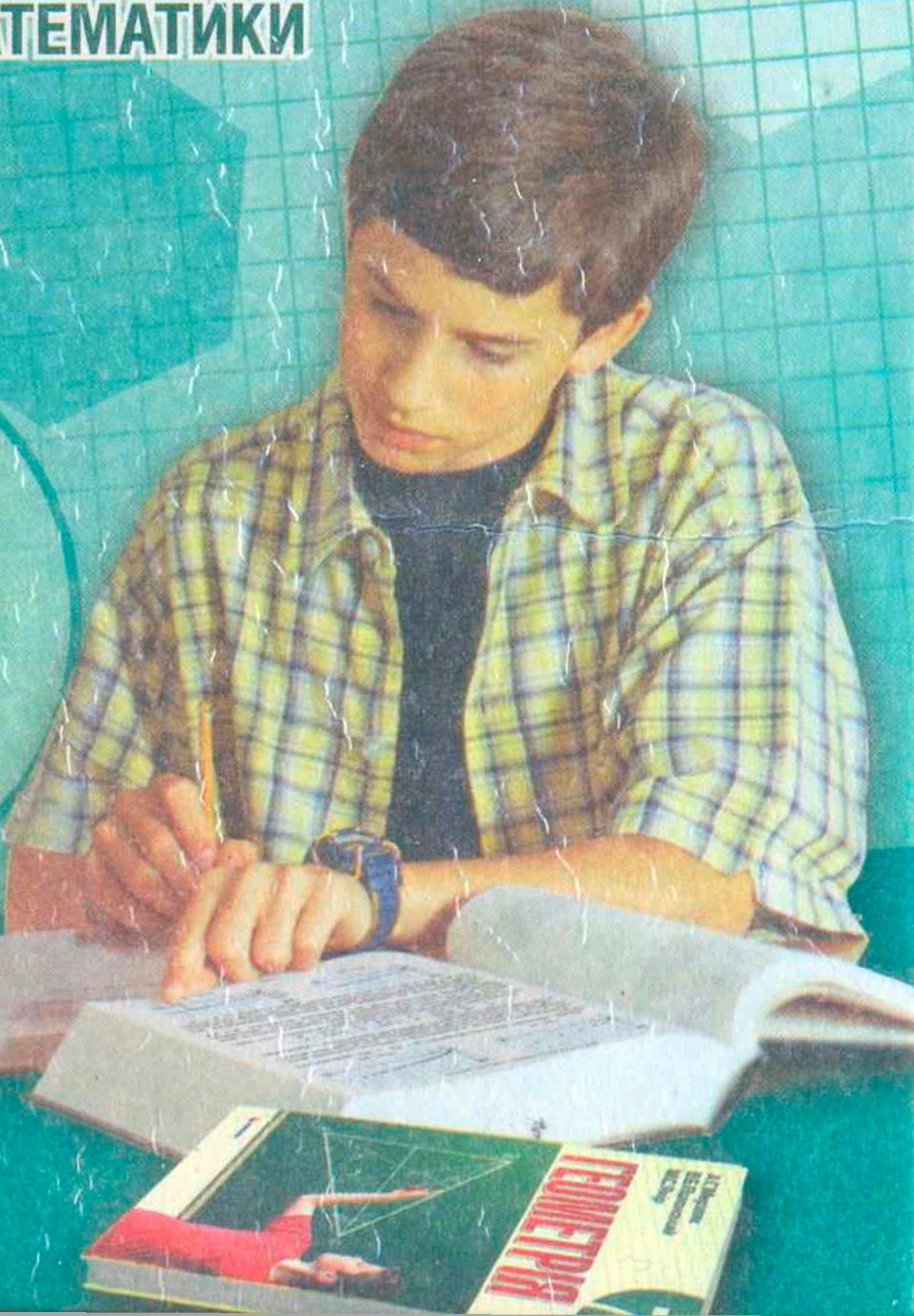
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

8

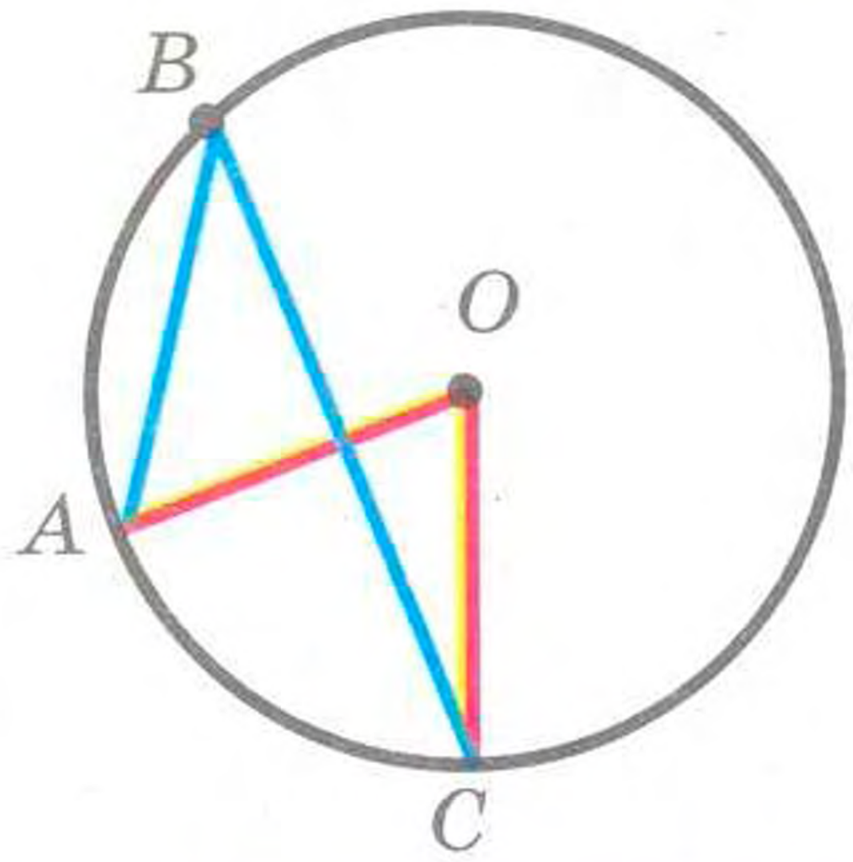
ГЕОМЕТРІЯ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ КЛАСІВ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ



ГІМНАЗІЯ

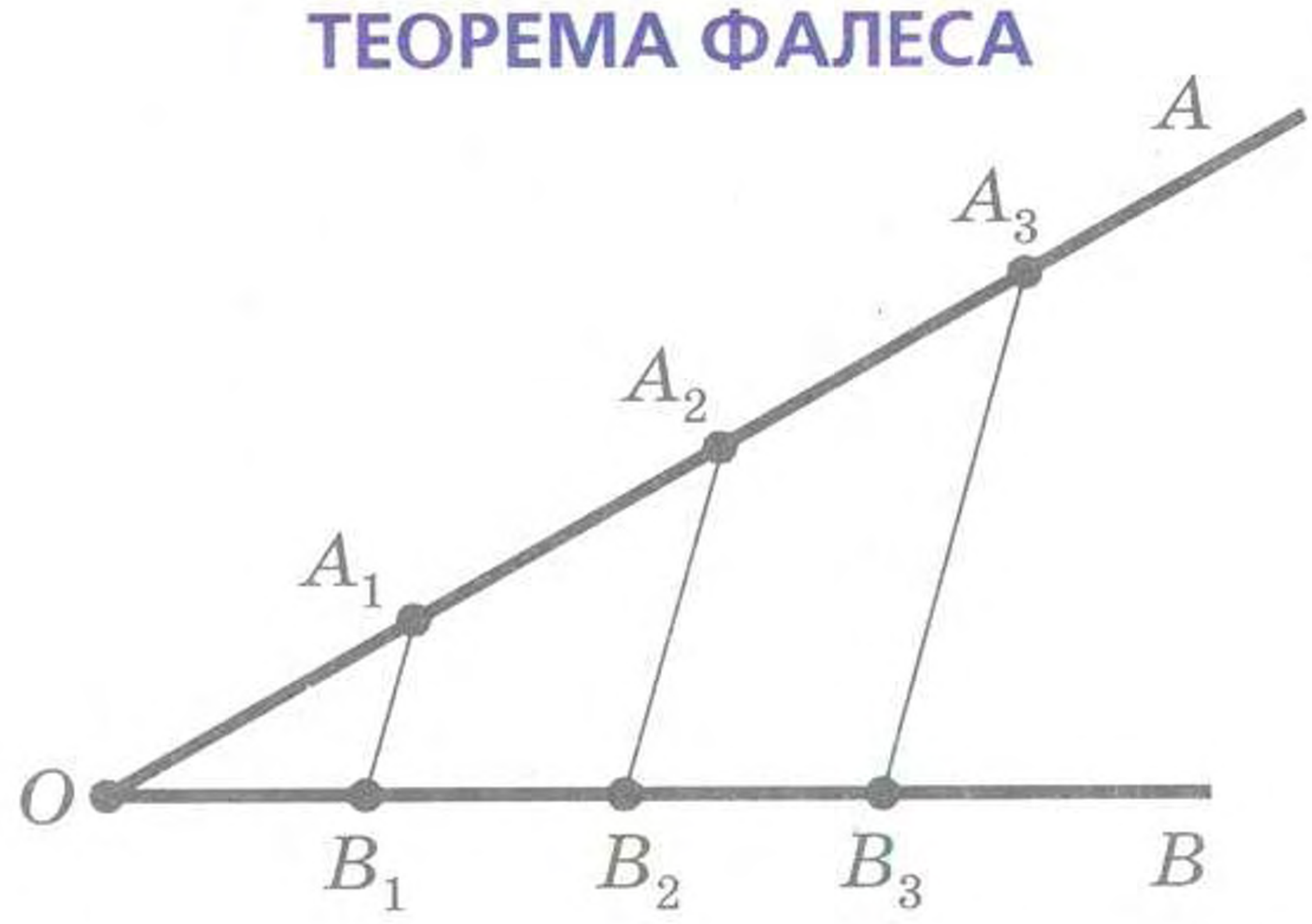
ЦЕНТРАЛЬНІ І ВПИСАНІ КУТИ



$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$

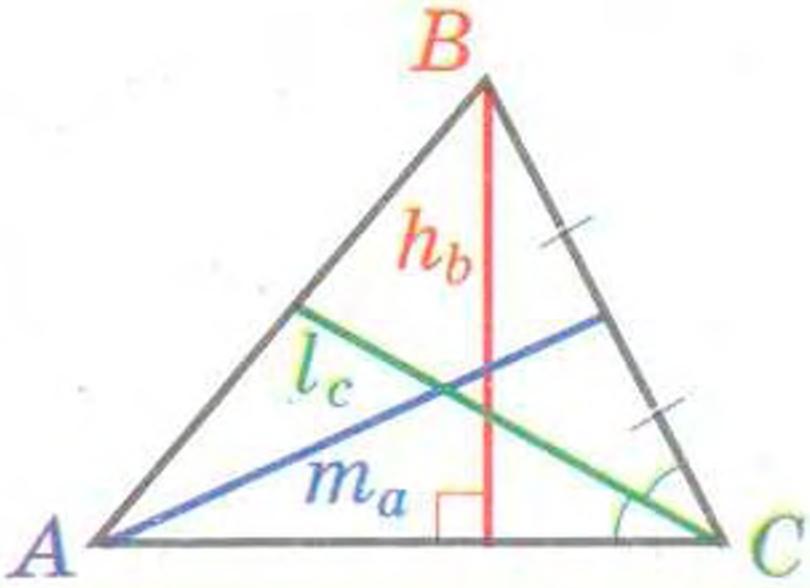
$$\angle AOC = \cup AC$$

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА



Якщо $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$,
то $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ДЛЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТРИКУТНИКА *ABC*

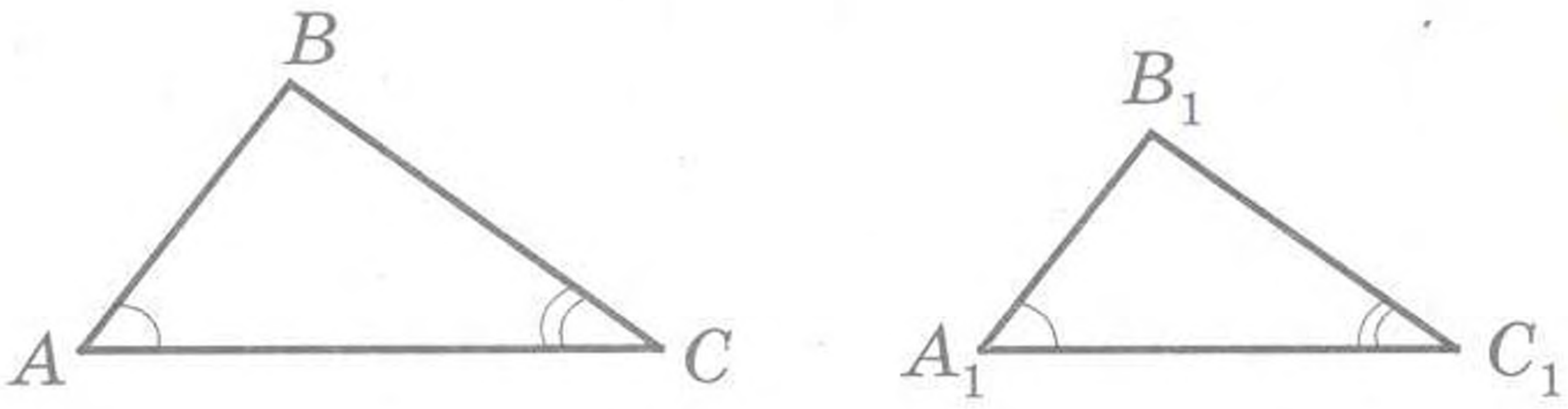


h_a, h_b, h_c — довжини висот

m_a, m_b, m_c — довжини медіан

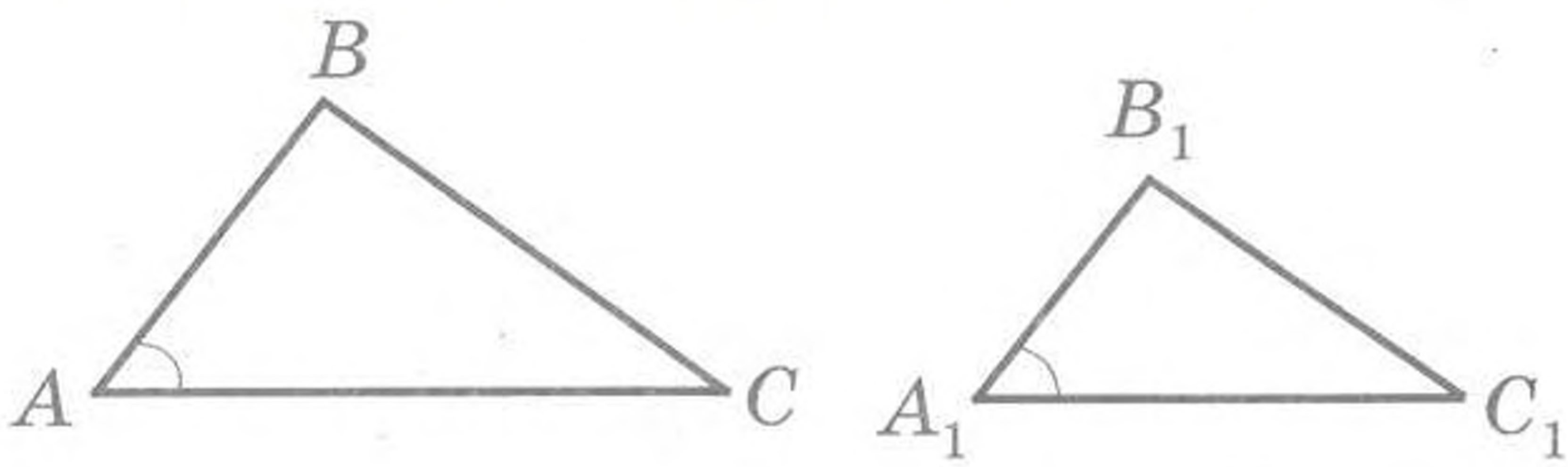
l_a, l_b, l_a — довжини бісектрис

ПЕРША ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



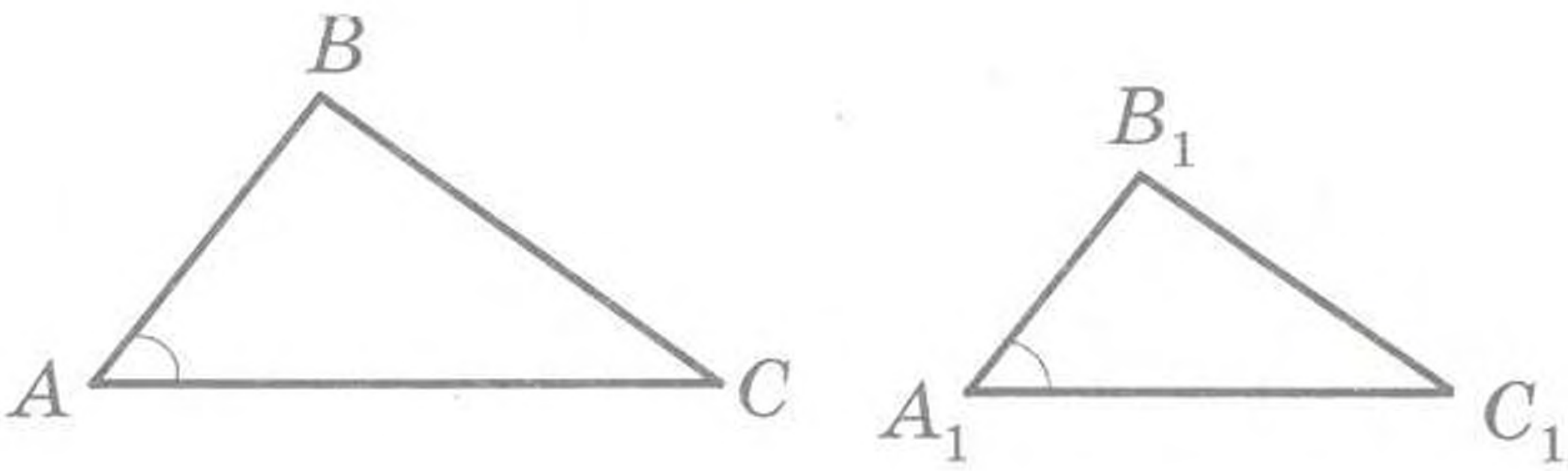
Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

ДРУГА ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



Якщо $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ і $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

ТРЕТЯ ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



Якщо $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 8 класу
з поглибленим вивченням математики

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Харків
«Гімназія»
2009

УДК 373:513
ББК 22.151.0я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1/11-2525 від 13.06.2008 р.)

Відповідальний за випуск
Головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України
Н. С. Прокопенко

Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.
М52 Геометрія: Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. - Х.: Гімназія, 2009. - 240 с.
ISBN 978-966-474-012-5.

УДК 373:513
ББК 22.151.0я721

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 8 класу
з поглибленим вивченням математики

Для середнього шкільного віку

Редактор *Г. Ф. Висоцька*. Художник *С. Е. Кулинич*.
Комп'ютерна верстка *О. О. Удалов*. Коректор *Т. Є. Цента*

Підписано до друку 14.07.2009. Формат 60×90/16: Гарнітура шкільна.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 15,00. Зам. № 351.

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001.р.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 758-83-93, 719-17-26, 719-46-80

Віддруковано з готових діапозитивів у друкарні ПП «Модем»
Тел. (057) 758-15-80, 758-15-90

ISBN 978-966-474-012-5

ВІД АВТОРІВ

Любі восьмикласники!

Ви зробили серйозний життєвий крок: вирішили продовжити освіту в класі з поглибленим вивченням математики. Ми вітаємо вас з цим вибором і сподіваємося, що ви не розчаруєтеся у своєму рішенні.

Навчатися в математичному класі не легко. Потрібно бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, а найголовніше — не бути байдужим до математики, любити цю красиву науку.

Протягом навчального року ви продовжуватимете вивчати геометрію. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на шість параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)).

Бажаємо успіху!

Шановні колеги!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

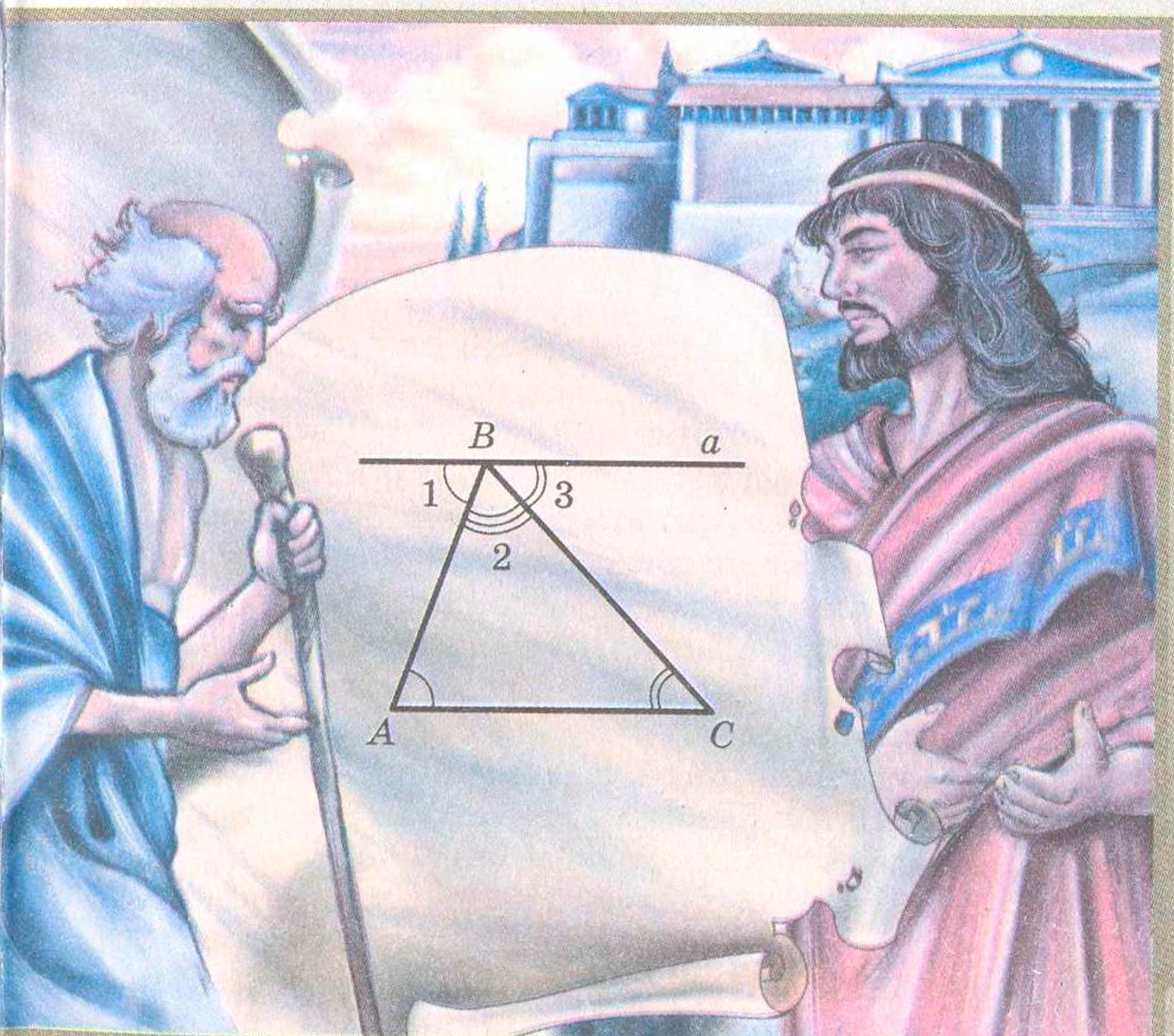
Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Бажаємо творчого натхнення і терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;
- $n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- $n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;
- n (m) задача, яка пропонується в різних пунктах для розв'язування різними способами (номер m указує місцезнаходження цієї задачі в іншому пункті);
- 🔑 задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;
- ▲ закінчення доведення теореми.

§ 1 Повторення і систематизація навчального матеріалу з курсу геометрії 7 класу



1. Ознаки рівності трикутників

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 7–11 на с. 203.

ВПРАВИ

1.1.° На рисунку 1.1 $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Доведіть, що $\angle AMK = \angle BCE$.

1.2.° На медіані BM трикутника ABC позначили точку O так, що $\angle OAC = \angle OCA$. Доведіть, що ΔABC — рівнобедрений.

1.3.° На рисунку 1.2 $AB = BC$, $AM = KC$, $\angle AKE = \angle FMC$. Доведіть, що ΔFBE — рівнобедрений.

1.4.° У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектриси AD і CE. Доведіть, що $AE = CD$.

1.5.° Відрізки AB і CD лежать на одній прямій і мають спільну середину. Точку M вибрано так, що ΔAMB — рівнобедрений з основою AB. Доведіть, що ΔCMD також є рівнобедреним з основою CD.

1.6.° Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC. Доведіть, що пряма BD — серединний перпендикуляр відрізка AC.

1.7.° На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено точки F і K відповідно. Доведіть, що коли трикутники AFB і AKB рівні з відповідними сторонами AK і BF, то трикутник ABC — рівнобедрений.

1.8.° Серединний перпендикуляр сторони BC трикутника ABC перетинає його сторону AB у точці D. Знайдіть довжину відрізка AD, якщо $CD = 4$ см, $AB = 7$ см.

1.9.° На рисунку 1.3 $OA = OD$. Доповніть умову задачі однією вимогою так, щоб можна було стверджувати, що $\Delta AOC = \Delta BOD$:

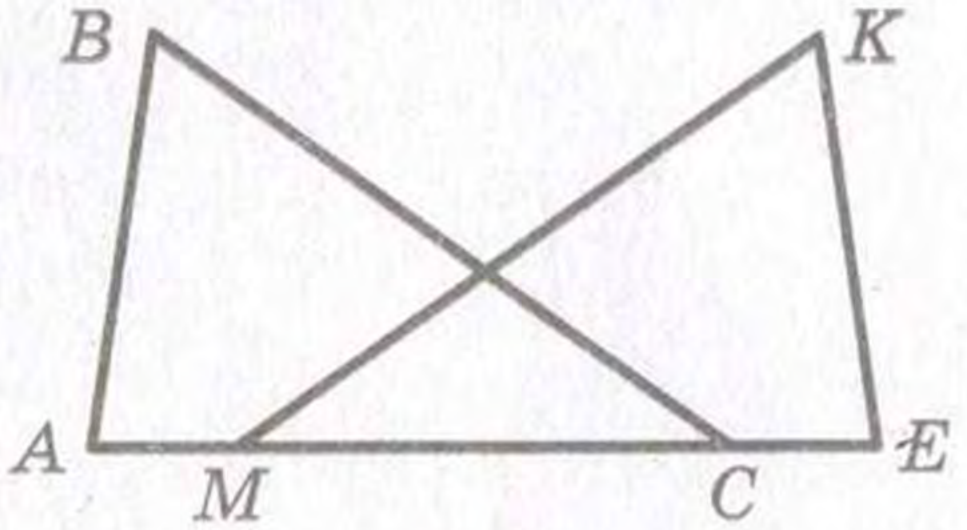


Рис. 1.1

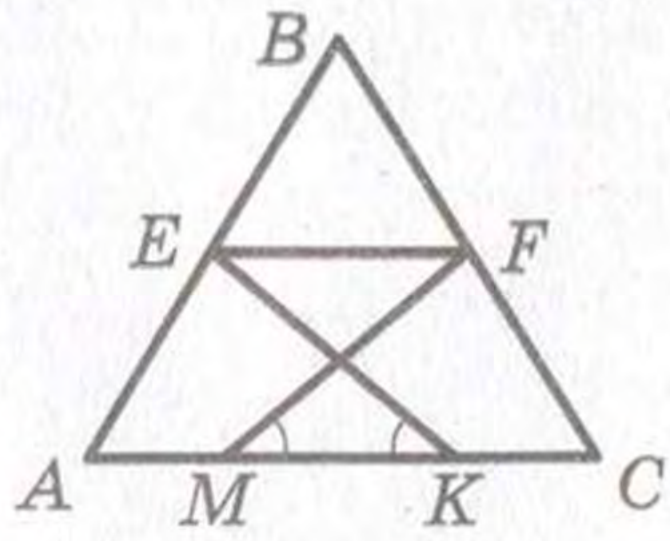


Рис. 1.2

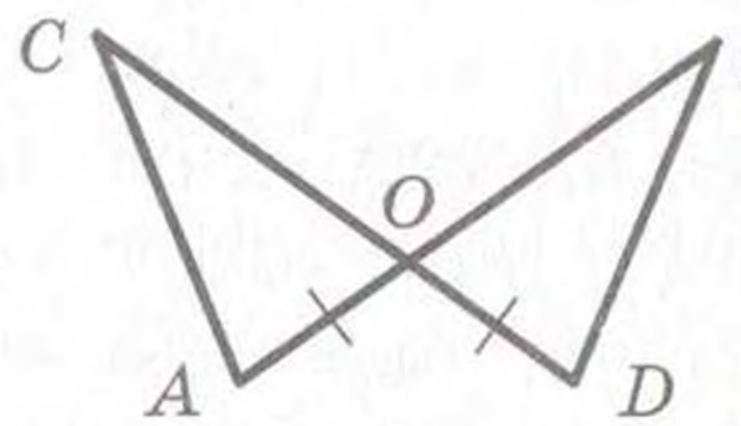


Рис. 1.3

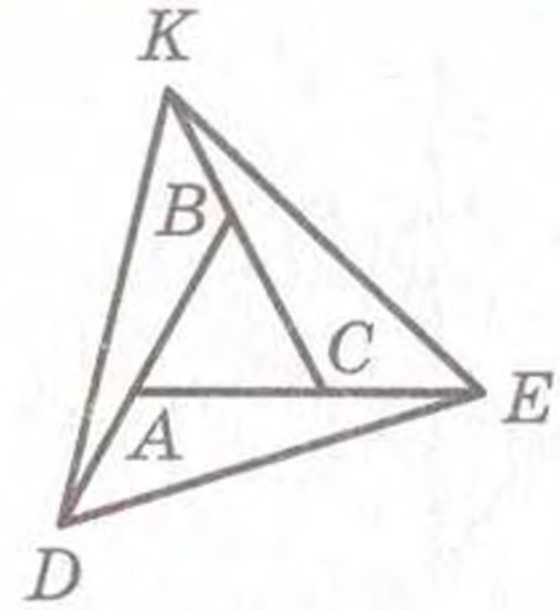


Рис. 1.4

1) за першою ознакою рівності трикутників;

2) за другою ознакою рівності трикутників.

1.10.° Відрізки AB і CD перетинаються в точці O і діляться цією точкою навпіл. На відрізку AC позначено точку M, а на відрізку BD — точку K так, що $AM = BK$. Доведіть, що: 1) $OM = OK$; 2) точки M, O і K лежать на одній прямій.

1.11.° На продовженнях сторін AB, BC, AC рівностороннього трикутника ABC за точки A, B і C відповідно відклали рівні відрізки AD, BK і CE (рис. 1.4). Доведіть, що $\triangle DEK$ — рівносторонній.

1.12.° Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а його медіана розбиває даний трикутник на два трикутники так, що периметр одного з них на 6 см менший від периметра другого. Знайдіть бічну сторону даного трикутника.

1.13.° Висоти AM і CK трикутника ABC перетинаються в точці H, $HK = HM$. Доведіть, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

1.14.° Чи можна стверджувати, що коли дві сторони і висота, проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті, проведеній до третьої сторони, другого трикутника, то ці трикутники рівні?

1.15.° У трикутнику ABC $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см. На стороні BC позначено точку M так, що $CM = 1$ см. Пряма, яка проходить через точку M перпендикулярно до бісектриси кута ACB, перетинає сторону AC у точці K, а пряма, яка проходить через точку K перпендикулярно до бісектриси кута BAC, перетинає пряму AB у точці D. Знайдіть довжину відрізка BD.

1.16.° Медіана AM трикутника ABC перпендикулярна до його бісектриси BK. Знайдіть сторону AB, якщо $BC = 16$ см.

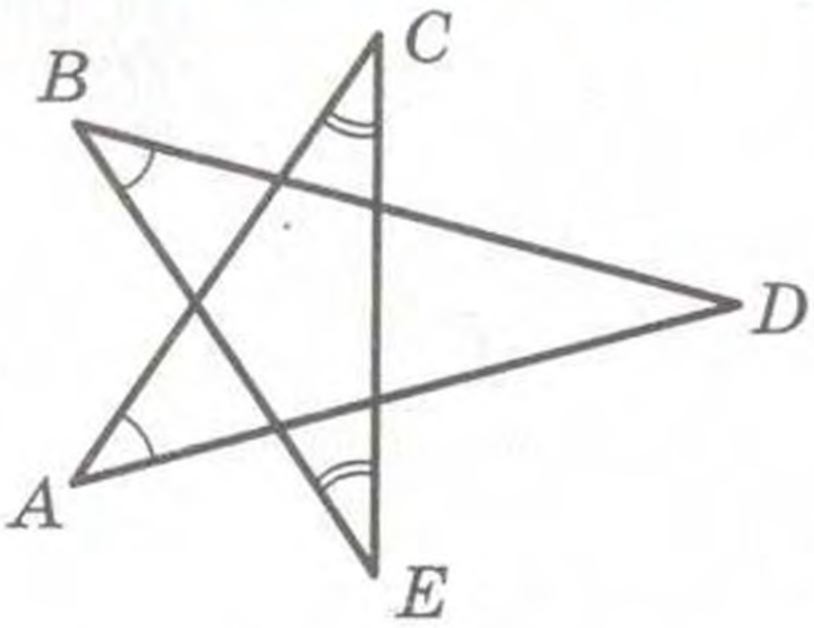


Рис. 1.5

1.17.• У трикутнику одна з медіан перпендикулярна до однієї з бісектрис. Доведіть, що одна зі сторін трикутника вдвічі більша за другу.

1.18.•• Довжини сторін трикутника, виражені в сантиметрах, дорівнюють трьом послідовним натуральним числам. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо одна з його медіан перпендикулярна до однієї з його бісектрис.

1.19.•• У «зірки» $ACEBD$ (рис. 1.5) рівні кути при вершинах A і B, кути при вершинах E і C, а також рівні відрізки AC і BE. Доведіть, що $AD = BD$.

2. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 12–15 на с. 206.

ВПРАВИ

2.1.° Відрізки AB і CD перетинаються в точці O і діляться цією точкою навпіл. Доведіть, що $AC \parallel BD$.

2.2.° Через вершину C трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна бісектрисі AM трикутника і перетинає пряму AB у точці K. Знайдіть кути трикутника AKC, якщо $\angle BAC = 70°$.

2.3.° Медіана CM трикутника ABC дорівнює половині сторони AB. Доведіть, що трикутник ABC — прямокутний.

2.4.° У трикутнику ABC бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O. Доведіть, що $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2} \angle ABC$.

2.5.° Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.

2.6.° У трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C перетинаються в точці O. Знайдіть кут BOC.

2.7.° У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено висоту BM, $BM = 7{,}5$ см, $\angle MBC = 15°$. Знайдіть бічну сторону трикутника.

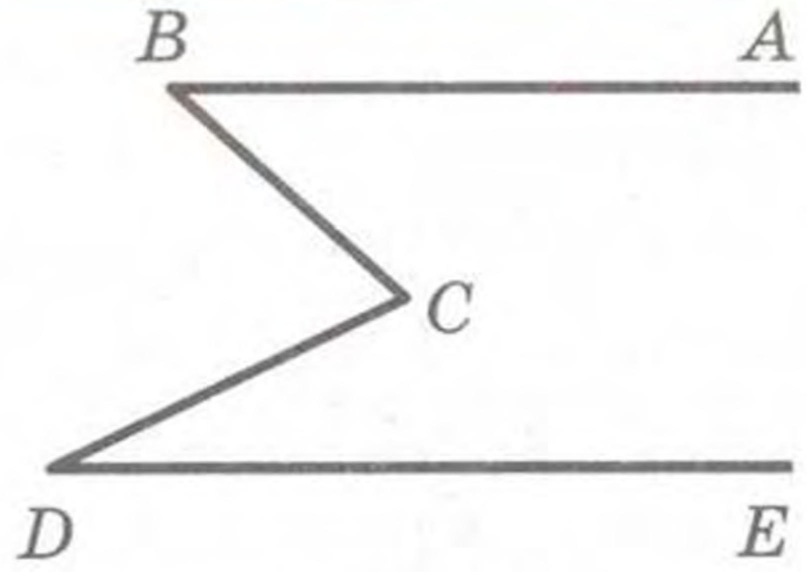


Рис. 2.1

2.8.° Висоти AM і CK трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що $\angle AHC = 180° - \angle ABC$.

2.9.° У трикутнику ABC кут ACB — прямий, CH — висота даного трикутника, CD — бісектриса трикутника BCH. Доведіть, що $AC = AD$.

2.10.° На рисунку 2.1 $AB \parallel DE$. Доведіть, що $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.

2.11.° Через точку O перетину бісектрис AE і CF трикутника ABC провели пряму, паралельну прямій AC. Ця пряма перетинає сторону AB у точці M, а сторону BC — у точці K. Доведіть, що $MK = AM + CK$.

2.12.• На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначили точки D і E так, що $AC = AE$ і $BC = BD$. Знайдіть кут DCE.

2.13.• На сторонах AC і BC трикутника ABC відповідно позначили точки M і N так, що $AN = BM = AB$. Відрізки AN і BM перетинаються в точці P. Доведіть, що $\angle APM = 2\angle ACB$.

2.14.• Бісектриса кута B рівнобедреного трикутника ABC розбиває його на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трикутника ABC.

2.15.• У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, точка M — середина сторони AB. Серединний перпендикуляр відрізка AB перетинає відрізок BC у точці K. Доведіть, що $MK = \frac{1}{3}BC$.

2.16.• У трикутнику MKE $\angle K = 90°$, $\angle E = 30°$, $KE = 12$ см. Знайдіть бісектрису MC трикутника.

2.17.• Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Відомо, що $AB = CH$. Знайдіть кут ACB.

2.18.• У трикутнику ABC проведено бісектрису CD. Відомо, що центр кола, вписаного в трикутник BCD, збігається з центром кола, описаного навколо трикутника ABC. Знайдіть кути трикутника ABC.

2.19.* У трикутнику ABC проведено бісектриси AA_1 і CC_1. Доведіть, що коли довжини перпендикулярів, опущених з вершини B на прямі AA_1 і CC_1, рівні, то трикутник ABC — рівнобедрений.

2.20.* На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок $CM = BC$. Доведіть, що $\angle ABM$ — тупий або прямий.

2.21.* Кут між двома висотами гострокутного трикутника ABC дорівнює $60°$. Точка перетину висот поділяє одну з них у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини трикутника. Доведіть, що трикутник ABC — рівносторонній.

2.22.** У трикутнику ABC $AB = 2$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. На стороні AC позначили точку D так, що $AD = 1$ см. Знайдіть кути трикутника BDC.

2.23.** На стороні BC рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) взято точки M і N так, що точка N лежить між точками B і M, $NM = AM$ і $\angle MAC = \angle BAN$. Знайдіть $\angle CAN$.

2.24.** Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, у 4 рази менша від гіпотенузи. Знайдіть кути трикутника.

2.25.** У прямокутному трикутнику ABC проведено бісектриси AP і BQ гострих кутів, а в трикутниках ACP і BCQ — відповідно медіани CM і CN. Доведіть, що $\angle CMP + \angle CNQ = 90°$.

2.26.** У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено висоту CH. На сторонах AB і AC відповідно позначили точки M і N так, що $BM = BC$ і $CN = CH$. Доведіть, що $MN \perp AC$.

2.27.** У прямокутному трикутнику ABC відрізок CD — висота, проведена до гіпотенузи AB. Знайдіть гострі кути трикутника ABC, якщо відомо, що $BD - DA = AC$.

2.28.** У трикутнику ABC кут A дорівнює $40°$, кут B дорівнює $20°$, $AB - BC = 4$ см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини C.

2.29.* У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено бісектрису CD. Через точку D проведено пряму, яка перпендикулярна до CD і перетинає пряму AC у точці E. Знайдіть відрізок EC, якщо $AD = 1$ см.

2.30.* Кут при вершині A рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) дорівнює $30°$. На сторонах AB і AC взято точки Q і P відповідно такі, що $\angle QPC = 45°$ і $PQ = BC$. Доведіть, що $BC = CQ$.

2.31.* У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) $\angle ABC = 20°$. Доведіть, що:

1) $2AC < AB$; 2) $3AC > AB$.

2.32.* У рівнобедреному трикутнику ABC кут B, протилежний основі, дорівнює $20°$. На стороні AB позначено точку D так, що $BD = AC$. Знайдіть кут ACD.

2.33.* Кут BAC трикутника ABC дорівнює $120°$. На бісектрисі цього кута взято точку D так, що $AD = AB + AC$. Знайдіть кути трикутника BDC.

2.34.* У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) кут A дорівнює $100°$, відрізок BD — бісектриса трикутника. Доведіть, що $BD + AD = BC$.

3. Коло. Геометричні побудови

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 18–23 на с. 208.

ВПРАВИ

3.1.° Доведіть, що коли через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

3.2.° У трикутник з кутами $30°$, $70°$ і $80°$ вписано коло. Знайдіть кути трикутника, вершини якого є точками дотику вписаного кола до сторін даного трикутника.

3.3.° Через точку C кола з центром O проведено дотичну до цього кола, AB — діаметр кола. З точки A на дотичну опущено перпендикуляр AD. Доведіть, що промінь AC — бісектриса кута BAD.

3.4.° Центр кола, описаного навколо трикутника, належить його стороні. Доведіть, що цей трикутник — прямокутний.

3.5.° Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою трикутника, проведеною з вершини цього кута.

3.6.° Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?

3.7.• Знайдіть геометричне місце центрів кіл даного радіуса, які проходять через дану точку.

3.8.• Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від двох даних прямих, які перетинаються.

3.9.• Знайдіть ГМТ, віддалених від даної прямої на задану відстань.

3.10.• Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої.

3.11.• Прямі, які дотикаються до кола з центром O в точках A і B, перетинаються в точці K, $\angle AKB = 120°$. Доведіть, що $AK + BK = OK$.

3.12.• Коло дотикається до сторони AB трикутника ABC у точці M і до продовження двох інших сторін. Доведіть, що сума $BC + BM$ дорівнює півпериметру трикутника ABC.

3.13.• У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається до сторони AB у точці M, $BC = a$. Доведіть, що $AM = p - a$, де p — півпериметр трикутника ABC.

3.14.• Доведіть, що радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, визначається за формулою $r = \frac{a + b - c}{2}$, де r — радіус вписаного кола, a і b — катети, c — гіпотенуза.

3.15.• У прямокутному трикутнику ABC відрізок CD — висота, проведена до гіпотенузи AB. Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD, BCD і ABC, дорівнюють відповідно r_1, r_2 і r. Доведіть, що $r_1 + r_2 + r = CD$.

3.16.• Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, дорівнює піврізниці катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.

3.17.• Сума радіусів вписаного і описаного кіл прямокутного трикутника дорівнює одному з катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.

3.18.* Побудуйте трикутник за двома висотами і кутом, з вершини якого проведена одна з даних висот. Скільки розв'язків може мати задача?

3.19.* Побудуйте трикутник за стороною і висотами, проведеними до двох інших сторін.

3.20.* Побудуйте трикутник за стороною і висотами, одна з яких проведена до даної сторони.

3.21.* Побудуйте трикутник за кутом і висотами, проведеними з вершин двох інших кутів.

3.22.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

3.23.* Побудуйте трикутник за радіусом вписаного кола і відрізками, на які точка дотику вписаного кола ділить одну зі сторін.

3.24.* Побудуйте трикутник, якщо дано три точки, у яких вписане коло дотикається до його сторін.

3.25.* Побудуйте коло, яке проходить через дану точку A і дотикається до даної прямої m у даній точці B.

3.26.* Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?

3.27.** На стороні AC трикутника ABC взято точку M. Кола, які вписано в трикутники ABM і MBC, дотикаються. Доведіть, що $AB + MC = AM + BC$.

3.28.** На стороні AC трикутника ABC взято точку M так, що $AB + MC = AM + BC$. Доведіть, що кола, вписані в трикутники ABM і MBC, дотикаються.

3.29.** Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $AX > BX$.

3.30.** Кожний з кутів BAC і ACB трикутника ABC поділено на три рівні частини (рис. 3.1). Доведіть, що $\angle AMN = \angle CMN$.

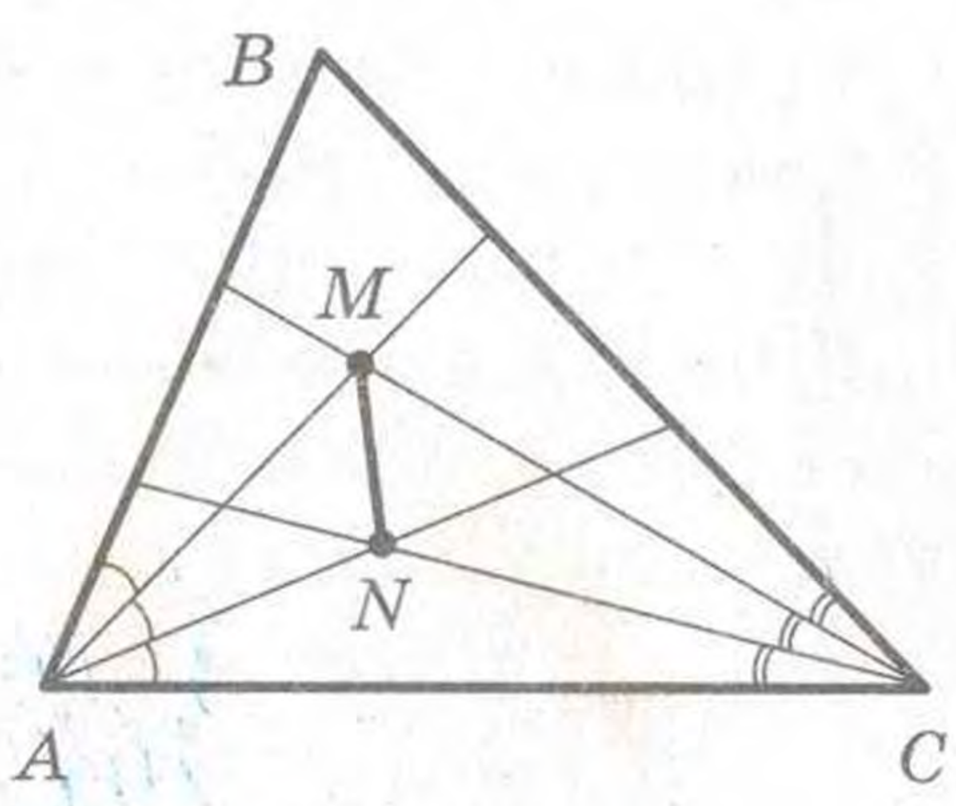


Рис. 3.1

3.31.** Вершина кута B недоступна (рис. 3.2). Побудуйте пряму, яка містить бісектрису кута B.

