: равносильна 3, 7, 10, 12 и 14.

Начальная позиция 4: равносильна 6 и 13.

Начальная позиция 5: равносильна 8 и 9.

Некоторые примечательные решения

Ходы обозначаются двумя числами, разделенными косой чертой. Первое число обозначает ячейку, из которой нужно переместить шарик, второе — ячейку, куда совершается прыжок. Во всех решениях последний шарик занимает ячейку, которая в начальной позиции была пустой. Подсчет общего числа решений для каждого случая был выполнен Биллом Батлером с помощью компьютера.

▶ *В таблице приведено число решений головоломки треугольный солитер, рассчитанное Биллом Батлером с помощью компьютера.*

Пустая ячейка в позиции 1.

Если пустая ячейка расположена в одной из вершин треугольника, существует 29 760 последовательностей ходов, в результате которых на доске остается единственный шарик. В 6816 из этих решений последний шарик занимает ячейку, которая изначально была пустой. Ниже приведено одно из этих решений:

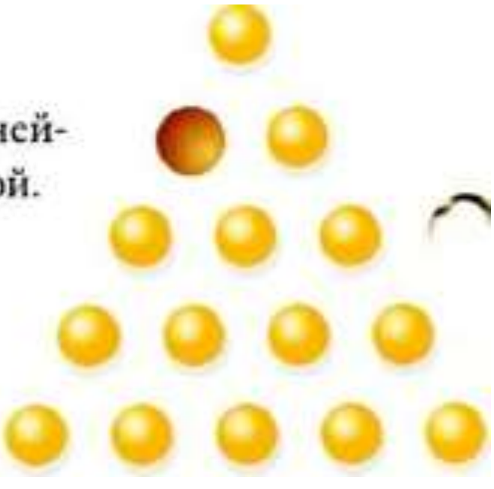
6/1 — 13/6 — 15/13 — 12/14 — 10/3 — 4/13 — 14/12 — 11/13 — 3/8 — 1/4 — 7/2 — 13/4 — 4/1.

Пустая ячейка в позиции 2.

Для этой позиции существует 14 880 последовательностей ходов, в результате которых на доске остается единственный шарик. Всего в 720 из них последний шарик занимает ячейку, которая изначально была пустой.

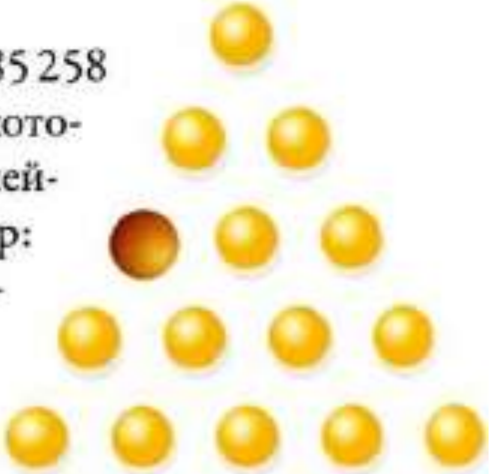
Пример:

7/2 — 13/4 — 15/13 — 12/14 — 6/13 — 14/12 — 11/13 — 2/7 — 1/6 — 10/3 — 3/8 — 13/4 — 7/2.



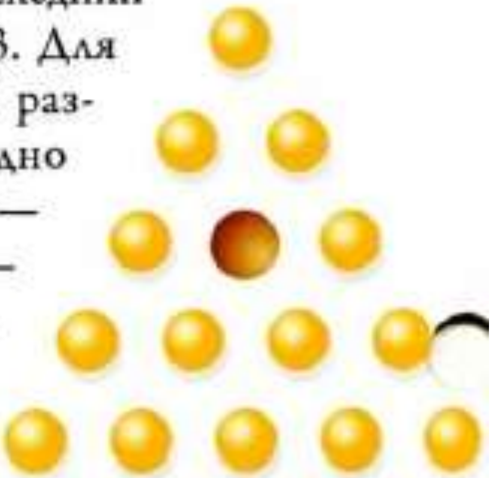
Пустая ячейка в позиции 4.

Для этой позиции существует 85 258 различных решений, в 51 452 из которых последний шарик занимает ячейку, изначально пустую. Например: 13/4 — 15/13 — 12/14 — 10/8 — 7/9 — 6/13 — 14/12 — 11/13 — 3/8 — 2/7 — 13/4 — 7/2 — 1/4.