3.32.** Точки F і O — центри вписаного і описаного кіл рівнобедре-

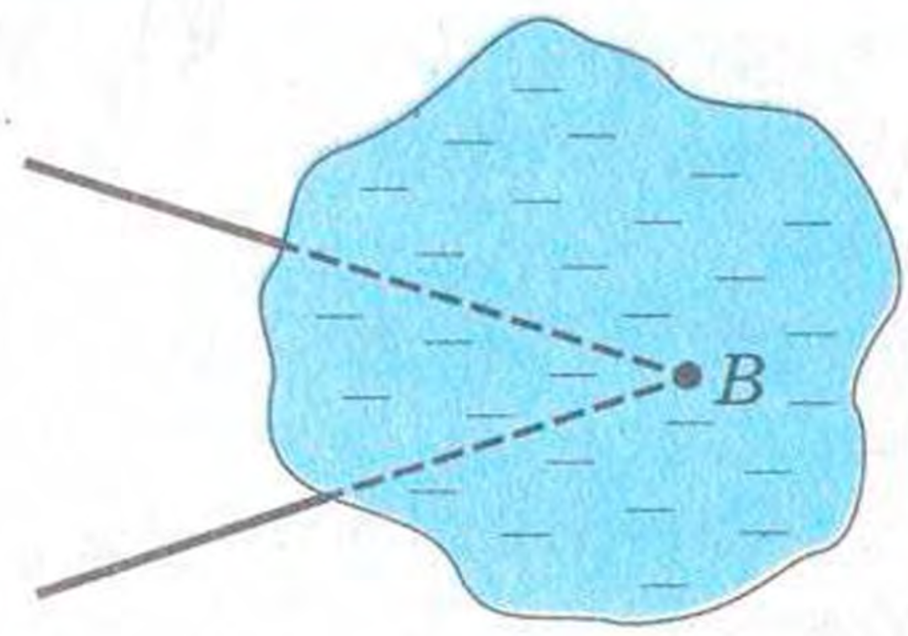


Рис. 3.2

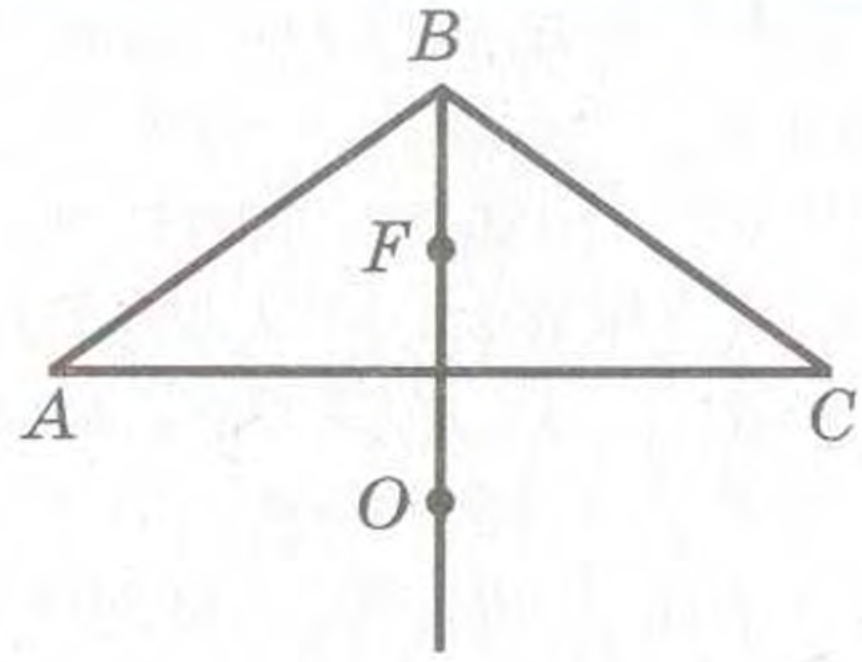


Рис. 3.3

ного трикутника ABC відповідно (рис. 3.3). Вони знаходяться на однаковій відстані від його основи AC. Знайдіть кути трикутника ABC.

3.33.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою гіпотенузи та другого катета.

3.34.** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і різницею катетів.

3.35.** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін.

3.36.** Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і різницею двох інших сторін.

3.37.** Побудуйте трикутник за периметром і двома кутами.

3.38.** Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола та висотою і медіаною, проведеними з однієї вершини.

3.39.** Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

3.40.** До гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC проведено висоту CD. Відрізки CK і CM — бісектриси трикутників ACD і DCB відповідно. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника KCM, є центром кола, вписаного в трикутник ABC.

3.41.* Дві вершини трикутника зафіксовано в точках A і B, а третя вершина X пересувається так, що різниця $XA - XB$ є величиною сталою. Доведіть, що центри кіл, вписаних у трикутники ABX, лежать на одній прямій.

Многокутники. Чотирикутники §2

4. Многокутник та його елементи

Відрізки AB і BC, зображені на рисунку 4.1, мають тільки одну спільну точку B, яка є кінцем кожного з них. Такі відрізки називають **сусідніми**. Наприклад, на рисунку 4.2 кожні два відрізки є сусідніми.

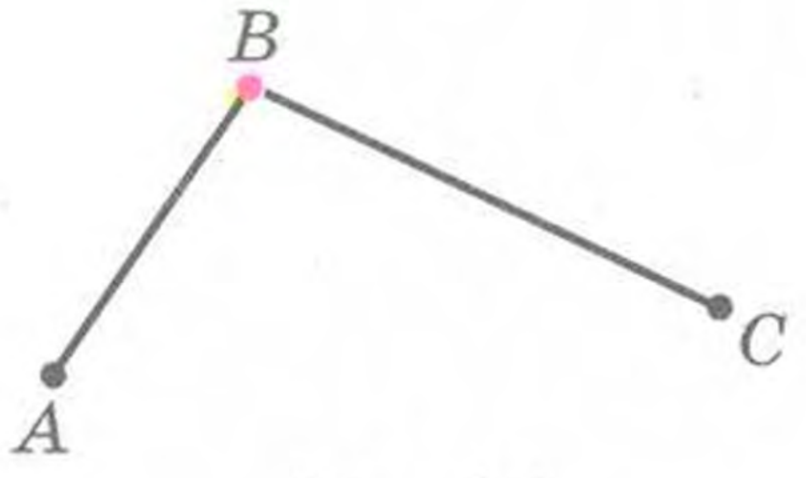


Рис. 4.1

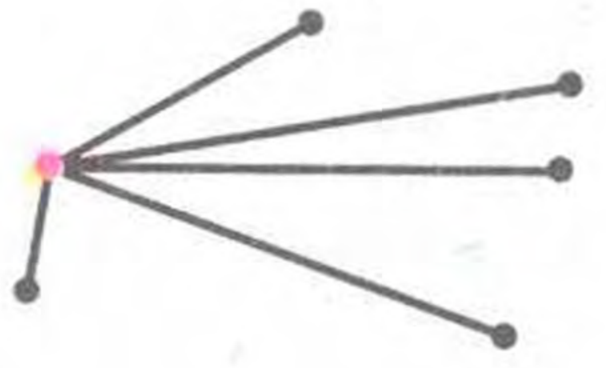


Рис. 4.2

Відрізки AB і CD на рисунку 4.3, *а*, *б* не є сусідніми. Також не є сусідніми відрізки AB і AC на рисунку 4.3, *в*.

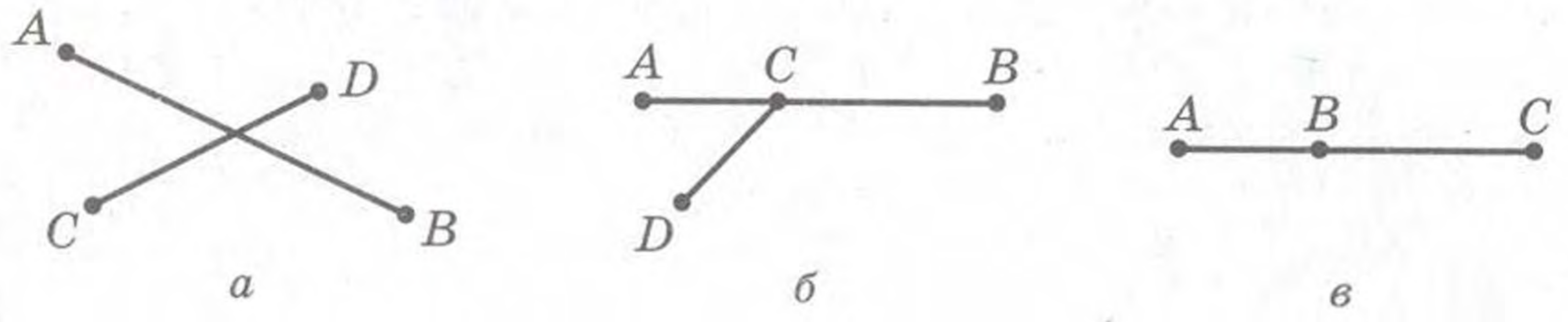


Рис. 4.3

Розглянемо фігуру, яка складається з точок A_1, A_2, A_3, ..., A_n і відрізків A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 таких, що жодні два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і жодні два несусідніх відрізки не мають спільних точок (рис. 4.4).

Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на рисунку 4.5 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$,

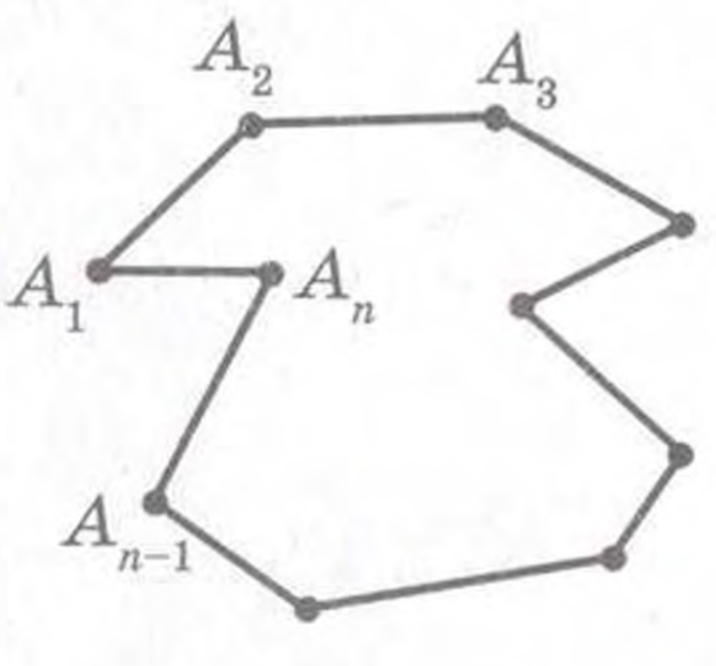


Рис. 4.4

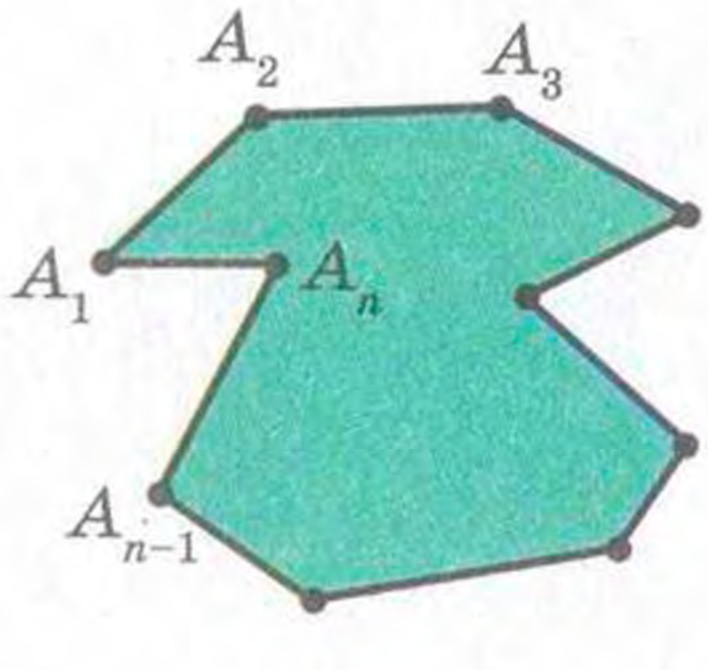


Рис. 4.5

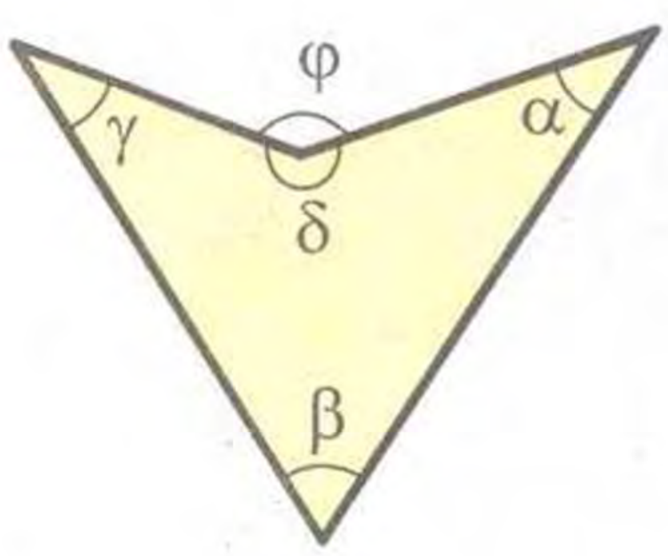


Рис. 4.6

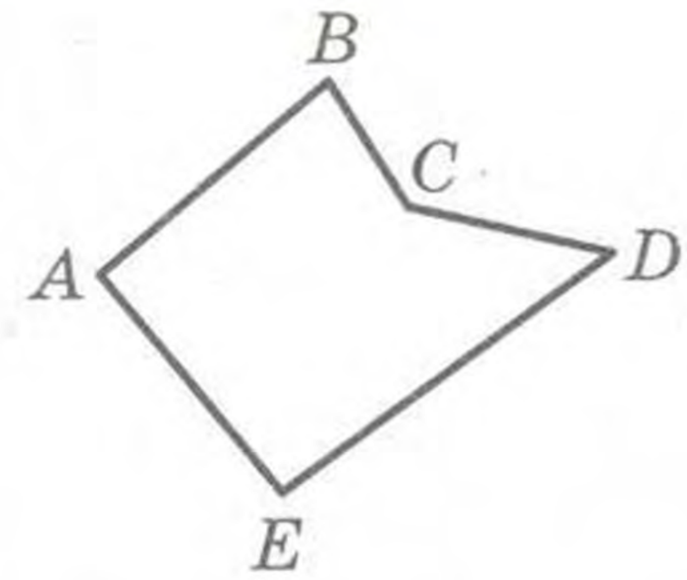


Рис. 4.7

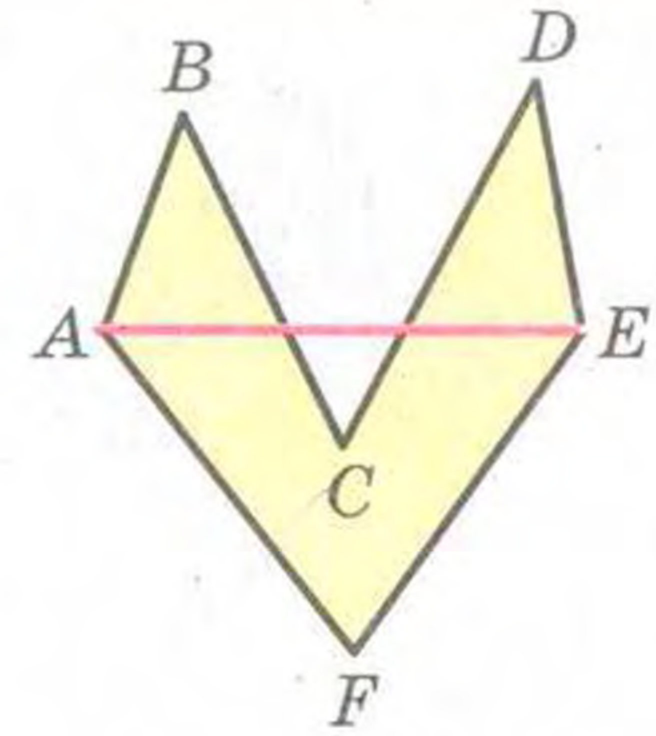


Рис. 4.8

A_nA_1, що її обмежують, називають **многокутником.** Точки A_1, A_2, A_3, ..., A_n називають **вершинами** многокутника, а вказані вище відрізки — **сторонами** многокутника.

Сторони, що є сусідніми відрізками, називають **сусідніми сторонами** многокутника. Вершини, які є кінцями однієї сторони, називають **сусідніми вершинами** многокутника.

Дві сусідні сторони многокутника задають **кут многокутника.** Наприклад, α, β, γ, δ — кути многокутника (рис. 4.6), а кут φ не є кутом многокутника.

Многокутник називають за кількістю його кутів: трикутник, чотирикутник, п'ятикутник тощо.

Многокутник позначають за його вершинами. Наприклад, на рисунку 4.7 зображено п'ятикутник $ABCDE$. У позначенні многокутника букви, які стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам. П'ятикутник, зображений на рисунку 4.7, можна також позначити, наприклад, так: $CDEAB$, $EABCD$ тощо.

Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін.

Відрізок, який сполучає несусідні вершини многокутника, називають **діагоналлю.** Наприклад, на рисунку 4.8 відрізок AE — діагональ.

На рисунку 4.9 зображено многокутник, усі кути якого менші від розгорнутого. Такий многокутник називають **опуклим.** Зауважимо, що многокутники, зображені на рисунках 4.6, 4.7, 4.8, не є опуклими.

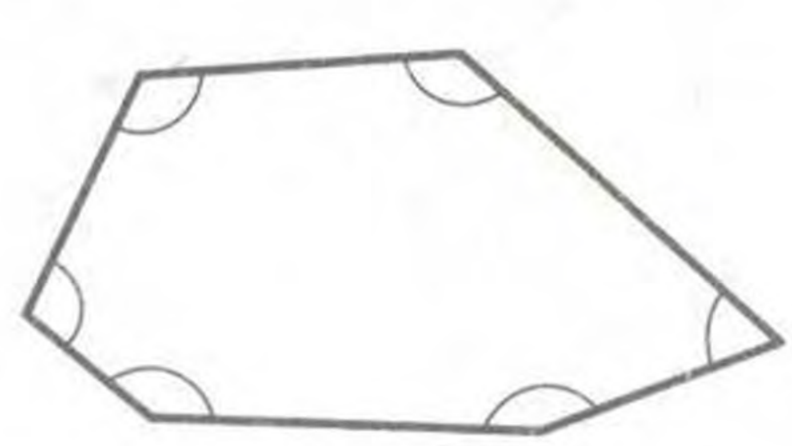


Рис. 4.9

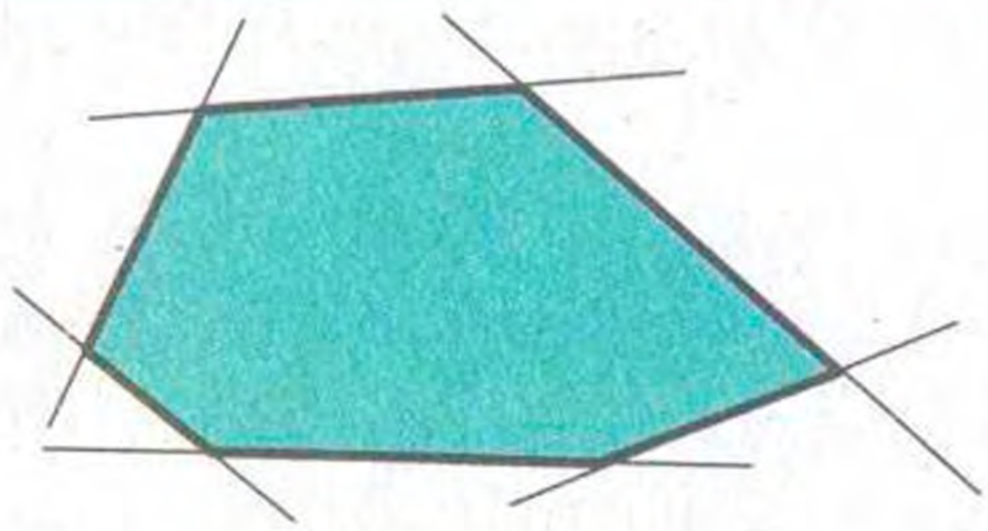


Рис. 4.10

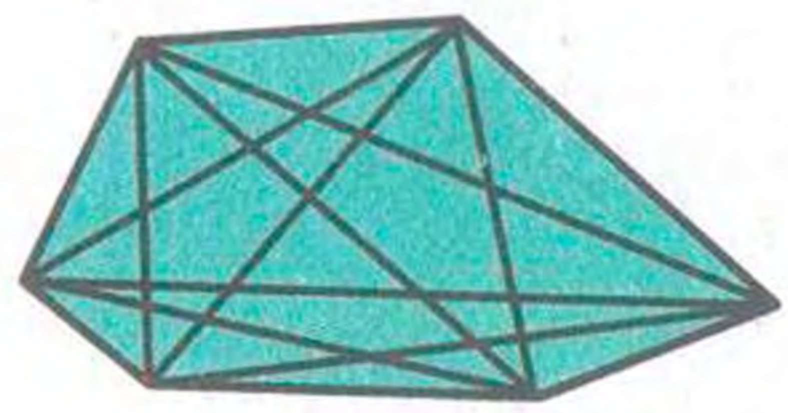


Рис. 4.11

Опуклий многокутник має такі властивості:

1) опуклий многокутник розташований в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону (рис. 4.10);

2) опуклий многокутник містить будь-яку свою діагональ (рис. 4.11).

Оскільки жодний неопуклий многокутник таких властивостей не має (рис. 4.8; 4.12), то кожну з них можна розглядати як ознаку опуклості многокутника.

Теорема 4.1. ***Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n - 2)$.***

Доведення. На рисунку 4.13 зображено опуклий n-кутник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Усі його діагоналі, які проходять через вершину A_1, розбивають даний многокутник на $n - 2$ трикутники. Сума всіх кутів цих трикутників дорівнює сумі кутів n-кутника. Оскільки сума кутів кожного трикутника дорівнює $180°$, то шукана сума дорівнює $180°(n - 2)$. ▲

Зазначимо, що наведена теорема є справедливою і для неопуклого многокутника.

На рисунку 4.14 зображено опуклий n-кутник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$. Кут 1 є суміжним з кутом 2 многокутника. Кут 1 називають

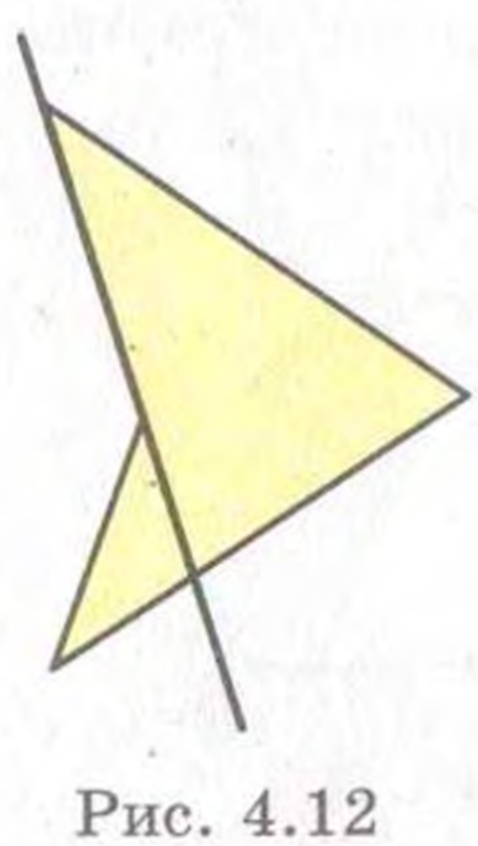


Рис. 4.12

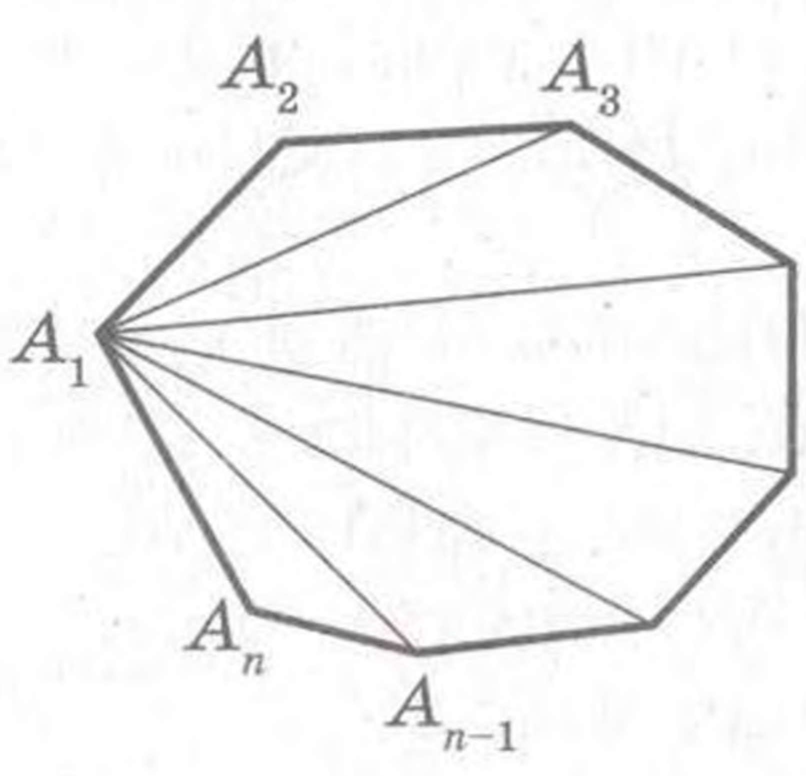


Рис. 4.13

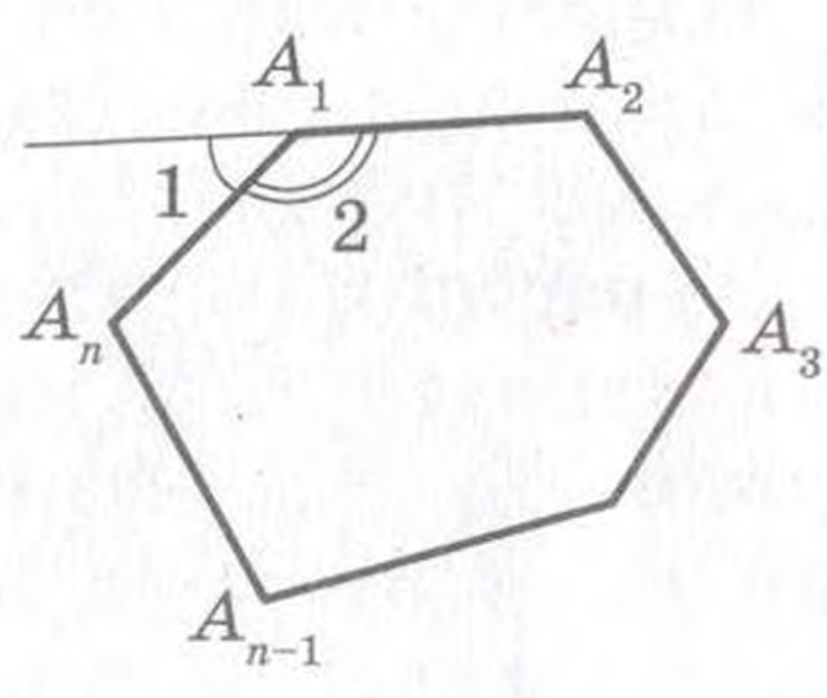


Рис. 4.14

зовнішнім кутом при вершині A_1 опуклого многокутника $A_1A_2...A_n$.

Теорема 4.2. ***Сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.***

Доведення. Сума кута многокутника і кута, суміжного з ним, дорівнює 180°. Тому сума всіх кутів многокутника і зовнішніх кутів многокутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює $180°n$. За теоремою 4.1 сума внутрішніх кутів многокутника дорівнює $180°(n - 2)$. Тому сума зовнішніх кутів дорівнює $180°n - 180°(n - 2) = 360°$. ▲

У сьомому класі ви вивчали властивості трикутників. У цьому параграфі ми вивчатимемо властивості іншого окремого виду многокутника — чотирикутника (рис. 4.15, 4.16).

Зрозуміло, що всі поняття, які було введено для n-кутника, стосуються й чотирикутника.

У чотирикутнику несусідні сторони і несусідні вершини називають відповідно **протилежними сторонами** і **протилежними вершинами**. На рисунку 4.16 зображено чотирикутник, у якого, наприклад, сторони NP і MQ — протилежні, вершини M і P — протилежні.

Приклад 1. Доведіть, що будь-який опуклий n-кутник має не більше трьох гострих кутів.

Розв'язання. Нехай опуклий n-кутник має 4 гострих кути. Тоді сума зовнішніх кутів, які відповідають цим гострим кутам, більша за 360°, що суперечить теоремі 4.2.

Задача 1. *Доведіть, що кількість діагоналей n-кутника дорівнює* $\frac{n(n-3)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

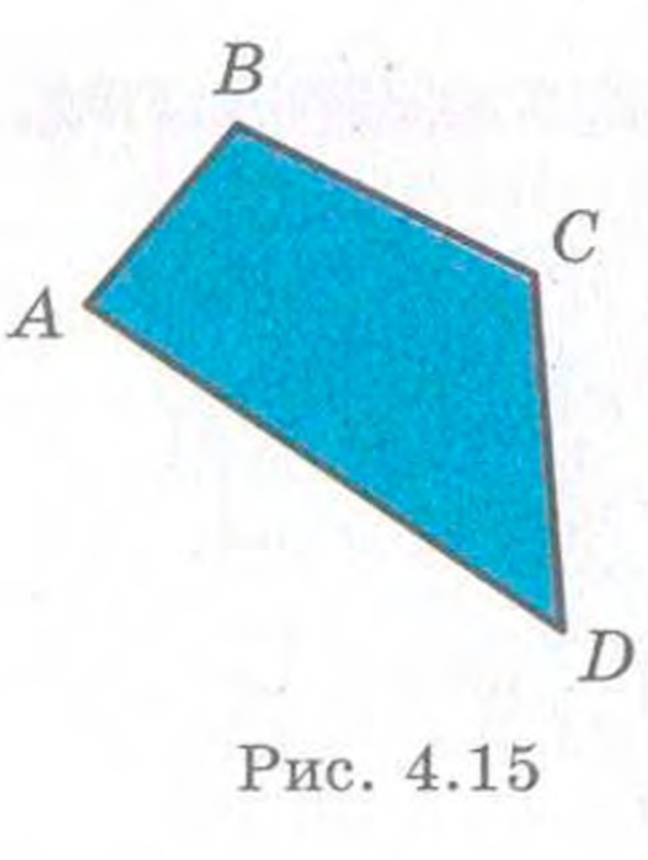


Рис. 4.15

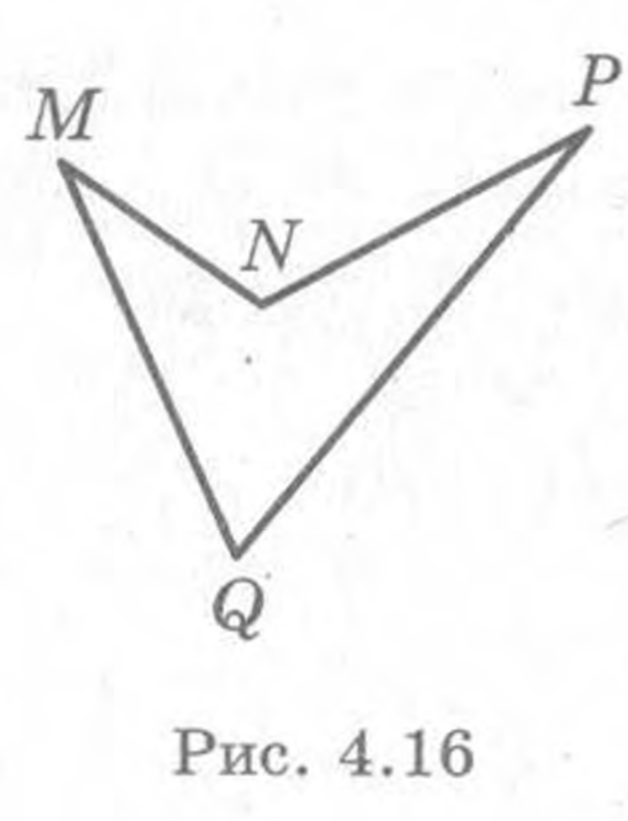


Рис. 4.16

Розв'язання. З однієї вершини n-кутника можна провести $(n - 3)$ діагоналі (не можна провести діагоналі в саму обрану вершину і дві сусідні вершини). Оскільки маємо n вершин, то здавалося б, що загальна кількість діагоналей дорівнює $n(n - 3)$. Але в такий спосіб кожну діагональ ураховували двічі. Отже, кількість діагоналей дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$.

Задача 2. *Доведіть, що довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжин трьох інших його сторін.*

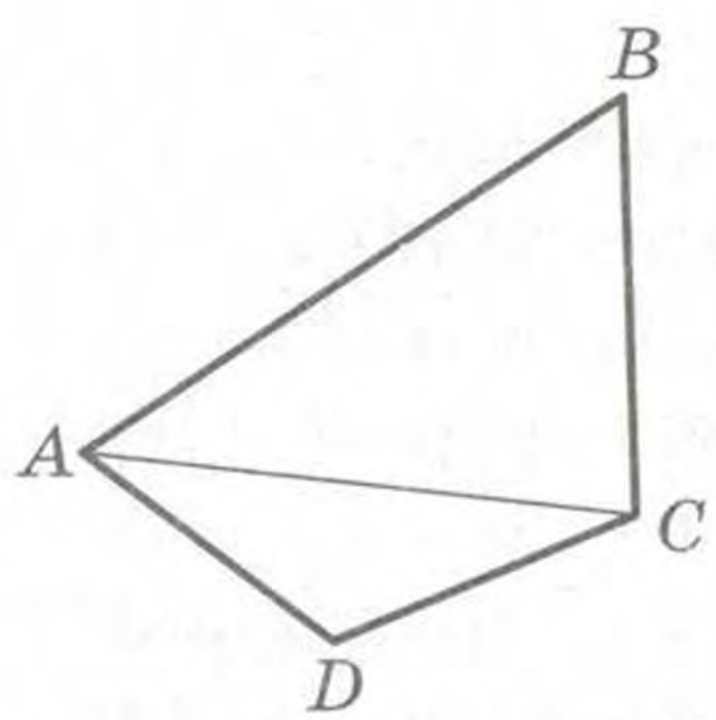


Рис. 4.17

Розв'язання. Розглянемо довільний чотирикутник $ABCD$ (рис. 4.17). Покажемо, наприклад, що $AB < AD + DC + CB$.

Проведемо діагональ AC. З $\Delta\ ABC$ за нерівністю трикутника отримуємо: $AB < AC + CB$. Аналогічно з $\Delta\ ADC$: $AC < AD + DC$.

Отже, $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Приклад 2. Чи можна опуклий 32-кутник розрізати на 20 трикутників, 3 опуклих чотирикутники та один опуклий п'ятикутник?

Розв'язання. Очевидно, що сума кутів даного 32-кутника не більша за суму кутів усіх многокутників, на які його розрізано. Тоді маємо:

$$180°\cdot(32 - 2) \leqslant 20\cdot180° + 3\cdot180°\cdot(4 - 2) + 180°\cdot(5 - 2);$$
$$30 \leqslant 29.$$

Отримали суперечність. Отже, таким чином розрізати опуклий 32-кутник неможливо.

?

1. Поясніть, які відрізки називають сусідніми.
2. Поясніть, яку фігуру називають многокутником.
3. Що називають діагоналлю многокутника?
4. Що називають периметром многокутника?
5. Який многокутник називають опуклим?
6. Як розташований опуклий многокутник відносно будь-якої прямої, що містить його сторону?

7. Чому дорівнює сума кутів опуклого n-кутника?
8. Який кут називають зовнішнім кутом опуклого n-кутника?
9. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, взятих по одному при кожній вершині?
10. Які вершини і кути чотирикутника називають протилежними?

ВПРАВИ

4.1.° Знайдіть суму кутів опуклого:
1) п'ятикутника;
2) восьмикутника;
3) двадцятичотирикутника.

4.2.° Знайдіть суму кутів опуклого:
1) дев'ятикутника; 2) шістнадцятикутника.

4.3.° Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює: 1) 1800°; 2) 720°; 3) 1600°?

4.4.° Чи існує многокутник, кожний кут якого дорівнює:
1) 150°; 2) 100°?

4.5.° Один з кутів чотирикутника у 2 рази менший від другого кута, на 20° менший від третього і на 40° більший за четвертий. Знайдіть кути чотирикутника.

4.6.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 10 і 21. Опуклий чи неопуклий цей чотирикутник?

4.7.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо три його кути пропорційні числам 4, 5 і 7, а четвертий кут дорівнює їх півсумі. Опуклий чи неопуклий цей чотирикутник?

4.8.° У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і BC рівні, а діагональ BD утворює з цими сторонами рівні кути. Доведіть, що сторони CD і AD теж рівні.

4.9.° Скільки діагоналей можна провести:
1) у дев'ятикутнику; 2) у двадцятикутнику?

4.10.° У трикутнику ABC $\angle A = 44°$, $\angle B = 56°$. Бісектриси AK і BM трикутника перетинаються в точці O. Знайдіть кути чотирикутника: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

4.11.° У трикутнику ABC $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$. Висоти AE і BF трикутника перетинаються в точці H. Знайдіть кути чотирикутника: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

4.12.° Знайдіть діагональ чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 80 см, а периметри трикутників, на які ця діагональ розбиває даний чотирикутник, дорівнюють 36 см і 64 см.

4.13.° Чи можуть сторони чотирикутника дорівнювати: 1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?

4.14.• Три кути опуклого многокутника дорівнюють по 100°, а решта — по 120°. Визначте вид многокутника.

4.15.• Доведіть, що коли кути опуклого шестикутника рівні, то його сторони утворюють три пари паралельних сторін.

4.16.• У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle C = 90°$. Доведіть, що бісектриси двох інших кутів чотирикутника або паралельні, або лежать на одній прямій.

4.17.• Доведіть, що коли бісектриси двох протилежних кутів опуклого чотирикутника паралельні або лежать на одній прямій, то два інших кути чотирикутника рівні.

4.18.• Побудуйте чотирикутник за його сторонами та одним з кутів.

4.19.• Побудуйте чотирикутник за трьома сторонами і двома діагоналями.

4.20.• Побудуйте чотирикутник за його сторонами і однією з діагоналей.

4.21.• Сума кутів опуклого n-кутника і одного з його зовнішніх кутів дорівнює 990°. Знайдіть n.

4.22.• Чи можна опуклий 17-кутник розрізати на 14 трикутників?

4.23.•• Доведіть, що в опуклому чотирикутнику $ABCD$ $AC + BD > AB + CD$.

4.24.•• Доведіть, що в опуклому чотирикутнику сума діагоналей менша від периметра, але більша за півпериметр чотирикутника.

4.25.•• Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за кутами A і B, сторонами AB і BC та сумою сторін AD і CD.

4.26.•• Серединні перпендикуляри сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці K, яка належить стороні AD. Доведіть, що коли $\angle A = \angle D$, то діагоналі чотирикутника $ABCD$ рівні.

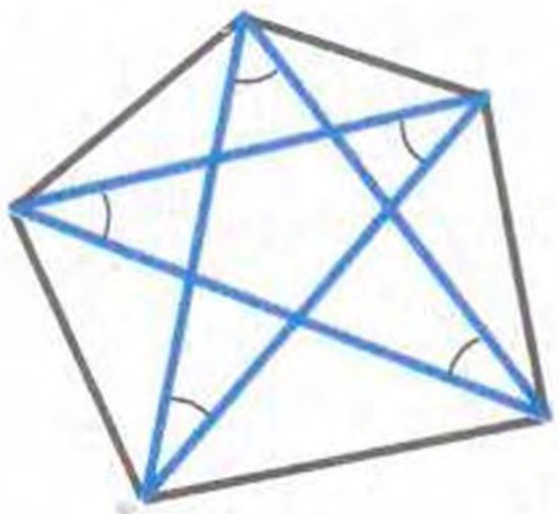


Рис. 4.18

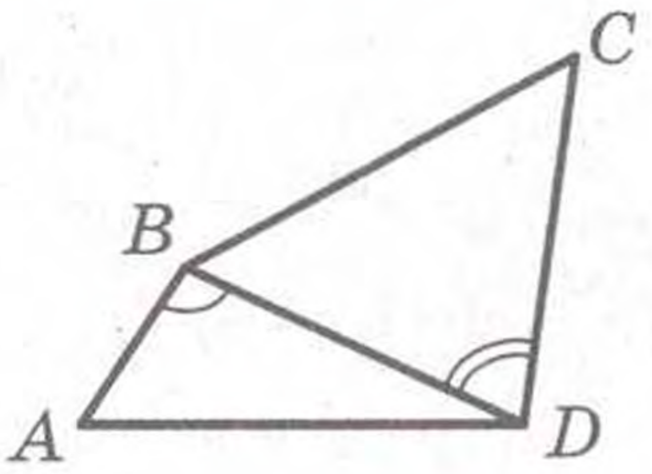


Рис. 4.19

4.27.•• Вершини опуклого п'ятикутника з'єднано через одну (рис. 4.18). Знайдіть суму кутів при вершинах отриманої «зірки».

4.28.* Бісектриси кутів A і B опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці M, а бісектриси кутів C і D — у точці N. Відомо, що $MN \perp AB$. Доведіть, що кути A і B рівні.

4.29.* Градусна міра кожного з кутів опуклого 19-кутника кратна $10°$. Доведіть, що у цього 19-кутника є пара паралельних сторін.

4.30.* Опуклий n-кутник можна розрізати на кілька рівносторонніх трикутників. Знайдіть найбільше значення n.

4.31.* Доведіть, що будь-який опуклий многокутник можна розрізати на рівнобедрені трикутники.

4.32.* У чотирикутнику $ABCD$ сума кутів ABD і BDC дорівнює $180°$, а сторони AD і BC рівні (рис. 4.19). Доведіть, що $\angle BAD = \angle BCD$.

4.33.* Скільки в опуклому многокутнику може бути сторін, які дорівнюють найбільшій діагоналі?

5. Паралелограм. Властивості паралелограма

Означення. Паралелограмом називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.

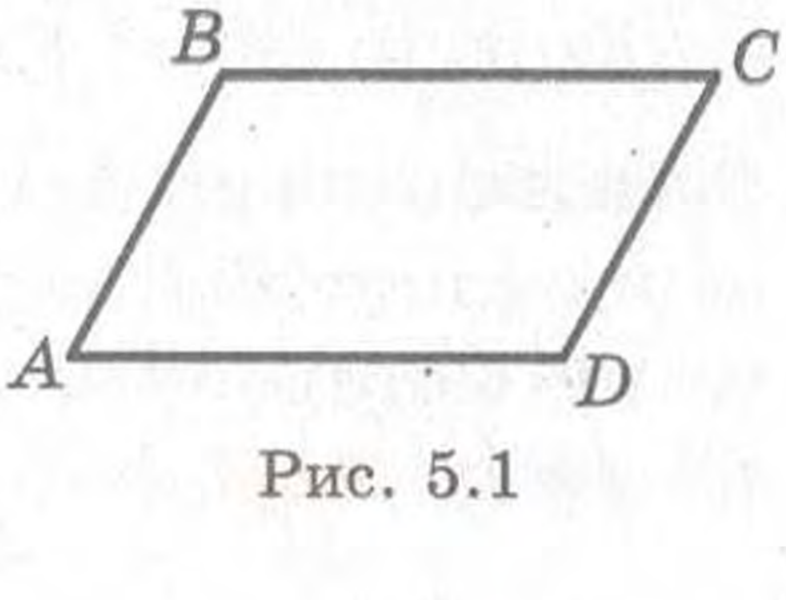


Рис. 5.1

На рисунку 5.1 зображено паралелограм $ABCD$: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

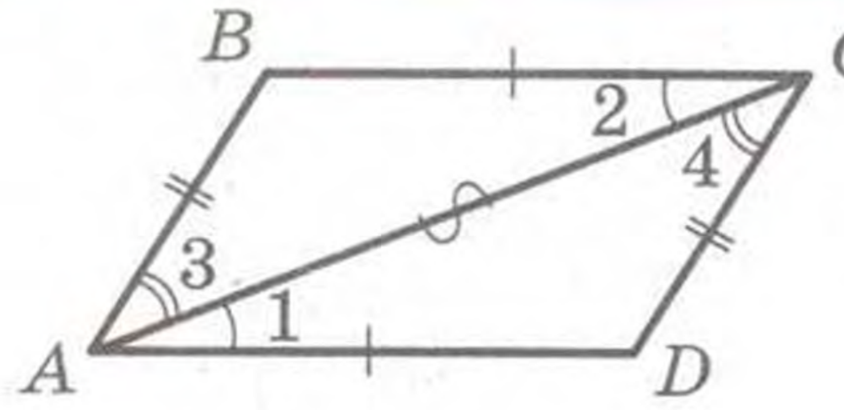


Рис. 5.2

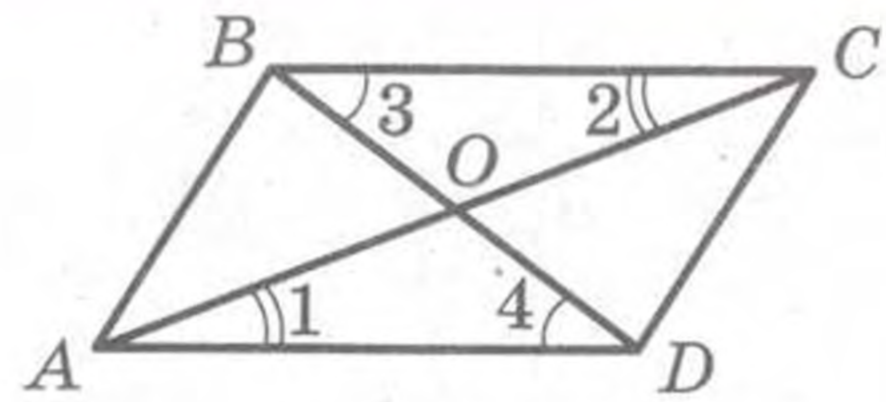


Рис. 5.3

Теорема 5.1. ***У паралелограма протилежні сторони рівні.***

Доведення. На рисунку 5.2 зображено паралелограм $ABCD$. Проведемо діагональ AC. Доведемо, що трикутники ABC і CDA рівні.

У цих трикутниках сторона AC — спільна, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC, кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC. Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$ і $BC = AD$. ▲

Теорема 5.2. ***У паралелограма протилежні кути рівні.***

Доведення. При доведенні попередньої теореми було встановлено, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (рис. 5.2). Звідси $\angle B = \angle D$. Також з рівностей $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$ випливає, що $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Отже, $\angle BAD = \angle BCD$. ▲

Теорема 5.3. ***У паралелограма діагоналі точкою перетину діляться навпіл.***

Доведення. На рисунку 5.3 зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведемо, що трикутники AOD і COB рівні.

Дійсно, $\angle 1$ і $\angle 2$ та $\angle 3$ і $\angle 4$ рівні як різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січних AC і BD відповідно. За теоремою 5.1 $AD = BC$. Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AO = OC$, $BO = OD$. ▲

Означення. Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.

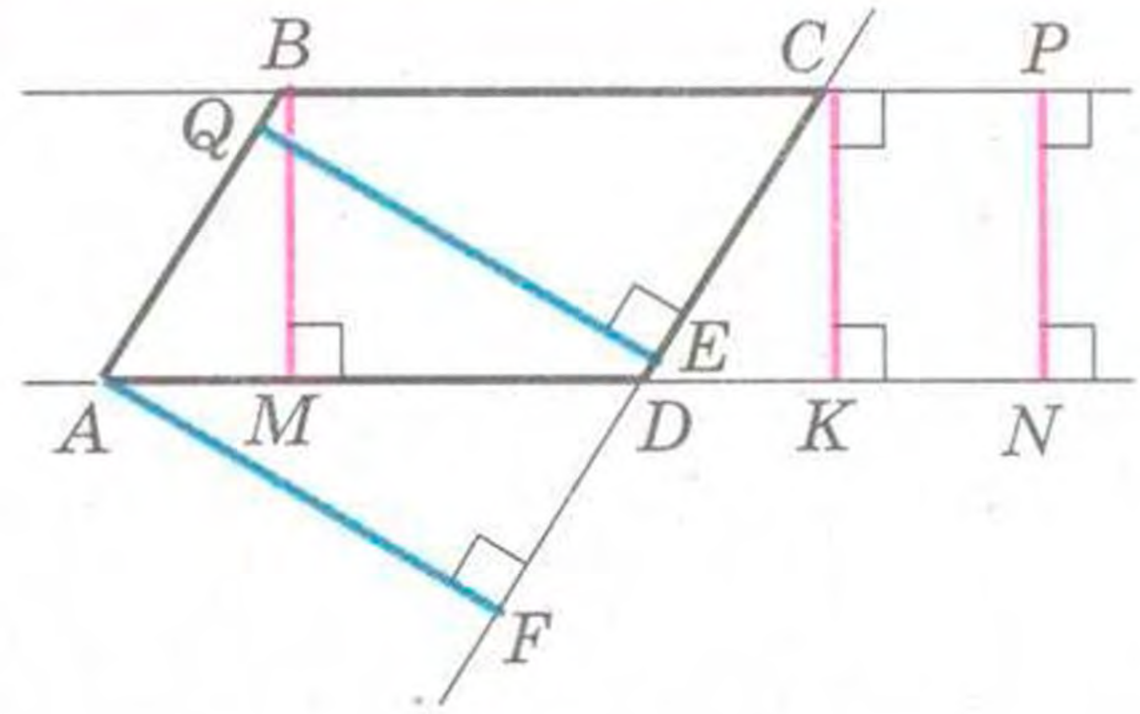


Рис. 5.4

На рисунку 5.4 кожний з відрізків AF, QE, BM, PN, CK є висотою паралелограма $ABCD$.

З курсу геометрії 7-го класу ви знаєте, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої. Тому $AF = QE$ і $BM = PN = CK$.

Кажуть, що **висоти** BM, CK, PN **відповідають сторонам** BC і AD, а висоти AF, QE — сторонам AB і CD.

Теорема 5.4. ***Прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.***

Доведення. Через кожну вершину даного трикутника ABC проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 5.5).

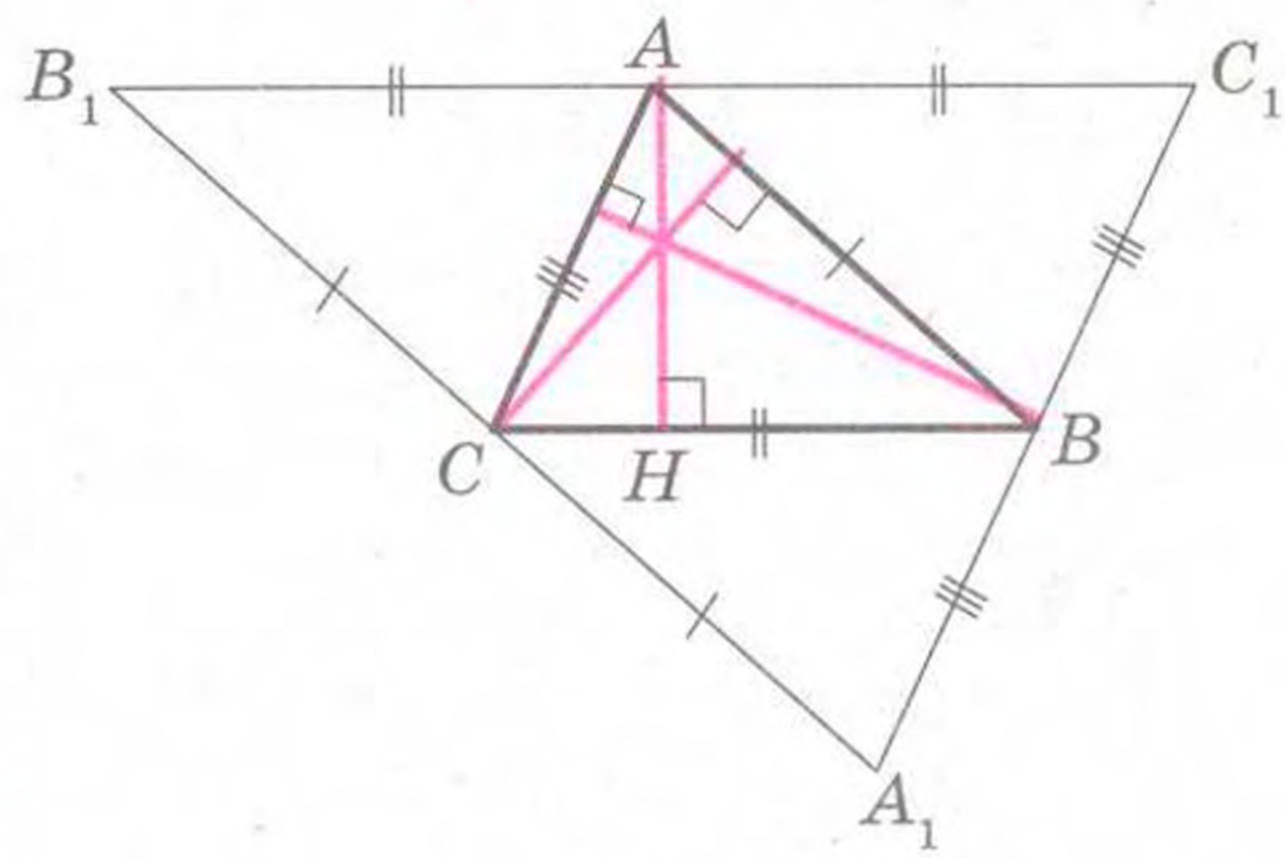


Рис. 5.5

З побудови випливає, що чотирикутники AC_1BC і $ABCB_1$ — паралелограми. Звідси $AC_1 = BC = AB_1$. Отже, точка A є серединою відрізка B_1C_1.

Проведемо висоту AH трикутника ABC. Оскільки $B_1C_1 \parallel BC$, то $AH \perp B_1C_1$. Звідси пряма AH — серединний перпендикуляр сторони B_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно можна довести, що прямі, які містять дві інші висоти трикутника ABC, є серединними перпендикулярами сторін C_1A_1 і A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$.

Як відомо, серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці. ▲

Точку, в якій перетинаються прямі, що містять висоти трикутника, називають **ортоцентром** трикутника.

Приклад 1. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить сторону у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини

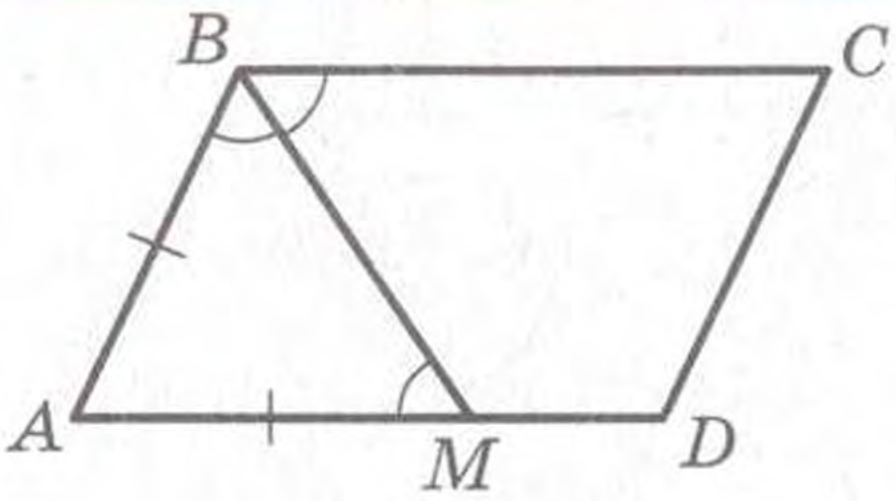


Рис. 5.6

гострого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 60 см.

Розв'язання. Бісектриса тупого кута B паралелограма $ABCD$ (рис. 5.6) перетинає сторону AD у точці M, $AM : MD = 2 : 1$.

Кути ABM і CBM рівні за умовою.

Кути CBM і AMB рівні як різносторонні при $BC \parallel AD$ та січній BM.

Тоді $\angle ABM = \angle AMB$. Отже, ΔBAM — рівнобедрений, $AB = AM$.

Нехай $MD = x$ см, тоді $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Периметр паралелограма дорівнює $2(AB + AD)$. Ураховуючи умову, маємо:

$$2(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

Отже, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.

Відповідь: 12 см, 18 см.

Приклад 2. На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ поза ним побудовано рівносторонні трикутники ABE і BCF (рис. 5.7). Доведіть, що трикутник EDF — рівносторонній.

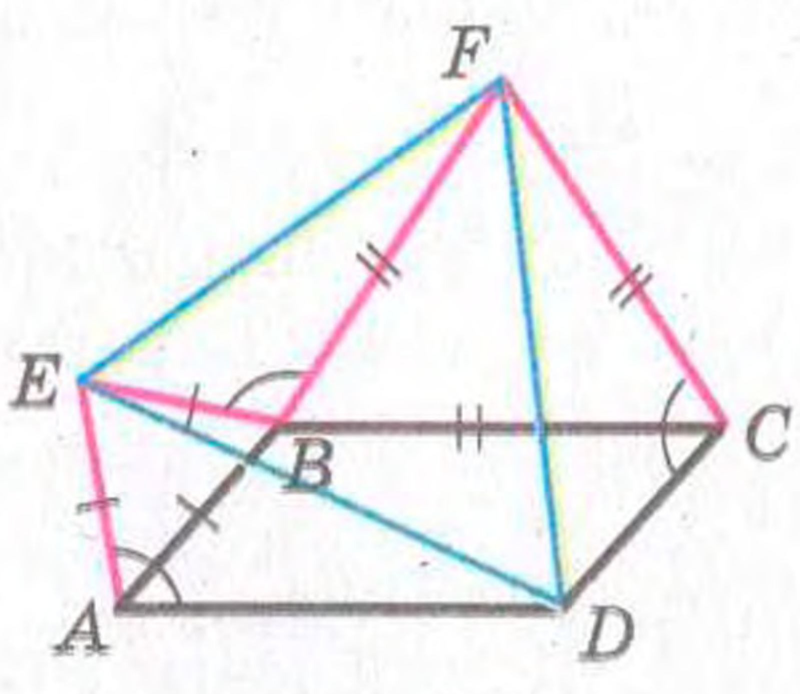


Рис. 5.7

Розв'язання. Нехай $\angle BAD = \alpha$. Тоді $\angle EAD = \angle FCD = 60° + \alpha$.

Маємо: $\angle EBA = \angle FBC = 60°$, $\angle ABC = 180° - \alpha$. Тоді $\angle EBF = 360° - (60° + 60° + 180° - \alpha) = 60° + \alpha$.

Запишемо: $EB = EA = AB = DC$, $BF = FC = BC = AD$. Отже, у трикутниках AED, CDF і BEF є рівними дві сторони і кут між ними. З рівності цих трикутників випливає, що $ED = FD = EF$.

1. Який чотирикутник називають паралелограмом?
2. Яку властивість мають протилежні сторони паралелограма?
3. Яку властивість мають протилежні кути паралелограма?

4. Яку властивість мають діагоналі паралелограма?
5. Що називають висотою паралелограма?
6. Чому дорівнює сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма? Відповідь обґрунтуйте.
7. Сформулюйте теорему про висоти трикутника.

ВПРАВИ

5.1.° На рисунку 5.8 зображено паралелограми. Знайдіть, не виконуючи вимірювань, на яких рисунках величини кутів або довжини відрізків позначено неправильно (довжини відрізків наведено в сантиметрах).

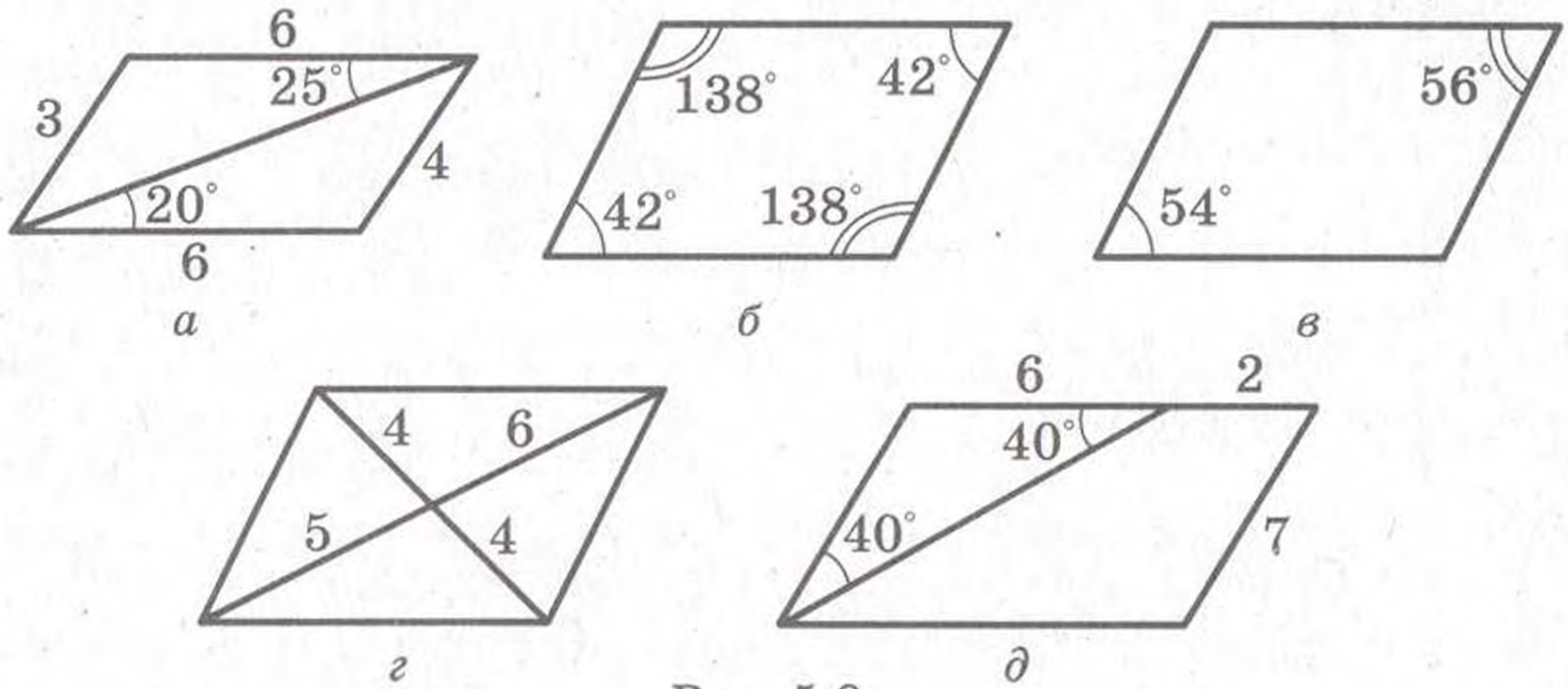


Рис. 5.8

5.2.° Периметр паралелограма дорівнює 112 см. Знайдіть його сторони, якщо: 1) одна з них на 12 см менша від другої; 2) дві його сторони відносяться як 5 : 9.

5.3.° Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них у 5 разів більша за другу, а периметр паралелограма дорівнює 96 см.

5.4.° У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см, O — точка перетину його діагоналей. Знайдіть периметр трикутника COD.

5.5.° Один з кутів паралелограма дорівнює 70°. Знайдіть решту його кутів.

5.6.° Знайдіть кути паралелограма $ABCD$ (рис. 5.9), якщо $\angle ABD = 68°$, $\angle ADB = 47°$.

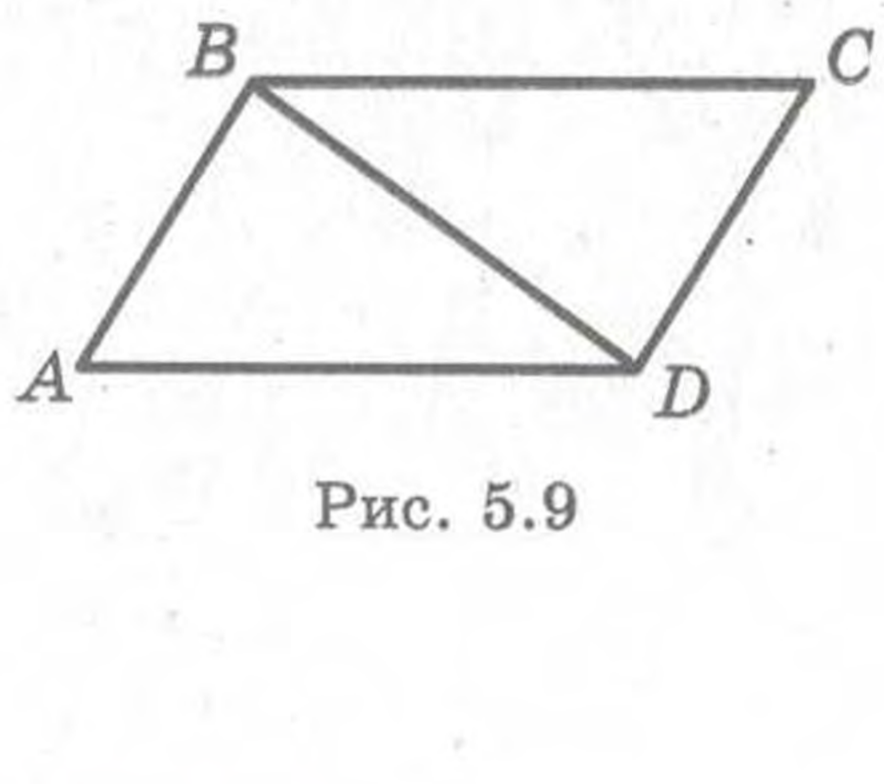


Рис. 5.9

5.7.° У паралелограмі $ABCD$ діагональ AC утворює зі стороною AB кут, який дорівнює $32°$, $\angle BCD = 56°$. Знайдіть $\angle CAD$ і $\angle D$.

5.8.° Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці M. Визначте вид трикутника ABM.

5.9.° Знайдіть кути паралелограма, якщо:

1) сума двох його кутів дорівнює $100°$;

2) різниця двох його кутів дорівнює $20°$;

3) два його кути відносяться як $3 : 7$.

5.10.° Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них:

1) у 2 рази більший за другий;

2) на $24°$ менший від другого.

5.11.° Знайдіть кути паралелограма $ABCD$, якщо $BD \perp AB$ і $BD = AB$.

5.12.° Кут між висотою BH паралелограма $ABCD$ і бісектрисою BM кута ABC дорівнює $24°$. Знайдіть кути паралелограма.

5.13.° Діагональ паралелограма утворює з його сторонами кути $30°$ і $90°$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 36 см.

5.14.° Один з кутів паралелограма дорівнює $45°$. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 3 см і ділить сторону паралелограма навпіл. Знайдіть цю сторону паралелограма та кути, які утворює діагональ, що сполучає вершини тупих кутів, зі сторонами паралелограма.

5.15.° У паралелограмі $ABCD$ $\angle C = 30°$, висота BH, проведена до сторони CD, дорівнює 7 см, а периметр паралелограма — 46 см. Знайдіть сторони паралелограма.

5.16.° Доведіть, що будь-який відрізок, який проходить через точку перетину діагоналей паралелограма і кінці якого належать протилежним сторонам паралелограма, ділиться цією точкою навпіл.

5.17.° Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 24 см, $\angle ABC = 160°$, діагональ AC утворює зі стороною AD кут $10°$. Знайдіть сторони паралелограма.

5.18.° Діагональ BD паралелограма $ABCD$ утворює зі стороною AB кут $65°$, $\angle C = 50°$, $AB = 8$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

5.19.° Поза паралелограмом $ABCD$ проведено пряму, паралельну його діагоналі BD, яка перетинає прямі AB, BC, CD і AD у точках E, M, F і K відповідно. Доведіть, що $MK = EF$.

5.20.° Паралельно діагоналі AC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає відрізки AB і BC та прямі AD і CD у точках M, N, P і K відповідно. Доведіть, що $PM = NK$.

5.21.° Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть периметр даного паралелограма, якщо $AB = 12$ см, $MC = 16$ см.

5.22.° Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 3 : 5, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 66 см.

5.23.° У паралелограмі $ABCD$ $AD = 12$ см, $AB = 3$ см, бісектриси кутів B і C перетинають сторону AD у точках E і F. Знайдіть довжину відрізка EF.

5.24.° Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює гострому куту паралелограма.

5.25.° Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, дорівнює тупому куту паралелограма.

5.26.° Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, у 4 рази більший за цей кут. Знайдіть кути паралелограма.

5.27.° Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 30°. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 4 см і 6 см.

5.28.° Висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, утворюють кут 150°, сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 18 см. Знайдіть висоти паралелограма.

5.29.• Через довільну точку основи рівнобедреного трикутника проведено прямі, паралельні його бічним сторонам. Доведіть, що периметр утвореного чотирикутника дорівнює сумі бічних сторін даного трикутника.

5.30.• Через кожну вершину трикутника ABC проведено пряму, паралельну протилежній стороні. Сума периметрів усіх утворених паралелограмів дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

5.31.° Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Побудуйте паралелограм, вершинами якого є дані точки. Скільки розв'язків має задача?

5.32.° Точка перетину бісектрис двох сусідніх кутів паралелограма належить його стороні. Знайдіть відношення сусідніх сторін паралелограма.

5.33.° На стороні BC паралелограма $ABCD$ існує така точка M, що $BM = MD = CD$. Знайдіть кути паралелограма, якщо $AD = BD$.

5.34.° У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів A і D поділяють сторону BC на три рівних відрізки. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.

5.35.° Побудуйте паралелограм:
1) за стороною, проведеною до неї висотою і діагоналлю;
2) за гострим кутом і двома висотами, які відповідають двом сусіднім сторонам.

5.36.° Побудуйте паралелограм:
1) за двома сторонами і висотою;
2) за діагоналлю і двома висотами, які відповідають двом сусіднім сторонам.

5.37.° Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M, а бісектриса кута AMC проходить через точку D. Знайдіть кути паралелограма, якщо $\angle MDC = 45°$.

5.38.° Через вершини A, B і D паралелограма $ABCD$ проведено прямі, перпендикулярні до прямих BD, BC і CD відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

5.39.°° З вершини B паралелограма $ABCD$ опустили перпендикуляр BE на діагональ AC. Через точку A проведено пряму m, перпендикулярну до прямої AD, а через точку C — пряму n, перпендикулярну до прямої CD. Доведіть, що точка перетину прямих m і n належить прямій BE.

5.40.°° Коло, вписане в трикутник, дотикається до його сторін AB, BC і AC відповідно в точках C_1, A_1 і B_1. Через точки A_1, B_1 і C_1 проведено прямі, паралельні бісектрисам кутів A, B і C відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

5.41.** У трикутнику ABC сторона AC найменша. На сторонах AB і CB взято точки K і L відповідно так, що $KA = AC = CL$. Відрізки AL і KC перетинаються в точці M. Доведіть, що $MJ \perp AC$, де J — центр вписаного кола трикутника ABC.

5.42.** Побудуйте паралелограм за стороною, сумою діагоналей і кутом між діагоналями.

5.43.** Через точку, яка належить куту, проведіть пряму так, щоб відрізок, який сполучає точки перетину цієї прямої зі сторонами кута, даною точкою ділився б навпіл.

5.44.** Точки A і C належать куту, але не належать його сторонам. Побудуйте паралелограм $ABCD$ так, щоб вершини B і D належали сторонам даного кута.

5.45.** На сторонах AB і BC трикутника ABC побудуйте відповідно такі точки M і K, що $AM = BK$ і $MK \parallel AC$.

5.46.* Відрізки AB і CD завдовжки 1 перетинаються в точці O так, що $\angle AOC = 60°$. Доведіть, що $AC + BD \geqslant 1$.

5.47.* Точки M, N і K — відповідно середини рівних сторін AB, BC і CD чотирикутника $ABCD$. За цими точками відновіть чотирикутник $ABCD$.

5.48.* Через кожну вершину паралелограма проведено пряму, перпендикулярну до діагоналі, яка не проходить через цю вершину (рис. 5.10). Доведіть, що діагоналі чотирикутника, утвореного перетинами чотирьох проведених прямих, перпендикулярні до сторін паралелограма.

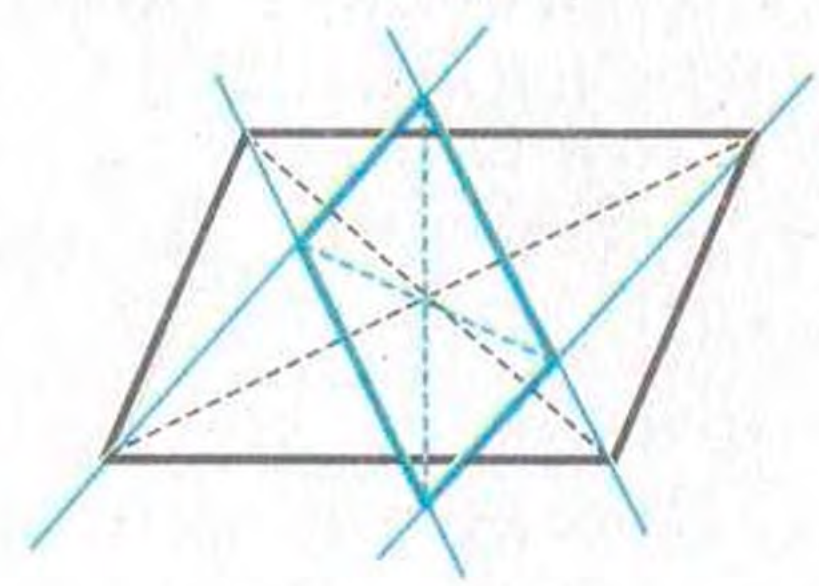


Рис. 5.10

5.49.* На лінійці нанесено шкалу з ціною поділки 1 см. За допомогою цієї лінійки проведіть пряму, яка перпендикулярна до даної прямої.

6. Ознаки паралелограма

Означення паралелограма дозволяє серед чотирикутників розпізнавати паралелограми. Цій самій меті слугують такі три теореми-ознаки.

Теорема 6.1 (обернена до теореми 5.1). ***Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. На рисунку 6.1 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = CD$ і $BC = AD$. Доведемо, що $AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$.

Проведемо діагональ AC. Трикутники ABC і CDA рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$. Кути 1 і 3 є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC. Отже, $BC \parallel AD$. Аналогічно з рівності $\angle 2 = \angle 4$ випливає, що $AB \parallel CD$.

Отже, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони паралельні, а тому цей чотирикутник — паралелограм. ▲

Теорема 6.2. ***Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. На рисунку 6.2 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $BC = AD$ і $BC \parallel AD$. Доведемо спочатку, що $AB = CD$.

Проведемо діагональ AC. У трикутниках ABC і CDA маємо: $BC = AD$, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC, а сторона AC — спільна. Отже, $\Delta ABC = \Delta CDA$ за першою ознакою рівності

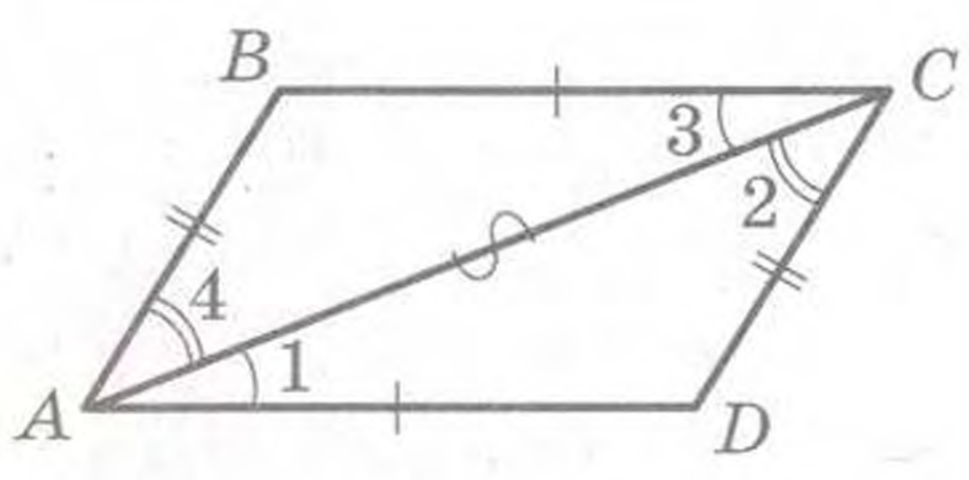


Рис. 6.1

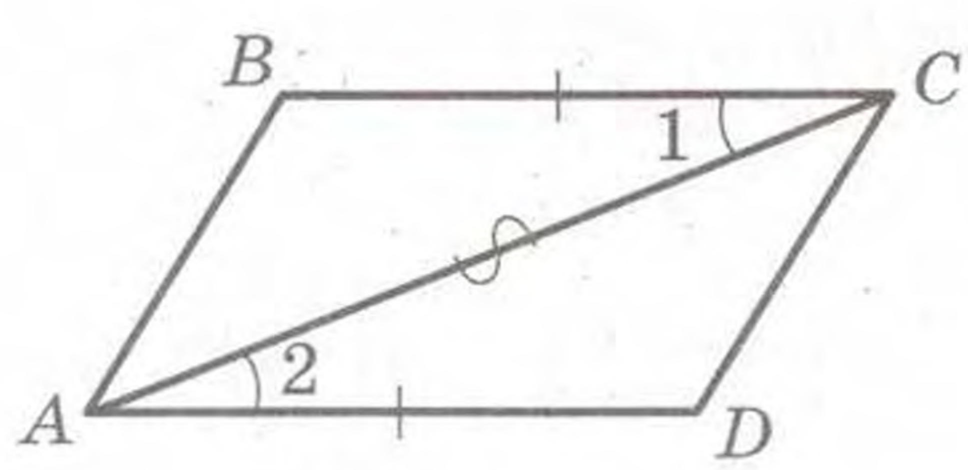


Рис. 6.2

трикутників. Звідси $AB = CD$. Отже, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони рівні. Тому за теоремою 6.1 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. ▲

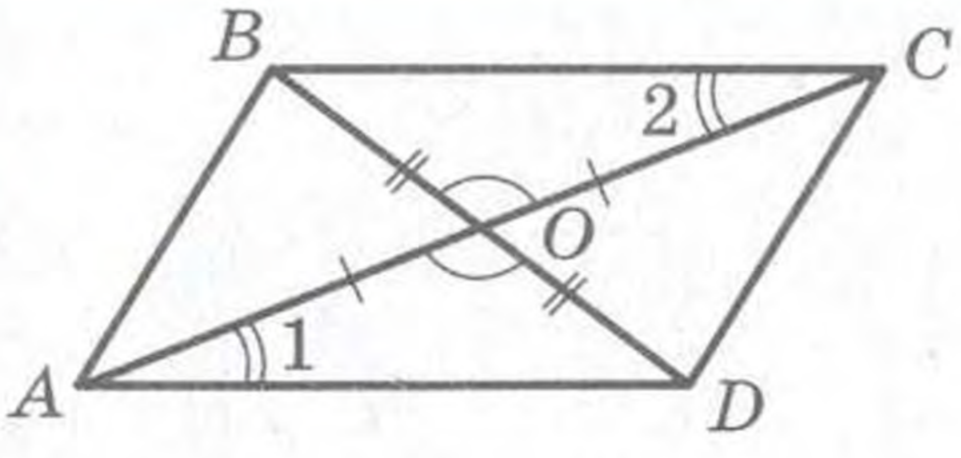


Рис. 6.3

Теорема 6.3 (обернена до теореми 5.3). ***Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. На рисунку 6.3 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому діагоналі AC і BD перетинаються в точці O, причому $AO = OC$ і $BO = OD$. Доведемо, що $BC = AD$ і $BC \parallel AD$.

Оскільки кути BOC і DOA рівні як вертикальні, то $\triangle BOC = \triangle DOA$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $BC = AD$ і $\angle 1 = \angle 2$. Кути 1 і 2 є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC. Отже, $BC \parallel AD$.

Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ дві протилежні сторони рівні й паралельні. За теоремою 6.2 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. ▲

Ви знаєте, що трикутник однозначно задається його сторонами, тобто задача побудови трикутника за трьома сторонами має єдиний розв'язок. Інша справа з паралелограмом. На рисунку 6.4 зображено паралелограми $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, сторони яких рівні, тобто $AB = A_1B_1 = A_2B_2$ і $BC = B_1C_1 = B_2C_2$. Проте очевидно, що самі паралелограми не є рівними. Тому паралелограм, на відміну від трикутника, не є жорсткою фігурою.

Ця властивість «рухомості» паралелограма широко використовується на практиці. Завдяки його рухомості лампу можна встановлювати в зручне для роботи положення,

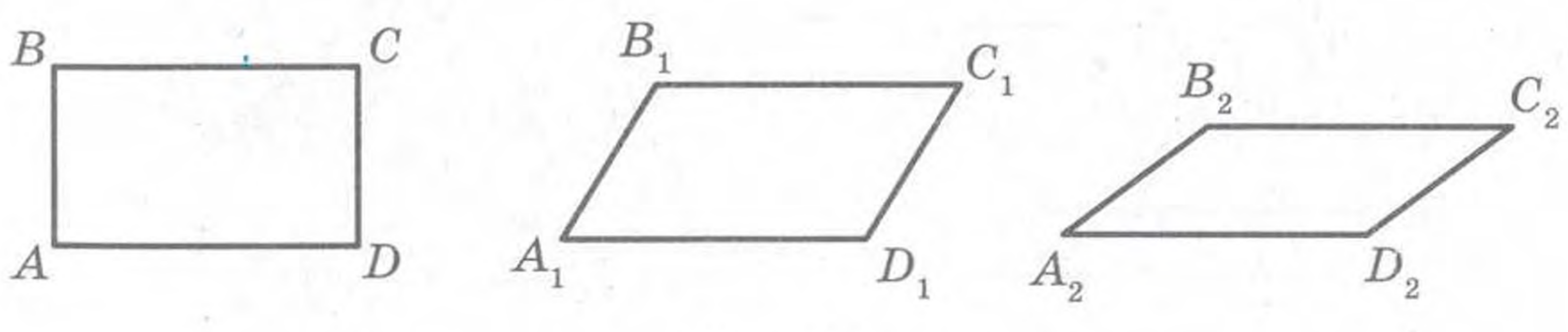
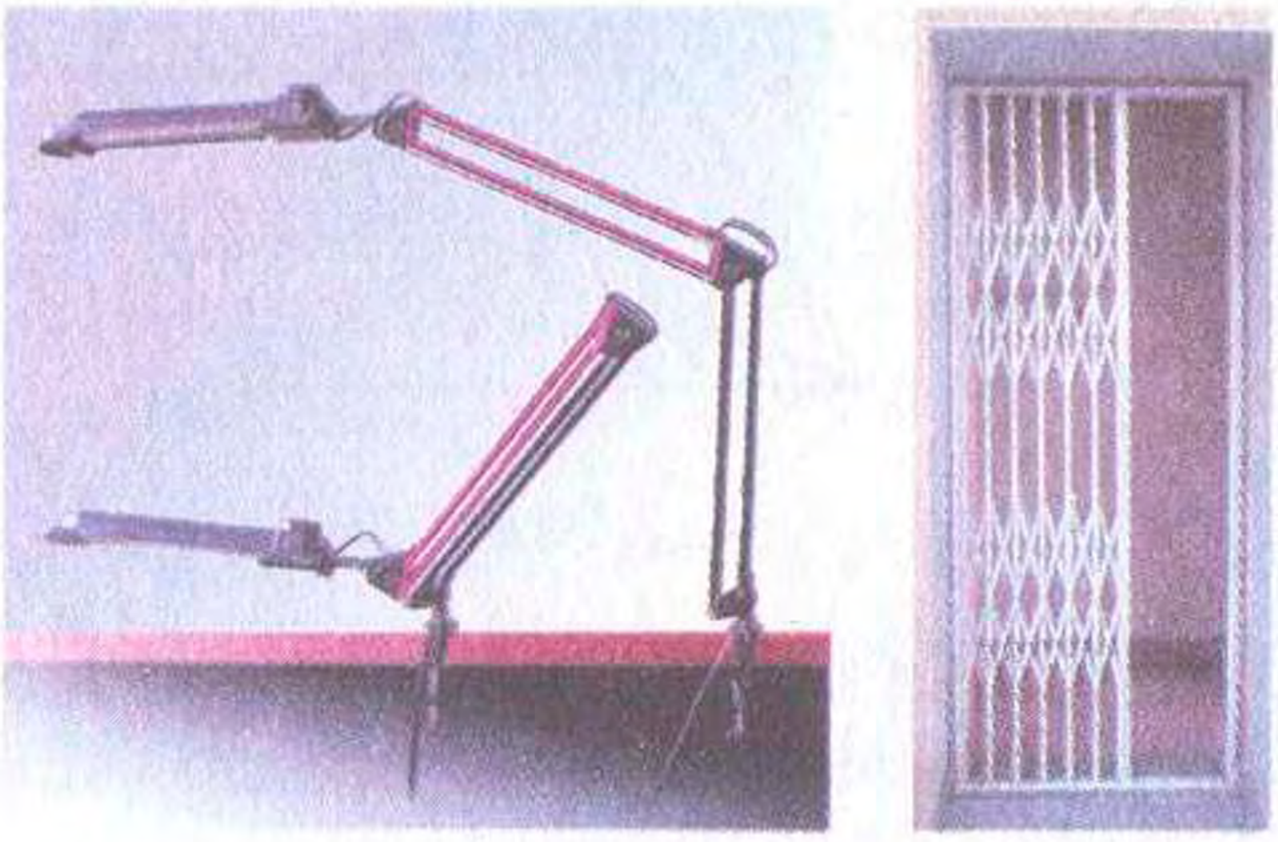


Рис. 6.4



а　　　*б*

Рис. 6.5

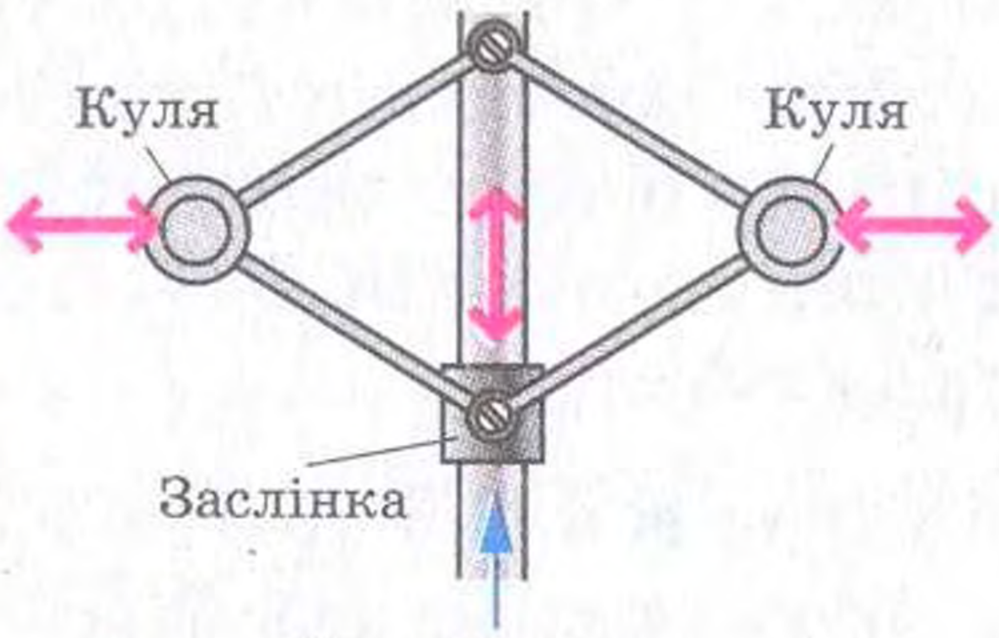


Рис. 6.6

а розсувну решітку — відсувати на потрібну відстань у дверному прорізі (рис. 6.5).

На рисунку 6.6 зображено схему механізму, який називають **паралелограмом Уатта** на честь винахідника першої універсальної парової машини. При збільшенні швидкості обертання осі кулі віддаляються від неї під дією відцентрової сили, тим самим піднімаючи заслінку, яка регулює кількість пари.

Задача. *Якщо в чотирикутнику кожні два протилежні кути рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.*

Розв'язання. На рисунку 6.7 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

За теоремою про суму кутів чотирикутника $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Тоді $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Оскільки $\angle A$ і $\angle B$ — односторонні кути при прямих AD і BC та січній AB, а їх сума дорівнює $180°$, то $BC \parallel AD$.

Аналогічно доводиться, що $AB \parallel CD$.

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

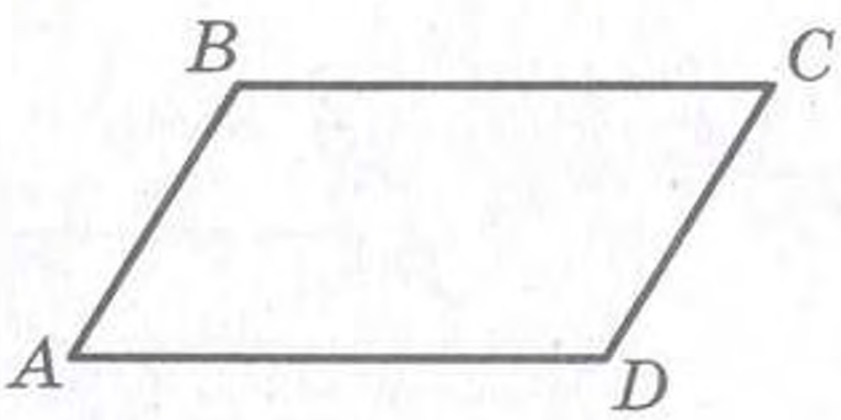


Рис. 6.7

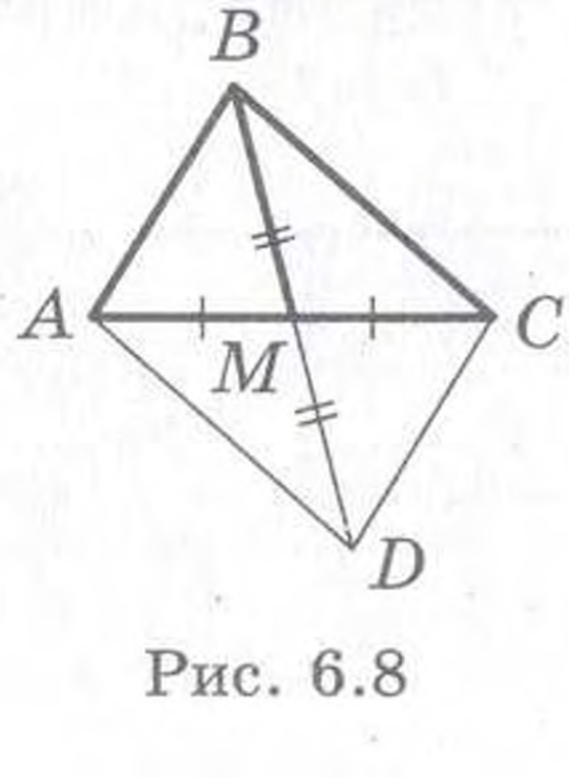


Рис. 6.8

Приклад. Доведіть, що медіана BM трикутника ABC менша від півсуми сторін BA і BC.

Розв'язання. На продовженні медіани BM за точку M позначимо таку точку D, що $BM = MD$ (рис. 6.8). Тоді в чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і DB точкою їх перетину діляться навпіл. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Звідси $AB = DC$. Для сторін трикутника BDC можна записати $BD < DC + BC$. Тоді $2BM < AB + BC$; $BM < \frac{AB + BC}{2}$.

?

1. Які ви знаєте ознаки паралелограма? Сформулюйте їх.
2. Серед властивостей і ознак паралелограма вкажіть взаємно обернені теореми.
3. Яка властивість паралелограма широко використовується на практиці?

ВПРАВИ

6.1.° Доведіть, що коли сума кутів, прилеглих до будь-якої із сусідніх сторін чотирикутника, дорівнює 180°, то цей чотирикутник — паралелограм.

6.2.° Чотирикутники $ABCD$ і $AMKD$ — паралелограми (рис. 6.9). Доведіть, що чотирикутник $BMKC$ — паралелограм.

6.3.° Відрізок AO — медіана трикутника ABD (рис. 6.10), відрізок BO — медіана трикутника ABC. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

6.4.° На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначили точки M і K так, що $AM = CK$. Доведіть, що чотирикутник $MBKD$ — паралелограм.

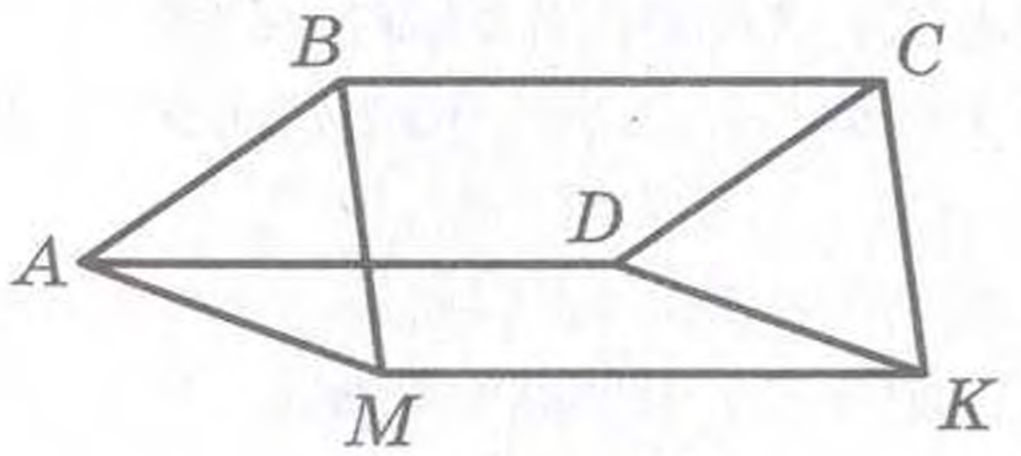


Рис. 6.9

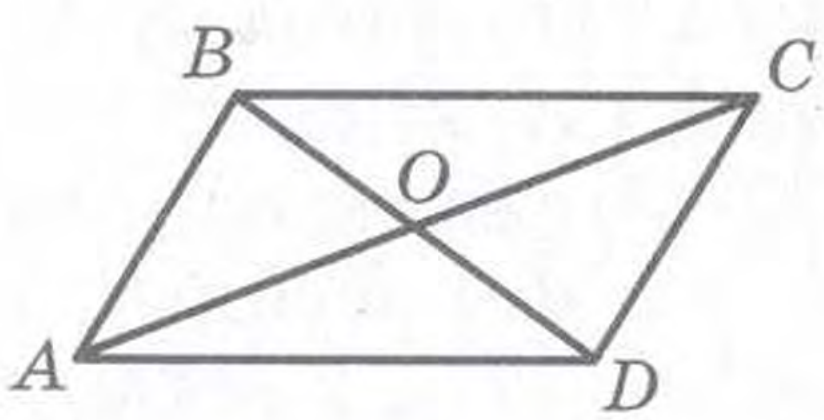


Рис. 6.10

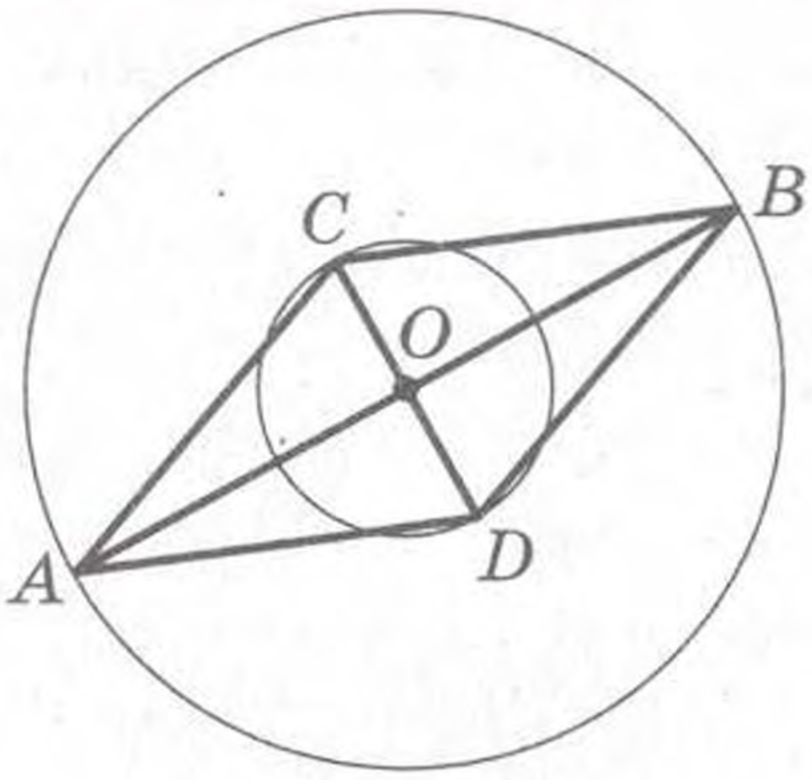


Рис. 6.11

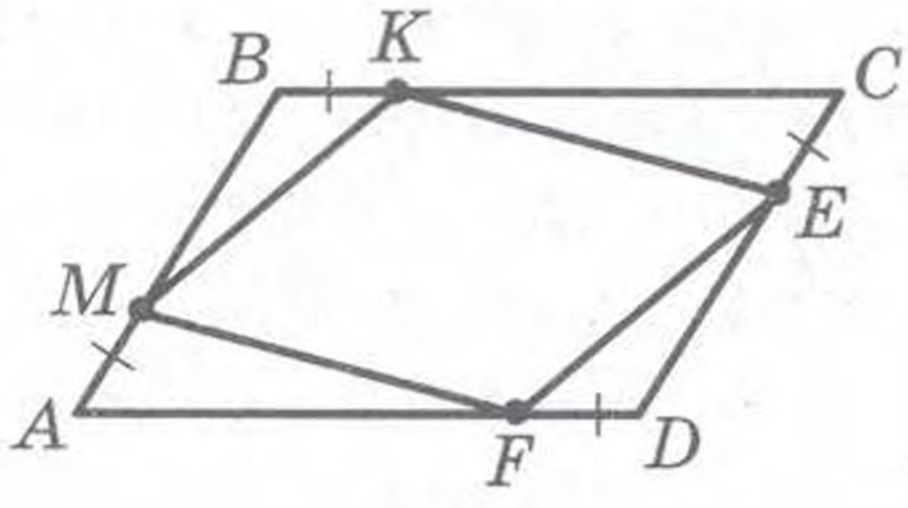


Рис. 6.12

6.5.° Два кола мають спільний центр O (рис. 6.11). В одному з кіл проведено діаметр AB, у другому — діаметр CD. Доведіть, що чотирикутник $ACBD$ — паралелограм.

6.6.° Точки E і F — відповідно середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

6.7.° На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CK. Доведіть, що чотирикутник $MBKD$ — паралелограм.