Пустая ячейка в позиции 5.

Если пустая ячейка находится в центре доски, то решения будут отличаться от остальных. Так, если изначально пустой является ячейка 5, то во всех решениях последний шарик будет занимать ячейку 13. Для этой позиции существует 1550 различных решений. Приведем одно из них в качестве примера: 14/5 — 12/14 — 7/9 — 10/8 — 3/10 — 15/6 — 2/7 — 6/4 — 7/2 — 1/4 — 4/13 — 14/12 — 11/13.



Дополнения Лейбница

Лейбниц, которому очень нравилась игра солитер и который глубоко изучил ее, создал обратный вариант игры, где требовалось получить исходную позицию из конечной. Прыжки совершались наоборот — если шарик перепрыгивал через пустую ячейку в следующую, также пустую, то в ту ячейку, через которую был совершен прыжок, ставился шарик. И в исходной, и в обратной версии игры при прыжке создается положение, «дополняющее» исходное (пустую ячейку занял шарик, а ячейка, где находился шарик, осталась пустой). Существует множество интересных игр на доске треугольного солитера, в которых используются обратные ходы и дополняющие позиции (см. раздел «Ссылки с дополнительной информацией»).

исходная позиция

финальная позиция

1. Две индейки

«Эти две индейки вместе весят 20 фунтов, — сказал мясник. — Каждый фунт маленькой индейки стоит на два цента больше, чем каждый фунт большой».

Госпожа Смит купила маленькую индейку за 82 цента, госпожа Браун заплатила за большую 2 доллара 96 центов. Сколько весит каждая индейка?

2. Кошка против собаки

Много лет назад, когда цирк Барнума действительно был «величайшим шоу на Земле», его знаменитый владелец попросил меня придумать для него несколько головоломок. Он хотел опубликовать их и назначить приз тому, кто пришлет верное решение. Большую известность приобрели «Вопросы сфинкса», так как давшему правильный ответ был обещан большой приз.

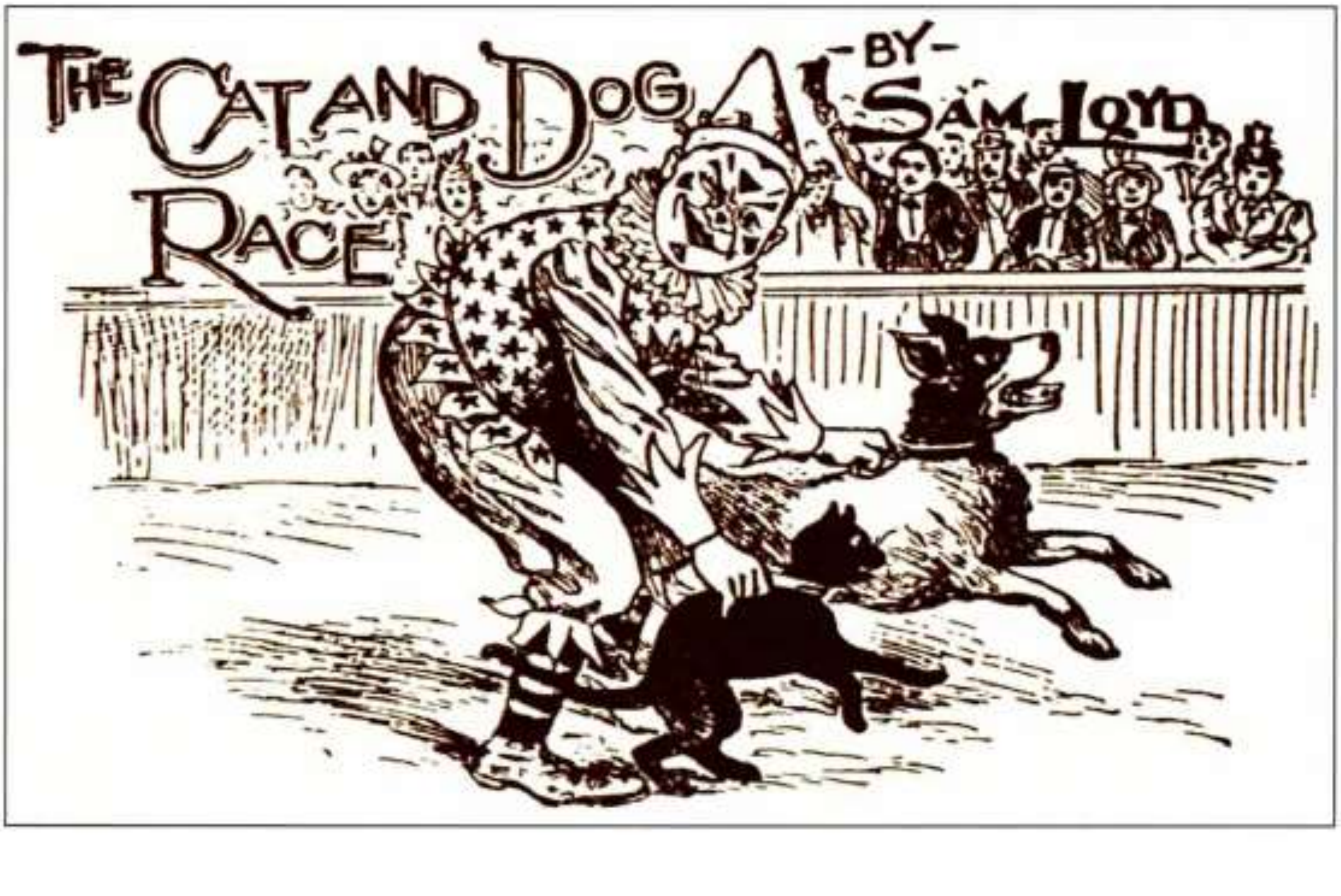
Барнуму особенно понравилась задача о кошке и собаке. Он объявил, что любой, кто даст верный ответ до 1 апреля, получит приз, или, по его собственным словам, он «больше не будет держать кота в мешке и выпустит его к удовольствию всех заинтересованных».