6.8.° На сторонах паралелограма $ABCD$ (рис. 6.12) відклали рівні відрізки AM, BK, CE і DF. Доведіть, що чотирикутник $MKEF$ — паралелограм.

6.9.° У трикутнику ABC на продовженні медіани AM за точку M відклали відрізок MK, який дорівнює відрізку AM. Визначте вид чотирикутника $ABKC$.

6.10.° У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

6.11.° Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M, а бісектриса кута C — сторону AD у точці K. Доведіть, що чотирикутник $AMCK$ — паралелограм.

6.12.° На рисунку 6.13 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $\angle BCP = \angle DAE$. Доведіть, що чотирикутник $APCE$ — паралелограм.

6.13.° На рисунку 6.14 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $\angle BEC = \angle DFA$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

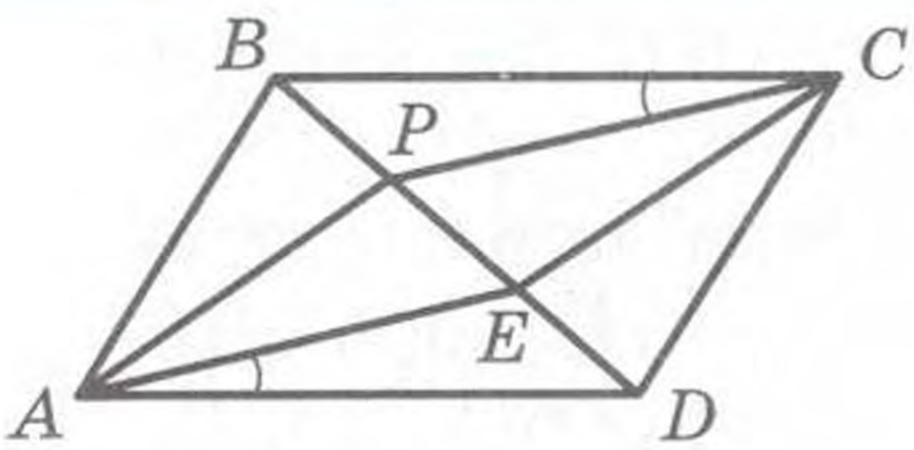


Рис. 6.13

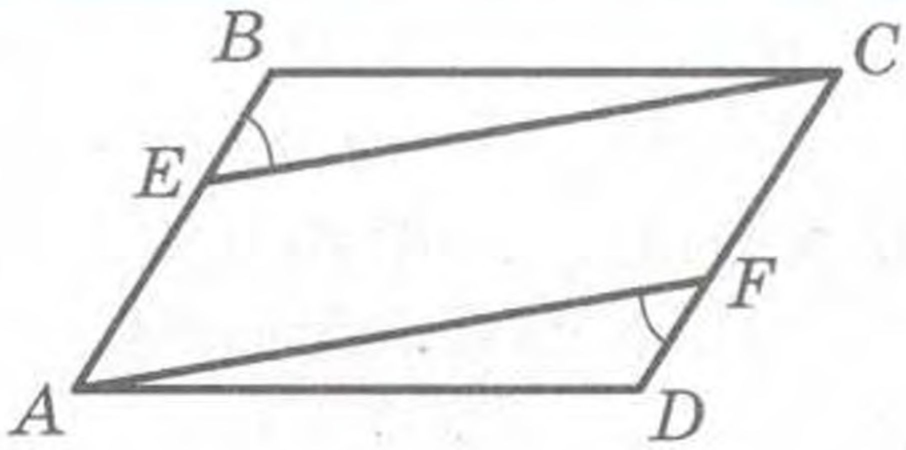


Рис. 6.14

6.14.° З вершин B і D паралелограма $ABCD$ провели перпендикуляри BM і DK до діагоналі AC. Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ — паралелограм.

6.15.° Бісектриси кутів A і C паралелограма $ABCD$ перетинають його діагональ BD у точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

6.16.° Побудуйте паралелограм:

1) за двома діагоналями і стороною;

2) за двома діагоналями і кутом між ними;

3) за двома діагоналями і висотою.

6.17.• Доведіть, що коли m_1, m_2, m_3 — довжини медіан трикутника, p — його півпериметр, то $m_1 + m_2 + m_3 < 2p$.

6.18.• У трикутнику ABC медіана BM перпендикулярна до сторони BC, $AB : BC = 2 : 1$. Знайдіть $\angle ABC$.

6.19.• Доведіть ознаку рівності трикутників за медіаною та кутами, на які вона розбиває кут трикутника.

6.20.• Доведіть ознаку рівності трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

6.21.• Відрізок AM — медіана трикутника ABC, $\angle CAM > \angle BAM$. Доведіть, що $AB > AC$.

6.22.• Через середину O діагоналі NP паралелограма $MNKP$ проведено пряму, яка перетинає сторони MN і KP у точках A і B відповідно. Доведіть, що чотирикутник $ANBP$ — паралелограм.

6.23.• Через точку перетину діагоналей паралелограма $CDEF$ проведено дві прямі, одна з яких перетинає сторони CD і EF у точках A і B відповідно, а друга — сторони DE і CF у точках M і K відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AMBK$ — паралелограм.

6.24.• Точки M, N, K і P — відповідно середини сторін AB, BC, CD і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є точки перетину прямих AN, BK, CP і DM, — паралелограм.

6.25.•• Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і медіаною, проведеною до іншої сторони.

6.26.•• Побудуйте трикутник ABC за медіаною AM, висотами BB_1 і CC_1.

6.27.•• У шестикутнику $ABCDEF$ сторони в парах AB і DE, BC і EF, AF і CD рівні і паралельні. Доведіть, що діагоналі AD, BE і CF перетинаються в одній точці.

6.28.•• На стороні BC трикутника ABC взято точку F. Виявилося, що відрізок AF перетинає медіану BD у точці E так, що $AE = BC$. Доведіть, що $BF = FE$.

7. Необхідні і достатні умови

З курсу геометрії 7 класу ви дізналися, що більшість теорем складається з двох частин: умови (те, що дано) і висновку (те, що треба довести).

Якщо твердження, яке виражає умову, позначити буквою A, а твердження, яке виражає висновок, — буквою B, то формулювання теореми можна зобразити такою схемою:

якщо A, то B.

Наприклад, теорему 5.3 можна сформулювати так:

	A		B
якщо	чотирикутник є паралелограмом	**, то**	діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл

Тоді теорему 6.3 можна сформулювати так:

	B		A
якщо	діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл	**, то**	чотирикутник є паралелограмом

Часто в повсякденному житті у своїх висловлюваннях ми користуємося словами «необхідно», «достатньо». Наведемо кілька прикладів.

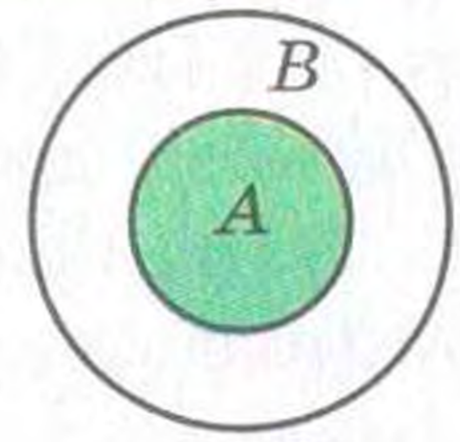


Рис. 7.1

- Для того щоб уміти розв'язувати задачі, *необхідно* знати теореми.
- Якщо ви на математичній олімпіаді розв'язали правильно всі запропоновані задачі, то цього *достатньо* для того, щоб здобути перше місце.
- Для того щоб стрілець влучив у мішень *B* (рис. 7.1), йому *достатньо* влучити в мішень *A*. Для того щоб влучити в мішень *A*, *необхідно* влучити в мішень *B*.

Вживання слів «необхідно» і «достатньо» тісно пов'язане з теоремами.

Розглянемо очевидну теорему:

	A		**B**
якщо	натуральне число кратне 10	**, то**	це число кратне 5

Зрозуміло, що умова *A* «число кратне 10» є *достатньою* для висновку *B*. Разом з тим подільність числа націло на 5 (твердження *B*) *необхідна* для подільності числа націло на 10 (твердження *A*).

Наведемо ще один приклад.

У теоремі

	A		**B**
якщо	два кути є вертикальними	**, то**	ці кути рівні

твердження *A* є **достатньою умовою** для твердження *B*, тобто для того, щоб два кути були рівними, *достатньо*, щоб вони були вертикальними. У цій самій теоремі твердження *B* є **необхідною умовою** для твердження *A*, тобто для того, щоб два кути були вертикальними, *необхідно*, щоб вони були рівними. Зазначимо, що твердження *B* не є достатньою умовою для твердження *A*. Справді, якщо два кути рівні, то це зовсім не означає, що вони вертикальні.

Якщо справедлива не тільки теорема

якщо *A*, то *B*,

але й обернена теорема

якщо *B*, то *A*,

то A є **необхідною і достатньою** умовою для B, а B — необхідною і достатньою умовою для A.

Наприклад, теореми 6.3 і 5.3 є взаємно оберненими. Мовою «необхідно — достатньо» цей факт можна сформулювати одним з двох способів:

для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі точкою перетину ділилися навпіл;

для того щоб діагоналі чотирикутника точкою перетину ділилися навпіл, необхідно і достатньо, щоб цей чотирикутник був паралелограмом.

Підкреслимо, що коли в теоремі є слова «необхідно» і «достатньо», то вона об'єднує дві теореми: пряму і обернену (прямою теоремою може бути будь-яка з двох теорем, тоді друга буде оберненою). Отже, доведення такої теореми має складатися з двох частин: доведень прямої та оберненої теорем. Такі теореми в математиці називають **критеріями.**

Іноді замість «необхідно і достатньо» говорять «тоді й тільки тоді».

Наприклад, взаємно обернені теореми 5.1 і 6.1 об'єднує формулювання:

чотирикутник є паралелограмом тоді й тільки тоді, коли кожні дві його протилежні сторони рівні.

?

1. З яких двох частин складається більшість теорем?
2. Наведіть приклади з повсякденного життя, коли ми у своїх висловлюваннях користуємося словами «необхідно» і «достатньо».
3. Формулювання теореми подане у вигляді схеми «якщо A, то B». Як називають твердження A і B?
4. Що означає, коли у формулюванні теореми є слова «необхідно» і «достатньо»?

ВПРАВИ

7.1.° У формулюванні теореми вкажіть необхідну умову і достатню умову:

1) якщо кути суміжні, то їх сума дорівнює 180°;
2) якщо трикутник є рівностороннім, то він є рівнобедреним;
3) якщо прямі a і b перпендикулярні до прямої c, то $a \parallel b$;
4) якщо два трикутники рівні, то рівні їх відповідні кути;
5) якщо діаметр перпендикулярний до хорди, то він ділить її навпіл.

7.2.° Сформулюйте теорему, обернену до даної. Отриману пару взаємно обернених теорем замініть однією теоремою, використовуючи мову «необхідно — достатньо».

1) Якщо точка належить серединному перпендикуляру відрізка, то вона рівновіддалена від кінців відрізка.
2) Якщо трикутник є рівнобедреним, то два його кути рівні.
3) Якщо медіана трикутника збігається з його висотою, то трикутник є рівнобедреним.
4) Якщо висота трикутника збігається з його бісектрисою, то трикутник є рівнобедреним.
5) Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
6) Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.
7) Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
8) Катет, який лежить проти кута трикутника, що дорівнює 30°, дорівнює половині гіпотенузи.
9) Якщо пряма є дотичною до кола, то вона перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.
10) Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.
11) Якщо трикутник є рівностороннім, то центри його вписаного і описаного кіл збігаються.
12) Якщо хорди одного кола рівновіддалені від його центра, то вони рівні.

13) Якщо бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то трикутник є рівнобедреним.
14) Якщо дві висоти трикутника рівні, то трикутник є рівнобедреним.
15) Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
16) Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні й паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.

8. Прямокутник. Ромб. Квадрат

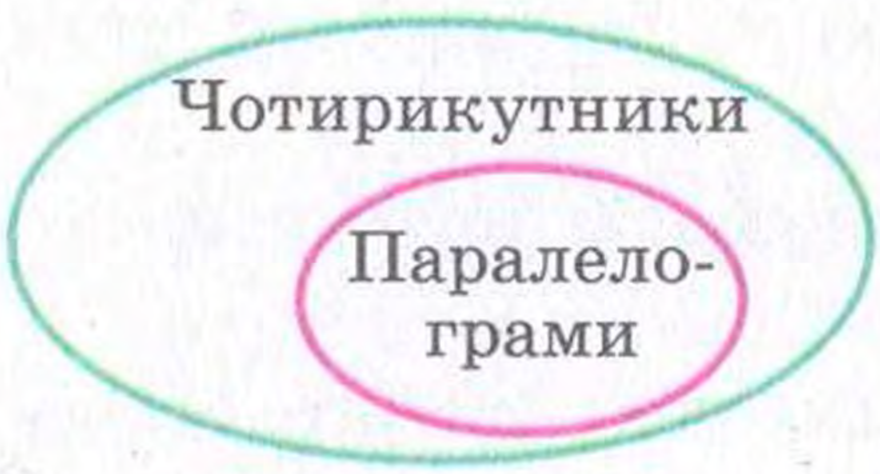


Рис. 8.1

Паралелограм — це чотирикутник, проте очевидно, що не кожний чотирикутник є паралелограмом. У цьому випадку говорять, що паралелограм — це окремий вид чотирикутника. Схема, зображена на рисунку 8.1, ілюструє цей факт.

Є також окремі види паралелограмів.

Означення. **Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.**

На рисунку 8.2 зображено прямокутник $ABCD$.

З наведеного означення випливає, що прямокутник має всі властивості паралелограма: у прямокутнику протилежні сторони рівні, діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

Проте прямокутник має свою особливу властивість.

Теорема 8.1. ***Діагоналі прямокутника рівні.***

Доведення. На рисунку 8.3 зображено прямокутник $ABCD$. Доведемо, що його діагоналі AC і BD рівні.

У прямокутних трикутниках ABD і DCA катети AB і DC рівні, а катет AD — спільний. Тому $\triangle ABD = \triangle DCA$ за двома катетами. Звідси $BD = AC$. ▲

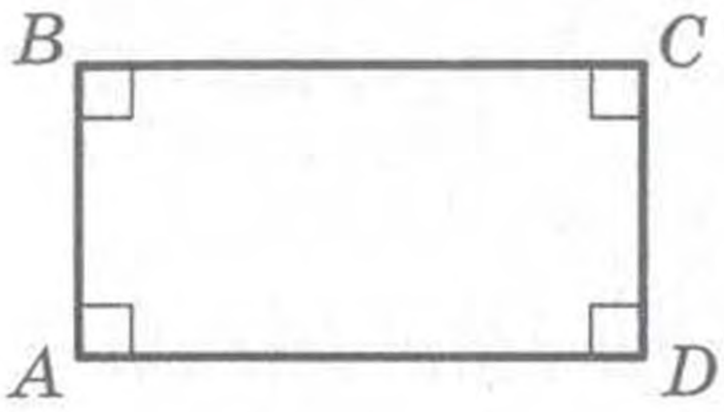


Рис. 8.2

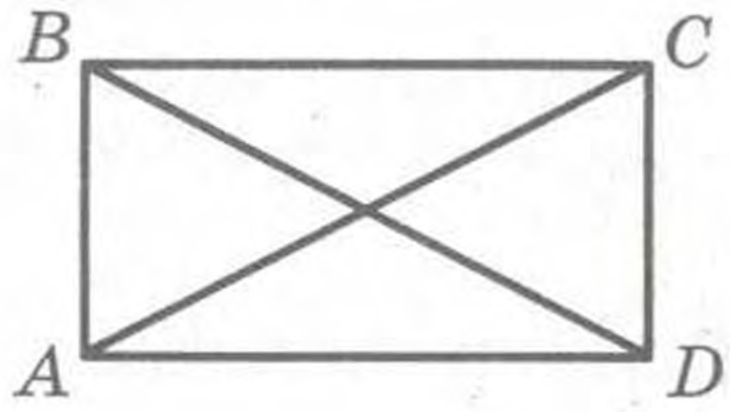


Рис. 8.3

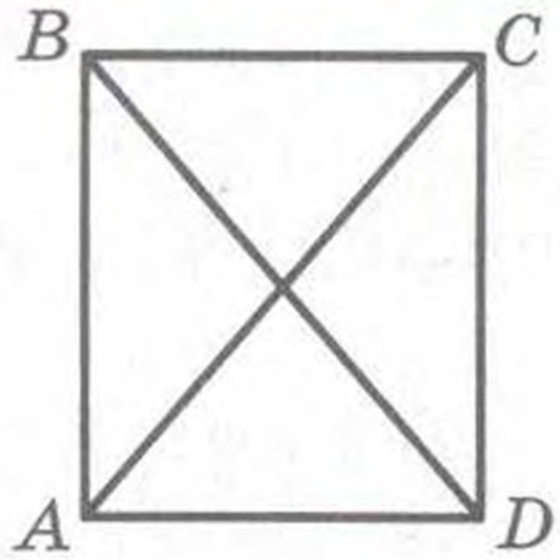


Рис. 8.4

Означення прямокутника дає змогу серед паралелограмів розпізнавати прямокутники. Цій самій меті слугують такі дві теореми-ознаки.

Теорема 8.2. ***Якщо один з кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 8.3. ***Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм — прямокутник.***

Доведення. На рисунку 8.4 зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі AC і BD якого рівні.

Розглянемо трикутники ABD і DCA. У них $AB = CD$, $BD = AC$, AD — спільна сторона. Отже, ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle BAD = \angle CDA$. Проте ці кути є односторонніми при паралельних прямих AB і DC та січній AD. Отже, $\angle BAD + \angle CDA = 180°$. Тоді $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Тому за теоремою 8.2 паралелограм $ABCD$ — прямокутник. ▲

Приклад 1. З точки M гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC опущено перпендикуляри ME і MF на катети (рис. 8.5). Знайдіть положення точки M на гіпотенузі, при якому довжина відрізка EF буде найменшою.

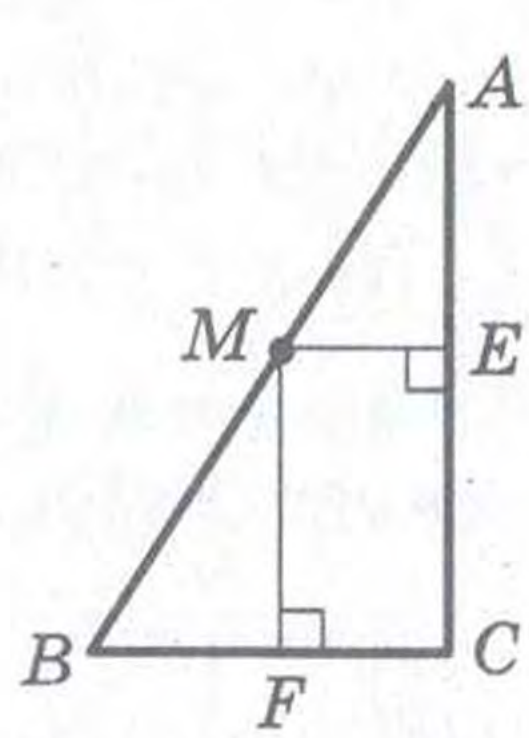


Рис. 8.5

Розв'язання. Очевидно, що чотирикутник $FMEC$ — прямокутник. Тоді $EF = MC$. Отже, задачу зведено до знаходження положення точки M на гіпотенузі AB, при якому довжина відрізка CM буде найменшою. Зрозуміло, що такому положенню відповідає основа висоти трикутника ABC, проведеної з вершини C.

Приклад 2. Доведіть, що сума відстаней від довільної точки основи рівнобедреного трикутника до його бічних сторін є сталою і дорівнює висоті трикутника, проведеній до бічної сторони.

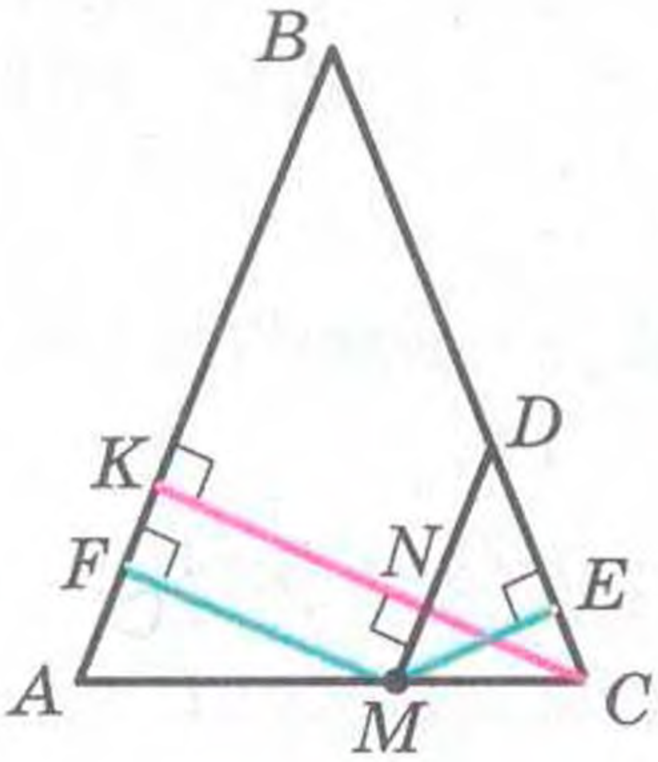


Рис. 8.6

Розв'язання. Нехай M — довільна точка основи AC рівнобедреного трикутника ABC. Проведемо $MF \perp AB$, $ME \perp BC$, $CK \perp AB$ (рис. 8.6). Доведемо, що $ME + MF = CK$.

Проведемо $MD \parallel AB$. Оскільки $\angle DMC = \angle BAC = \angle BCA$, то трикутник MDC — рівнобедрений. Нехай N — точка перетину відрізків CK і MD. Оскільки $CK \perp AB$ і $MD \parallel AB$, то CN — висота трикутника MDC. Відрізки CN і ME рівні як висоти рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін. Очевидно, що чотирикутник $MFKN$ — прямокутник. Звідси $MF = KN$.

Маємо: $MF + ME = NK + CN = CK$.

У пункті 28 ви познайомитеся з методом, який дозволяє розв'язати цю задачу в інший спосіб.

Означення. Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.

На рисунку 8.7 зображено ромб $ABCD$.

З наведеного означення випливає, що ромб має всі властивості паралелограма.

Проте ромб має свої особливі властивості.

Теорема 8.4. ***Діагоналі ромба перпендикулярні і є бісектрисами його кутів.***

Доведення. На рисунку 8.8 зображено ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведемо, що $BO \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$.

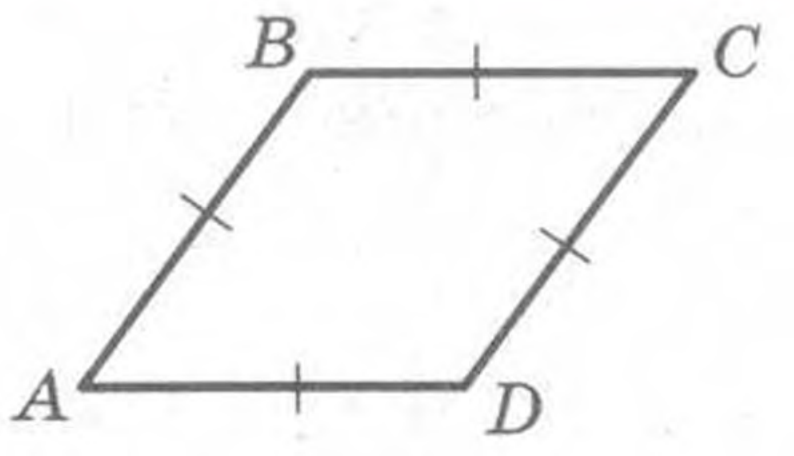


Рис. 8.7

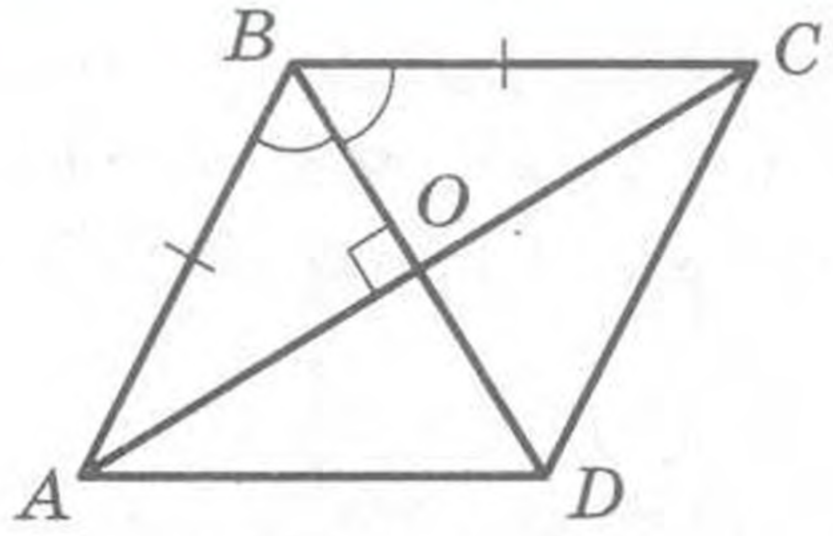


Рис. 8.8

Оскільки за означенням усі сторони ромба рівні, то трикутник ABC — рівнобедрений ($AB = BC$). За властивістю діагоналей паралелограма $AO = OC$. Тоді BO є медіаною трикутника ABC і, крім того, бісектрисою і висотою цього трикутника. Отже, $\angle ABO = \angle CBO$ і $BO \perp AC$. ▲

Розпізнавати ромби серед паралелограмів дозволяє не лише означення ромба, а й такі дві теореми-ознаки.

Теорема 8.5. ***Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм — ромб.***

Теорема 8.6. ***Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм — ромб.***

Доведіть ці теореми самостійно.

Приклад 3. У ромбі $ABCD$ позначено точку M так, що трикутник BCM — рівносторонній (рис. 8.9). Бісектриса кута ABM перетинає діагональ AC у точці F. Доведіть, що точки F, M і D лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай $\angle BAC = \alpha$. Маємо: $AB = BC = BM$, $\angle ABF = \angle MBF$. Отже, $\Delta ABF = \Delta MBF$ за двома сторонами і кутом між ними. Звідси $\angle FMB = \alpha$.

Маємо: $\angle BAD = \angle BCD = 2\alpha$. Тоді $\angle MCD = 2\alpha - 60°$. Оскільки $CM = BC$, то $CM = CD$ і трикутник MCD — рівнобедрений. Звідси

$\angle CMD = \frac{1}{2}(180° - (2\alpha - 60°)) =$
$= 120° - \alpha$.

Маємо: $\angle FMD = \angle FMB + \angle BMC + \angle CMD = \alpha + 60° + 120° - \alpha = 180°$. Отже, кут FMD — розгорнутий, тобто точки F, M і D лежать на одній прямій.

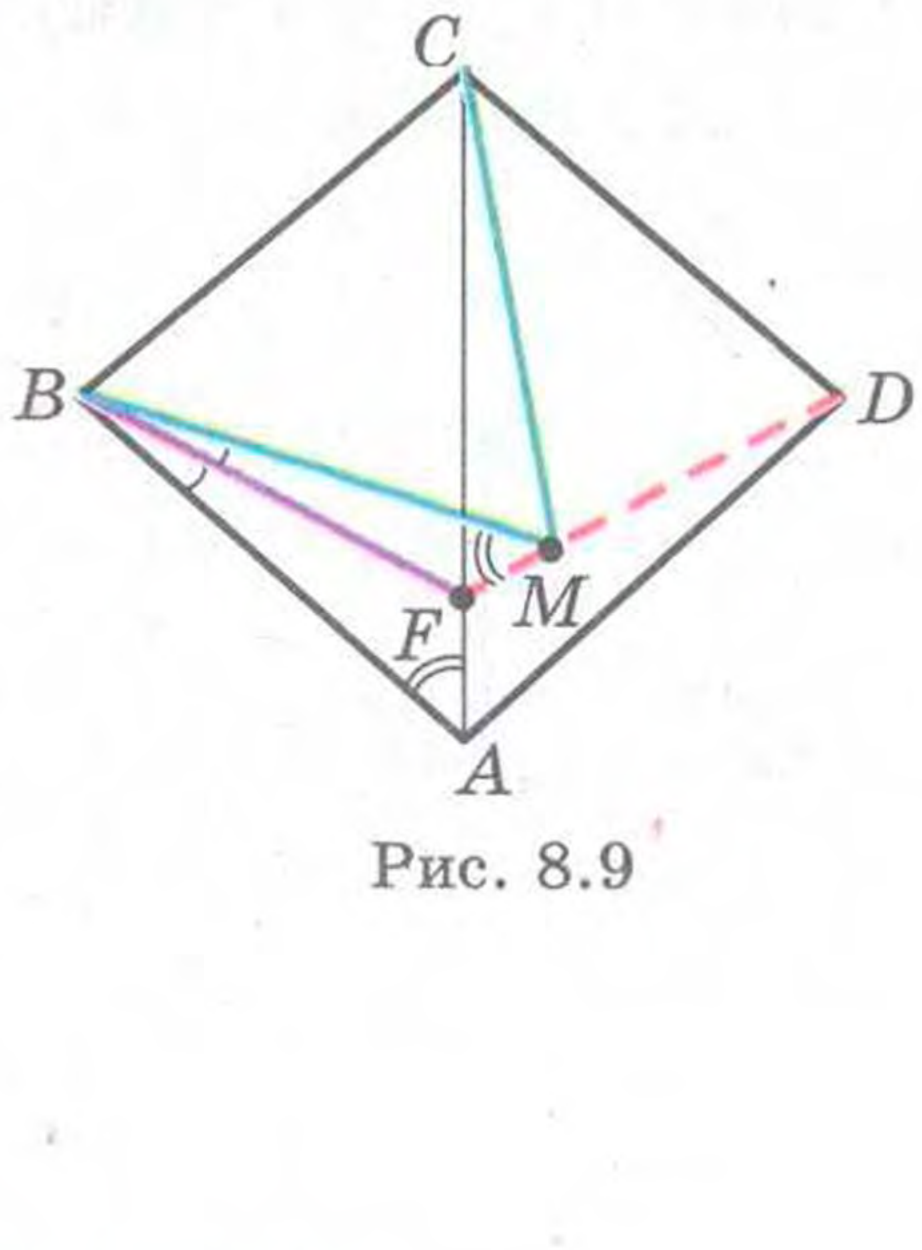


Рис. 8.9

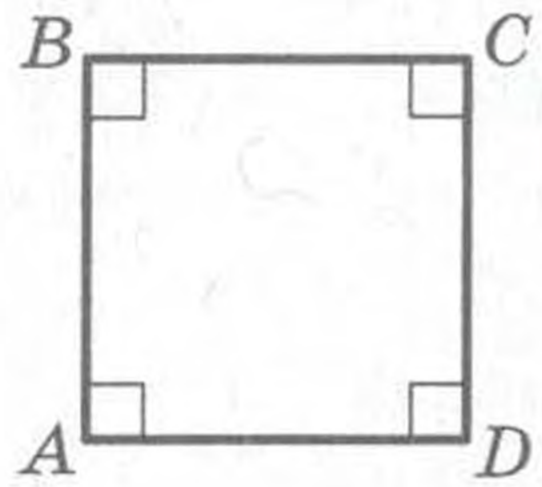


Рис. 8.10

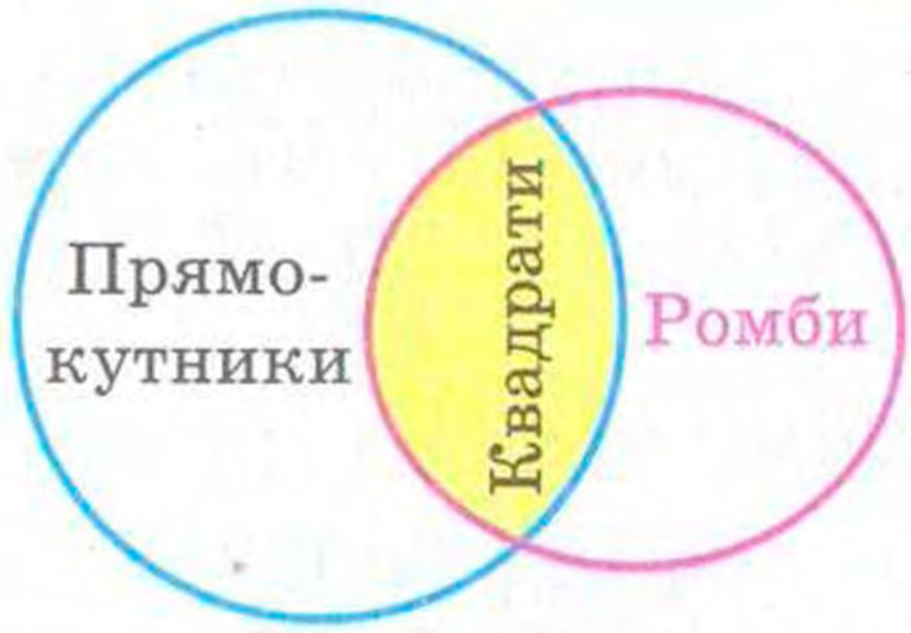


Рис. 8.11

Означення. Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.

На рисунку 8.10 зображено квадрат $ABCD$.

З наведеного означення випливає, що квадрат — це ромб, у якого всі кути рівні. Отже, квадрат є окремим видом і прямокутника, і ромба. Звідси випливає, що діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні і є бісектрисами його кутів.

Те, що квадрат є одночасно і прямокутником, і ромбом, ілюструє схема, зображена на рисунку 8.11.

Приклад 4. На стороні BC квадрата $ABCD$ у зовнішню сторону побудовано рівнобедрений трикутник BMC з основою BC так, що $\angle MAD = 75°$ (рис. 8.12). Знайдіть кут BMC.

Розв'язання. Маємо: $\angle MBC = \angle MCB$. Тоді $\angle MBA = \angle MCD$. Отже, трикутники ABM і DCM рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle MDA = 75°$.

Побудуємо на стороні BC квадрата $ABCD$ у зовнішню сторону рівносторонній трикутник BFC (рис. 8.13). Маємо: $\angle ABF = 90° + 60° = 150°$. Оскільки $AB = BF$, то $\angle BAF = \angle BFA = 15°$. Звідси $\angle FAD = 75°$. Аналогічно $\angle FDA = 75°$.

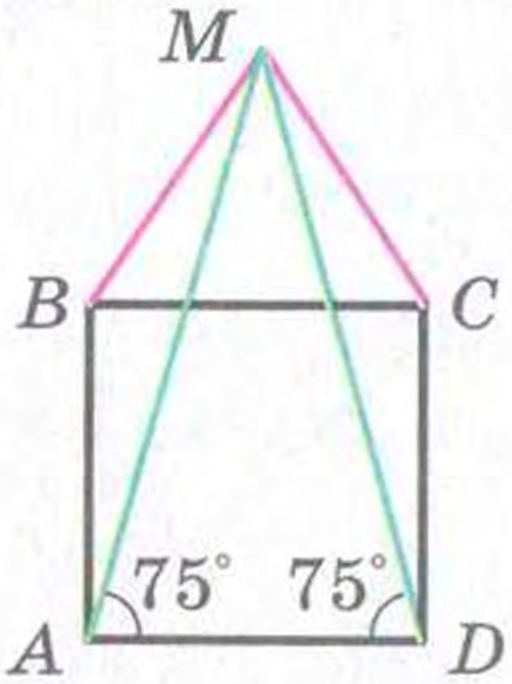


Рис. 8.12

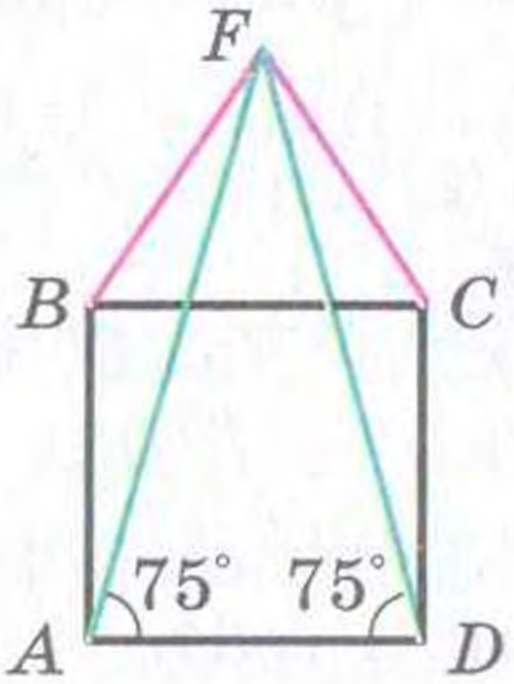


Рис. 8.13

У заданій півплощині відносно прямої AD існує лише один рівнобедрений трикутник з основою AD і кутами при основі, рівними $75°$. Отже, точки F і M збігаються і $\angle BMC = 60°$.

?

1. Яку фігуру називають прямокутником?
2. Яку особливу властивість мають діагоналі прямокутника?
3. Які властивості має прямокутник?
4. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є прямокутником?
5. Яку фігуру називають ромбом?
6. Які особливі властивості мають діагоналі ромба?
7. Які властивості має ромб?
8. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є ромбом?
9. Яку фігуру називають квадратом?
10. Який ромб є квадратом?
11. Які властивості має квадрат?

ВПРАВИ

8.1.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 8.14) перетинаються в точці O, $\angle ADB = 30°$, $BD = 10$ см. Знайдіть периметр трикутника AOB.

8.2.° Кут між діагоналями прямокутника дорівнює $60°$, а менша сторона прямокутника дорівнює 8 см. Знайдіть діагональ прямокутника.

8.3.° Точка M — середина сторони BC прямокутника $ABCD$, $MA \perp MD$, периметр прямокутника дорівнює 36 см. Знайдіть сторони прямокутника.

8.4.° Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 55 см. Прямокутник $ABCD$ побудовано так, що дві його вершини A і D належать гіпотенузі, а дві інші — катетам. Знайдіть сторони прямокутника, якщо $AB : BC = 3 : 5$.

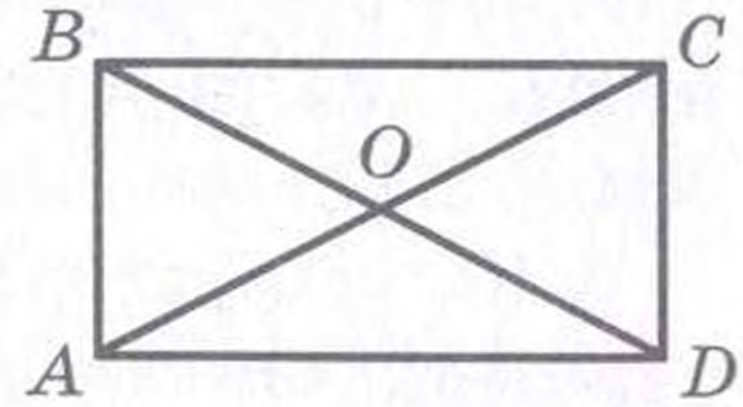


Рис. 8.14

8.5.° У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = BC = 6$ см. Прямокутник $CMKN$ побудовано так, що точка M належить катету AC, точка N — катету BC, а точка K — гіпотенузі AB. Знайдіть периметр прямокутника $CMKN$.

8.6.° Доведіть, що коли діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з однією з його сторін, то цей паралелограм є прямокутником.

8.7.° Побудуйте прямокутник за діагоналлю і кутом між діагоналлю і стороною.

8.8.° Побудуйте прямокутник за діагоналлю і кутом між діагоналями.

8.9.° Побудуйте прямокутник за стороною і кутом між діагоналями, протилежним даній стороні.

8.10.° Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Знайдіть кути ромба.

8.11.° Знайдіть кути ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см, а висота — 3 см.

8.12.° Знайдіть периметр ромба $ABCD$, якщо $\angle A = 60°$, $BD = 9$ см.

8.13.° Точки M і K — середини сторін AB і BC ромба $ABCD$ відповідно. Доведіть, що $MD = KD$.

8.14.° На сторонах AB і AD ромба $ABCD$ відкладено рівні відрізки AE і AF відповідно. Доведіть, що $\angle CEF = \angle CFE$.

8.15.° Доведіть, що висоти ромба рівні.

8.16.° Висота ромба, проведена з вершини його тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Менша діагональ ромба дорівнює 4 см. Знайдіть кути та периметр ромба.

8.17.° Доведіть, що діагональ ромба ділить навпіл кут між висотами ромба, проведеними з тієї самої його вершини, що й діагональ.

8.18.° Відрізок AM — бісектриса трикутника ABC. Через точку M проведено пряму, паралельну стороні AC, яка перетинає сторону AB у точці K, і пряму, паралельну стороні AB, яка перетинає сторону AC у точці D. Доведіть, що $AM \perp DK$.

8.19.° Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинають його сторони BC і AD у точках F і E відповідно. Визначте вид чотирикутника $ABFE$.

8.20.° У трикутнику ABC проведено серединний перпендикуляр його бісектриси BD, який перетинає сторони AB і BC у точках K і P відповідно. Визначте вид чотирикутника $BKDP$.

8.21.° Побудуйте ромб за висотою і кутом.

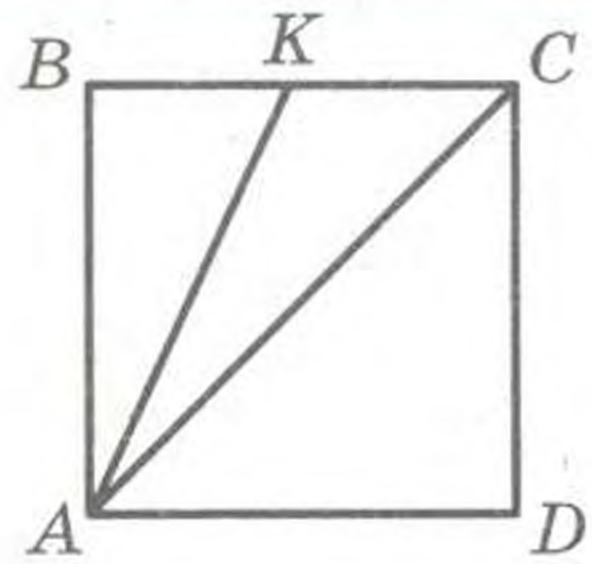


Рис. 8.15

8.22.° Побудуйте ромб за висотою і діагоналлю.

8.23.° Побудуйте ромб за діагоналлю і кутом, з вершини якого виходить ця діагональ.

8.24.° Побудуйте ромб за діагоналлю і кутом ромба, протилежним цій діагоналі.

8.25.° На стороні BC квадрата $ABCD$ (рис. 8.15) позначили точку K так, що $\angle AKB = 74°$. Знайдіть $\angle CAK$.

8.26.° На стороні BC квадрата $ABCD$ (рис. 8.15) позначили точку K так, що $AK = 2BK$. Знайдіть $\angle KAD$.

8.27.° Через вершини квадрата проведено прямі, паралельні його діагоналям. Визначте вид чотирикутника, утвореного цими прямими.

8.28.° У прямокутному трикутнику через точку перетину бісектриси прямого кута і гіпотенузи проведено прямі, паралельні катетам. Доведіть, що чотирикутник, який утворився, є квадратом.

8.29.° Точки M, K, N, P є відповідно серединами сторін AB, BC, CD і AD квадрата $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $MKNP$ — квадрат.

8.30.° У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = BC = 14$ см. Дві сторони квадрата $CDEF$ лежать на катетах трикутника ABC, а вершина E належить гіпотенузі AB. Знайдіть периметр квадрата $CDEF$.

8.31.° У квадраті $ABCD$ позначено точку M так, що трикутник AMB — рівносторонній. Доведіть, що $\Delta\, CMD$ — рівнобедрений.

8.32.° Доведіть, що коли діагоналі паралелограма рівні та перпендикулярні, то цей паралелограм є квадратом.

8.33.° Чотирикутники $ABCD$, $DEFM$, $MNKL$, $LPOS$, $SQTV$ — квадрати (рис. 8.16). Знайдіть суму довжин тих

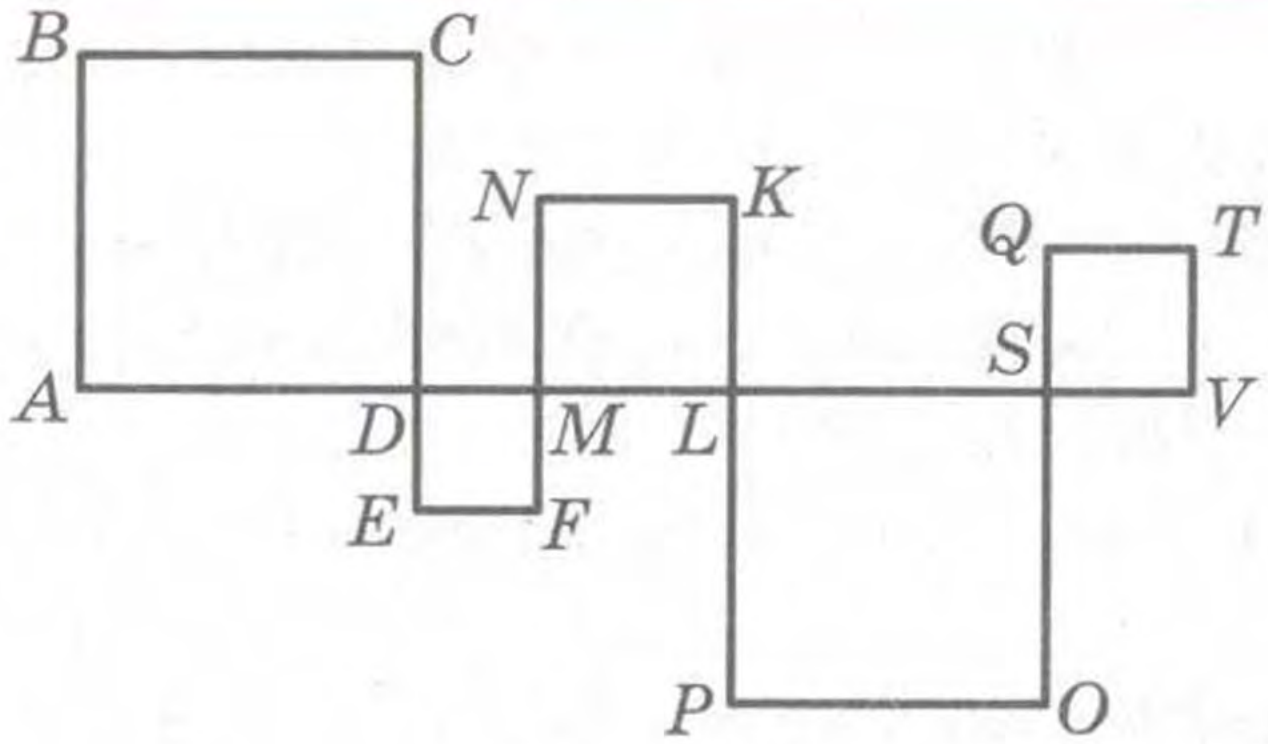


Рис. 8.16

сторін квадратів, які не лежать на прямій AV, якщо довжина відрізка AV дорівнює 16 см.

8.34.$^{\bullet}$ Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

8.35.$^{\bullet}$ Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма, який не є ромбом, перетинаючись, утворюють прямокутник.

8.36.$^{\bullet}$ У прямокутнику $ABCD$ $AD = 9$ см, $\angle BDA = 30°$. На сторонах BC і AD позначено відповідно точки M і K так, що утворився ромб $AMCK$. Знайдіть сторону цього ромба.

8.37.$^{\bullet}$ У прямокутнику $ABCD$ $\angle BCA : \angle DCA = 1 : 5$, $AC = 18$ см. Знайдіть відстань від точки C до діагоналі BD.

8.38.$^{\bullet}$ Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, який не є квадратом, перетинаючись, утворюють квадрат.

8.39.$^{\bullet}$ Вершини M і K рівностороннього трикутника AMK належать сторонам BC і CD квадрата $ABCD$. Доведіть, що $MK \parallel BD$.

8.40.$^{\bullet}$ Дано точки M і K. Побудуйте квадрат $ABCD$ так, щоб точка M була серединою сторони AB, а точка K — серединою сторони BC.

8.41.$^{\bullet}$ У прямокутнику $ABCD$ $AD = 2AB$. На стороні BC позначено точку M так, що $\angle AMB = \angle AMD$. Знайдіть ці кути.

8.42.$^{\bullet}$ Дано точки A, B і M. Побудуйте ромб $ABCD$, якщо відомо відстань від точки M до точки K — середини сторони CD.

8.43.$^{\bullet}$ На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ у зовнішню сторону побудовано квадрати $APQB$ і $BMNC$. Доведіть, що відрізки DP і DN рівні і перпендикулярні.

8.44.$^{\bullet\bullet}$ Серединний перпендикуляр діагоналі AC прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M так, що

$BM : MC = 1 : 2$. Знайдіть кути, на які діагональ прямокутника ділить його кут.

8.45.•• Серединний перпендикуляр діагоналі AC прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC і утворює з нею кут, який дорівнює куту між діагоналями. Знайдіть цей кут.

8.46.•• Побудуйте прямокутник:

1) за діагоналлю і різницею двох сторін;

2) за периметром і діагоналлю;

3) за периметром і кутом між діагоналями.

8.47.•• Побудуйте ромб:

1) за гострим кутом і різницею діагоналей;

2) за гострим кутом і сумою сторони й висоти.

8.48.•• Через довільну точку, яка належить квадрату, проведено дві перпендикулярні прямі, кожна з яких перетинає дві протилежні сторони квадрата. Доведіть, що відрізки цих прямих, які належать квадрату, рівні.

8.49.•• На сторонах квадрата обрано точки M, N, P і Q так, що $MP = NQ$ (рис. 8.17). Доведіть, що $MP \perp NQ$.

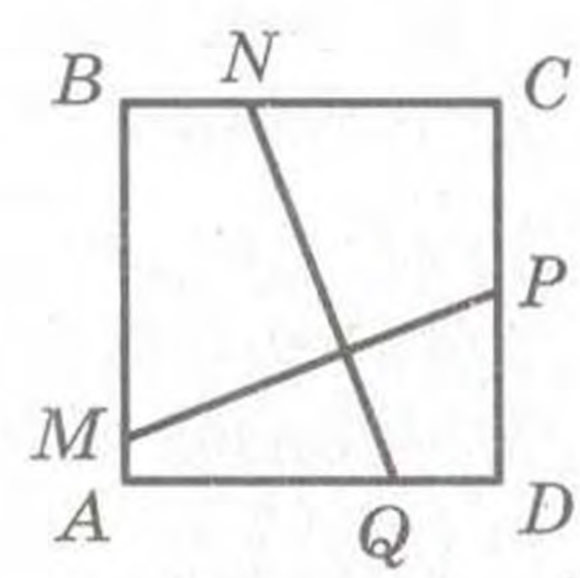


Рис. 8.17

8.50.•• Побудуйте квадрат:

1) за сумою діагоналі та сторони;

2) за різницею діагоналі та сторони.

8.51.•• У квадраті $ABCD$ обрано точку M так, що трикутник AMD рівносторонній. Поза квадратом обрано точку K так, що трикутник AKB рівносторонній. Доведіть, що точки K, M і C лежать на одній прямій.

8.52.•• У паралелограмі $ABCD$ $\angle ABD = 3\angle DBC$, $BC = 2AB$. Знайдіть кути паралелограма.

8.53.* Точки M і N — відповідно середини сторін BC і CD прямокутника $ABCD$. Відрізки BN і DM перетинаються в точці P. Доведіть, що $\angle MAN = \angle BPM$.

8.54.* Дано паралелограм $ABCD$. Бісектриси кутів BAC і BDC перетинаються в точці M так, що $\angle AMD = 45°$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — ромб.

8.55.* Дано точки A, C і M. Побудуйте ромб $ABCD$, якщо відомо відстань від точки M до точки N — середини сторони BC.

8.56.* У квадраті $ABCD$ позначено точку O так, що $\angle OAD = \angle ODA = 15°$. Доведіть, що ΔBOC — рівносторонній.

8.57.* У прямокутнику $ABCD$ $AD = 3AB$. На стороні AD позначено точку N так, що $AN = 2ND$. Доведіть, що $\angle ANB + \angle ADB = 45°$.

8.58.* На стороні AB і діагоналі AC квадрата $ABCD$ позначили відповідно точки P і Q так, що $AP : PB = 3 : 2$, $AQ : QC = 4 : 1$. Знайдіть кути трикутника PQD.

9. Середня лінія трикутника

Означення. Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

На рисунку 9.1 відрізки MN, NE, EM — середні лінії трикутника ABC.

Теорема 9.1. ***Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.***

Доведення. Нехай MN — середня лінія трикутника ABC (рис. 9.2). Доведемо, що $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2} AC$.

На прямій MN позначимо точку E так, що $MN = NE$ (рис. 9.2). Сполучимо точки E і C. Оскільки точка N є серединою відрізка BC, то $BN = NC$. Крім того, кути 1 і 2 рівні як вертикальні. Отже, $\Delta MBN = \Delta ECN$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $MB = EC$. Отже,

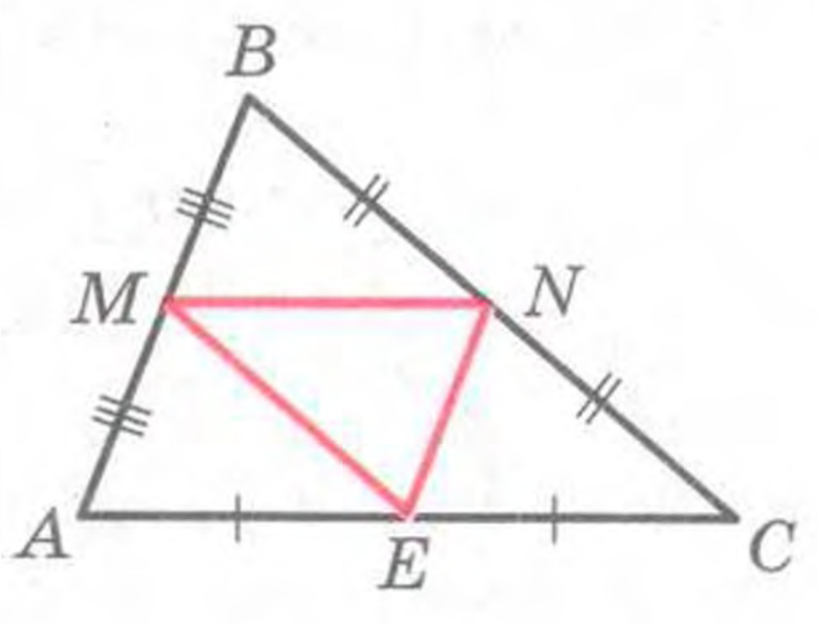


Рис. 9.1

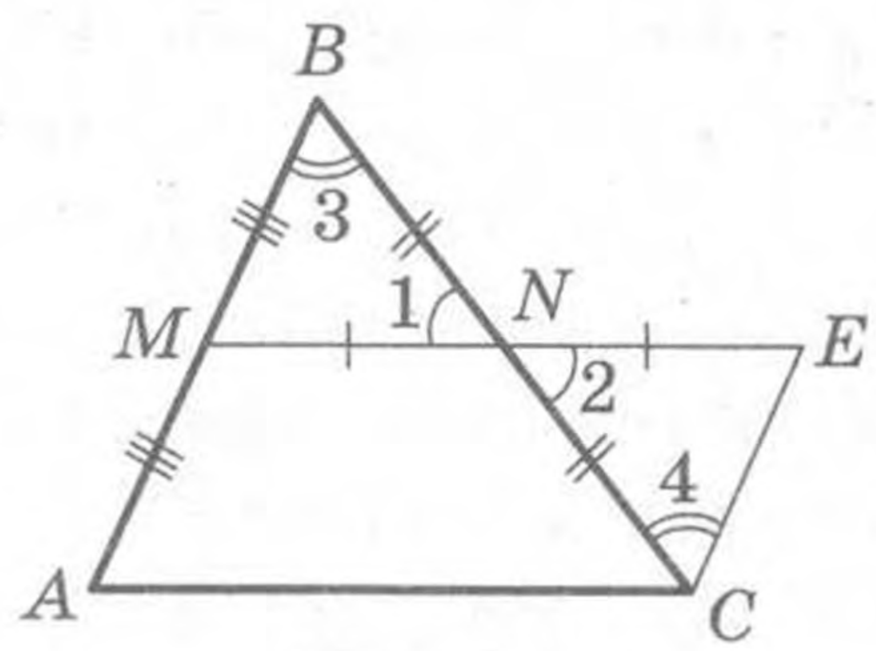


Рис. 9.2

$EC = AM$. Крім того, $\angle 3 = \angle 4$. Ці кути є різносторонніми при прямих AB і EC та січній BC. Тоді $AB \parallel EC$.

Таким чином, у чотирикутнику $AMEC$ сторони AM і EC паралельні й рівні. Отже, за теоремою 6.2 чотирикутник $AMEC$ є паралелограмом. Звідси $ME \parallel AC$, тобто $MN \parallel AC$. Також $ME = AC$. Оскільки $MN = \frac{1}{2}ME$, то $MN = \frac{1}{2}AC$. ▲

Задача. *Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.*

Розв'язання. У чотирикутнику $ABCD$ точки M, N, K і P — середини сторін AB, BC, CD і AD відповідно (рис. 9.3).

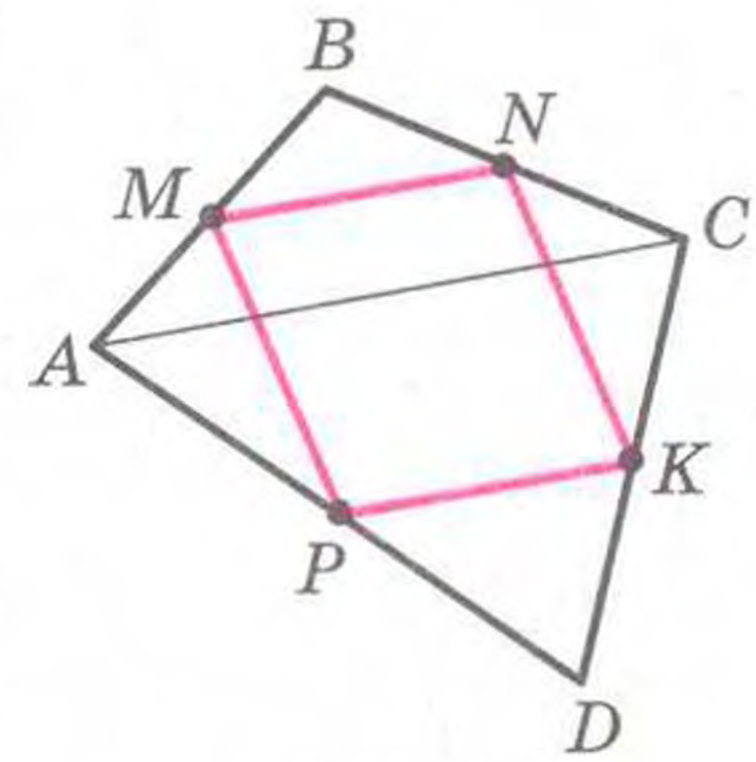


Рис. 9.3

Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC. Тоді $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

Аналогічно відрізок PK — середня лінія трикутника ADC. Тоді $PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2}AC$.

Оскільки $MN \parallel AC$ і $PK \parallel AC$, то $MN \parallel PK$. Також $MN = PK = \frac{1}{2}AC$.

Отже, у чотирикутнику $MNKP$ сторони MN і PK рівні і паралельні, тобто чотирикутник $MNKP$ — паралелограм.

Приклад. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle ACD = \angle ABD = 90°$. Точки M і N — середини діагоналей AC і BD відповідно. Доведіть, що пряма, яка перпендикулярна до відрізка MN і проходить через точку перетину діагоналей, перетинає сторону BC в її середині.

Розв'язання. Нехай точка K — середина сторони BC. Тоді відрізки MK і NK — середні лінії трикутників ABC і DBC відповідно (рис. 9.4). Маємо: $KM \parallel AB$, $AB \perp BD$, тоді $KM \perp BD$. Аналогічно $KN \perp AC$. Отже, точка O — точка перетину діагоналей AC і BD — є ортоцентром трикутника MKN. Звідси $KO \perp MN$. Оскільки

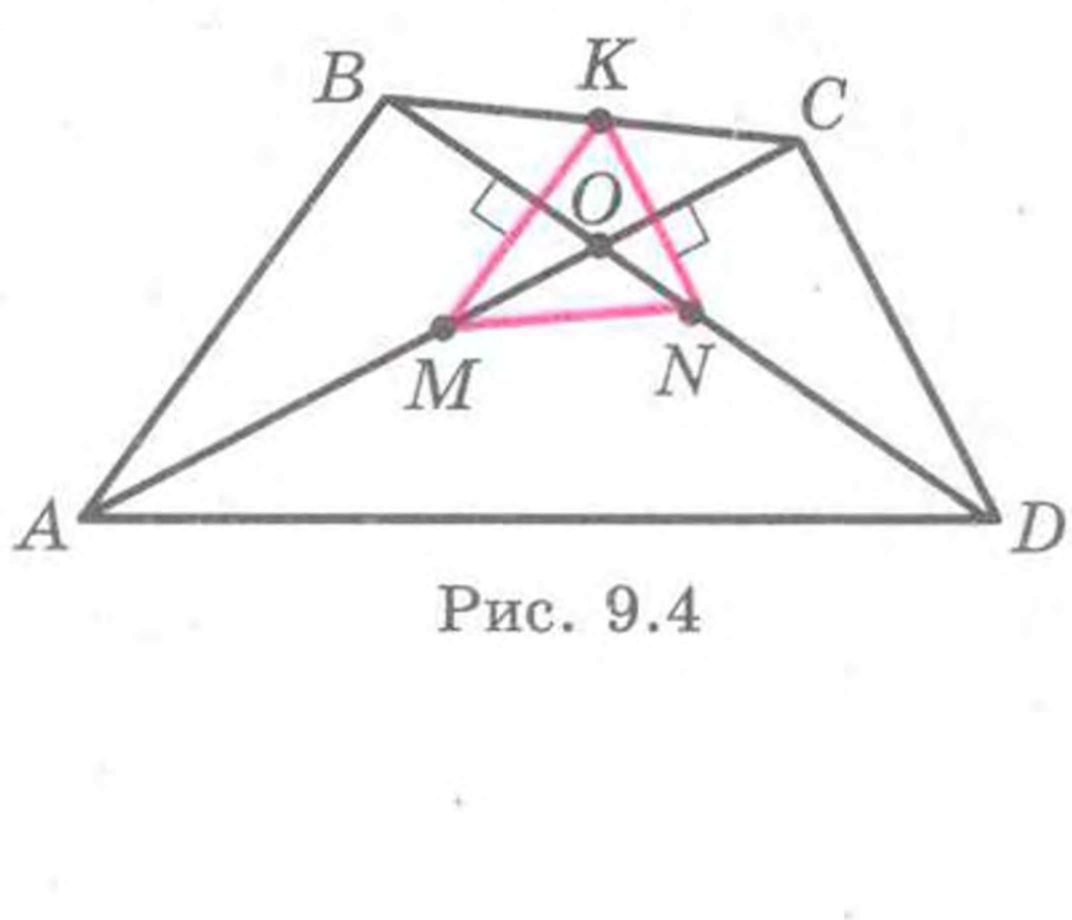


Рис. 9.4

через точку O можна провести єдину пряму, перпендикулярну до MN, то твердження задачі доведено.

1. Що називають середньою лінією трикутника?
2. Які властивості має середня лінія трикутника?
3. Скільки середніх ліній можна провести в трикутнику?

ВПРАВИ

9.1.° Доведіть, що середні лінії трикутника розбивають його на чотири рівних трикутники.

9.2.° Точки E і F — відповідно середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть сторону AC, якщо вона на 7 см більша за відрізок EF.

9.3.° Доведіть, що середня лінія DE трикутника ABC (точки D і E належать сторонам AB і BC відповідно) та його медіана BM точкою перетину діляться навпіл.

9.4.° Знайдіть кути трикутника, дві середні лінії якого рівні і перпендикулярні.

9.5.° Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, дорівнює 6 см. Знайдіть сторони даного трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

9.6.° Доведіть, що відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін чотирикутника, точкою перетину поділяються навпіл.

9.7.° Сума діагоналей чотирикутника дорівнює 28 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершини якого є серединами сторін даного чотирикутника.

9.8.° Визначте вид і знайдіть сторони чотирикутника, вершинами якого є середини сторін ромба з діагоналями 8 см і 14 см.

9.9.° Визначте вид і знайдіть сторони чотирикутника, вершинами якого є середини сторін прямокутника з діагоналлю 12 см.

9.10.° Доведіть, що вершини трикутника рівновіддалені від прямої, на якій лежить його середня лінія.

9.11.° Доведіть, що середини всіх відрізків, які з'єднують дану точку з точками даної прямої, лежать на одній прямій.

9.12.° Відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін опуклого чотирикутника, рівні. Доведіть, що діагоналі цього чотирикутника перпендикулярні.

9.13.° Діагоналі опуклого чотирикутника рівні. Доведіть, що відрізки, які з'єднують середини його протилежних сторін, перпендикулярні.

9.14.° На сторонах AB і BC трикутника позначено відповідно точки M і K так, що $AM = 3BM$, $CK = 3BK$. Доведіть, що $MK \parallel AC$, і знайдіть MK, якщо $AC = 16$ см.

9.15.° Кути BAD і BCE — зовнішні кути трикутника ABC. З вершини B проведено перпендикуляри BM і BK до бісектрис кутів BAD і BCE відповідно. Знайдіть відрізок MK, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 18 см.

9.16.° Побудуйте трикутник за серединами трьох його сторін.

9.17.° Побудуйте паралелограм за серединами трьох його сторін.

9.18.° Доведіть, що відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін опуклого чотирикутника, і відрізок, який з'єднує середини діагоналей, перетинаються в одній точці.

9.19.° У чотирикутнику $ABCD$ сума кутів, прилеглих до сторони AD, дорівнює 90°. Точки K і L — середини сторін BC і AD відповідно, точки M і N — середини діагоналей. Доведіть, що $MN = KL$.

9.20.° Кут ABC трикутника ABC дорівнює 60°. Медіана BM трикутника дорівнює його висоті CH. Доведіть, що трикутник ABC — рівносторонній.

9.21.° Кут ABC трикутника ABC дорівнює 30°. Медіана CM трикутника дорівнює його висоті, проведеній з вершини A. Знайдіть кути BAC і BCA.

9.22.° Відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін опуклого чотирикутника $ABCD$, поділяють його на чотири чотирикутники з рівними периметрами. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

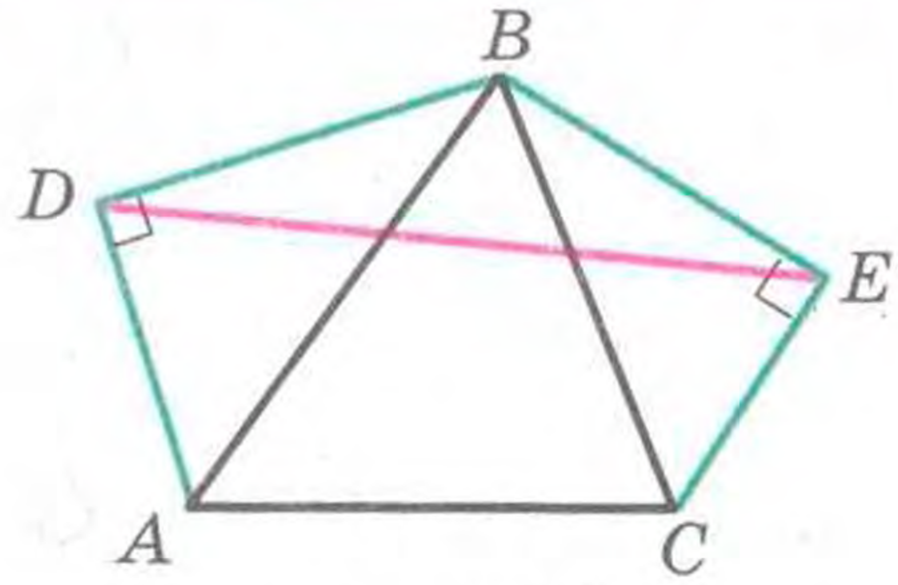


Рис. 9.5

9.23.•• Дано трикутник ABC і точки D і E такі, що $\angle ADB = \angle BEC = 90°$ (рис. 9.5). Доведіть, що довжина відрізка DE не більша за півпериметр трикутника ABC.

9.24.•• Точки B_1 і C_1 — основи перпендикулярів, опущених з вершини A трикутника ABC на бісектриси кутів B і C відповідно. Точки B_2 і C_2 — основи перпендикулярів, опущених з вершини A на бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C відповідно. Доведіть, що точки B_1, C_1, B_2, C_2 лежать на одній прямій.

9.25.•• У прямокутному трикутнику ABC ($\angle ACB = 90°$) проведено висоту CD. Бісектриси кутів BAC і DCB перетинаються в точці M, а бісектриси кутів ABC і DCA — у точці N. Доведіть, що $MN \parallel AB$.

9.26.•• Точки M і N — середини відповідно сторін AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що коли $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$, то $BC \parallel AD$.

9.27.•• В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $AD > BC$, точки M і N — середини діагоналей AC і BD відповідно. $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$. Доведіть, що $AD \parallel BC$.

9.28.•• Дано рівносторонній трикутник ABC. З центром у точці A і радіусом AB описано дугу BC, M — довільна точка дуги BC, яка відрізняється від B і C. Середини хорд MC і MB з'єднано відрізками із серединами сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що одержані відрізки перпендикулярні.

9.29.* Продовження медіани AM трикутника ABC перетинає його описане коло в точці D. Побудуйте трикутник ABC за заданими точками A, B і D.

9.30.* Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Через середини сторін AB і AD проведено прямі, перпендикулярні відповідно до сторін DC і BC. Доведіть, що точка перетину проведених прямих належить прямій AC.

9.31.* Сторони AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$ рівні. Через середини діагоналей AC і BD проведено пряму, яка перетинає сторони AB і CD у точках M і N відповідно. Доведіть, що $\angle BMN = \angle CNM$.

9.32.* В опуклому чотирикутнику пряма, яка проходить через середини двох протилежних сторін, утворює рівні кути з діагоналями чотирикутника. Доведіть, що діагоналі рівні.

9.33.* У трикутнику ABC $AC > AB$, а кут при вершині A дорівнює α. На стороні AC взято точку M так, що $AB = MC$. Нехай точка E — середина відрізка AM, точка D — середина відрізка BC. Знайдіть $\angle CED$.

10. Трапеція. Види і властивості трапеції

Означення. Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Кожний з чотирикутників, зображених на рисунку 10.1, є трапецією.

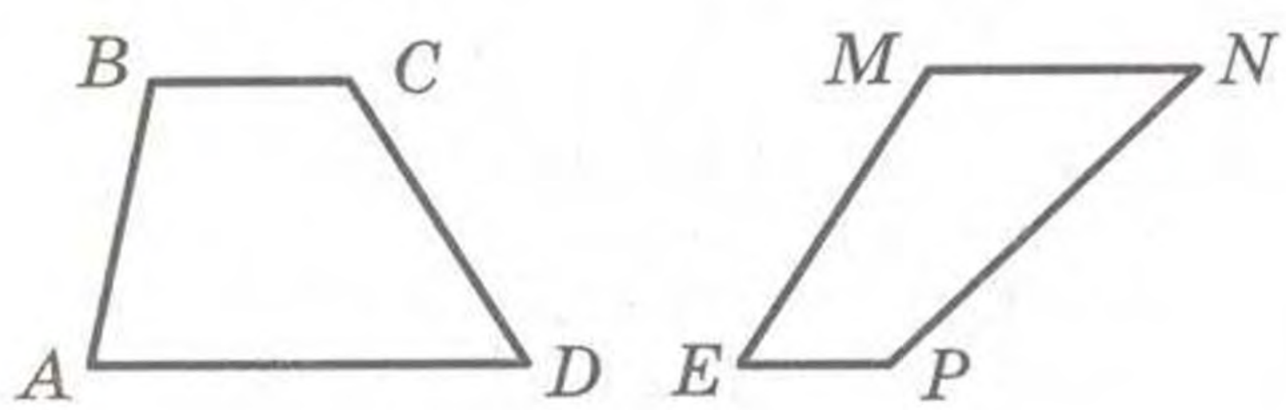


Рис. 10.1

Рис. 10.2

Паралельні сторони трапеції називають **основами**, а непаралельні — **бічними сторонами** (рис. 10.2).

У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) кути A і D називають **кутами при основі** AD, а кути B і C — кутами при основі BC.

Означення. Висотою трапеції називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, яка містить другу основу.

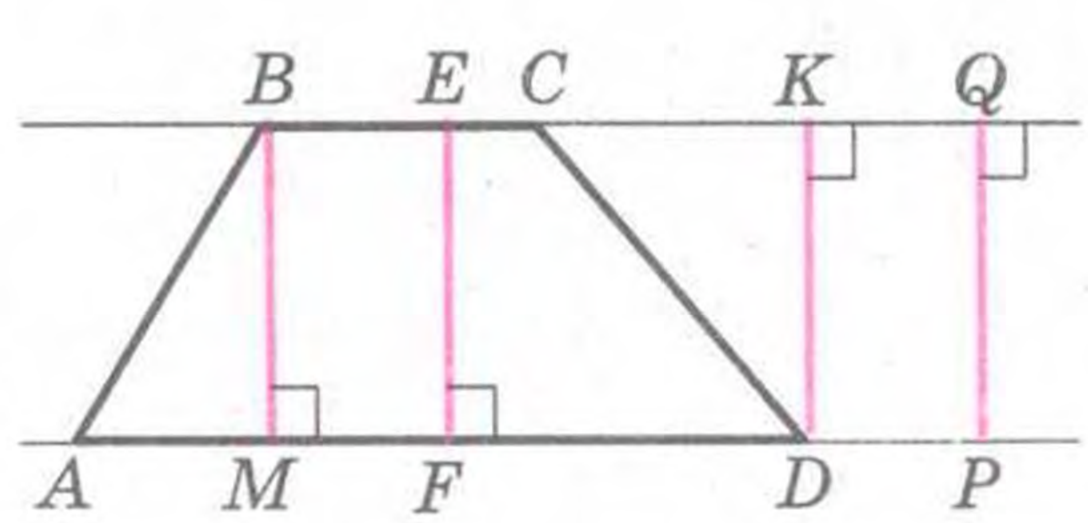


Рис. 10.3

На рисунку 10.3 кожний з відрізків BM, EF, DK, PQ є висотою трапеції $ABCD$. Зрозуміло, що $BM = EF = DK = PQ$.

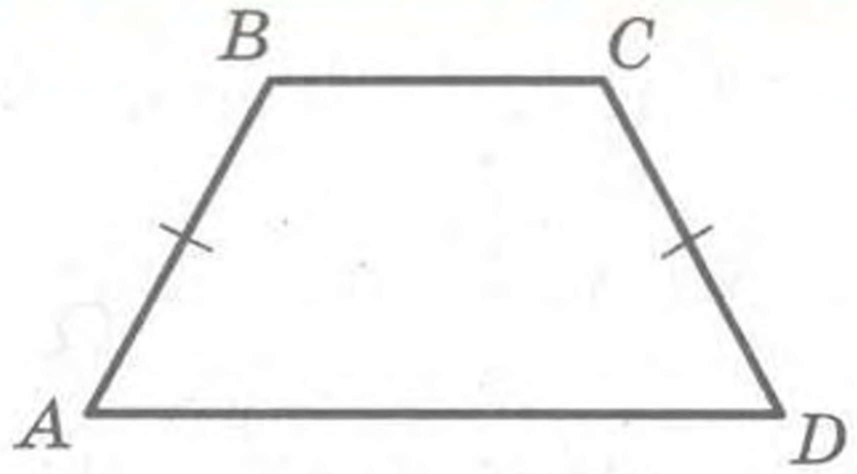


Рис. 10.4

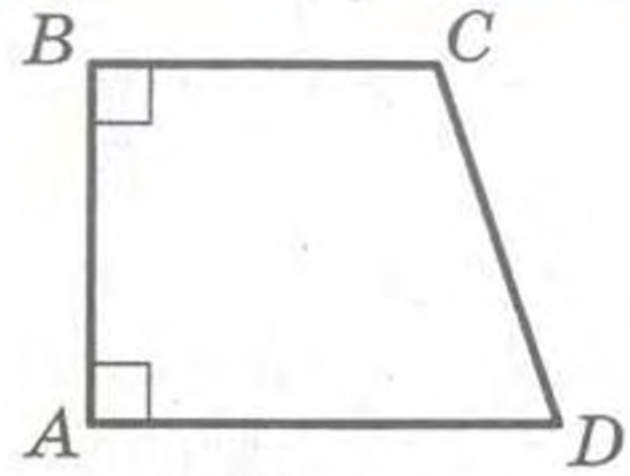


Рис. 10.5

На рисунку 10.4 зображено трапецію $ABCD$, у якої бічні сторони AB і CD рівні. Таку трапецію називають **рівнобічною** або **рівнобедреною.**

Якщо бічна сторона трапеції є її висотою, то таку трапецію називають **прямокутною** (рис. 10.5).

Трапеція — це окремий вид чотирикутника. Зв'язок між чотирикутниками та їх окремими видами ілюструє схема, зображена на рисунку 10.6.

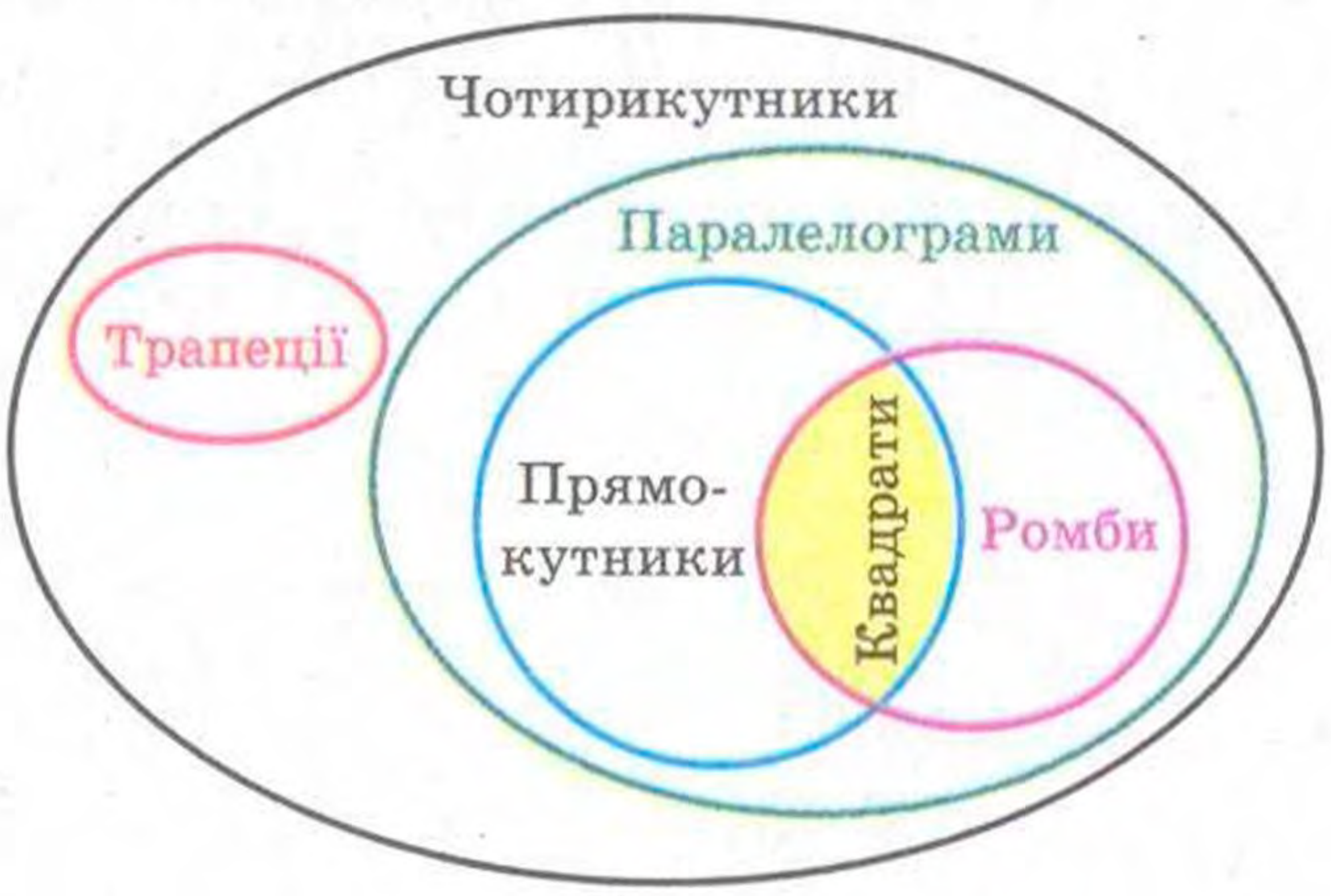


Рис. 10.6

Означення. Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

На рисунку 10.7 відрізок MN — середня лінія трапеції $ABCD$.

Теорема 10.1. ***Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.***

Доведення. Нехай MN — середня лінія трапеції $ABCD$ (рис. 10.8). Доведемо, що $MN \parallel AD$ і $MN = \frac{BC + AD}{2}$.

Проведемо пряму BN і точку її перетину з прямою AD позначимо E.

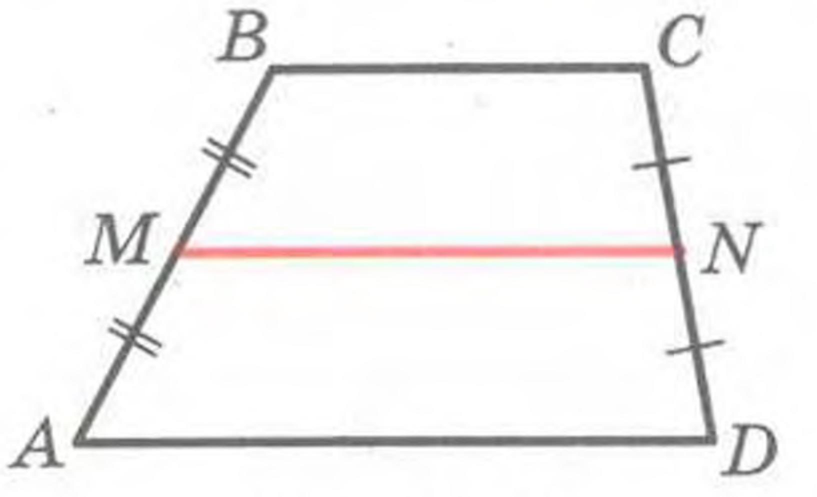


Рис. 10.7

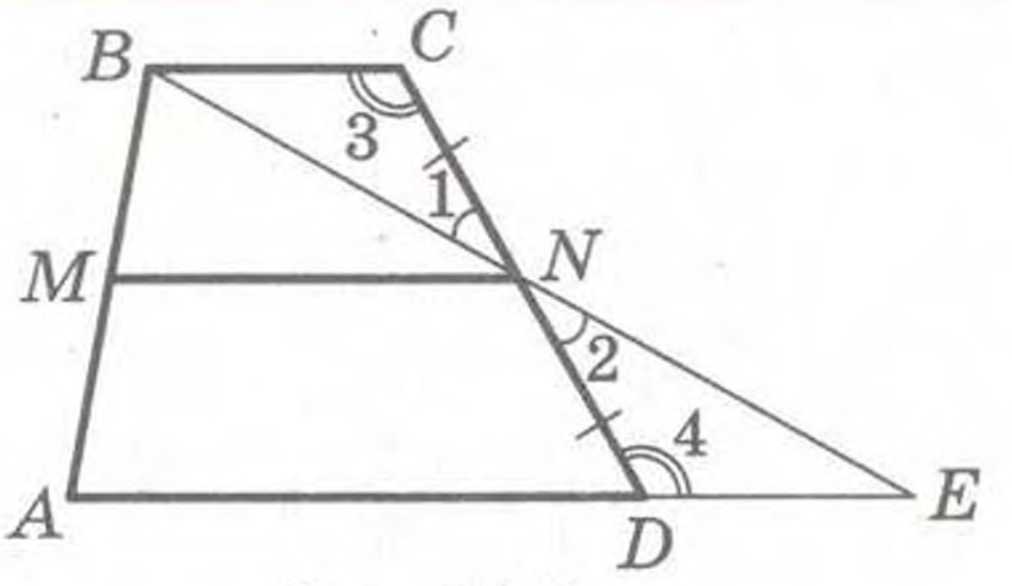


Рис. 10.8

Оскільки N — середина відрізка CD, то $CN = ND$. Крім того, кути 1 і 2 рівні як вертикальні, а кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AE та січній CD. Отже, $\triangle\ BCN = \triangle\ EDN$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $BC = DE$ і $BN = NE$. Тоді відрізок MN — середня лінія трикутника ABE. З цього випливає, що $MN \parallel AE$, тобто $MN \parallel AD$, і $MN = \frac{1}{2} AE$. Маємо:

$$MN = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} (AD + DE) = \frac{1}{2} (AD + BC). \ \blacktriangle$$

Задача. *Доведіть, що в рівнобічній трапеції:*

1) *кути при кожній основі рівні;*
2) *діагоналі рівні;*
3) *висота трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє основу трапеції на два відрізки, менший з яких дорівнює піврізниці основ, а більший — півсумі основ (середній лінії трапеції).*

Розв'язання. Розглянемо рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$).

1) Проведемо висоти BM і CK (рис. 10.9). Оскільки $AB = CD$ і $BM = CK$, то прямокутні трикутники AMB і DKC рівні за катетом і гіпотенузою. Тоді $\angle A = \angle D$.

Маємо: $\angle A = \angle D$, $\angle A + \angle ABC = 180°$, $\angle D + \angle DCB = 180°$. Отже, $\angle ABC = \angle DCB$.

2) Розглянемо $\triangle\ ACD$ і $\triangle\ DBA$ (рис. 10.10).

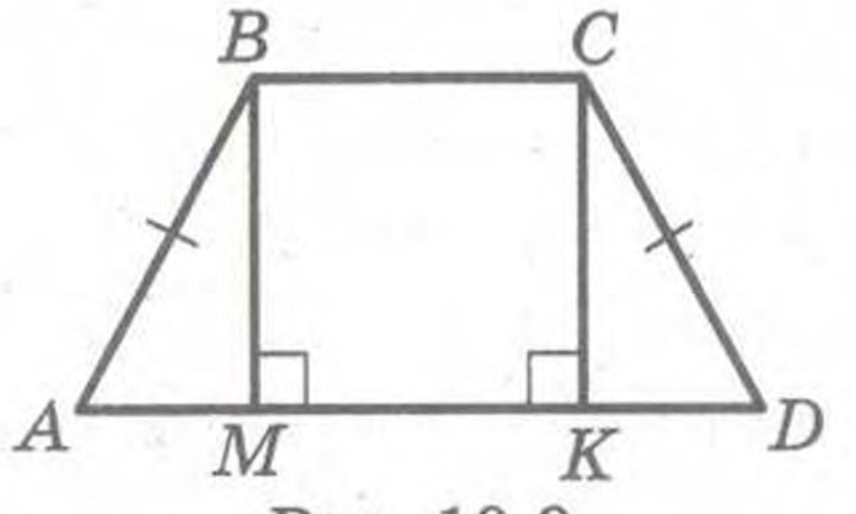


Рис. 10.9

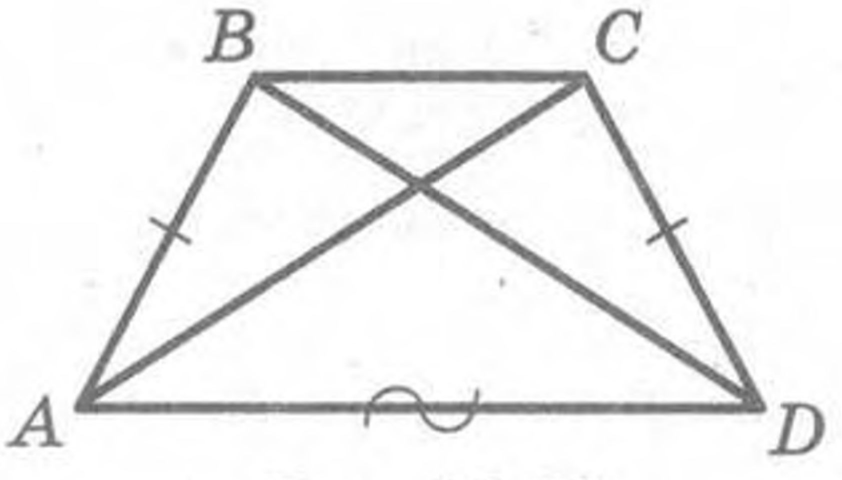


Рис. 10.10

Маємо: $AB = CD$, AD — спільна сторона, $\angle BAD$ і $\angle CDA$ рівні як кути при основі рівнобічної трапеції. Отже, $\Delta ACD = \Delta DBA$ за двома сторонами і кутом між ними. Тоді $AC = BD$.

3) У чотирикутнику $BMKC$ (рис. 10.9) $BM \parallel CK$, $BC \parallel MK$, $\angle BMK$ — прямий. Отже, цей чотирикутник є прямокутником. Звідси $MK = BC$.

З рівності трикутників AMB і DKC випливає, що $AM = KD$. Тоді

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

П р и к л а д. У трапеції $ABCD$ діагоналі перпендикулярні і діагональ AC дорівнює середній лінії трапеції. Знайдіть кути, які утворюють діагоналі трапеції з основами.

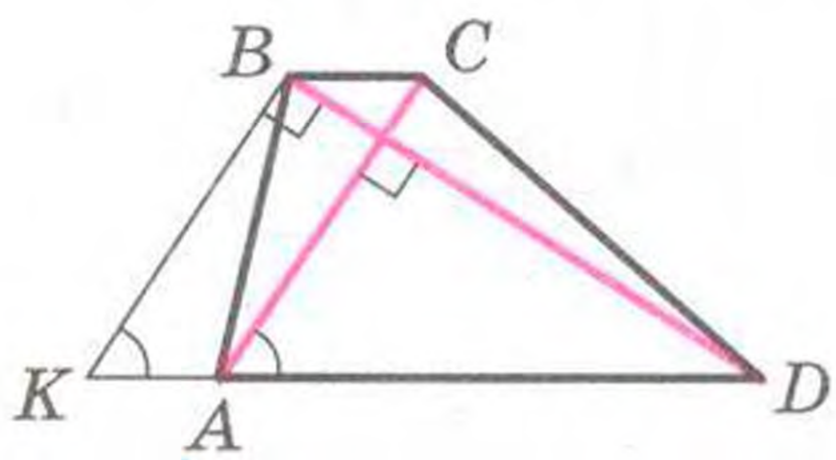


Рис. 10.11

Розв'язання. Через точку B проведемо $BK \parallel AC$, точка K належить прямій AD (рис. 10.11). Очевидно, що чотирикутник $KBCA$ — паралелограм. Тоді $KA = BC$ і в трикутнику KBD сторона KD дорівнює подвоєній середній лінії трапеції.

Оскільки $AC \perp BD$ і $KB \parallel AC$, то $\angle KBD = 90°$. У прямокутному трикутнику KBD катет KB дорівнює половині гіпотенузи KD. Тоді $\angle BDK = 30°$, $\angle BKD = 60°$. Оскільки $KB \parallel AC$, то $\angle CAD = \angle BKD = 60°$.

?

1. Який чотирикутник називають трапецією?
2. Які сторони трапеції називають основами? бічними сторонами?
3. Що називають висотою трапеції?
4. Чому дорівнює сума кутів трапеції, прилеглих до її бічної сторони?
5. Які існують окремі види трапецій?
6. Яку трапецію називають рівнобічною?
7. Яку трапецію називають прямокутною?
8. Що називають середньою лінією трапеції?
9. Сформулюйте теорему про властивості середньої лінії трапеції.
10. Сформулюйте властивості рівнобічної трапеції.

ВПРАВИ

10.1.° Чи можуть два протилежних кути трапеції бути: 1) тупими; 2) прямими; 3) рівними?

10.2.° Доведіть, що коли кути при одній з основ трапеції рівні, то дана трапеція є рівнобічною.

10.3.° Доведіть, що сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180°. Чи є правильним обернене твердження: якщо сума протилежних кутів трапеції дорівнює 180°, то дана трапеція є рівнобічною?

10.4.° Середня лінія рівностороннього трикутника зі стороною 6 см розбиває його на трикутник і чотирикутник. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його периметр.

10.5.° Висота рівнобічної трапеції, проведена з кінця меншої основи, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть основи трапеції.

10.6.° Один з кутів рівнобічної трапеції дорівнює 60°, бічна сторона — 18 см, а сума основ — 50 см. Знайдіть основи трапеції.

10.7.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 10 см і 24 см, а один з кутів — 45°. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції.

10.8.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а один з кутів — 60°. Знайдіть більшу бічну сторону трапеції.

10.9.° У трапеції $ABCD$ $AB = CD$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 50°$. Знайдіть кути ACB і ACD.

10.10.° У трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = CD$, $\angle ABD = 80°$. Знайдіть кути трапеції.

10.11.° Одна з основ трапеції на 8 см більша за другу, а середня лінія дорівнює 17 см. Знайдіть основи трапеції.

10.12.° Основи трапеції відносяться як 3 : 4, а середня лінія дорівнює 14 см. Знайдіть основи трапеції.

10.13.° Кожну з бічних сторін трапеції $ABCD$ (рис. 10.12) поділено на чотири рівні частини: $AE = EF = FK =$

Рис. 10.12

$= KB$, $DN = NM = MP = PC$. Знайдіть відрізки EN, FM і KP, якщо $AD = 19$ см, $BC = 11$ см.

10.14.° Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу основу на відрізки завдовжки 7 см і 5 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть середню лінію трапеції.

10.15.° Середня лінія прямокутної трапеції дорівнює 9 см, а висота, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу основу на відрізки, перший з яких у 2 рази більший за другий, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть основи трапеції.

10.16.° Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) перетинаються в точці O. Доведіть, що $AO = OD$ і $BO = OC$.

10.17.° Висота рівнобічної трапеції дорівнює h, а бічну сторону видно з точки перетину діагоналей під кутом[1] $60°$. Знайдіть діагональ трапеції.

10.18.° Основи рівнобічної трапеції відносяться як $2 : 5$, а діагональ ділить тупий кут трапеції навпіл. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 68 см.

10.19.° У трапеції $ABCD$ $AB = CD$, $AD = 24$ см, $\angle ADB = \angle CDB$, а периметр дорівнює 60 см. Знайдіть невідомі сторони трапеції.

10.20.° Сторони трапеції дорівнюють a, a, a і $2a$. Знайдіть кути трапеції.

10.21.° У трапеції $ABCD$ діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони CD і є бісектрисою кута BAD, $\angle D = 60°$, периметр трапеції дорівнює 40 см. Знайдіть основи трапеції.

10.22.° Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть кути трапеції.

10.23.° За якої умови висота рівнобічної трапеції дорівнює піврізниці основ?

10.24.° Побудуйте прямокутну трапецію за основами і меншою бічною стороною.

---

[1] Нехай дано відрізок AB і точку M поза прямою AB таку, що $\angle AMB = \alpha$. У такому випадку кажуть, що відрізок AB видно з точки M під кутом α.

10.25.° Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною і діагоналлю.

10.26.• У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) бісектриса кута ABC перетинає середню лінію в точці P. Доведіть, що $\angle APB = 90°$.

10.27.• Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії трапеції.

10.28.• Доведіть, що коли висота рівнобічної трапеції дорівнює її середній лінії, то діагоналі трапеції перпендикулярні.

10.29.• Діагональ прямокутної трапеції розбиває її на два трикутники, один з яких є рівностороннім зі стороною a. Знайдіть середню лінію трапеції.

10.30.• Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трапеції.

10.31.• У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AC \perp BD$, $\angle CAD = 30°$, $BD = 8$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

10.32.• Доведіть, що в трапеції різниця бічних сторін менша від різниці основ.

10.33.• Довжина висоти AB прямокутної трапеції $ABCD$ дорівнює сумі довжин основ AD і BC. Доведіть, що бісектриса кута ABC поділяє сторону CD навпіл.

10.34.•• Середня лінія трапеції дорівнює відрізку, який з'єднує середини основ. Доведіть, що діагоналі цієї трапеції перпендикулярні.

10.35.•• Діагоналі трапеції перпендикулярні. Доведіть, що середня лінія трапеції дорівнює відрізку, який з'єднує середини основ.

10.36.•• Побудуйте трапецію:

1) за основами й бічними сторонами;
2) за основою, прилеглим до неї кутом і бічними сторонами;
3) за різницею основ, бічними сторонами й діагоналлю.

10.37.•• Побудуйте трапецію:

1) за основами й діагоналями;
2) за бічними сторонами, середньою лінією і висотою;
3) за бічними сторонами, висотою і діагоналлю.

10.38.[••] Сума кутів при більшій основі трапеції дорівнює 90°. Доведіть, що відрізок, який з'єднує середини основ, дорівнює їх піврізниці.

10.39.[••] Довжина середньої лінії трапеції дорівнює 5 см, а довжина відрізка, який з'єднує середини основ, — 3 см. Кути при більшій основі дорівнюють 30° і 60°. Знайдіть основи трапеції.