Задача звучала так:

«Обученные кошка и собака должны пробежать расстояние в 100 футов и вернуться обратно. С каждым прыжком собака приближается к финишу на три фута, кошка — всего на два, но Марлен совершает три прыжка за то же время, за которое Терри совершает два. Каков возможный исход забега в этих условиях?»

Ввиду того, что правильный ответ был опубликован первого апреля, в День дурака, и сам Барнум упомянул кота в мешке, многие заподозрили, что великий циркач придержал карту в рукаве.

▼ *Кто победит — собака или кошка?*



3. Корова, коза и гусь

Некий голландец, у которого были коза и гусь, повстречал девушку, ведущую за собой корову. Увидев его, испуганная девушка закричала.

— Чего ты испугалась? — спросил Ганс.

— Ты поцелуешь меня против моей воли, — ответила застенчивая девушка.

— Как же я смогу это сделать, когда у меня в руках коза и гусь? — спросил Ганс.

— Что мешает тебе воткнуть посох в землю, привязать к нему козу и накрыть гуся моим ведром? — спросила девушка.

— Твоя сердитая корова меня забодает, — сказал Ганс.

— Ой, эта глупая корова никого не бодает. Почему бы тебе не отвести всех трех животных на мое пастбище? — ответила напуганная девушка.

И здесь возникает интереснейшая задача, поскольку во время последовавшего спора выяснилось несколько занимательных фактов. Выяснилось, что коза и гусь вместе съедают столько корма, сколько корова; на пастбище достаточно травы, чтобы прокормить козу и корову в течение 45 дней, либо корову и гуся в течение 70 дней, либо козу и гуся в течение 90 дней. На сколько дней хватит корма для коровы, козы и гуся? Ответить нужно быстро, так как Ганс и Катрина не могут ждать.

4. Парад в день Святого Патрика

Во время недавнего парада в день Святого Патрика возникла любопытная задача. Грандмаршал по традиции объявил, что члены почетного и древнего ордена Хайбернов пройдут на параде днем, если утром пойдет дождь, и пройдут утром, если дождь будет днем. Из-за этого многие люди подумали, будто на день Святого Патрика обязательно пойдет дождь. Кейси хвастался, что уже четверть века он марширует на военном параде в день Святого Патрика — еще с тех пор, когда был юношей.

Я не буду подробно останавливаться на его комментарии и скажу, что даже после того как Кейси в конце концов сломили возраст и пневмония, он незримо шествовал вместе с бессмертной процессией.

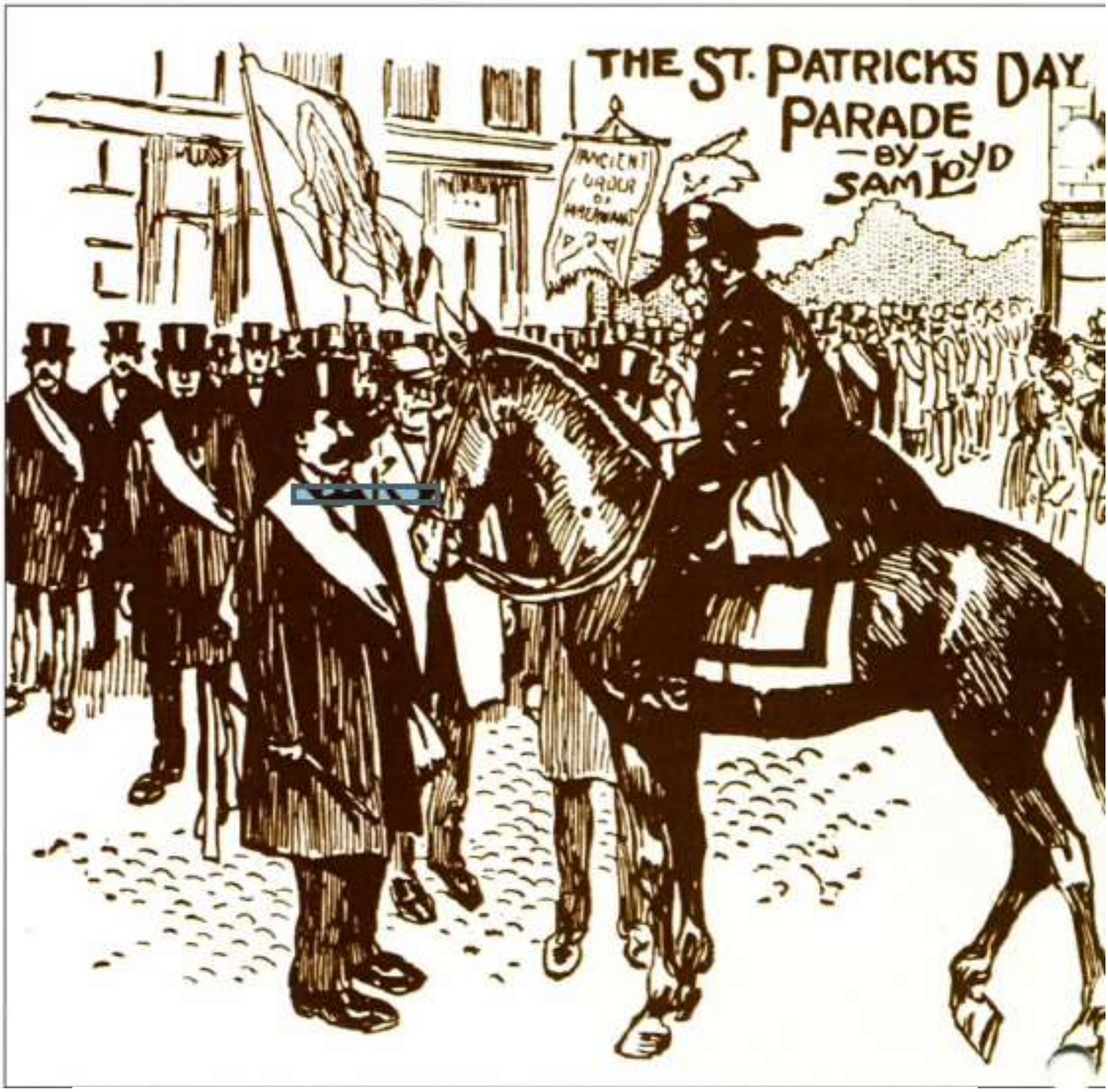
Когда юноши вновь собрались, чтобы воздать почести Святому Патрику 17 марта, то обнаружили, что в их рядах имеется постыдное пустое место. Парад превратился в похоронную процессию, исполненную паники.