10.40.[••] У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = BC = \frac{1}{2}AD$. Знайдіть $\angle ACD$.

10.41.[••] У трапеції $ABCD$ діагоналі перпендикулярні. На більшій основі AD позначено точку M так, що $BM = MD = 3$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

10.42.[••] У трапеції $ABCD$ діагональ AC дорівнює сумі основ BC і AD. Кут між діагоналями дорівнює 60°. Доведіть, що трапеція $ABCD$ — рівнобічна.

10.43.[*] Нехай M — внутрішня точка рівностороннього трикутника ABC. Чи існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам MA, MB і MC, а вершини лежать на сторонах даного рівностороннього трикутника?

10.44.[*] Через точки A і B, які лежать на різних сторонах кута, проведено прямі, які перпендикулярні до сторін кута і перетинають його бісектрису відповідно у точках C і D. Доведіть, що середина відрізка CD рівновіддалена від точок A і B.

Вписані та описані чотирикутники

§3

11. Центральні та вписані кути

Означення. **Центральним кутом кола називають кут з вершиною в центрі кола.**

На рисунку 11.1 кут AOB — центральний. Сторони цього кута перетинають коло в точках A і B. Ці точки ділять коло на дві **дуги**, які виділено на рисунку 11.1 різним кольором. Точки A і B називають **кінцями** дуги, і вони належать кожній з виділених дуг. Кожну з цих дуг можна позначити так: $\cup AB$ (читають: «дуга AB»).

Але за записом $\cup AB$ не можна розрізнити дуги на рисунку 11.1. Якщо на якійсь із двох дуг позначити точку (на рисунку 11.2 це точка M), то зрозуміло, що позначення $\cup AMB$ відноситься до «синьої» дуги. Якщо на одній із двох дуг AB відмічено точку, то домовимося, що позначення $\cup AB$ відноситься до дуги, якій ця точка не належить (на рисунку 11.2 це «зелена» дуга).

Дуга AB належить центральному куту AOB (рис. 11.2). У цьому випадку кажуть, що центральний кут AOB **спирається на дугу** AB.

Кожна дуга кола, як і все коло, має градусну міру. Градусну міру всього кола вважають рівною 360°. Якщо центральний кут MON спирається на дугу MN (рис. 11.3), то градусну міру дуги MN вважають рівною градусній мірі кута MON і записують $\cup MN = \angle MON$ (читають: «градусна міра дуги MN дорівнює градусній мірі кута MON»). Градусну міру дуги MEN (рис. 11.3) вважають рівною $360° - \angle MON$.

На рисунку 11.4 зображено два перпендикулярних діаметри AB і CD. Тоді $\cup AMD = 90°$, $\cup ACD = 360° - 90° = 270°$, $\cup ACB = \cup ADB = 180°$. Кожну з дуг ACB і ADB на-

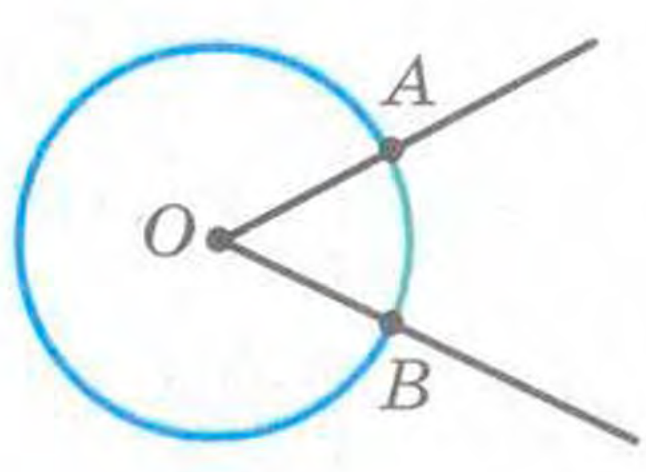


Рис. 11.1

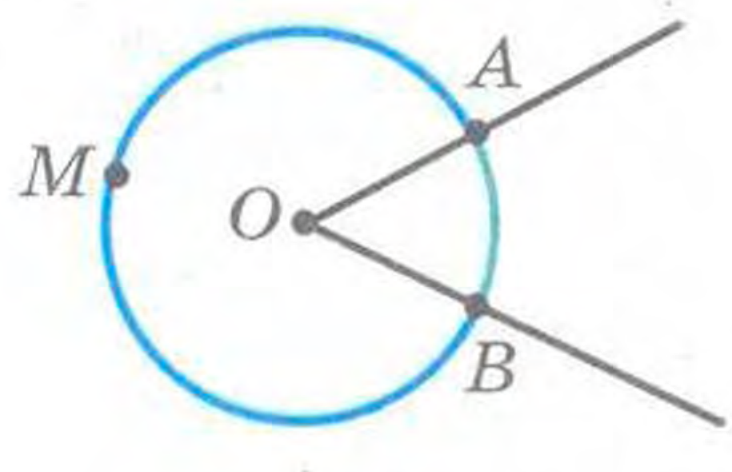


Рис. 11.2

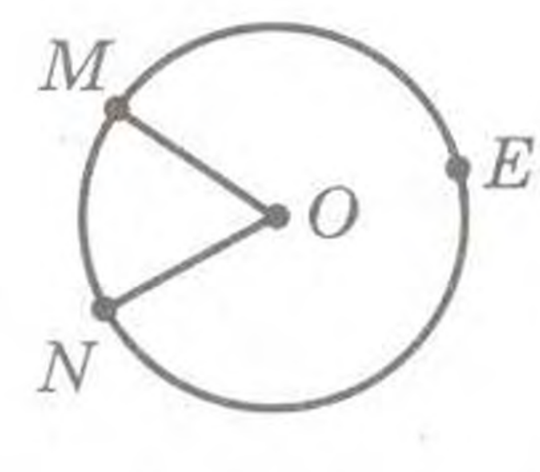


Рис. 11.3

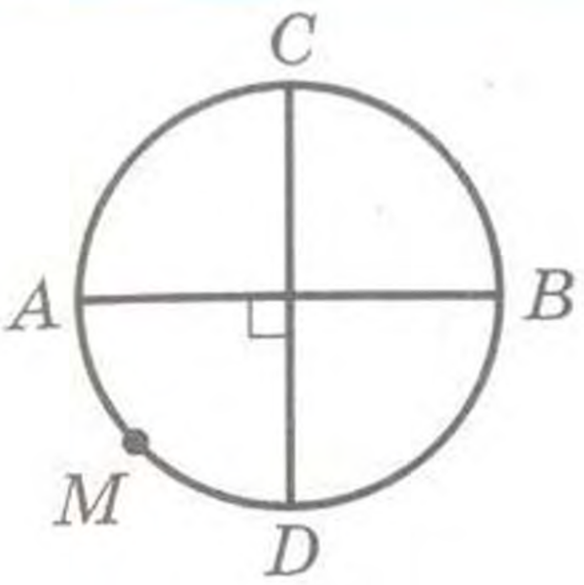


Рис. 11.4

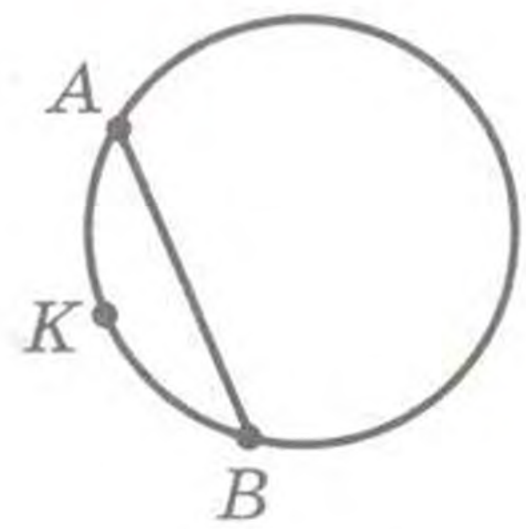


Рис. 11.5

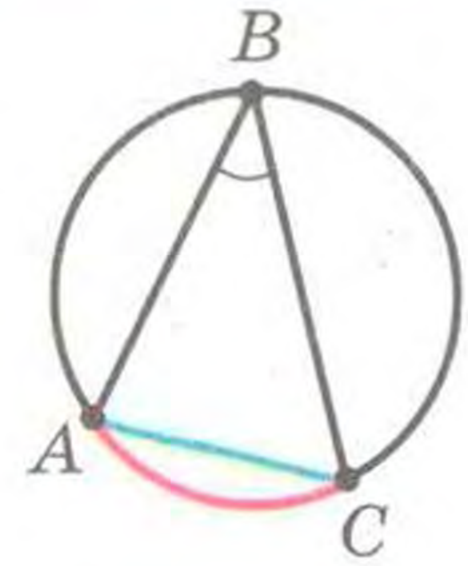


Рис. 11.6

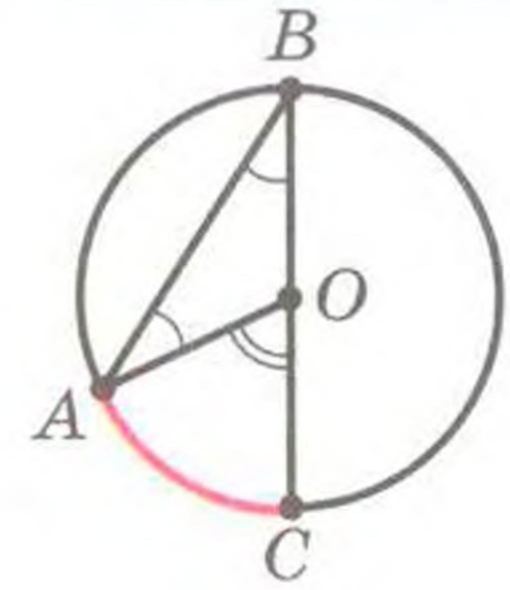


Рис. 11.7

зивають **півколом**. На рисунку 11.4 півколами є також дуги CAD і CBD.

Про хорду, яка з'єднує кінці дуги, кажуть, що хорда **стягує** дугу. На рисунку 11.5 хорда AB стягує кожну з дуг AB і AKB.

Очевидно, що будь-яка хорда стягує дві дуги, сума градусних мір яких дорівнює 360°.

Означення. Вписаним кутом кола називають кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло.

На рисунку 11.6 кут ABC — вписаний. Дуга AC належить цьому куту, а дуга ABC — не належить. У такому випадку кажуть, що вписаний кут ABC **спирається на дугу** AC. Також можна сказати, що вписаний кут ABC **спирається на хорду** AC.

Теорема 11.1. ***Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається.***

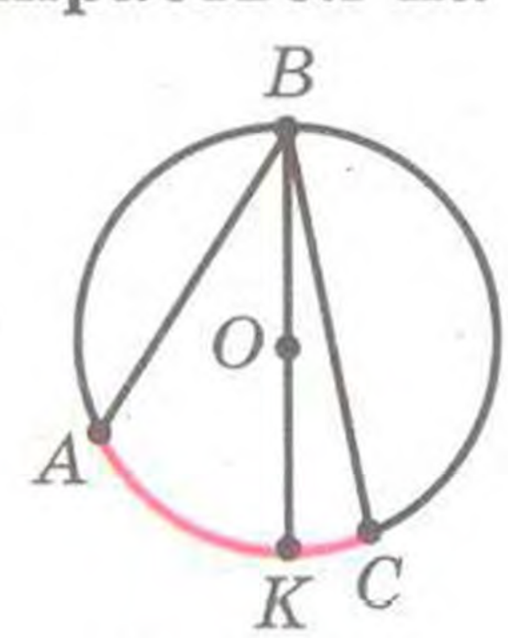


Рис. 11.8

Доведення. На рисунку 11.6 кут ABC — вписаний. Доведемо, що $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

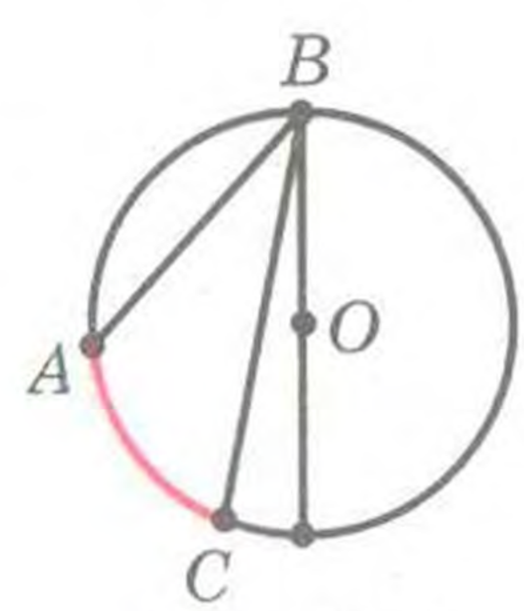


Рис. 11.9

Розглянемо три випадки розташування центра O кола відносно вписаного кута ABC:

1) центр O належить одній із сторін кута, наприклад BC (рис. 11.7);
2) центр O належить куту, проте не належить жодній з його сторін (рис. 11.8);
3) центр O не належить куту (рис. 11.9).

Рис. 11.10

Рис. 11.11

На рисунку 11.7 проведемо радіус AO. Центральний кут AOC — зовнішній кут рівнобедреного трикутника ABO ($OA = OB$ як радіуси). Тоді $\angle AOC = \angle A + \angle B$. Проте $\angle A =$ $= \angle B$. Звідси $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC$.

На рисунку 11.8 проведемо діаметр BK. Згідно з доведеним $\angle ABK = \frac{1}{2} \cup AK$, $\angle KBC = \frac{1}{2} \cup KC$. Маємо:

$$\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \frac{1}{2} \cup AK + \frac{1}{2} \cup KC = \frac{1}{2} \cup AKC.$$

Для третього випадку (рис. 11.9) проведіть доведення самостійно. ▲

Наслідок 1. ***Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні*** (рис. 11.10).

Наслідок 2. ***Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо) — прямий*** (рис. 11.11).

Доведення цих наслідків проведіть самостійно.

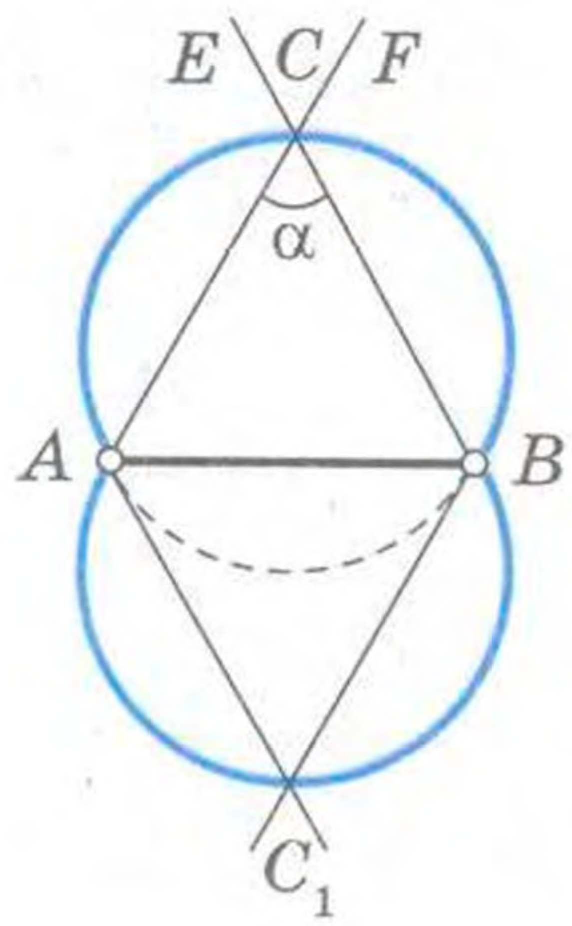


Рис. 11.12

Задача. *Дано відрізок AB і кут α. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\angle AXB = \alpha$.*

Розв'язання. Проведемо два промені AF і BE так, що $\angle BAF = \angle ABE = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Нехай ці промені перетинаються в точці C (рис. 11.12). Очевидно, що $\angle ACB = \alpha$. Опишемо коло навколо трикутника ABC. Усі кути AXB, вершини яких належать дузі ACB, дорівнюють куту α. Виконавши ана-

Рис. 11.13

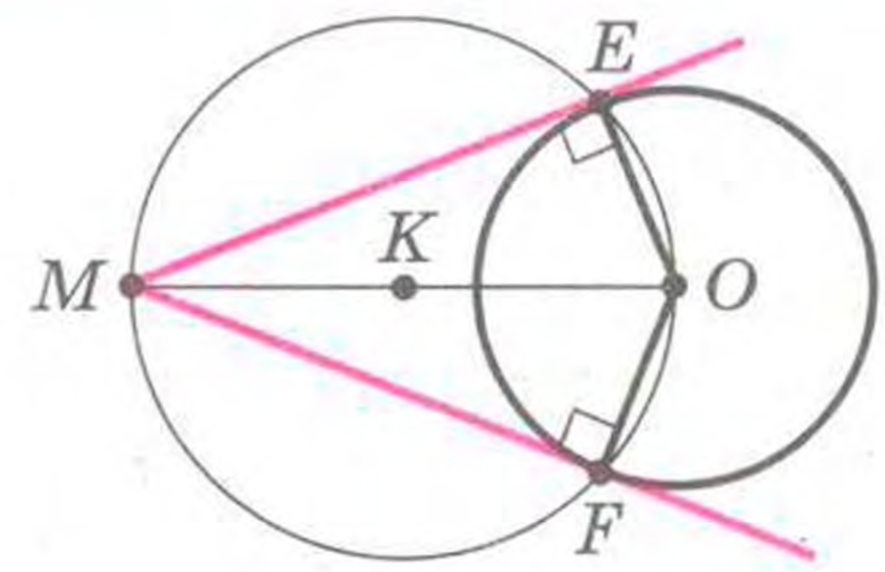


Рис. 11.14

логічну побудову в іншій півплощині відносно прямої AB, отримаємо трикутник ABC_1, навколо якого теж опишемо коло. Дуги ACB і AC_1B, за винятком точок A і B, належать шуканому ГМТ.

Також слід довести обернене твердження: якщо точка X має зазначену властивість, то вона лежить на дузі ACB або AC_1B. Користуючись методом від супротивного, зробіть це самостійно.

Тепер можна стверджувати, що шуканим ГМТ є дуги ACB і AC_1B, зображені на рисунку 11.12, за винятком точок A і B.

Приклад. Побудуйте дотичну до даного кола, яка проходить через дану точку, що лежить поза колом.

Розв'язання. На рисунку 11.13 зображено коло з центром у точці O і точку M, яка лежить поза цим колом.

Розділимо відрізок MO навпіл (рис. 11.14). Нехай точка K — його середина. Побудуємо коло з центром у точці K радіуса KO. Позначимо точки E і F перетину побудованого і даного кіл. Тоді кожна з прямих ME і MF є шуканою дотичною.

Справді, $\angle MEO = 90°$ як вписаний, що спирається на діаметр MO. Відрізок OE — радіус даного кола. Тоді за ознакою дотичної пряма ME — шукана дотична.

?

1. Який кут називають центральним кутом кола?
2. Як називають частини кола, на які ділять його дві точки?
3. Яким символом позначають дугу кола?
4. У якому випадку позначення дуги двома буквами однозначно її визначає?
5. У якому випадку кажуть, що центральний кут спирається на дугу?

6. Чому вважають рівною градусну міру кола?
7. Як пов'язані градусні міри центрального кута кола і дуги, на яку цей кут спирається?
8. Скільки дуг стягує кожна хорда? Чому дорівнює сума їх градусних мір?
9. Який кут називають вписаним кутом кола?
10. У якому випадку кажуть, що вписаний кут спирається на дугу?
11. Чому дорівнює градусна міра вписаного кута?
12. Яку властивість мають вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу?
13. Який вид має вписаний кут, що спирається на діаметр?

ВПРАВИ

11.1.° Чому дорівнює градусна міра центрального кута кола, який спирається на дугу, що становить:

1) $\frac{1}{6}$ кола; 2) $\frac{1}{10}$ кола; 3) $\frac{1}{2}$ кола; 4) $\frac{2}{9}$ кола?

11.2.° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг на 80° більша за градусну міру другої.

11.3.° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусні міри цих дуг відносяться як 7 : 11.

11.4.° На рисунку 11.15 зображено коло з центром у точці O. Знайдіть:

1) $\angle BDC$, якщо $\angle BAC = 40°$;

2) $\angle BEC$, якщо $\angle BOC = 70°$;

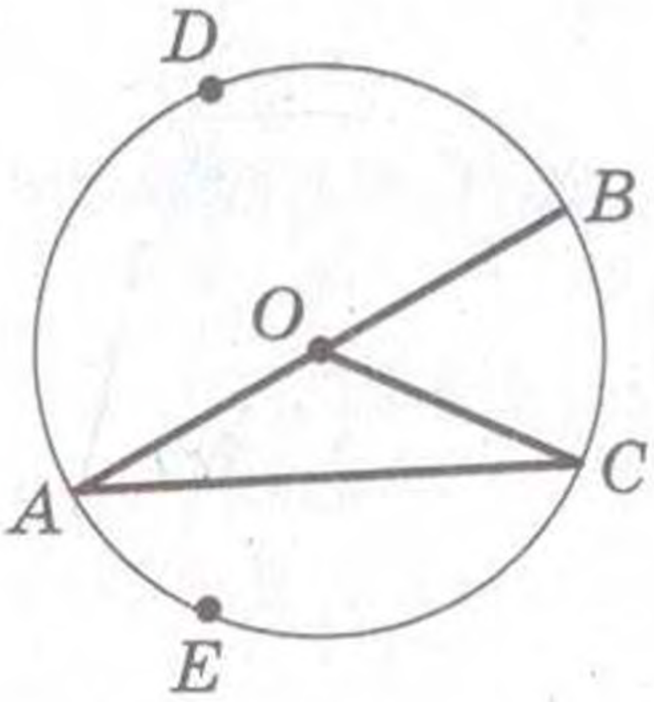


Рис. 11.15

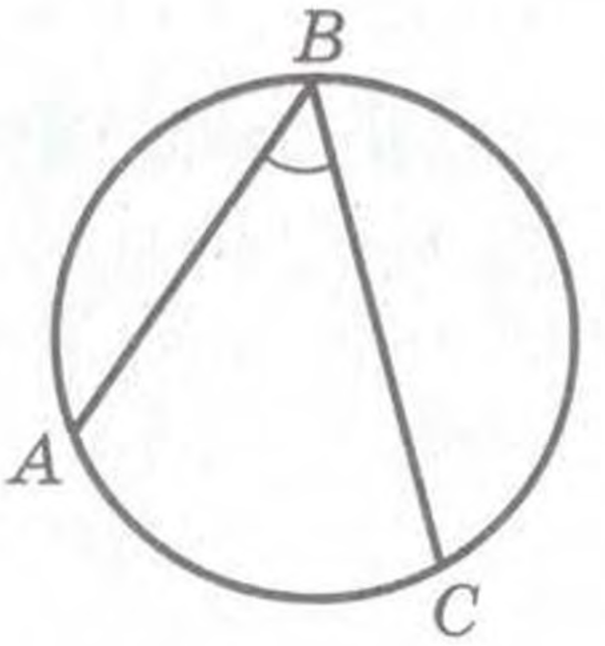


Рис. 11.16

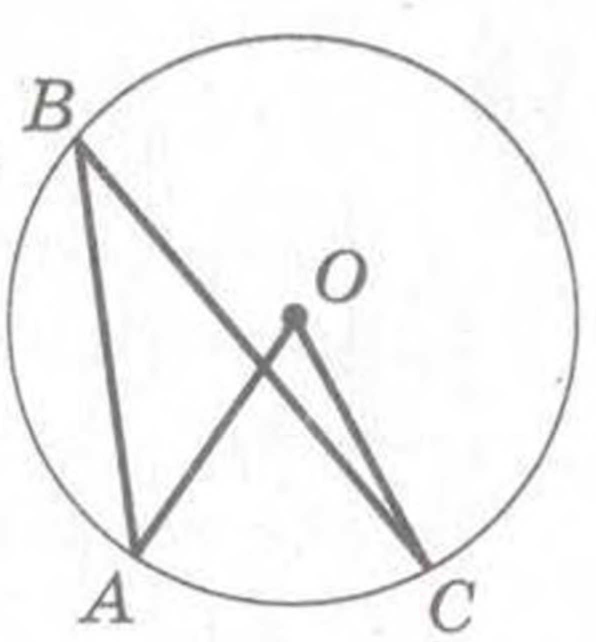


Рис. 11.17

3) $\cup CE$, якщо $\angle CDE = 80°$;

4) $\angle DBA$, якщо $\cup DBA = 300°$.

11.5.° На рисунку 11.16 $\cup AB = 74°$, $\angle ABC = 68°$. Знайдіть $\cup BC$.

11.6.° Центральний кут AOC на 25° більший за вписаний кут ABC, що спирається на дугу AC (рис. 11.17). Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle ABC$.

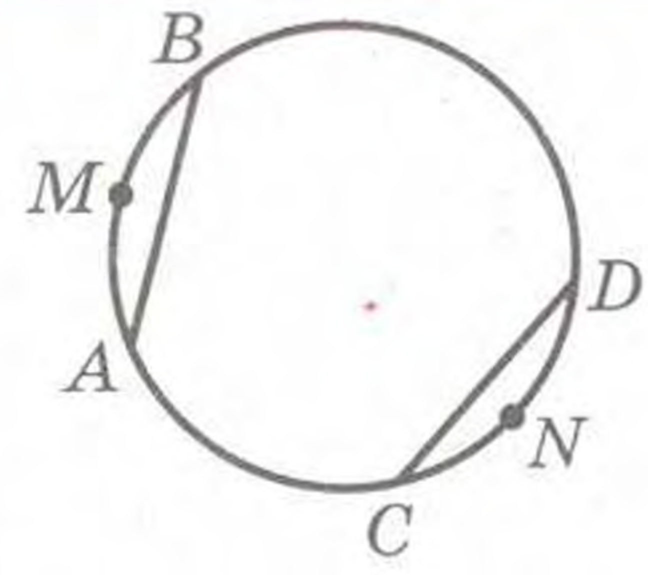


Рис. 11.18

11.7.° На рисунку 11.18 хорди AB і CD рівні. Доведіть, що $\cup AMB = \cup CND$.

11.8.° Доведіть, що коли дві дуги кола рівні, то рівні і хорди, які їх стягують.

11.9.° Вершини квадрата $ABCD$ лежать на колі. На дузі AB позначено довільну точку M. Доведіть, що $\angle AMD = \angle CMD = \angle CMB$.

11.10.° Вершини рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) ділять описане навколо нього коло на три дуги, причому $\cup AB = 70°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

11.11.° Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 32°. Знайдіть градусні міри дуг, на які вершини трикутника ділять коло, описане навколо нього, та радіус цього кола, якщо гіпотенуза даного трикутника дорівнює 12 см.

11.12.° Доведіть, що коли вписаний кут є прямим, то він спирається на діаметр.

11.13.° Як, користуючись лише косинцем, знайти центр даного кола?

11.14.* Коло, побудоване на стороні AB трикутника ABC як на діаметрі, перетинає прямі AC і BC у точках M і K відповідно. Доведіть, що відрізки AK і BM — висоти трикутника ABC.

11.15.* Коло, побудоване на стороні AC трикутника ABC як на діаметрі, перетинає сторону AB у точці K так, що $\angle ACK = \angle BCK$. Доведіть, що ΔABC — рівнобедрений.

11.16.* Доведіть, що сторона трикутника, яка лежить проти кута 30°, дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника.

11.17.* Точка O — центр кола. Хорда AB перпендикулярна до радіуса OM і ділить його навпіл. Знайдіть кути AOB і BAM.

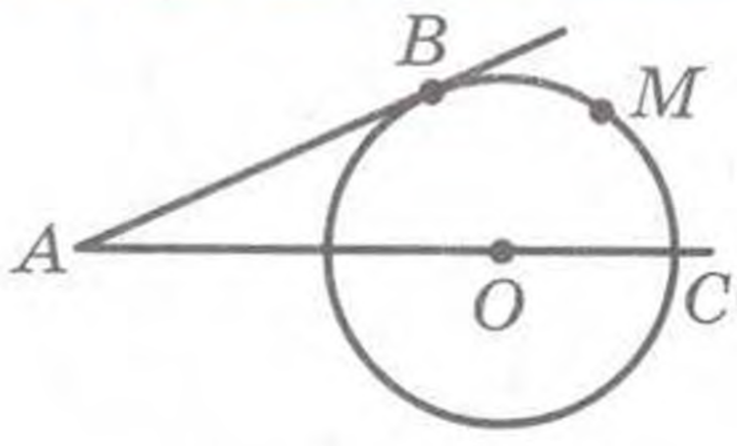


Рис. 11.19

11.18.$^{\bullet}$ Через точку A, яка лежить поза колом з центром у точці O, проведено дві прямі, одна з яких дотикається до кола в точці B, а друга проходить через його центр (рис. 11.19). Відомо, що $\cup BMC = 100°$. Знайдіть $\angle BAC$.

11.19.$^{\bullet}$ Бісектриса кута B трикутника ABC перетинає коло, описане навколо цього трикутника, у точці D. Знайдіть кути трикутника ADC, якщо $\angle ABC = 80°$.

11.20.$^{\bullet}$ На дузі AC кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC, позначено точку M так, що $\cup AM = 2 \cup CM$. Знайдіть кути трикутника AMC.

11.21.$^{\bullet}$ Доведіть, що градусні міри дуг кола, що містяться між двома паралельними хордами, рівні.

11.22.$^{\bullet}$ Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 56°. На бічній стороні трикутника як на діаметрі побудовано півколо, яке інші сторони трикутника ділять на три дуги. Знайдіть градусні міри утворених дуг.

11.23.$^{\bullet}$ Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку A проведено діаметри AD і AC. Доведіть, що точки B, C і D лежать на одній прямій.

11.24.$^{\bullet}$ Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку B проведено січну, яка перетинає кола в точках C і D. Доведіть, що величина кута CAD є сталою для всіх січних, що проходять через точку B.

11.25.$^{\bullet}$ Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане навколо нього коло в точці D. Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $DO = DB = DC$.

11.26.$^{\bullet}$ Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане навколо нього коло в точці D. Точки O і J — центри описаного і вписаного кіл трикутника ABC відповідно. За точками O, J, D відновіть трикутник ABC.

11.27.$^{\bullet}$ Коло, побудоване на стороні паралелограма як на діаметрі, проходить через середину сусідньої сторони і точку перетину діагоналей. Знайдіть кути паралелограма.

11.28.$^{\bullet}$ У колі проведено дві перпендикулярні хорди AB і CD, які перетинаються в точці M. Доведіть, що пряма, яка містить медіану трикутника DMB, містить також висоту трикутника CMA.

11.29.$^{\bullet}$ У колі проведено дві перпендикулярні хорди AB і CD, які перетинаються в точці M. Доведіть, що пряма, яка містить висоту трикутника DMB, містить також медіану трикутника CMA.

11.30.$^{\bullet}$ Точка H — ортоцентр трикутника ABC. Пряма AH перетинає описане коло трикутника ABC у точці A_1. Доведіть, що пряма BC поділяє відрізок HA_1 навпіл.

11.31.$^{\bullet}$ Відрізок AH — висота трикутника ABC. Доведіть, що $\angle BAH = \angle OAC$, де точка O — центр описаного кола трикутника ABC.

11.32.$^{\bullet}$ Прямі, які містять висоти гострокутного трикутника ABC, перетинають його описане коло в точках A_1, B_1 і C_1. Доведіть, що ортоцентр трикутника ABC є центром вписаного кола трикутника $A_1B_1C_1$.

11.33.$^{\bullet}$ Прямі, які містять висоти гострокутного трикутника ABC, перетинають його описане коло в точках A_1, B_1 і C_1. Відновіть за цими точками трикутник ABC.

11.34.$^{\bullet}$ Прямі, які містять бісектриси трикутника ABC, перетинають його описане коло в точках A_1, B_1 і C_1. Доведіть, що центр вписаного кола трикутника ABC є ортоцентром трикутника $A_1B_1C_1$.

11.35.$^{\bullet}$ Прямі, які містять бісектриси трикутника ABC, перетинають його описане коло в точках A_1, B_1 і C_1. Відновіть за цими точками трикутник ABC.

11.36.$^{\bullet}$ Доведіть, що описане коло трикутника ABC, бісектриса кута B і серединний перпендикуляр сторони AC проходять через одну точку.

11.37.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC проведено висоту BD, медіану BM і бісектрису BK. Відомо, що $\angle DBK = \angle KBM$. Доведіть, що $\angle ABC = 90°$.

11.38.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC висота BD, медіана BM і бісектриса BK поділяють кут ABC на чотири рівних кути. Знайдіть кути трикутника ABC.

11.39.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC проведено висоту BD, медіану BM і бісектрису BK. Доведіть, що точка K належить відрізку DM.

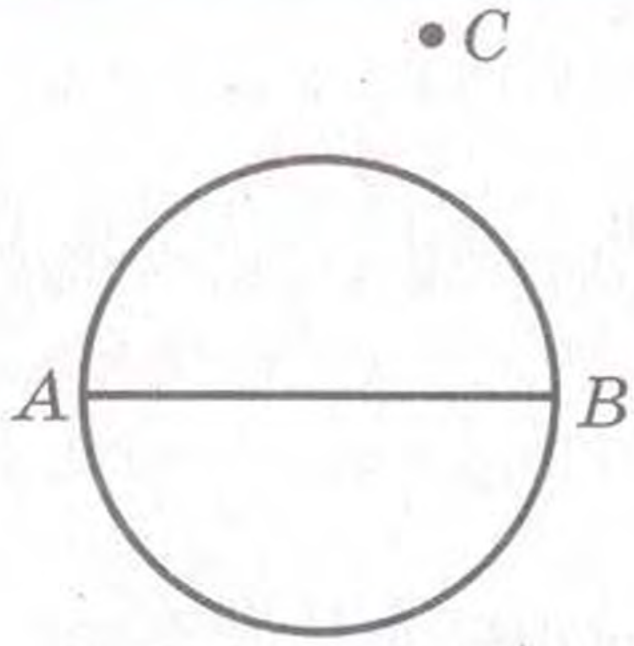


Рис. 11.20

11.40.$^{\bullet}$ Побудуйте трикутник ABC за точкою A, центром описаного кола і точкою перетину бісектриси кута A зі стороною BC.

11.41.$^{\bullet}$ Побудуйте прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) за точками A і B та точкою M, яка лежить на бісектрисі кута C.

11.42.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трикутник за медіаною, бісектрисою і висотою, які виходять з однієї вершини.

11.43.$^{\bullet\bullet}$ Прямі, які містять висоту, бісектрису і медіану, що виходять з вершини B трикутника ABC, перетинають його описане коло в точках M, N, K відповідно. За точками M, N і K відновіть трикутник ABC.

11.44.$^{\bullet\bullet}$ Дано коло, у якому проведено діаметр AB, і точку C поза колом (рис. 11.20). Як, користуючись лише лінійкою, провести через точку C пряму, яка перпендикулярна до прямої AB?

11.45.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і висотою, проведеною до даної сторони.

11.46.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і медіаною, проведеною до даної сторони.

11.47.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте паралелограм за двома сторонами і кутом між діагоналями.

11.48.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте паралелограм за кутом і двома діагоналями.

11.49.$^{\bullet\bullet}$ Дано відрізок AB. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що трикутник AXB — прямокутний.

11.50.$^{\bullet\bullet}$ Центри вписаного і описаного кіл трикутника ABC лежать по різні сторони від прямої AB. Сторона AB дорівнює радіусу описаного кола. Чому дорівнює кут AOB, де точка O — центр вписаного кола?

11.51.$^{\bullet\bullet}$ Прямі, які містять висоти гострокутного трикутника ABC, проведені з вершин B і C, перетинають описане коло в точках B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо пряма B_1C_1 проходить через центр описаного кола.

11.52.$^{\bullet\bullet}$ У гострокутному трикутнику ABC точки B, H, O, C, де H — ортоцентр, O — центр описаного кола, лежать на одному колі. Знайдіть величину кута BAC.

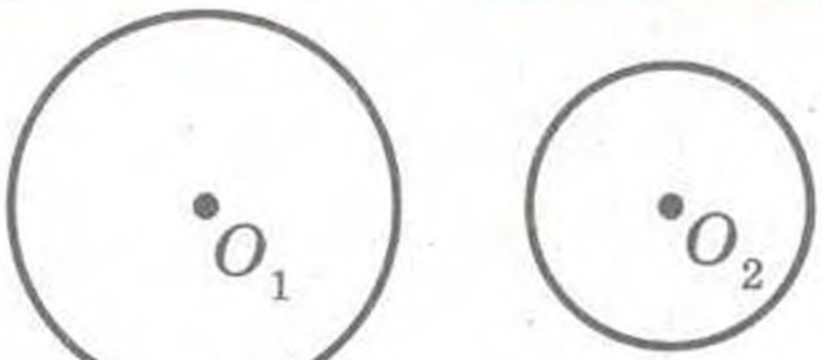


Рис. 11.21

11.53.[**] У гострокутному трикутнику ABC $\angle BAC = 60°$, точка H — ортоцентр, точка O — центр описаного кола, точка J — центр вписаного кола. Доведіть, що точки B, H, O, J, C лежать на одному колі.

11.54.[*] Многокутник, усі вершини якого належать одному колу, поділено діагоналями, які не перетинаються, на трикутники. Доведіть, що серед указаних трикутників тільки один може бути гострокутним.

11.55.[*] У коло вписано прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB. На більшому катеті BC взято точку D так, що $AC = BD$, а точка E — середина дуги ACB. Знайдіть кут DEC.

11.56.[*] На рисунку 11.21 зображено два кола з центрами в точках O_1 і O_2. Побудуйте пряму l, яка дотикається до цих кіл так, що точки дотику лежать в одній півплощині відносно прямої O_1O_2 (таку пряму називають **зовнішньою спільною дотичною** до двох даних кіл).

11.57.[*] Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і радіусом вписаного кола.

11.58.[*] Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і медіаною, проведеною до другої сторони.

11.59.[*] На хорді AB кола з центром O взято точку C. Описане коло трикутника AOC перетинає дане коло в точці D. Доведіть, що $BC = CD$.

11.60.[*] Відновіть квадрат за чотирма точками, які лежать по одній на кожній із чотирьох його сторін.

12. Застосування властивостей центральних і вписаних кутів при розв'язуванні задач

Задача 1 (властивість кута між дотичною і хордою). *Нехай AB — хорда кола з центром O* (рис. 12.1). *Через точку A проведено дотичну MN. Доведіть, що*

$\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$ *і* $\angle NAB = \frac{1}{2} \cup AKB$.

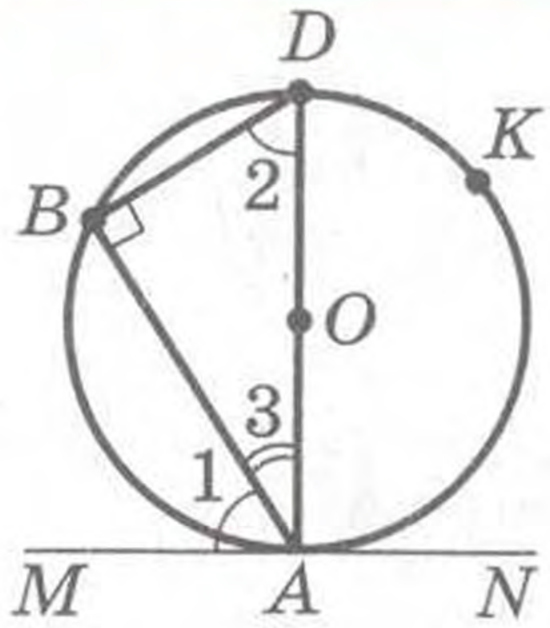


Рис. 12.1

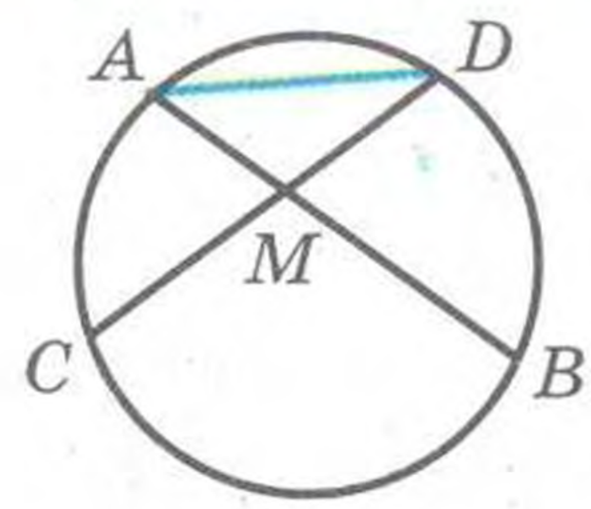


Рис. 12.2

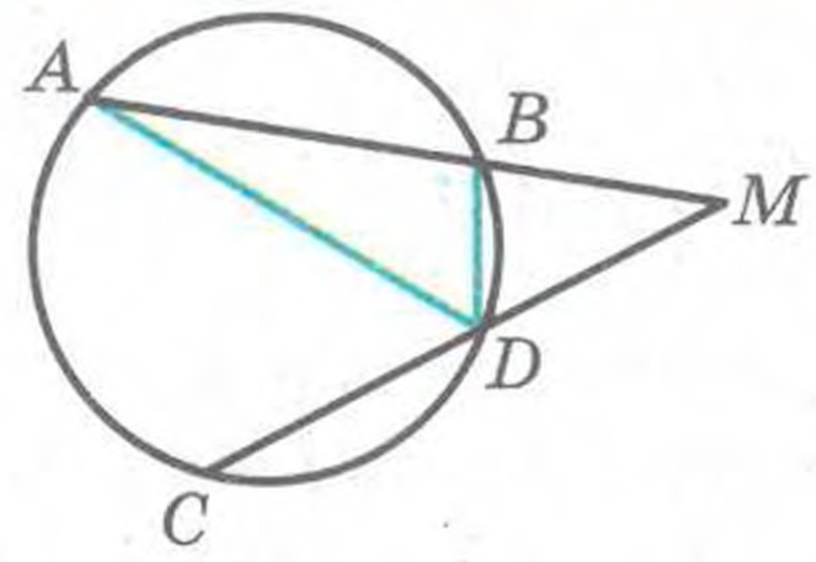


Рис. 12.3

Розв'язання. Проведемо діаметр AD (рис. 12.1). Оскільки MN — дотична, то $\angle DAM = 90°$. Також $\angle B = 90°$ як вписаний, що спирається на діаметр AD. Тоді $\angle 2 + \angle 3 = 90°$. Але $\angle 1 + \angle 3 = 90°$. Звідси $\angle 1 = \angle 2$.

Тоді $\angle MAB = \angle BDA = \frac{1}{2} \cup AB$.

Маємо: $\angle NAB = 180° - \angle MAB = 180° - \frac{1}{2} \cup AB =$

$= 180° - \frac{1}{2}(360° - \cup AKB) = 180° - 180° + \frac{1}{2} \cup AKB = \frac{1}{2} \cup AKB$.

Справедливе й обернене твердження. *Нехай AB — хорда кола з центром O* (рис. 12.1). *Через точку A проведено пряму MN так, що $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$. Тоді MN — дотична до кола.*

Використовуючи метод доведення від супротивного, доведіть це твердження самостійно.

Задача 2. *Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M* (рис. 12.2). *Доведіть, що*

$$\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD).$$

Розв'язання. Кут AMC є зовнішнім для трикутника AMD. Тоді

$$\angle AMC = \angle DAB + \angle ADC = \frac{1}{2} \cup DB + \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD).$$

Задача 3. *Хорди AB і CD кола не перетинаються, а промені AB і CD перетинаються в точці M* (рис. 12.3). *Доведіть, що $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD)$.*

Розв'язання. Кут ADC є зовнішнім для трикутника ADM. Тоді $\angle ADC = \angle DAM + \angle AMD$. Звідси

$$\angle AMD = \angle ADC - \angle DAM = \frac{1}{2}\cup AC - \frac{1}{2}\cup BD = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD).$$

Задача 4. *Точки O і C розміщені в одній півплощині відносно прямої AB. Відомо, що $OA = OB$ і $\angle AOB = 2\angle ACB$. Доведіть, що точки A, B і C лежать на колі з центром у точці O.*

Розв'язання. Проведемо коло радіуса OB з центром у точці O. Тоді дуга AXB є геометричним місцем точок, які лежать в одній півплощині відносно прямої AB і з яких відрізок AB видно під кутом $\frac{1}{2}\angle AOB$ (рис. 12.4).

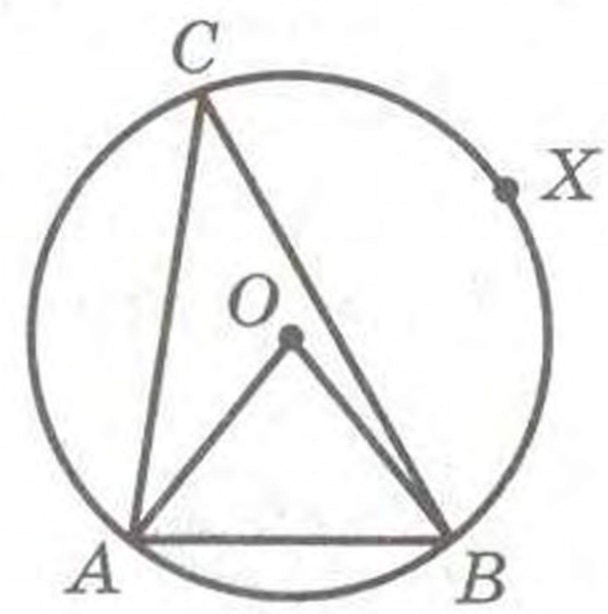


Рис. 12.4

Оскільки точка C лежить у тій самій півплощині і $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$, то точка C належить зазначеному ГМТ.

Задача 5. *Точки O і C розміщені в різних півплощинах відносно прямої AB. Відомо, що $AO = OB$ і $\angle AOB = 2(180° - \angle ACB)$. Доведіть, що точки A, B і C лежать на колі з центром у точці O.*

Це твердження доведіть самостійно.