Юноши по обычаю выстроились в шеренги по десять и прошли один или два квартала в этом строю, причем в последней шеренге, где обычно маршировал Кейси по причине больной левой ноги, было всего девять человек. Звуки оркестра заглушались криками зрителей, которые спрашивали, что случилось с хромым, и участники парада подумали, что будет лучше сменить строй и встать по девять человек в шеренге, так как построиться по одиннадцать человек в шеренге было невозможно.

Но им вновь не хватило Кейси, и процессия задержалась, когда обнаружилось, что в последней шеренге всего восемь человек. Юноши поспешили построиться в шеренги по восемь, затем по семь, пять, четыре, три и даже два человека, но всякий раз в последнем ряду оставалось пустое место для Кейси. Хотя это может показаться нелепым, но юноши во всех шеренгах стали перешептываться: всякий раз, когда они начинали маршировать, им якобы слышался звук волочащейся ноги Кейси. Они были настолько уверены в том, что призрак Кейси марширует среди них, что никто не осмелился замкнуть шествие.

Однако грандмаршал был умным и сообразительным человеком и без промедления приказал, чтобы юноши маршировали колонной по одному так, что если бы дух Кейси действительно был среди них, он замкнул бы длинную процессию в честь святого Патрика.

Если предположить, что число участников парада не превышало 7000, сможете ли вы определить, сколько юношей принимало участие в этом мероприятии?



▲ *Сколько юношей участвовало в параде?*

Решения

1. Большая индейка весила 16 фунтов, маленькая — 4 фунта.

2. Разумеется, выиграет кошка. Чтобы пробежать нужное расстояние и вернуться, ей потребуется ровно 100 прыжков. Собаке же придется пробежать 102 фута и вернуться обратно, потому что после тридцать третьего прыжка собака пробежит 99 футов. Следовательно, потребуется еще один прыжок, после которого она окажется на 2 фута дальше последней отметки. Собаке понадобится всего 68 прыжков, чтобы прийти к финишу. Так как собака движется со скоростью, равной 2/3 скорости кошки, то когда последняя совершит 100 прыжков, собака не успеет совершить 67 прыжков.

Однако у Барнума был еще один туз в рукаве. Допустим, что кошку зовут Терри, а собаку — Марлен. Фраза «Марлен совершает три прыжка за то же время, за которое Терри совершает два» означает, что собака пробежит 9 футов, в то время как кошка пробежит всего 4. Так, собака совершит 68 прыжков и придет к финишу первой, а кошка за это время преодолеет всего 90 футов и 8 дюймов.

3. В задаче о пастбище нужно учитывать, что трава растет каждый день. По условию, корова ест столько же, сколько коза и гусь. Следовательно, если корова и коза съедят всю траву, которая растет на поле, и всю, которая вырастет, за 45 дней, очевидно, что две козы и гусь сделают это за такое же время. Так как козе и гусю хватит корма на в два раза большее время, коза съест траву, которая изначально росла на поле, за 90 дней, в то время как гусь будет кормиться травой, которая вырастет за это время. Следовательно, если корова съедает 1/60 «корма» в день, коза — 1/90, вместе они съедают 1/36. Так, корова и коза съедят траву за 36 дней, а гусь будет съедать всю траву, которая будет вырастать ежедневно.

4. Когда Кейси был жив, число участников парада делилось без остатка на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10. Найдем наименьшее общее кратное этих чисел, 2520, и вычтем 1, чтобы получить число участников парада без Кейси. Это число и было бы ответом к задаче, если бы не фраза «построиться по одиннадцать человек в шеренге было невозможно». Так как 2 519 делится на 11, нужно взять следующее общее кратное, 5040, и вычесть 1. Получим 5039. Так как это число не делится на 11, а следующие общие кратные превышают 7000, можно сделать вывод, что 5039 является единственным верным ответом.

Девятью достоинствами они зовутся.
Драйден. «Цветок и лист»

Я представляю вашему вниманию эти задачи о девяти цифрах, которые выделяю в отдельный класс задач, поскольку всегда считал, что они заслуживают большего внимания, чем им обычно уделяют. Помимо простого трюка, который заключается в удалении девяток, законы, связанные с такими задачами, известны немногим, хотя некоторые знания свойств цифр часто помогают существенно ускорить арифметические вычисления. Приведу один пример — первый, который пришел в голову.