Приклад 1. Два кола дотикаються в точці M. Через точку M проведено прямі, які перетинають одне коло в точках A_1 і B_1, а друге — в точках A_2 і B_2 (рис. 12.5). Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Розв'язання. Через точку M проведемо дотичну CD до одного з кіл (рис. 12.5). Ця пряма буде дотичною і до другого кола (доведіть цей факт самостійно). Використовуючи ключову задачу 1, можна записати $\angle A_1MC = \frac{1}{2}\cup A_1M$. Оскільки кут A_1B_1M — вписаний, то $\angle A_1B_1M = \frac{1}{2}\cup A_1M$. Звідси

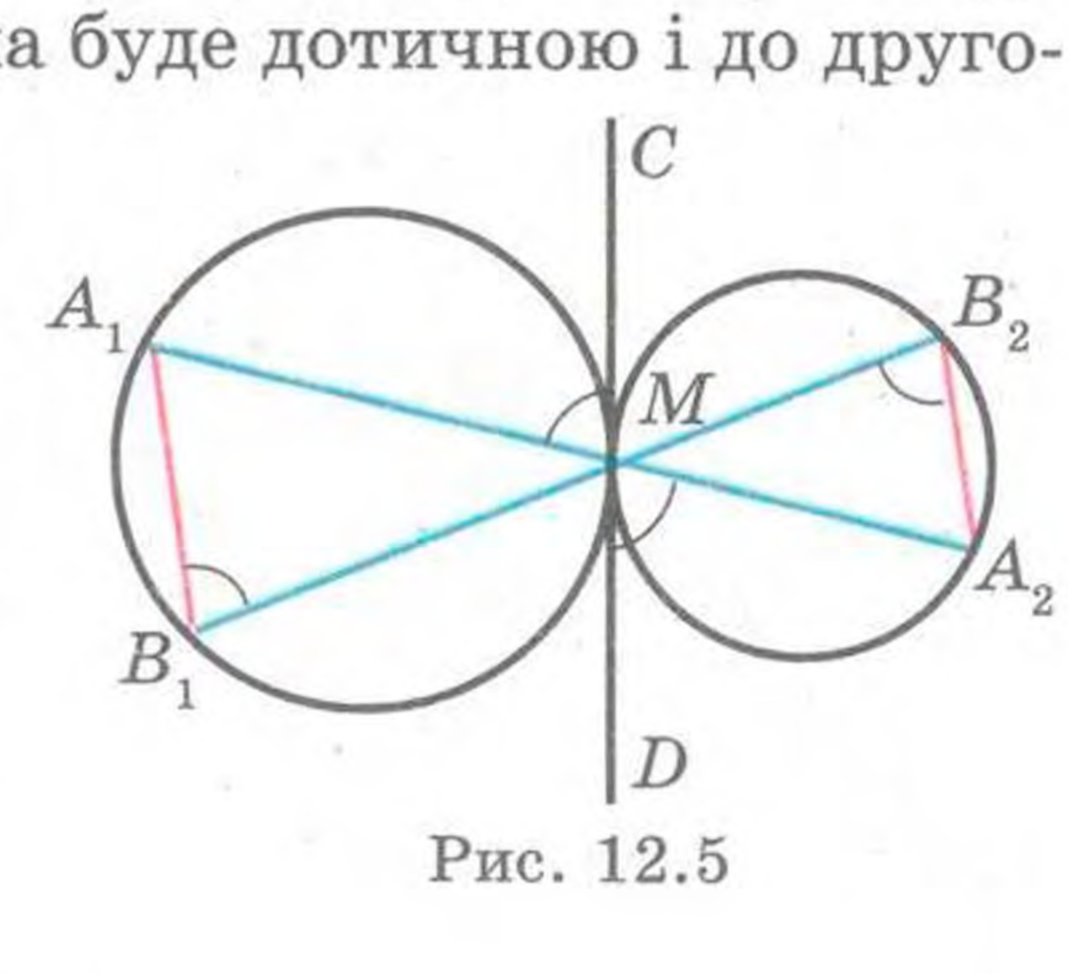


Рис. 12.5

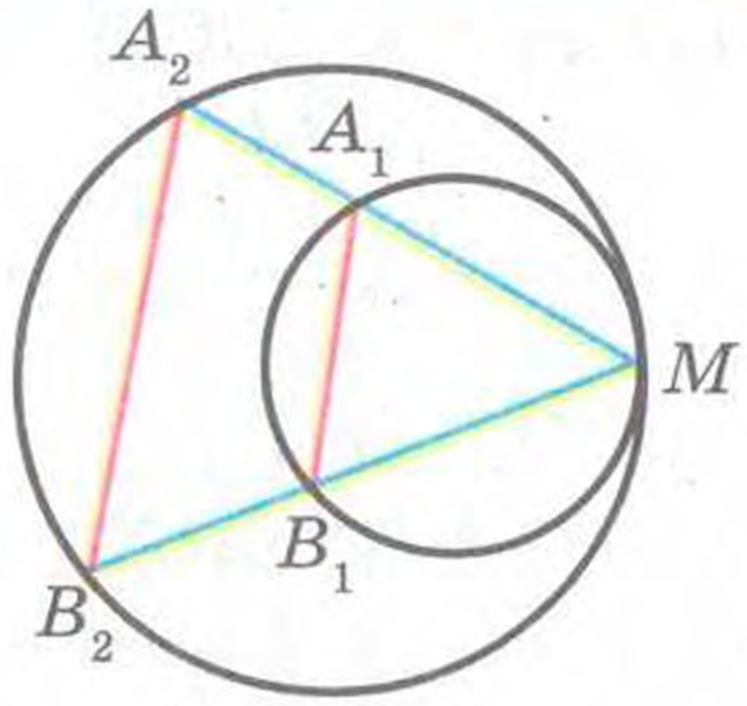


Рис. 12.6

$\angle A_1B_1M = \angle A_1MC$. Аналогічно доводиться, що $\angle MB_2A_2 = \angle A_2MD$. Але $\angle A_1MC$ і $\angle A_2MD$ рівні як вертикальні, отже, $\angle A_1B_1M = \angle A_2B_2M$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Зауважимо, що доведене твердження залишається справедливим і у випадку внутрішнього дотику кіл (рис. 12.6). Доведіть це самостійно.

Приклад 2. У трикутнику ABC проведено бісектрису BL. Через точку L до кола, описаного навколо трикутника BCL, проведено дотичну, яка перетинає сторону AB у точці P (рис. 12.7). Доведіть, що пряма AC — дотична до кола, описаного навколо трикутника BPL.

Розв'язання. За властивістю кута між дотичною і хордою (див. ключову задачу 1) $\angle CLK = \frac{1}{2} \cup LC = \angle LBC = \angle LBP$. Кути ALP і KLC рівні як вертикальні. Звідси

$$\angle ALP = \angle LBP = \frac{1}{2} \cup LP.$$

З урахуванням твердження, оберненого до доведеного у ключовій задачі 1, отримуємо, що пряма AC — дотична до кола, яке проходить через точки L, P і B.

Приклад 3. У колі з центром O проведено хорду AB. На продовженні відрізка AB за точку B обрано точку C так, що відрізок BC дорівнює радіусу кола. Пряма CO перетинає коло в точці D (точка O лежить між точками D і C). Доведіть, що $\angle AOD = 3\angle ACD$ (рис. 12.8).

Розв'язання. Нехай $\angle ACD = \alpha$. Проведемо радіус OB (рис. 12.8). Оскільки $OB = BC$, то $\angle BOK = \alpha$ (K — точка перетину прямої CD з колом). Тоді $\cup KB = \alpha$. Використо-

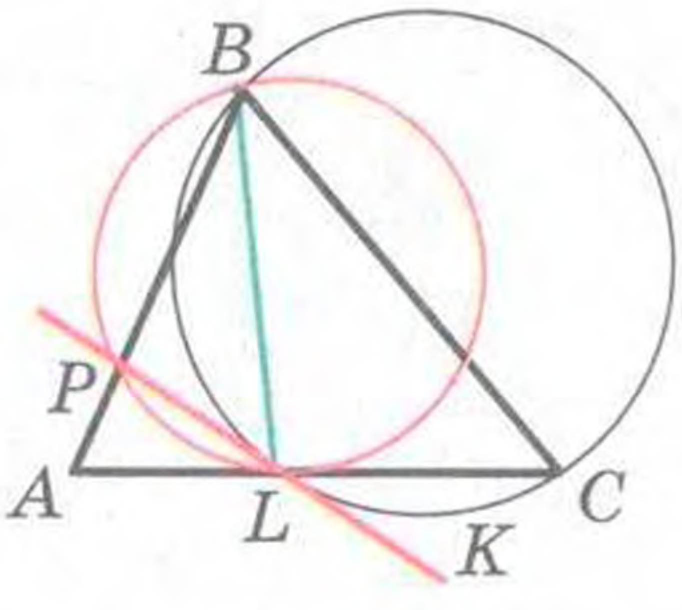


Рис. 12.7

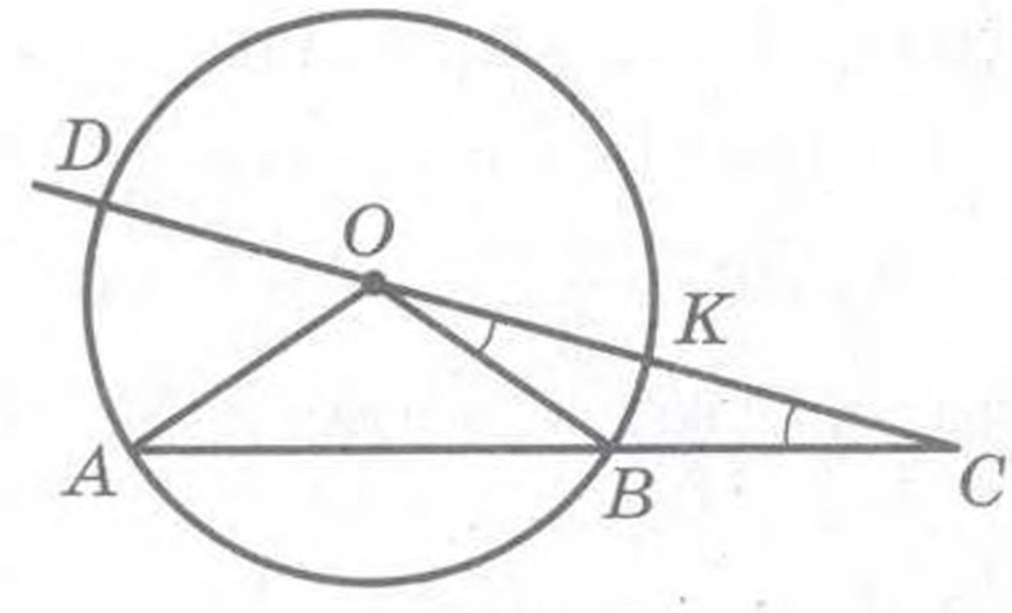


Рис. 12.8

вуючи ключову задачу 3, можна записати $\angle ACD = \frac{1}{2}(\cup DA - \cup KB)$. Тоді $\alpha = \frac{1}{2} \cup DA - \frac{\alpha}{2}$. Звідси $\cup DA = 3\alpha$, тобто $\angle AOD = 3\alpha$.

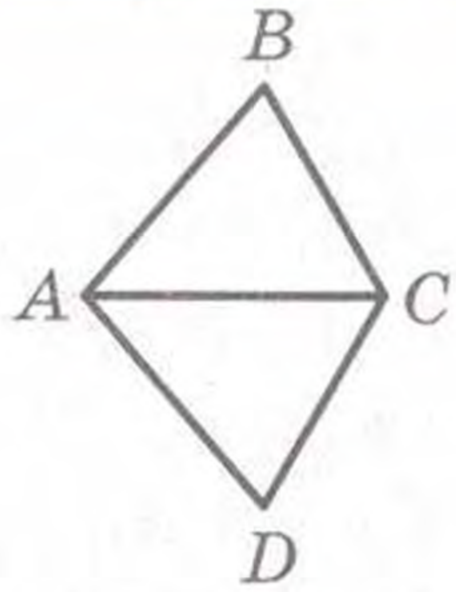


Рис. 12.9

Приклад 4. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle BAD = 100°$, $\angle BCD = 130°$, $AB = AD$ (рис. 12.9). Доведіть, що $AB = AC$.

Розв'язання. Оскільки $\angle BAD = 2(180° - \angle BCD)$ і $AB = AD$, то з урахуванням доведеного в ключовій задачі 5 можна стверджувати, що точки B, C і D лежать на колі з центром у точці A радіуса AB. Отже, AC — радіус цього кола. Звідси $AB = AC$.

ВПРАВИ

12.1.° Кінці хорди ділять коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як 3 : 1. Через один з кінців хорди проведено дотичну до даного кола. Знайдіть гострий кут між цією дотичною і даною хордою.

12.2.° Вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC і CA відповідно в точках C_1, A_1, B_1. Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $\angle A = 38°$, $\angle B = 86°$.

12.3.° Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M (рис. 12.10), $\cup AC = 50°$, $\cup BD = 70°$. Знайдіть $\angle AMC$.

12.4.° Хорди AB і CD кола не перетинаються, а прямі AB і CD перетинаються в точці M (рис. 12.11), $\cup AC = 100°$, $\cup BD = 30°$. Знайдіть $\angle AMC$.

12.5.° Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M так, що $\angle AMC = 40°$. Градусна міра дуги AD на 20° більша за градусну міру дуги BC. Знайдіть $\cup AD$.

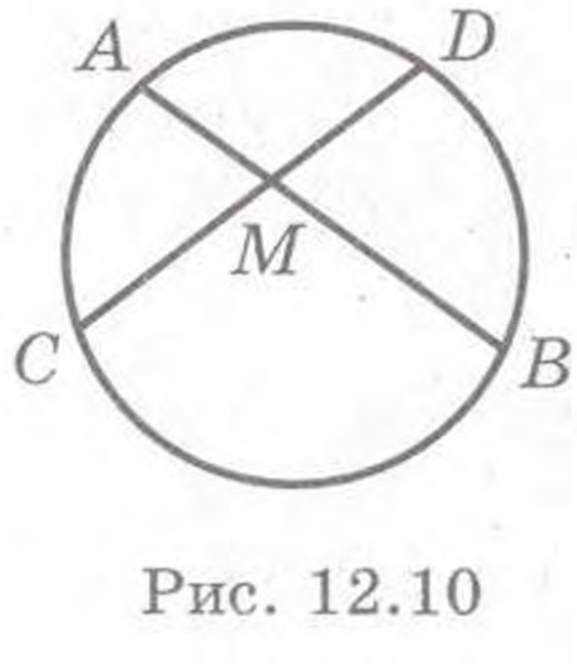


Рис. 12.10

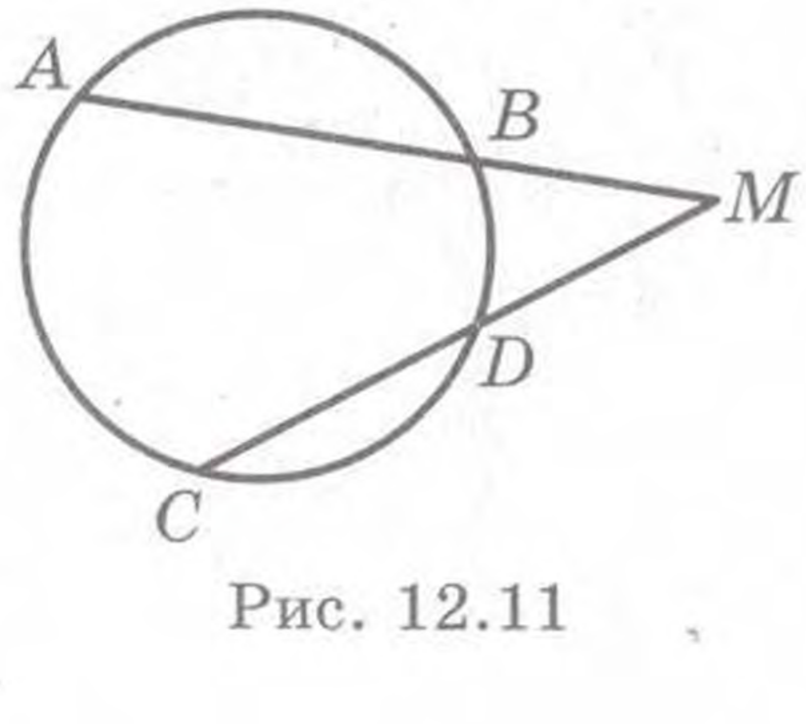


Рис. 12.11

12.6.° Діаметр AB і хорда CD кола перетинаються в точці M. Відомо, що $\angle CMB = 73°$ і $\cup BC = 110°$. Знайдіть градусну міру дуги BD.

12.7.• Доведіть, що коло, яке дотикається до бічних сторін AB і BC рівнобедреного трикутника ABC у точках A і C відповідно, проходить через центр вписаного кола цього трикутника.

12.8.• У прямокутному трикутнику ABC на катеті AC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає гіпотенузу AB у точці E. Через точку E проведено дотичну, яка перетинає катет BC у точці D. Доведіть, що трикутник BDE — рівнобедрений.

12.9.• Через точку A до кола, описаного навколо трикутника ABC, проведено дотичну, яка перетинає пряму BC у точці D. Відрізок AE — бісектриса трикутника ABC. Доведіть, що $DA = DE$.

12.10.• Пряма дотикається до двох кіл з центрами O_1 і O_2 у точках C і D відповідно (рис. 12.12), A і B — точки перетину кіл. Знайдіть кут O_1AO_2, якщо $\angle CAD = \alpha$.

12.11.• До двох кіл, які перетинаються в точках M і K, проведено спільну дотичну, A і B — точки дотику. Доведіть, що $\angle AMB + \angle AKB = 180°$.

12.12.• Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку B проведено пряму, яка перетинає кола в точках C і D. Дотичні до цих кіл, проведені через точки C і D, перетинаються в точці P (рис. 12.13). Знайдіть кут P, якщо $\angle DAC = \alpha$.

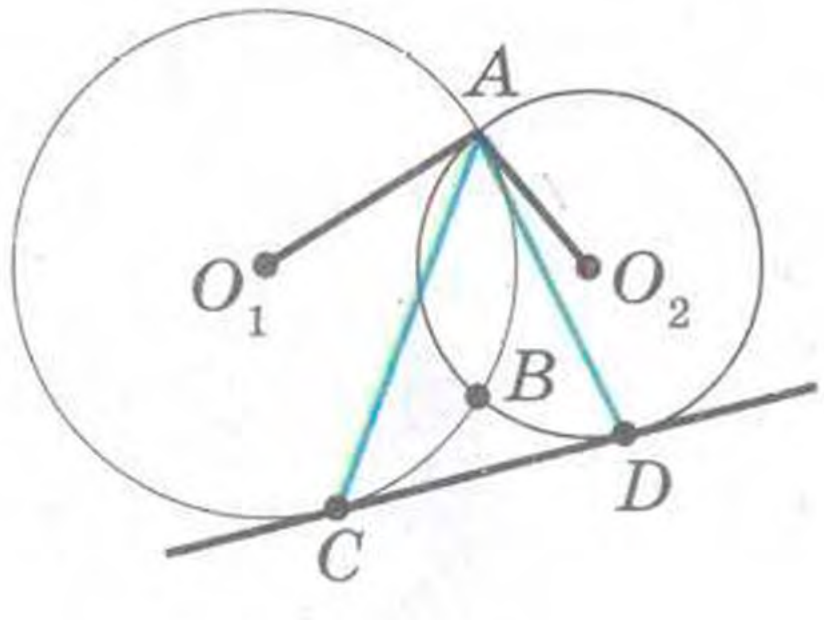


Рис. 12.12

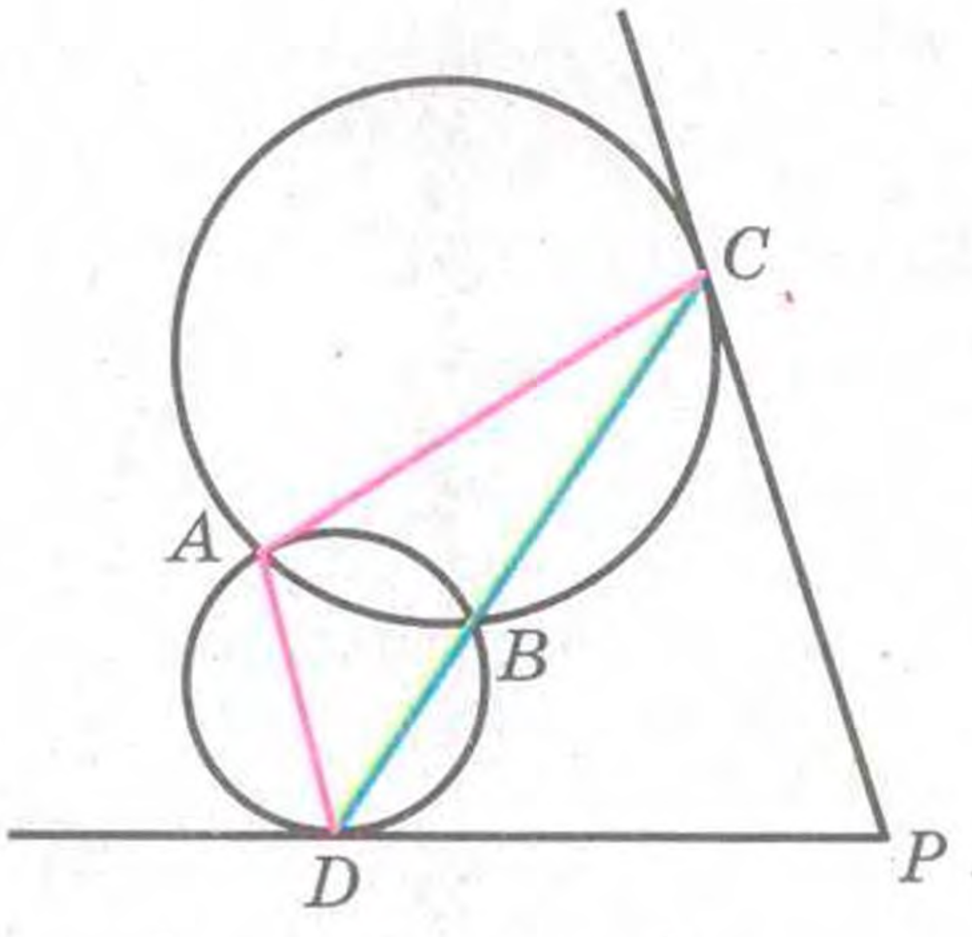


Рис. 12.13

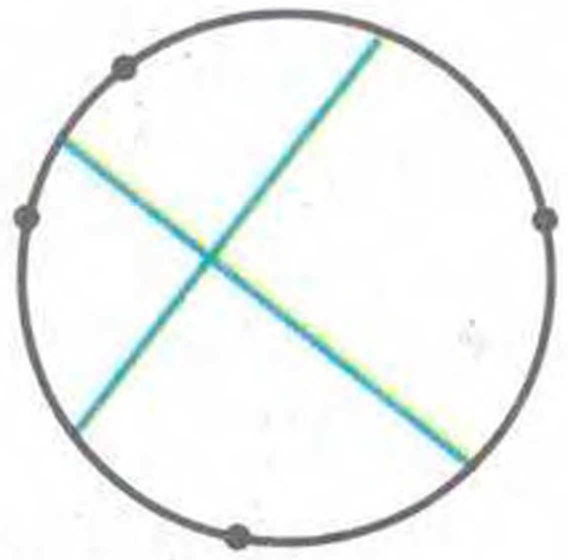


Рис. 12.14

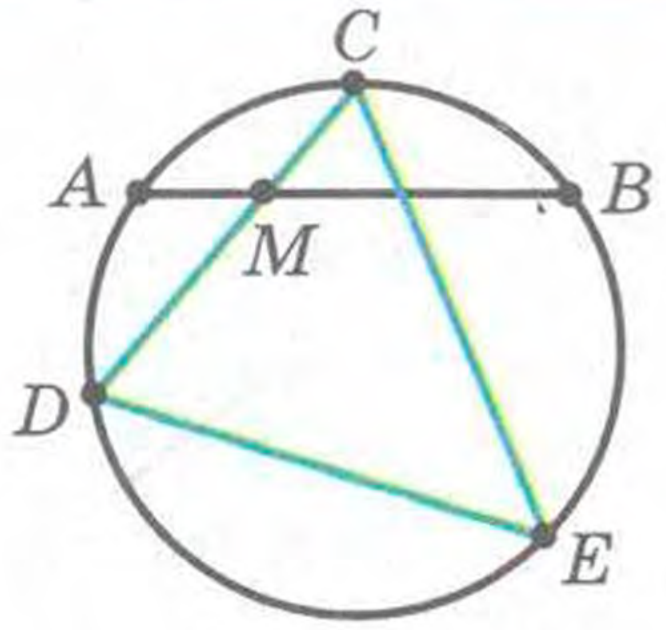


Рис. 12.15

12.13.° На колі позначили чотири точки. Середини утворених дуг сполучили відрізками, як показано на рисунку 12.14. Доведіть, що проведені відрізки перпендикулярні.

12.14.° У колі проведено хорди CD і CE, де точка C — середина дуги AB (рис. 12.15). Знайдіть кут DEC, якщо $\angle AMD = \alpha$.

12.15.° Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині A трикутника ABC, вписаного в коло, паралельна хорді, яка з'єднує середини дуг AB і AC.

12.16.° У колі проведено хорду. На меншій з утворених дуг узято точку і через неї проведено дотичну до кола. Знайдіть на дотичній точку, з якої хорду видно під найбільшим кутом.

12.17.° У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) на бічній стороні AB обрано точку D. Навколо трикутника ADC описано коло. Дотична, проведена до цього кола в точці D, перетинає описане коло трикутника BDC у точці M. Доведіть, що $BM \parallel AC$.

12.18.° Навколо трикутника ABC описано коло з центром O. Коло, яке проходить через точки A, B і O, дотикається до прямої AC у точці A. Доведіть, що $AB = AC$.

12.19.°° Серединний перпендикуляр бісектриси AD трикутника ABC перетинає промінь BC у точці N (рис. 12.16). Доведіть, що пряма NA — дотична до кола, описаного навколо трикутника ABC.

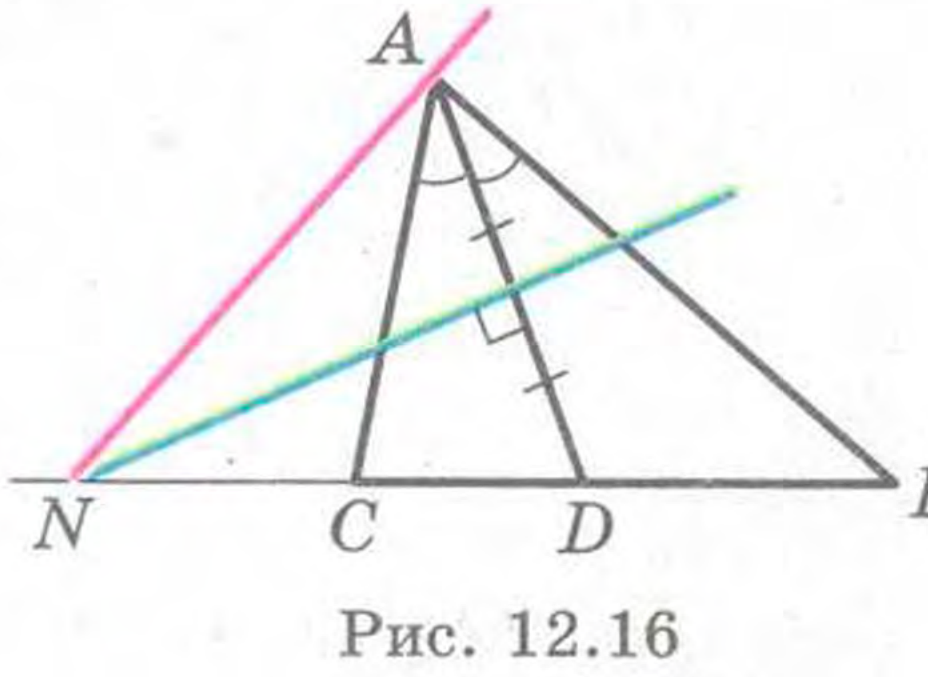


Рис. 12.16

12.20.°° У трикутнику ABC проведено бісектрису AM. Через точки A і M проведено коло, яке перетинає сторони AC і AB у точках K і L відповідно. Доведіть, що коли $KL \parallel CB$, то пряма BC — дотична до кола.

12.21.•• Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, P — друга точка перетину кола, яке проходить через точки A, O, B, з прямою BC (рис. 12.17). Доведіть, що пряма AP дотикається до кола, яке проходить через точки A, O, D.

12.22.•• Дано квадрат $ABCD$. Поза квадратом взято точку E так, що $\angle BAE = 30°$, $\angle BCE = 75°$. Знайдіть $\angle CBE$.

12.23.•• У трикутнику ABC $\angle C = 10°$, $\angle B = 20°$. Поза трикутником узято точку M так, що трикутник CMB — рівносторонній, точки M і A лежать у різних півплощинах відносно прямої BC. Знайдіть кути MAB і MAC.

12.24.•• Дано рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$) і точку M, яка йому не належить, але належить куту ABC. Знайдіть $\angle BAM$, якщо $\angle ABC = 50°$, $\angle BMC = 40°$, $\angle BMA = 10°$.

12.25.•• У трикутнику ABC $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 80°$. У трикутнику взято таку точку K, що трикутник BCK — рівносторонній. Знайдіть $\angle KAB$.

12.26.•• У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) кут ADB у 2 рази менший від кута ACB, $BC = AC = 5$ см. Знайдіть сторону CD.

12.27.•• Точки H і O — відповідно ортоцентр і центр описаного кола трикутника ABC. Нехай точка M — середина дуги ACB. Доведіть, що коли $\angle C = 120°$, то $MH = MO$.

12.28.•• Коло, яке проходить через вершини B і C прямокутного трикутника ABC, перетинає гіпотенузу AB у точці D. Дотичні до цього кола, проведені в точках C і D, перетинаються в точці O. Доведіть, що $OA = OC$.

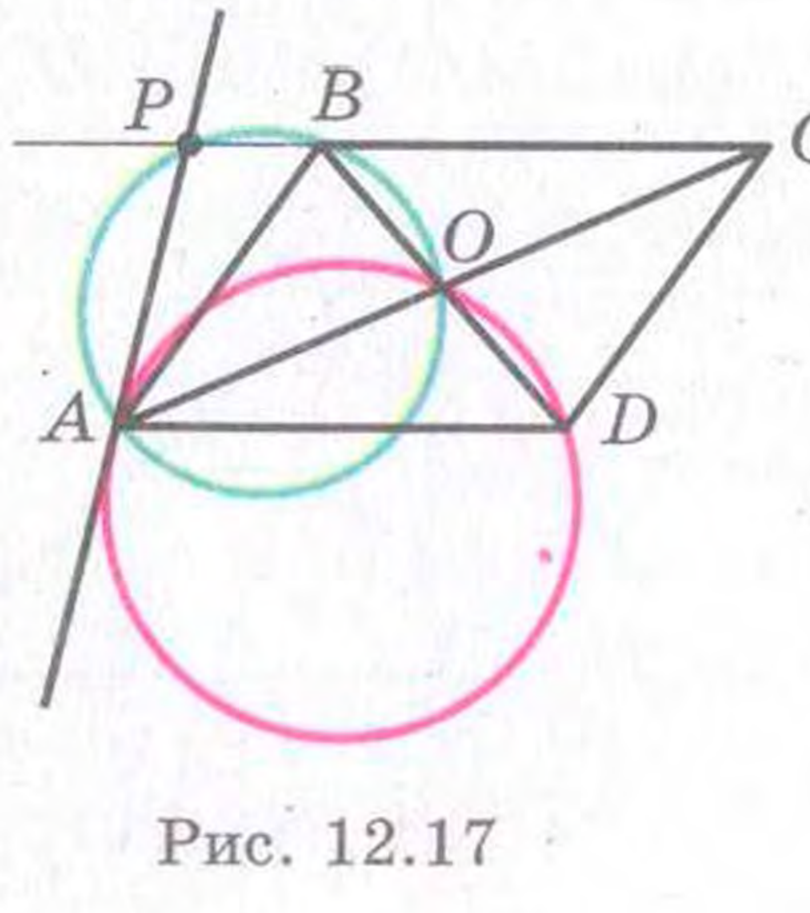


Рис. 12.17

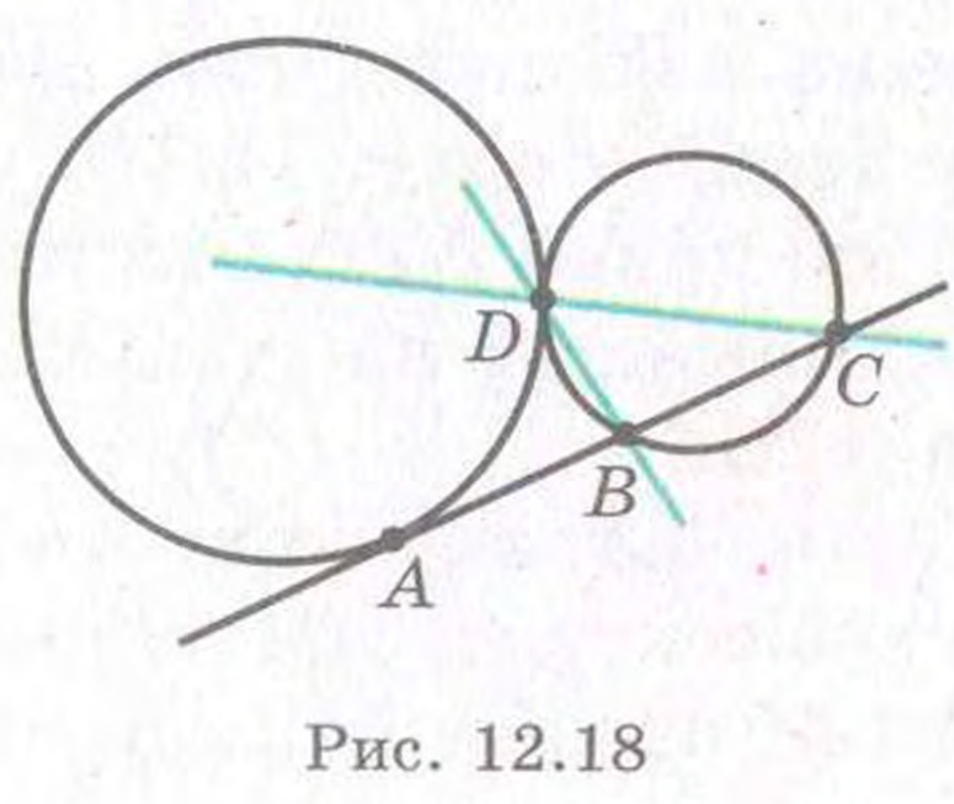


Рис. 12.18

12.29.** Точка M належить квадрату $ABCD$, $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$. Знайдіть кут ABM.

12.30.** У чотирикутнику три тупих кути. Доведіть, що з двох його діагоналей більша та, яку проведено з вершини гострого кута.

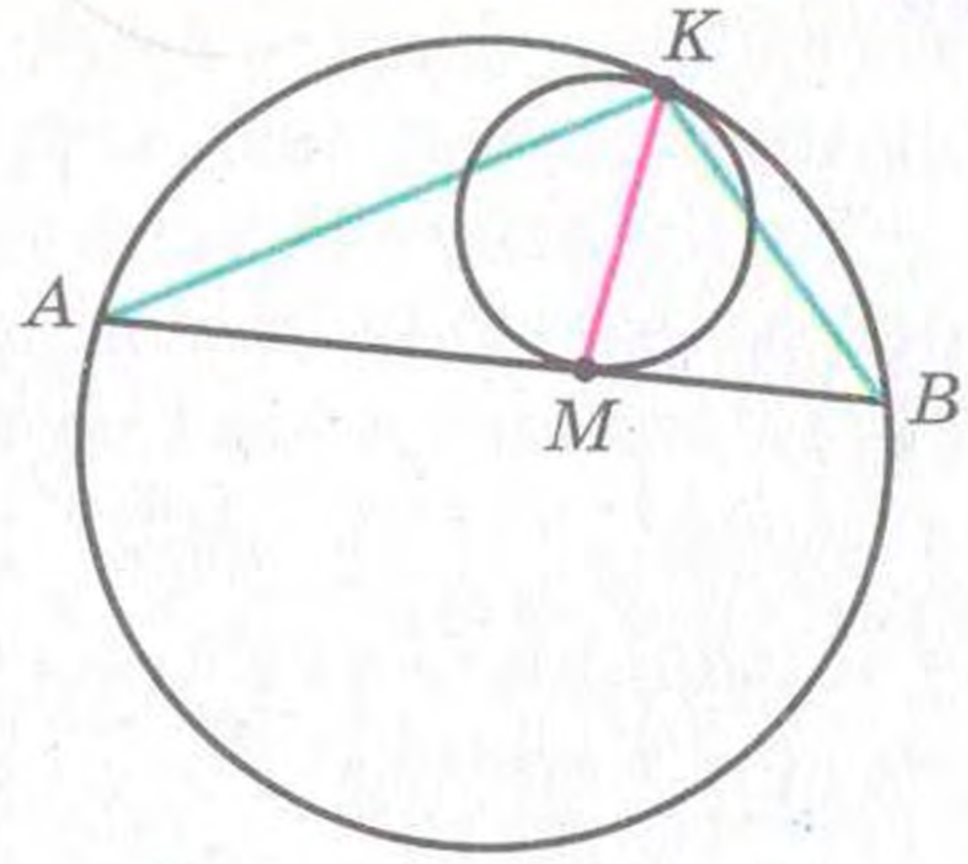


Рис. 12.19

12.31.* Два кола мають зовнішній дотик у точці D. Проведено пряму, яка дотикається до одного кола в точці A, а друге перетинає в точках B і C (рис. 12.18). Доведіть, що точка A рівновіддалена від прямих DB і DC.

12.32 (2.32).* У рівнобедреному трикутнику ABC кут B, протилежний основі, дорівнює $20°$. На стороні AB позначено точку D так, що $BD = AC$. Знайдіть кут ACD.

12.33.* У колі проведено хорду AB. Інше коло дотикається до цієї хорди в точці M і заданого кола в точці K (рис. 12.19). Доведіть, що KM — бісектриса кута AKB.

13. Вписані чотирикутники. Метод допоміжного кола

Означення. **Чотирикутник називають вписаним, якщо існує коло, якому належать усі його вершини.**

На рисунку 13.1 зображено вписаний чотирикутник $ABCD$. У цьому випадку також кажуть, що коло **описане навколо** чотирикутника.

Теорема 13.1. ***Якщо чотирикутник є вписаним, то сума його протилежних кутів дорівнює 180°.***

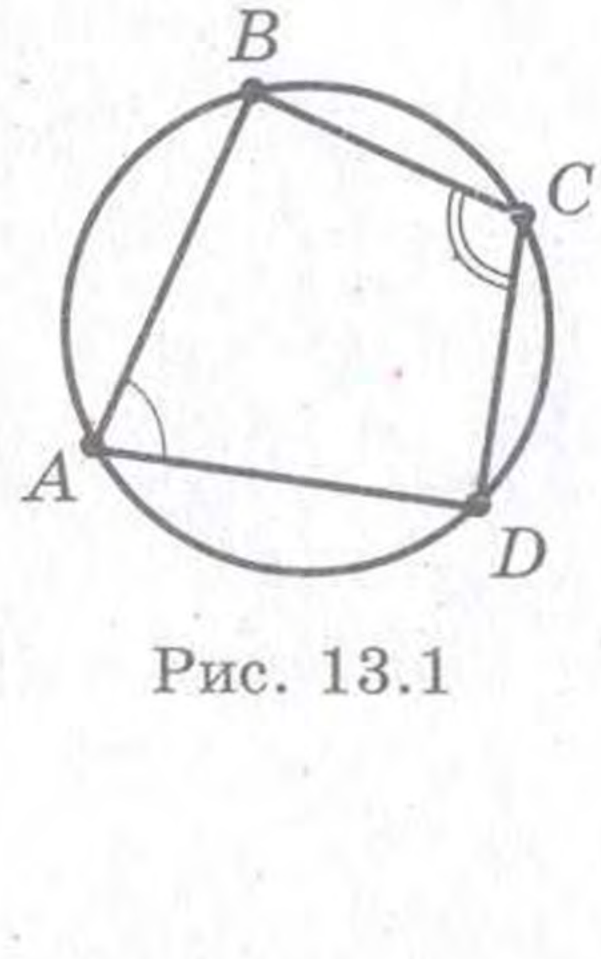


Рис. 13.1

Доведення. Кути A і C — протилежні кути вписаного чотирикутника $ABCD$ (рис. 13.1). Оскільки ці кути вписані, то $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$ і $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$. Але

$\smile BCD + \smile DAB = 360°$. Звідси $\angle A + \angle C = 180°$. Аналогічно можна показати, що $\angle B + \angle D = 180°$. ▲

На відміну від трикутника, не навколо будь-якого чотирикутника можна описати коло. Розпізнавати вписані чотирикутники дозволяє така теорема.

Теорема 13.2 (обернена до теореми 13.1). ***Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює*** **180°*, то він є вписаним.***

Доведення. Розглянемо чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A + \angle C = 180°$. Припустимо, що навколо цього чотирикутника не можна описати коло. Опишемо коло навколо трикутника ABD. За припущенням точка C не належить цьому колу. Тоді можливі два випадки:

1) точка C лежить поза описаним колом трикутника ABD (рис. 13.2);
2) точка C лежить усередині описаного кола трикутника ABD (рис. 13.3).

На рисунку 13.2 сторона BC перетинає коло в точці C_1. Чотирикутник ABC_1D — вписаний. Тоді за теоремою 13.1 $\angle A + \angle BC_1D = 180°$. Але за умовою $\angle A + \angle C = 180°$. Звідси $\angle BC_1D = \angle C$. Проте ця рівність суперечлива, оскільки за властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle BC_1D = \angle C + \angle CDC_1$. Отже, точка C не може лежати поза колом.

Для другого випадку (рис. 13.3) проведіть доведення самостійно. ▲

Теорему 13.2 можна вважати ознакою належності чотирьох точок одному колу.

Теореми 13.1 і 13.2 можна сформулювати у вигляді однієї теореми:

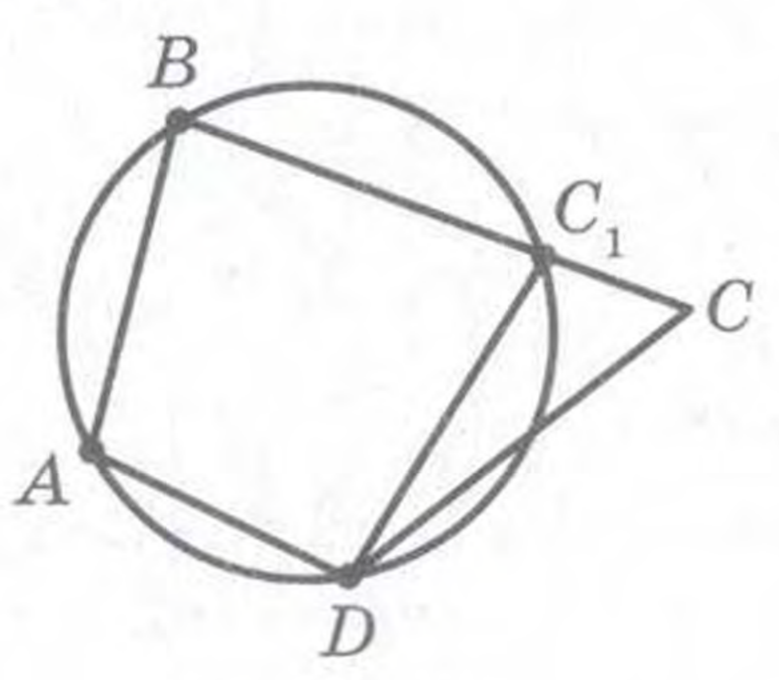


Рис. 13.2

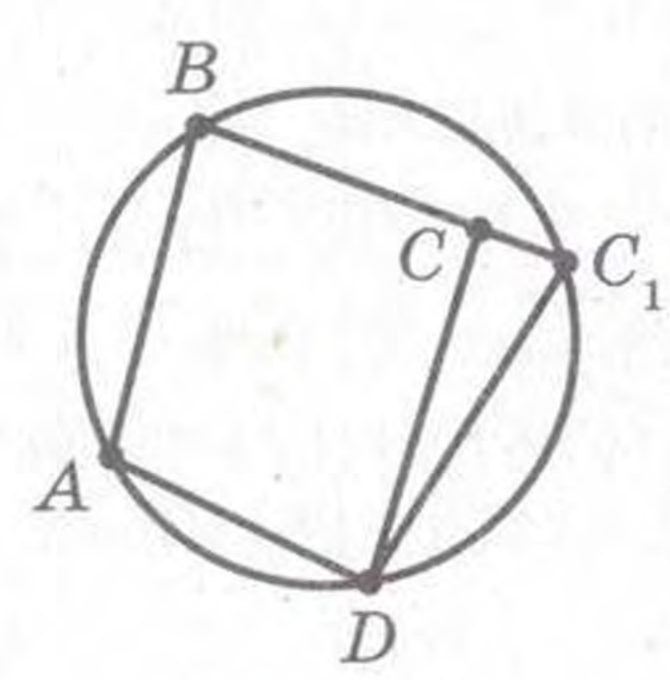


Рис. 13.3

для того щоб чотирикутник був вписаним, необхідно і достатньо, щоб сума його протилежних кутів дорівнювала 180°.

Якщо чотирикутник є вписаним, то існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин (центр описаного кола). Щоб знайти цю точку, достатньо знайти точку перетину серединних перпендикулярів двох сусідніх сторін чотирикутника.

Задача (ознака належності чотирьох точок одному колу). *Точки A, M, N, B такі, що $\angle AMB = \angle ANB$, причому точки M і N лежать в одній півплощині відносно прямої AB. Доведіть, що точки A, M, N, B лежать на одному колі.*

Розв'язання. Нехай $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$. Навколо трикутника AMB опишемо коло (рис. 13.4). Нехай C — довільна точка кола, яка не належить дузі AMB. Тоді чотирикутник $ACBM$ — вписаний. Звідси $\angle C = 180° - \alpha$. Маємо: $\angle C + \angle N = 180°$, тобто чотирикутник $ACBN$ — також вписаний. Оскільки навколо трикутника ABC можна описати тільки одне коло, то цьому колу належать як точка M, так і точка N.

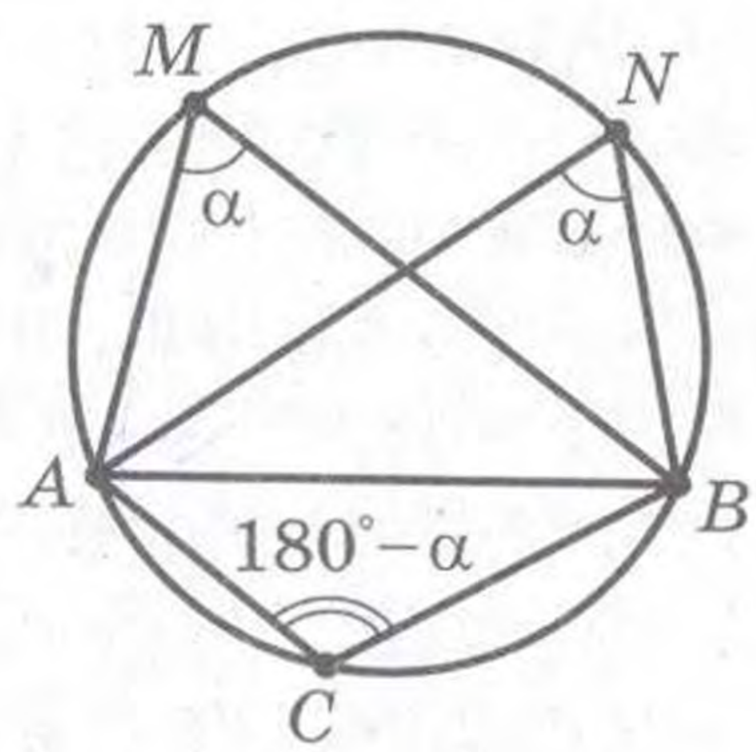


Рис. 13.4

Якщо під час розв'язування задачі вдалося довести, що деякі чотири точки лежать на одному колі, то цим ми отримуємо можливість використати властивості кола і його елементів. Тому пошук такого допоміжного кола є красивим і ефективним прийомом для розв'язування цілої низки задач. Продемонструємо це на прикладах.

Приклад 1. З довільної точки M катета AC прямокутного трикутника ABC опущено перпендикуляр MK на гіпотенузу AB. Доведіть, що $\angle MKC = \angle MBC$.

Розв'язання. Маємо: $\angle BCA = 90°$, $\angle MKB = 90°$ (рис. 13.5), тоді $\angle BCA + \angle MKB = 180°$. Отже, навколо чотирикутника $CBKM$ можна описати

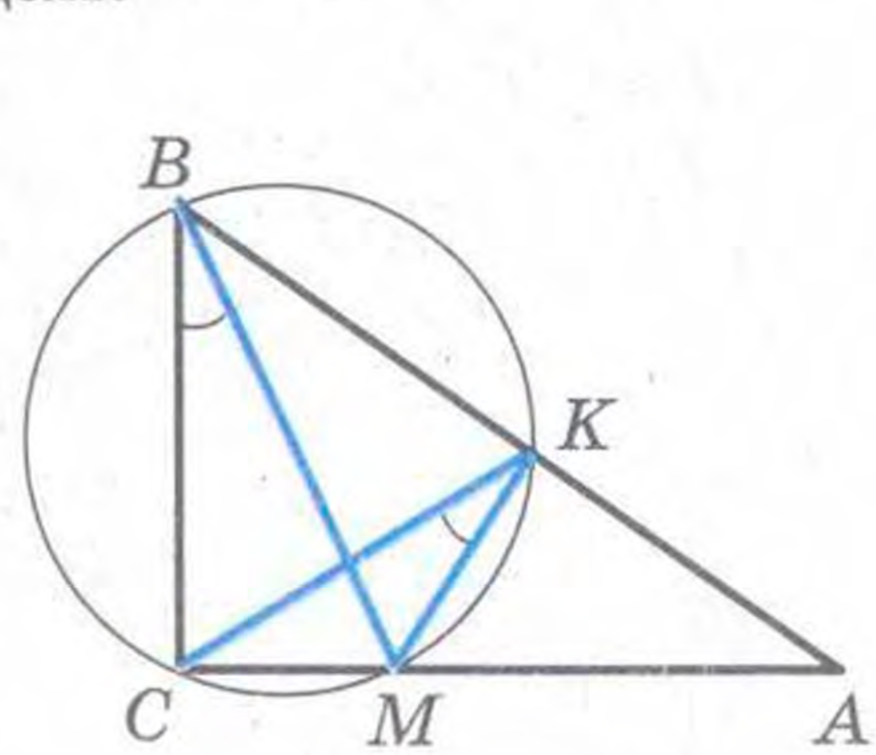


Рис. 13.5

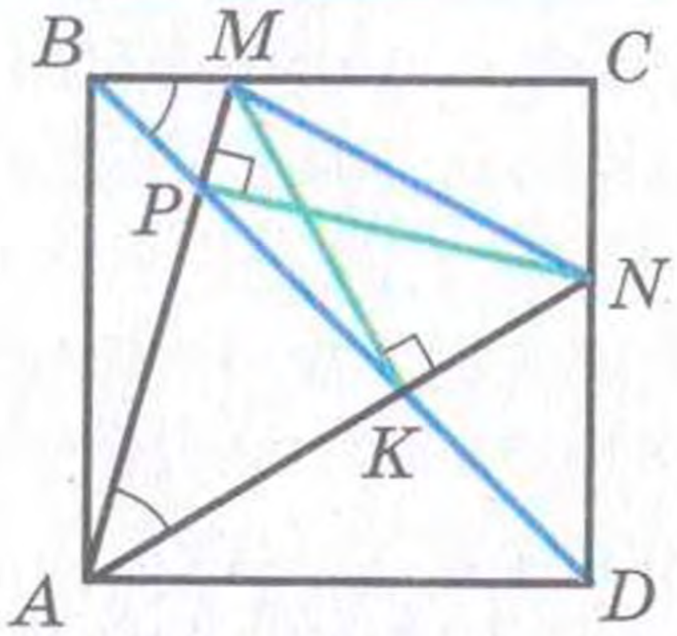


Рис. 13.6

коло. Кути MKC і MBC є вписаними, які спираються на одну дугу CM. Звідси $\angle MKC = \angle MBC$.