Если я попрошу вас определить, является ли число 15 763 530 163 289 квадратом некоторого числа, как вы это сделаете? Если бы это число заканчивалось на 2, 3, 7 или 8, оно не могло бы быть квадратом, однако, на первый взгляд, в этом числе нет ничего такого, что помешало бы ему быть квадратом. Подозреваю, что читатель со вздохом или брюзжанием примется за вычисление квадратного корня. Однако если бы ему были известны некоторые свойства цифр, он смог бы легко ответить на мой вопрос. Сумма цифр этого числа равна 59; сумма цифр этого числа, в свою очередь, равна 14, а сумма цифр этого числа равна 5 (последнее число я назову цифровым корнем). Следовательно, это число не может быть квадратом, и вот по какой причине: цифровой корень всех квадратов, начиная с 1, всегда равен 1, 4, 7 или 9 и не может равняться никакому другому числу. В действительности, ряд 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9 будет повторяться до бесконечности. Аналогичный ряд для треугольных чисел, то есть для чисел вида $(n^2+n)/2$, выглядит так: 1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 9, 9. Таким образом, число не может быть треугольным, если его цифровой корень равен 2, 4, 5, 7 или 8.

1. Пивной бочонок

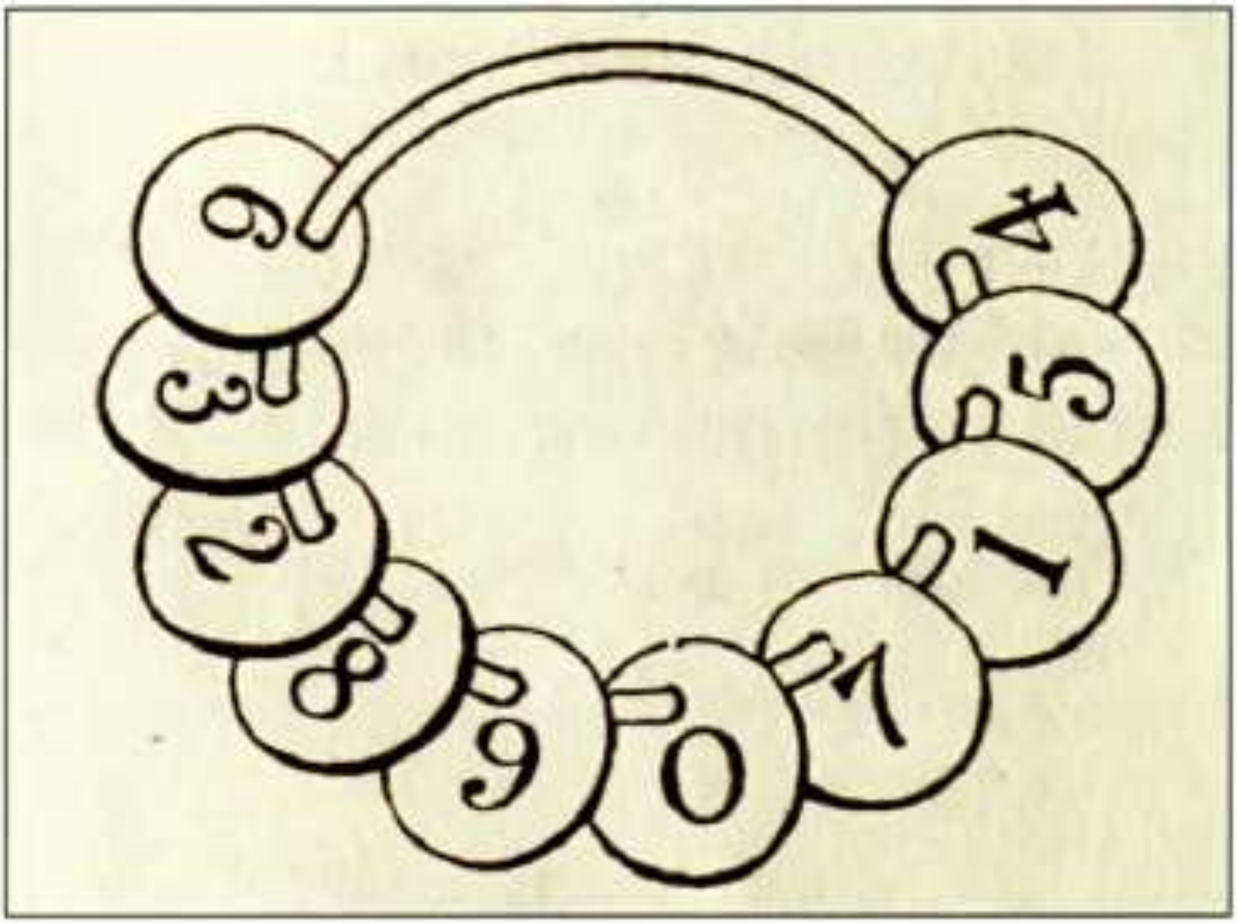
Один человек купил несколько бочек с вином и один бочонок с пивом. Эти бочонки изображены на рисунке. Там же указано, сколько галлонов напитка содержится в каждом бочонке. Он продал часть вина одному покупателю и вдвое больше вина другому, а пиво оставил себе. Задача заключается в том, чтобы указать, в каком из бочонков находится пиво. Сможете справиться с этой задачей? Разумеется, этот человек ничего не подливал в бочонки перед продажей.

2. Цифровое умножение

Приведу еще одну занимательную задачу о девяти цифрах (за исключением нуля). Используя каждую цифру только один раз, можно записать две пары чисел так, что их произведение будет одинаковым. Это можно сделать множеством способов. Например, в парах чисел $7 \cdot 658$ и $14 \cdot 329$ все цифры содержатся ровно один раз, и в обоих случаях их произведение будет одинаковым и равно 4606. Заметим, что сумма цифр результата 16 — это не наибольшая и не наименьшая возможная сумма. Можете ли вы найти такие числа, чтобы сумма цифр в результате умножения была наибольшей? А наименьшей?

3. Задача о пронумерованных кружках

Когда в одном здании работает много служащих, каждому обычно выдается небольшой кружок с номером. Когда сотрудники приходят на работу, они кладут эти кружки на специальную доску как доказательство того, что они пришли на работу вовремя. Как-то я заметил, что управляющий взял несколько кружков с доски и нанизал их на кольцо, которое носил в кармане. Это навело меня на мысль о неплохой головоломке. Признаюсь читателям, что именно так я всегда придумываю мои задачи. Идею нельзя создать, она возникает сама собой, и нужно просто быть внимательным, чтобы не упустить ее.



На рисунке видно, что на кольцо надето десять кружков с номерами от 0 до 9. Задача состоит в том, чтобы разделить кружки на три группы, не снимая с кольца, так чтобы число, составленное из цифр первой группы, умноженное на такое же число для второй группы, равнялось бы числу для третьей группы, составленному по такому же правилу. Например, цифры можно разделить на три группы так: 2–8907–15463 (для этого нужно передвинуть 6 и 3 к цифре 4). К сожалению, произведение двух первых чисел не равно третьему. Сможете ли вы правильно сгруппировать кружки с цифрами? Разумеется, каждая группа может состоять из любого числа кружков. Чтобы решить эту задачу, вам придется как следует поразмыслить, если только вы не подберете верный ответ случайно.

4. Цифровое деление

Это еще одна прекрасная головоломка, в которой нужно разделить девять цифр (ноль не используется) на две группы так, чтобы получились два числа, такие что первое из них при делении на второе давало бы заданное число без остатка. Например, 13458 при делении на 6729 дает 2. Сможет ли читатель составить числа так, чтобы результат деления равнялся 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9? Кроме того, сможете ли вы найти минимально возможные числа в каждом из этих случаев? Так, 14658 при делении на 7329 дает 2, как и в примере, который я привел выше, но оба числа в этом случае больше.

5. Цифровые квадраты

Девять цифр расположены так, что образуют квадраты некоторых других чисел: 9, 81, 324, 576. Сможете ли вы объединить их так, чтобы получился один квадрат, сначала наибольший, а затем наименьший из возможных?

Решения

1. Если один покупатель купил в два раза больше вина, чем другой, то общий объем проданного вина должен делиться на 3. Чтобы число делилось на 3, сумма его цифр должна делиться на 3. Сумма цифр для каждой бочки равна 6, 4, 1, 2, 7 и 9 соответственно. Сумма этих чисел равна 29. Это число при делении на 3 дает остаток 2. Сумма цифр числа, равного объему бочки с пивом, должна равняться 2, $2 + 3 = 5$ или $2 + 3 + 3 = 8$. Единственная бочка, которая удовлетворяет этому условию, — это бочка на 20 галлонов. У торговца осталась бочка на 20 галлонов, он продал первому покупателю 33 галлона (бочки на 15 и 18 галлонов), второму — 66 (бочки на 16, 19 и 31 галлон).

2. Решение, при котором сумма цифр результата является наименьшей: $23 \cdot 174 = 58 \cdot 69 = 4\,002$. Решение, при котором сумма цифр результата является наибольшей: $9 \cdot 654 = 18 \cdot 327 = 5886$. В первом случае сумма цифр равна 6, во втором — 27. Эту задачу можно решить только методом проб и ошибок.

3. Разделим 10 кружков на три группы таким образом: 715–46–32890. Произведение первого и второго чисел равно третьему числу.

4. Будет удобнее рассматривать не произведения, а дроби: половину, третью, четвертую, пятую, шестую, седьмую, восьмую и девятую части. Сначала я приведу восемь ответов:

$$6729 / 13458 = 1/2,$$
$$5823 / 17469 = 1/3,$$
$$5942 / 15768 = 1/4,$$
$$2697 / 13485 = 1/5,$$
$$9943 / 17658 = 1/6,$$
$$2304 / 16758 = 1/7,$$
$$3187 / 25496 = 1/8,$$
$$6581 / 57429 = 1/9.$$

Сумма цифр в числителе и знаменателе всегда равна 45, цифровой корень равен 9. Если мы разделим девять цифр на две группы произвольным образом, сумма цифровых корней всегда будет равна 9. Более того, два цифровых корня будут соответственно равны 9–9, 8–1, 7–2, 6–3 или 5–4. В первом случае сумма цифр равна 18, но цифровой корень этого числа равен 9. В тех случаях, когда одно число равно третьей, четвертой, шестой, седьмой и девятой части другого, цифровые корни будут равны 9–9. Иными словами, цифровой корень и числителя, и знаменателя должен равняться 9. Когда одно число равно половине или пятой части другого, цифровые корни будут равны 6–3. Разумеется, бóльший корень может соответствовать как числителю, так и знаменателю. Например, 2697/13 485, 2769/14 865, 2973/14 865 и 3729/18 645. В первых двух случаях цифровые корни числителя и знаменателя соответственно равны 6 и 3, в третьем и четвертом случае — 3 и 6. Наиболее интересный из всех случаев тот, при котором одно число равно восьмой части другого. Здесь цифровые корни могут принимать любое из пяти значений, упомянутых выше.

Если мы будем рассматривать знаменатели дробей как числа, умноженные на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 соответственно, то нужно будет обратить внимание на перенос в следующий разряд. Чтобы получить пятизначный результат умножения, нам потребуется выполнить по меньшей мере один перенос после умножения последней цифры слева. Если множитель больше 4, то мы будем переносить значение в следующий разряд как минимум три раза. Как следствие, начиная с того случая, когда одно число в пять раз больше другого, и заканчивая случаем, когда одно число в девять раз больше другого, мы не сможем получить различные решения простой попарной перестановкой цифр, как, например, в случае с 5832/17 496 и 5823/17 469, где 2/6 и 3/9 меняются местами. Разумеется, одни и те же цифры часто можно располагать по-разному, как, например, пары значений, приведенные в предыдущем абзаце. Однако в этом случае нужно полностью менять порядок цифр, и ограничиться простой попарной перестановкой не получится. Есть и другие детали, которые сможет заметить любой читатель. Например, цифра 5 никогда не может занимать крайний правый разряд числителя, так как в этом случае знаменатель должен будет заканчиваться на 0 или снова на 5. Аналогично, в последнем разряде не может находиться 1 или 6 в случае, когда результат деления равен шести. Также в последнем разряде числителя не может быть четная цифра, когда результат деления равен пяти, и так далее. Несмотря на приведенные мной указания, вам придется потратить много времени на перебор вариантов, однако в итоге вы придете к правильному ответу.

5. Насколько мне известно, таблицы квадратных чисел, которые могли бы пригодиться при решении этой головоломки, не публиковались. Наименьший квадрат, в записи которого содержатся все цифры по одному разу, равен 139 854 276. Это квадрат числа 11 826. Наибольший квадрат, удовлетворяющий этим же условиям, равен 923 187 456. Это квадрат числа 30 384.