Приклад 2. На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ узято точки M і N так, що $\angle MAN = 45°$. За допомогою лише лінійки опустіть перпендикуляр з точки A на пряму MN.

Розв'язання. Проведемо діагональ BD. Вона перетинає відрізки AN і AM у точках K і P відповідно (рис. 13.6).

Маємо: $\angle MBK = \angle MAK = 45°$. Отже, точки A, B, M і K лежать на одному колі. Звідси $\angle ABM + \angle AKM = 180°$.

Оскільки $\angle ABM = 90°$, то $\angle AKM = 90°$. Отже, відрізок MK — висота трикутника AMN. Аналогічно відрізок NP — висота трикутника AMN.

Отже, пряма, яка проходить через точку A і точку перетину відрізків MK і NP (ортоцентр трикутника AMN), перпендикулярна до прямої MN.

Теорема 13.3. ***Основи перпендикулярів, проведених до сторін трикутника (або їх продовжень) з довільної точки описаного кола, лежать на одній прямій.***

Цю пряму називають **прямою Симсона**[1].

Доведення. Нехай P — довільна точка описаного кола трикутника ABC. З точки P опустимо перпендикуляри на прямі, які містять сторони трикутника.

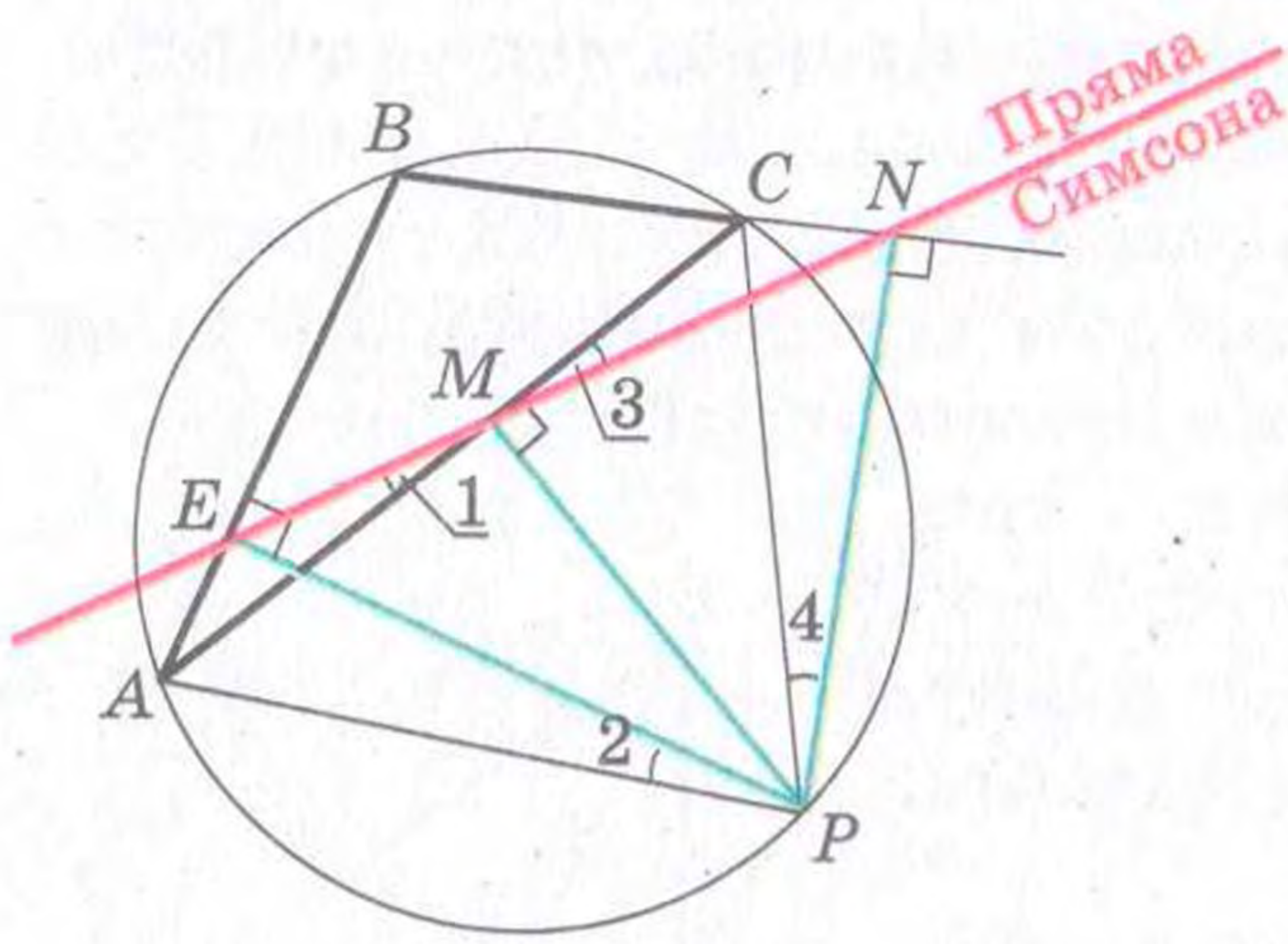


Рис. 13.7

На рисунку 13.7 зображено випадок, коли основи двох перпендикулярів (точки E і M) належать сторонам трикутника, а основа третього

[1] *Роберт Симсон* (1687–1768) — шотландський математик, професор. Працював в університеті м. Глазго.

перпендикуляра (точка N) належить продовженню сторони трикутника.

Оскільки $\angle AEP = \angle AMP = 90°$, то навколо чотирикутника $AEMP$ можна описати коло (див. ключову задачу цього пункту). Звідси кути 1 і 2 рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу.

Оскільки $\angle PMC + \angle PNC = 180°$, то навколо чотирикутника $PMCN$ можна описати коло. Звідси кути 3 і 4 рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу.

Оскільки $\angle PEB + \angle BNP = 180°$, то навколо чотирикутника $PEBN$ можна описати коло. Звідси $\angle 4 + \angle EPC + \angle B = 180°$.

Оскільки чотирикутник $ABCP$ — вписаний, то $\angle 2 + \angle EPC + \angle B = 180°$. Отримуємо, що $\angle 2 = \angle 4$, а отже, $\angle 1 = \angle 3$.

Оскільки кут AMC — розгорнутий, то $\angle 1 + \angle EMC = 180°$. Тоді $\angle 3 + \angle EMC = 180°$. А це означає, що кут EMN — також розгорнутий, тобто точки E, M і N лежать на одній прямій.

Зауважимо, що коли точка P і, наприклад, вершина B — кінці діаметра, то прямою Симсона є пряма AC (рис. 13.8).

На рисунку 13.9 зображено випадок, коли основи всіх трьох перпендикулярів, опущених з точки P на прямі, що містять сторони трикутника, не належать сторонам. Для цього випадку проведіть доведення самостійно. ▲

Точки, які належать одній прямій, називають **колінеарними**. Дві точки колінеарні завжди.

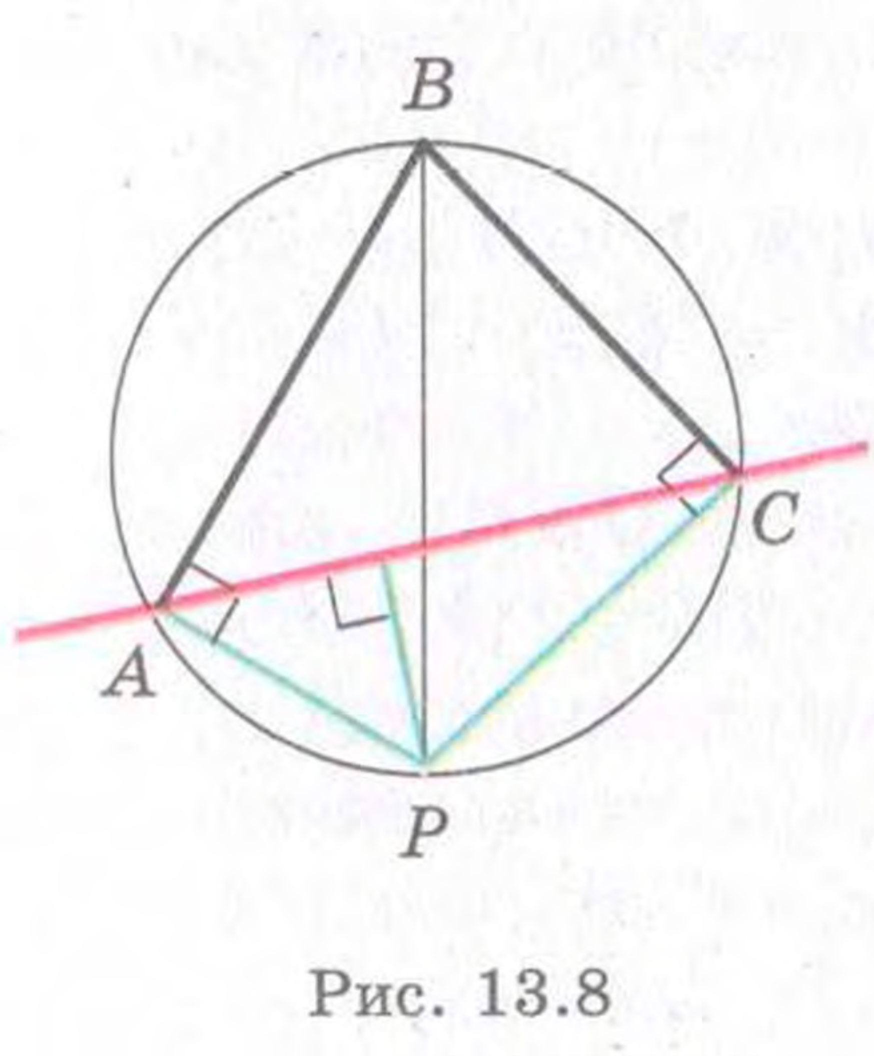


Рис. 13.8

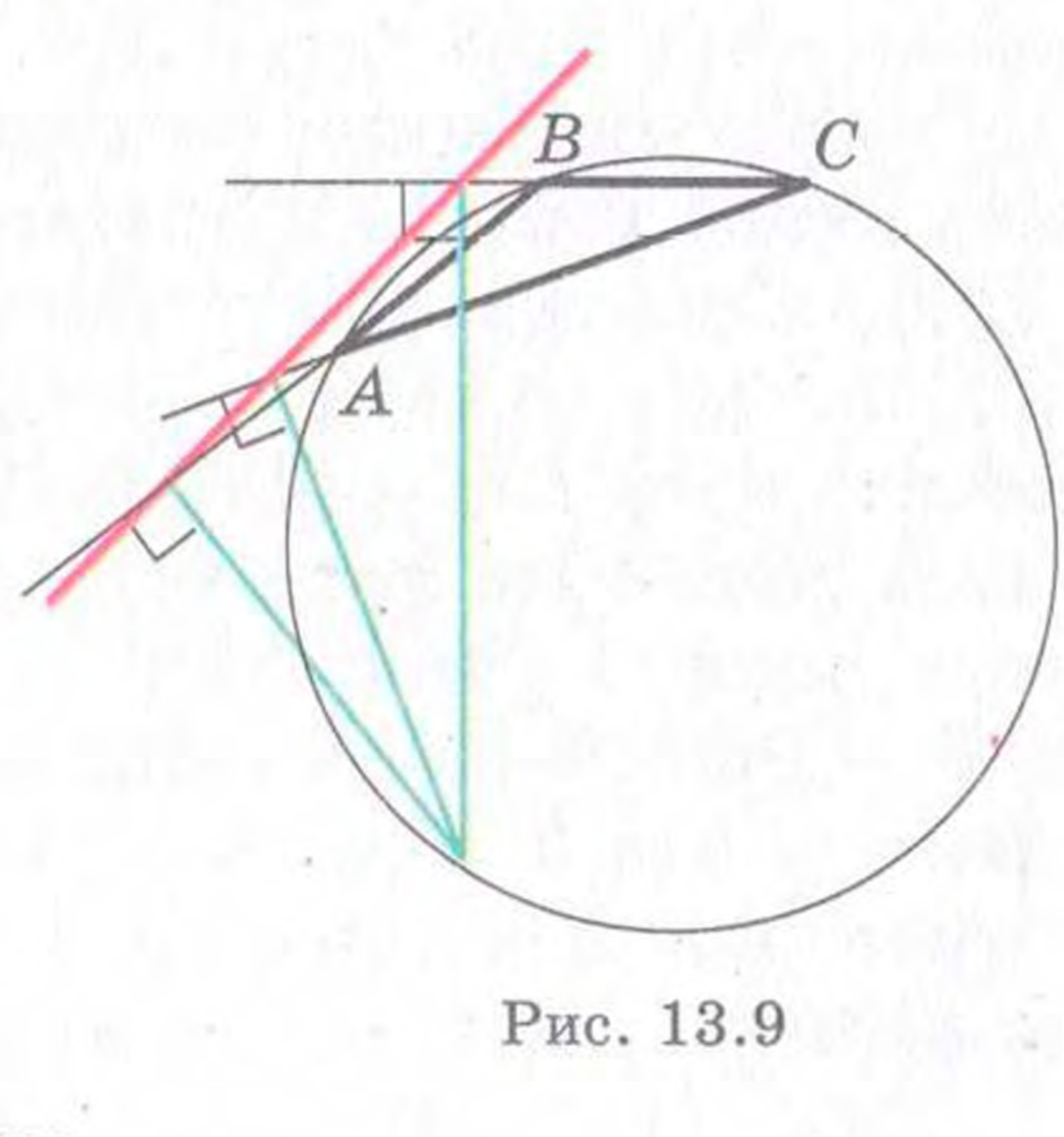


Рис. 13.9

Доведена теорема вказує красивий критерій колінеарності трьох точок.

Справедлива й теорема, обернена до теореми 13.3: ***якщо основи перпендикулярів, опущених з точки P на прямі, що містять сторони трикутника, лежать на одній прямій, то точка P належить описаному колу даного трикутника.***

?

1. Який чотирикутник називають вписаним?
2. У якому випадку кажуть, що коло описане навколо чотирикутника?
3. Яку властивість мають кути вписаного чотирикутника?
4. За якої умови чотирикутник є вписаним?
5. Яку пряму називають прямою Симсона?
6. Які точки називають колінеарними?

ВПРАВИ

13.1.° Доведіть, що коло можна описати навколо:

1) будь-якого прямокутника;

2) будь-якої рівнобічної трапеції.

13.2.° Чи можна навколо паралелограма, який не є прямокутником, описати коло?

13.3.° У прямокутнику $ABCD$ $AB = 12$ см, $\angle CAD = 30°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного прямокутника.

13.4.° Доведіть, що коли навколо ромба можна описати коло, то цей ромб є квадратом.

13.5.° Сторона AD чотирикутника $ABCD$ є діаметром кола, описаного навколо нього, $\angle ABC = 108°$, $\angle BCD = 132°$. Знайдіть кути BAD, ADC, CAD, BDA.

13.6.° Знайдіть кути чотирикутника $MNKP$, вписаного в коло, якщо $\angle MKP = 58°$, $\angle MPN = 34°$, $\angle KMP = 16°$.

13.7.° Рівнобічну трапецію вписано в коло, центр якого належить одній з основ. Кут між діагоналями трапеції, протилежний її бічній стороні, дорівнює 56°. Знайдіть кути трапеції.

13.8.° Висоти AA_1 і CC_1 гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що: 1) точки H, C_1, B, A_1 лежать на одному колі; 2) точки A, C_1, A_1, C лежать на одному колі.

13.9.• З довільної точки O, яка належить гострому куту A, але не належить його сторонам, опущено перпендикуляри OB і OC на його сторони. Доведіть, що $\angle OAB = \angle OCB$.

13.10.• Центр кола, описаного навколо трапеції, належить більшій основі, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.

13.11.• З точки M, яка належить куту AOB, але не належить його сторонам, опущено перпендикуляри MM_1 і MM_2 на прямі OA і OB. Доведіть, що $M_1M_2 \leqslant OM$.

13.12.• У трикутнику ABC проведено медіани AA_1 і CC_1. Відомо, що $\angle AA_1C = \angle CC_1A$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

13.13.• З точки O, яка належить гострокутному трикутнику ABC, на сторони AB, BC і CA опущено перпендикуляри OO_1, OO_2, OO_3. Доведіть, що $\angle AOC = \angle O_3O_1A + \angle O_3O_2C$.

13.14.• Знайдіть геометричне місце основ перпендикулярів, опущених з даної точки A на прямі, що проходять через дану точку B.

13.15.• У гострокутному трикутнику ABC кут B дорівнює 60°, відрізки AM і CN — його висоти, точка Q — середина сторони AC. Доведіть, що трикутник MNQ — рівносторонній.

13.16.• У прямокутному трикутнику ABC кут A дорівнює 30°. Точка M — середина гіпотенузи AB, точка J — центр вписаного кола трикутника ABC. Знайдіть кут JMC.

13.17.• Вписане коло з центром O трикутника ABC дотикається до сторін AB і AC у точках M і N відповідно. Пряма MN перетинає бісектрису кута B у точці P (рис. 13.10). Доведіть, що точки N, O, C і P лежать на одному колі.

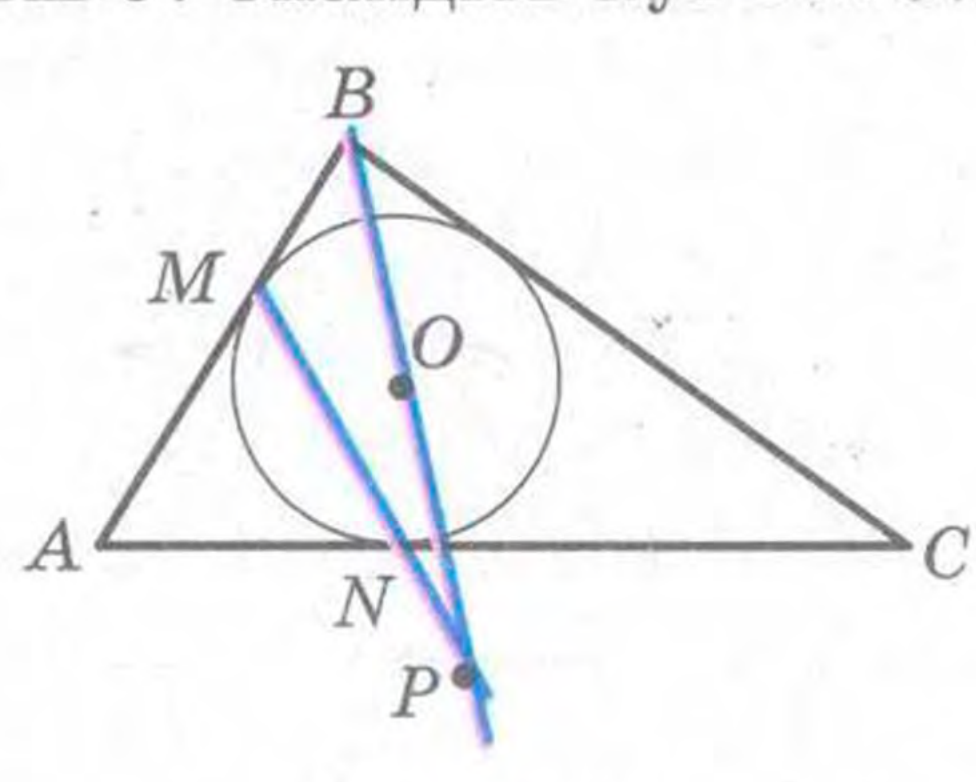


Рис. 13.10

13.18.• Опуклий чотирикутник розрізано прямими на 25 вписа-

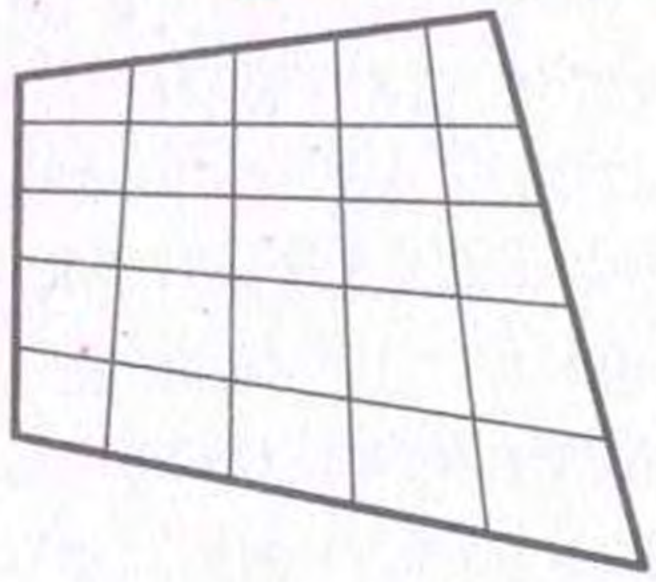


Рис. 13.11

них чотирикутників (рис. 13.11). Доведіть, що даний чотирикутник також вписаний.

13.19.$^{\bullet}$ Два кола перетинаються в точках P і Q. Через точку A першого кола проведено прямі AP і AQ, які перетинають друге коло в точках B і C відповідно. Доведіть, що дотична в точці A до першого кола паралельна прямій BC.

13.20.$^{\bullet}$ У прямокутник $ABCD$ вписано рівносторонній трикутник APK так, що вершина K лежить на стороні BC, а вершина P — на стороні CD. Відрізок KH — висота цього трикутника. Доведіть, що трикутник BHC — рівносторонній.

13.21.$^{\bullet\bullet}$ У гострокутному трикутнику ABC відрізки CC_1 і AA_1 — висоти. Доведіть, що серединний перпендикуляр відрізка C_1A_1 проходить через середину сторони AC.

13.22.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC відрізки AA_1 і CC_1 — висоти. Відновіть трикутник ABC за точками A_1, C_1 і прямою, яка містить сторону AC.

13.23.$^{\bullet\bullet}$ Діагональ трапеції, вписаної в коло, дорівнює d. Бічну сторону видно з центра описаного кола під кутом 120°. Знайдіть середню лінію трапеції.

13.24.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що висоти AH_1, BH_2, CH_3 гострокутного трикутника ABC ділять навпіл кути трикутника $H_1H_2H_3$.

13.25.$^{\bullet\bullet}$ Рівносторонні трикутники ABC і MNP розміщено так, що вершина B лежить на стороні MN, а вершина P — на стороні AC (рис. 13.12). Доведіть, що $AM \parallel NC$.

13.26.$^{\bullet\bullet}$ Рівні рівносторонні трикутники ABC і CDE розміщено так, як показано на рисунку 13.13. Точки K, M

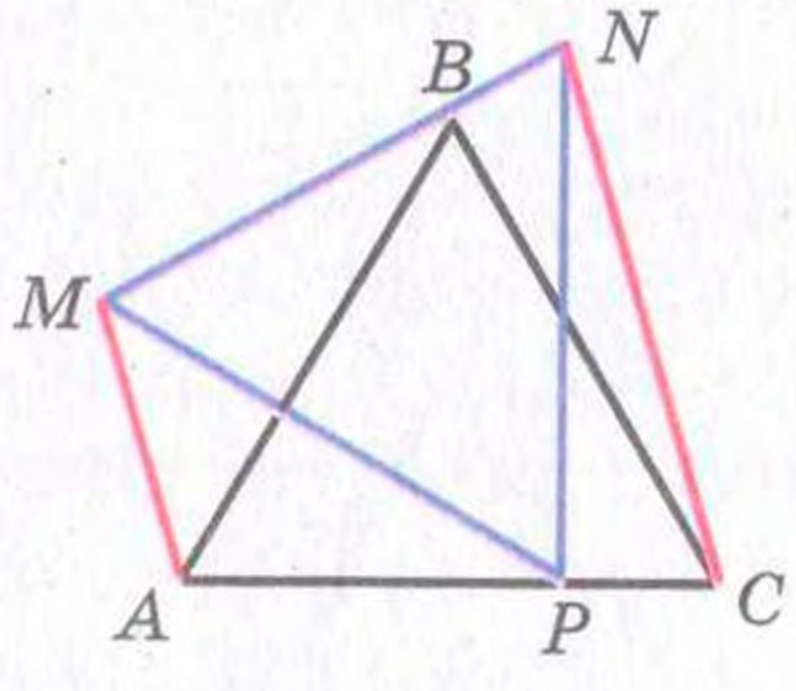


Рис. 13.12

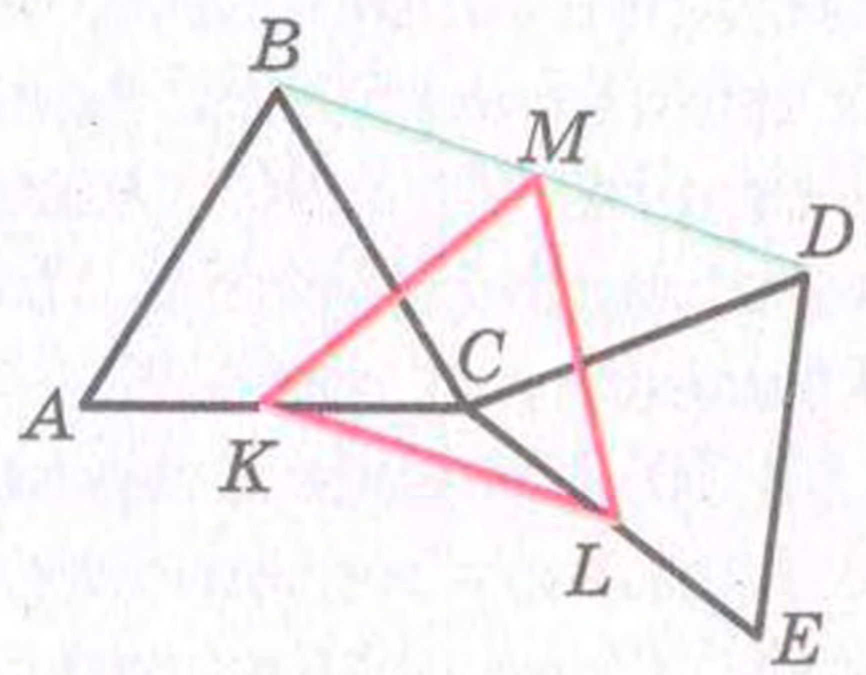


Рис. 13.13

і L — середини відрізків AC, BD і CE відповідно. Доведіть, що трикутник KML — рівносторонній.

13.27.** З довільної точки M, яка належить гострому куту A, але не належить його сторонам, опущено перпендикуляри MP і MQ на його сторони. З точки A опущено перпендикуляр AK на відрізок PQ. Доведіть, що $\angle PAK = \angle MAQ$.

13.28.** У трикутнику ABC ($AC < BC$) проведено медіану CD. Відомо, що $\angle DCA + \angle DBC = 90°$. Доведіть, що $\angle ACB = 90°$.

13.29.** Коло з центром у точці O, яка належить стороні AC гострокутного трикутника ABC, дотикається до сторін AB і BC у точках M і N відповідно. Відрізок BH — висота трикутника ABC. Доведіть, що $\angle MHB = \angle BHN$.

13.30.* Висоти AA_1 і BB_1 гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Точки X і Y — середини відрізків AB і CH відповідно. Доведіть, що $XY \perp A_1B_1$.

13.31.* У трикутнику ABC $\angle BAC = 50°$, $\angle BCA = 70°$. На сторонах AB і BC відповідно взято точки D і F так, що $\angle DCA = \angle FAC = 30°$. Знайдіть величину кута CDF.

13.32.* Бісектриси BK і CM трикутника ABC перетинаються в точці O, $\angle A = 60°$. Доведіть, що $OK = OM$.

13.33.* Бісектриси MA і KB трикутника MNK перетинаються в точці O, точки A, N, B і O лежать на одному колі. Знайдіть $\angle N$.

13.34.* Поза прямокутним трикутником ABC на його гіпотенузі AB побудовано квадрат $ABFD$. Доведіть, що $\angle ACO = \angle OCB$, де O — точка перетину діагоналей квадрата.

13.35.* Вершини A і B трикутника ABC з прямим кутом C ковзають по сторонах прямого кута з вершиною P (рис. 13.14). Доведіть, що точка C при цьому переміщується по відрізку.

13.36* **(2.34).** У рівнобедреному трикутнику ABC кут A дорівнює $100°$. Відрізок BD — бісектриса трикутника. Доведіть, що $BD + AD = BC$.

13.37.* Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O. Точки K і M — середини відповідно відрізків BC і OD. Знайдіть кут AMK.

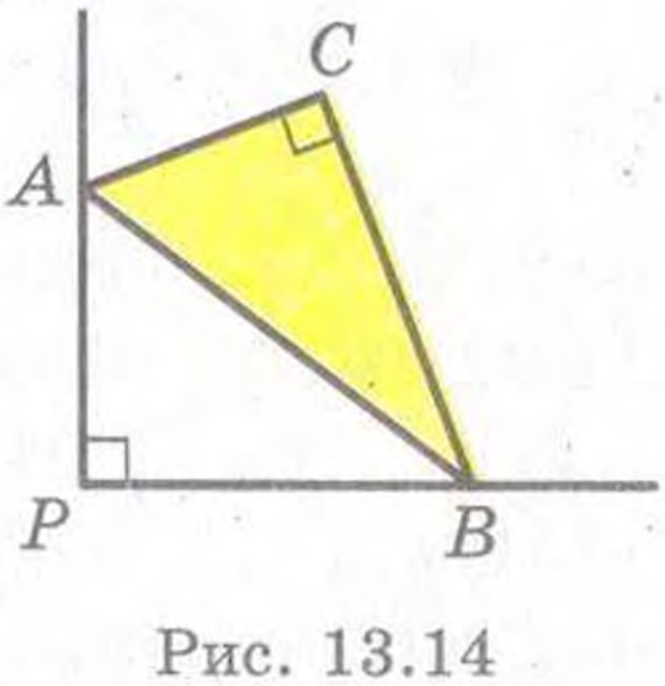


Рис. 13.14

13.38.* Дано квадрат $ABCD$. Точки P і Q лежать відповідно на сторонах AB і BC, причому $BP = BQ$. Нехай точка H — основа перпендикуляра, опущеного з точки B на відрізок PC. Знайдіть кут DHQ.

13.39.* На медіані BM трикутника ABC позначено точку K так, що $\angle MKC = \angle BCM$. Доведіть, що $\angle AKM = \angle BAM$.

14. Описані чотирикутники

Означення. Чотирикутник називають описаним, якщо існує коло, яке дотикається до всіх його сторін.

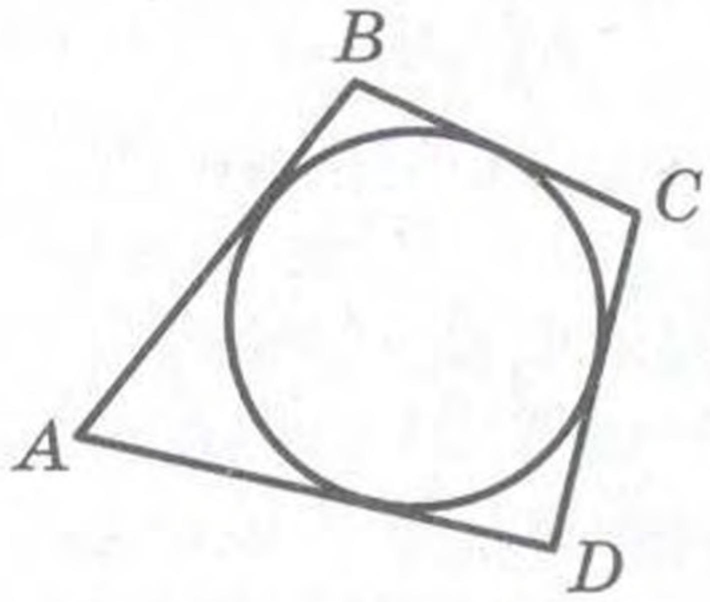


Рис. 14.1

На рисунку 14.1 зображено описаний чотирикутник $ABCD$. У цьому випадку також кажуть, що коло **вписане** в чотирикутник.

Теорема 14.1. ***Якщо чотирикутник є описаним, то суми його протилежних сторін рівні.***

Доведення. На рисунку 14.2 у чотирикутник $ABCD$ вписано коло. Точки M, N, P, K є точками дотику кола до сторін чотирикутника.

За властивістю дотичних $AK = AM = a$, $BM = BN = b$, $CN = CP = c$, $DP = DK = d$. Звідси

$$AB + CD = a + b + c + d,$$
$$BC + AD = b + c + a + d.$$

Отже, $AB + CD = BC + AD$. ▲

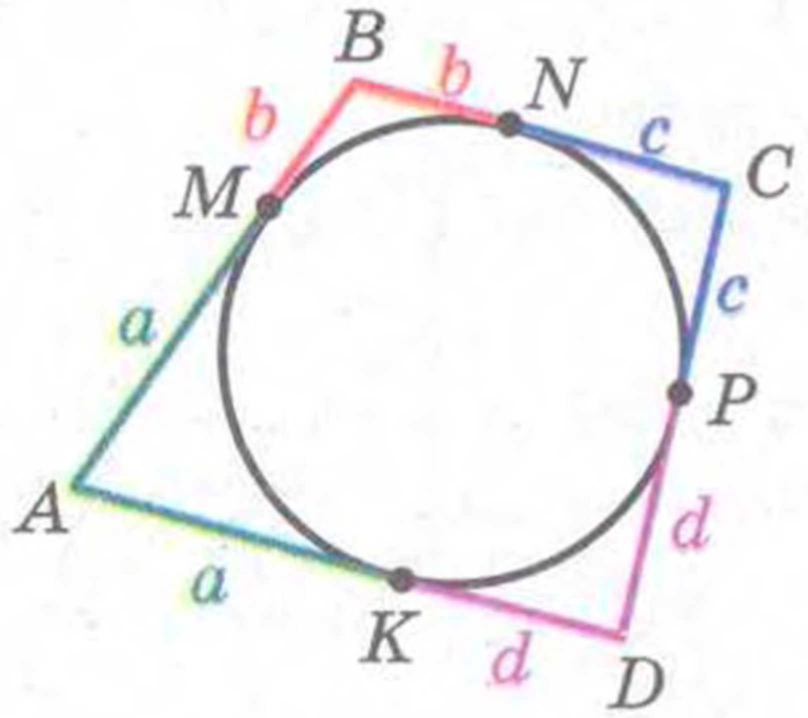


Рис. 14.2

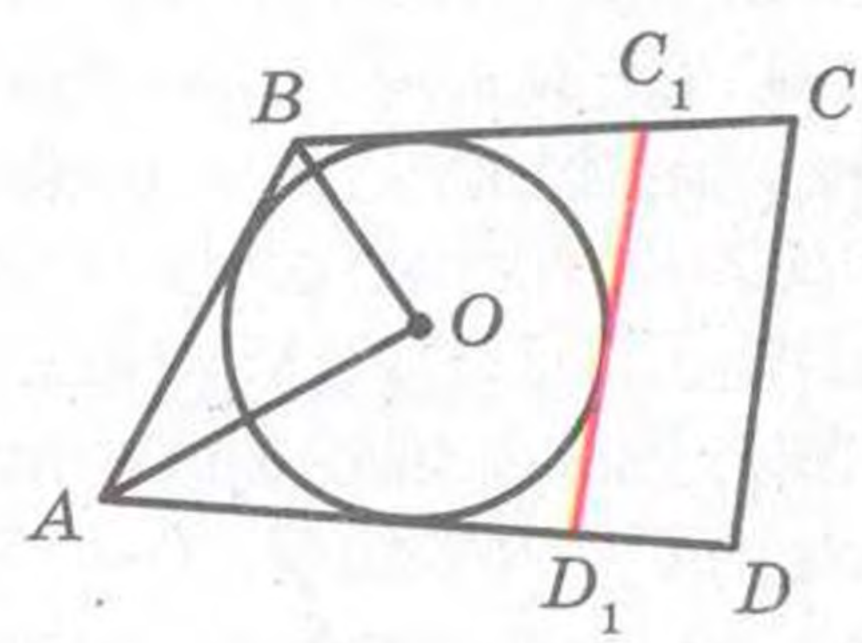


Рис. 14.3

На відміну від трикутника, не в будь-який чотирикутник можна вписати коло. Розпізнавати описані чотирикутники дозволяє така теорема.

Теорема 14.2 (обернена до теореми 14.1). ***Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то цей чотирикутник є описаним.***

Доведення. Розглянемо опуклий чотирикутник $ABCD$, у якому $AB + CD = BC + AD$.

Нехай бісектриси кутів A і B перетинаються в точці O (рис. 14.3). Тоді точка O рівновіддалена від сторін AB, BC і AD. Отже, існує коло з центром у точці O, яке дотикається до цих трьох сторін.

Припустимо, що це коло не дотикається до сторони CD. Тоді можливі два випадки:

1) сторона CD не має спільних точок з побудованим колом;
2) сторона CD має дві спільні точки з побудованим колом.

Проведемо дотичну C_1D_1 паралельно стороні CD (рис. 14.3). Чотирикутник ABC_1D_1 — описаний. Тоді за теоремою 14.1

$$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1. \qquad (1)$$

Проте за умовою

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (2)$$

Віднімемо від рівності (2) рівність (1):

$$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1.$$

Звідси

$$CD - C_1D_1 = C_1C + D_1D;$$
$$CD = C_1C + D_1D + C_1D_1.$$

Ця рівність суперечить твердженню, доведеному в ключовій задачі 2 пункту 4.

Другий випадок розгляньте самостійно. ▲

Теореми 14.1 і 14.2 можна сформулювати у вигляді однієї теореми:

для того щоб чотирикутник був описаним, необхідно і достатньо, щоб суми його протилежних сторін були рівними.

Якщо чотирикутник є описаним, то існує точка, рівновіддалена від усіх його сторін (центр вписаного кола). Щоб знайти цю точку, достатньо знайти точку перетину бісектрис двох сусідніх кутів чотирикутника.

Приклад 1. На бічних сторонах трапеції, у яку можна вписати коло, як на діаметрах побудовано два кола. Доведіть, що ці кола дотикаються.

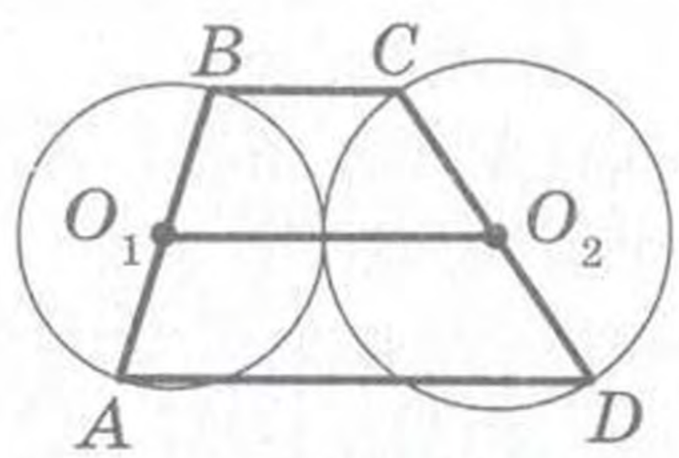


Рис. 14.4

Розв'язання. Нехай O_1 і O_2 — середини бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ (рис. 14.4). Вони є центрами кіл, про які йдеться в умові задачі. Тоді сума радіусів r_1 і r_2 кіл дорівнює $\frac{AB+CD}{2}$. Оскільки в трапецію можна вписати коло, то $\frac{AB+CD}{2} = \frac{BC+AD}{2} = O_1O_2$. Отримали, що $r_1 + r_2 = O_1O_2$, тобто сума радіусів кіл дорівнює відстані між їх центрами. А це означає, що кола дотикаються.

Приклад 2. З точки перетину діагоналей вписаного чотирикутника опущено перпендикуляри на його сторони. Доведіть, що основи цих перпендикулярів є вершинами описаного чотирикутника.

Розв'язання. Нехай O — точка перетину діагоналей вписаного чотирикутника $ABCD$ (рис. 14.5), $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CD$, $OQ \perp DA$. Оскільки $\angle AMO + \angle AQO = 180°$, то навколо чотирикутника $AMOQ$ можна описати коло. Звідси

$$\angle MAO = \angle MQO. \quad (3)$$

Аналогічно

$$\angle PDO = \angle PQO. \quad (4)$$

Але чотирикутник $ABCD$ є вписаним. Тому $\angle BAC = \angle CDB$.

З урахуванням рівностей (3) і (4) отримуємо, що $\angle MQO = \angle PQO$, тобто QO — бісектриса кута MQP.

Аналогічно промені MO, NO і PO є бісектрисами відповідно кутів QMN, MNP і NPQ.

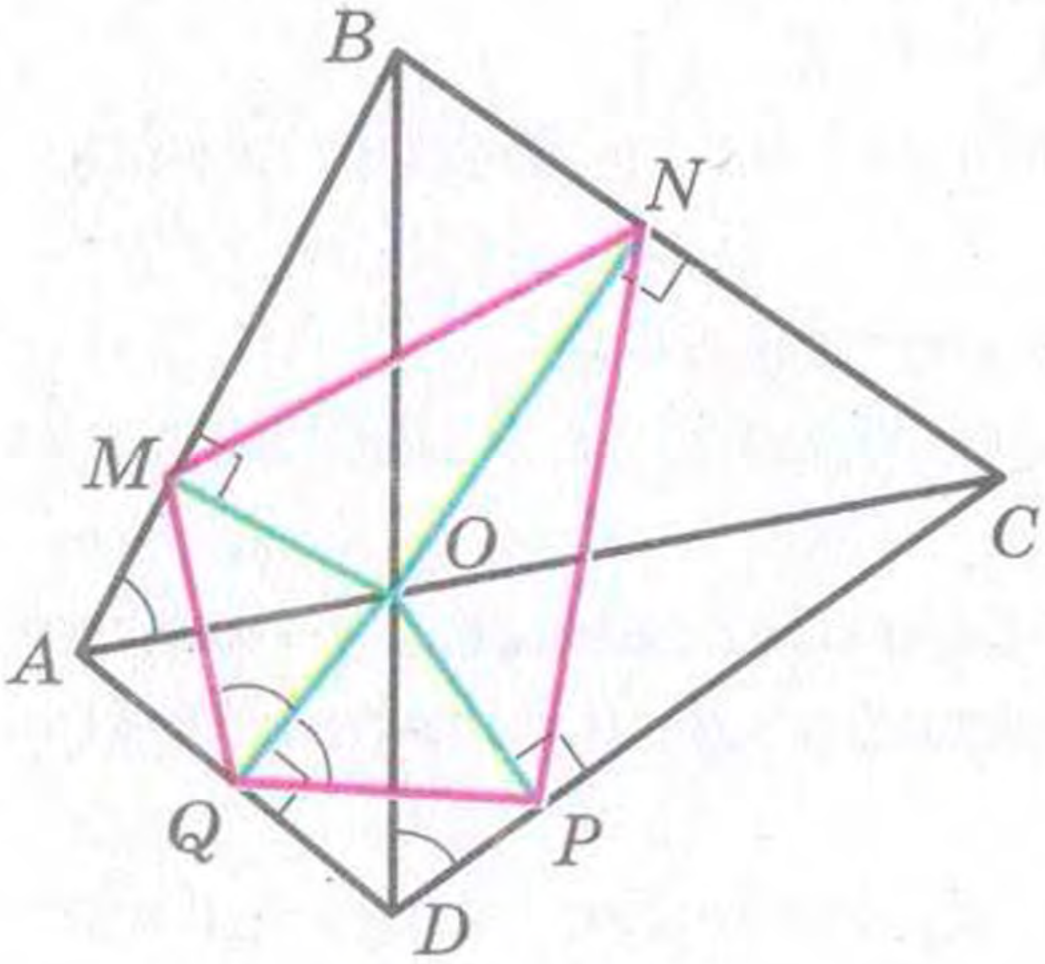


Рис. 14.5

Отже, бісектриси кутів чотирикутника $MNPQ$ перетинаються в одній точці, а це означає, що в чотирикутник можна вписати коло.

?

1. Який чотирикутник називають описаним?
2. У якому випадку кажуть, що коло вписане в чотирикутник?
3. Яку властивість мають сторони описаного чотирикутника?
4. За якої умови чотирикутник є описаним?

ВПРАВИ

14.1.° Сума двох протилежних сторін описаного чотирикутника дорівнює 18 см. Знайдіть периметр даного чотирикутника.

14.2.° Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 7 см. Чому дорівнює периметр даної трапеції, якщо в неї можна вписати коло?

14.3.° У чотирикутнику $CDEF$, у який можна вписати коло, $CD = 6$ см, $DE = 8$ см, $EF = 12$ см. Знайдіть сторону CF.

14.4.° Доведіть, що в будь-який ромб можна вписати коло. Яка точка є центром кола, вписаного в ромб?

14.5.° Чи можна вписати коло в паралелограм, який не є ромбом?

14.6.° Під яким кутом видно бічну сторону трапеції з центра вписаного кола?

14.7.° Один з кутів ромба дорівнює 60°, а більша діагональ — 24 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний ромб.

14.8.° Доведіть, що коли в прямокутник можна вписати коло, то цей прямокутник є квадратом.

14.9.• Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр даної трапеції, якщо радіус вписаного кола дорівнює 20 см.

14.10.• Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки

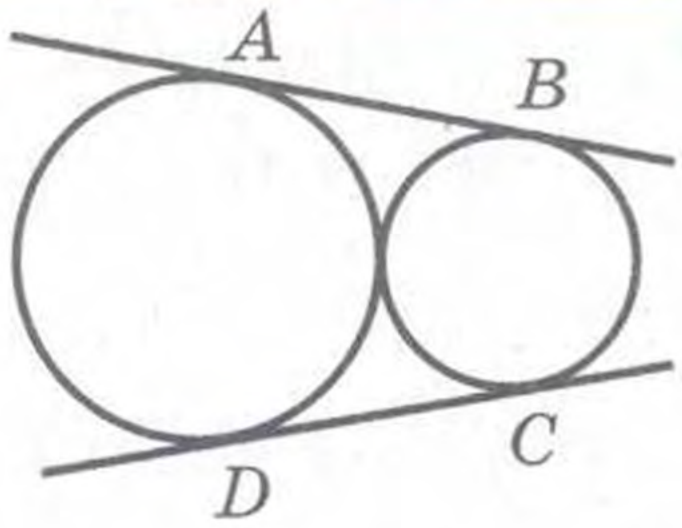


Рис. 14.6

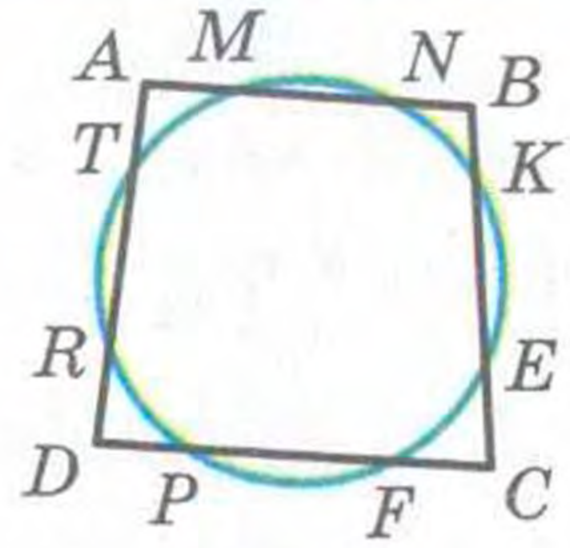


Рис. 14.7

3 см і 12 см. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо периметр трапеції дорівнює 54 см.

14.11.° Два кола мають зовнішній дотик, прямі AB і CD — їх спільні дотичні, точки A, B, C і D — точки дотику (рис. 14.6). Доведіть, що в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло.

14.12.° Центр кола, вписаного в чотирикутник, збігається з точкою перетину його діагоналей. Доведіть, що цей чотирикутник — ромб.

14.13.° Чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола з центром O. Доведіть, що $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

14.14.° Коло перетинає всі сторони чотирикутника $ABCD$ так, що $MN = KE = FP = RT$ (рис. 14.7). Доведіть, що в цей чотирикутник можна вписати коло.

14.15.° Кола, побудовані на бічних сторонах трапеції як на діаметрах, мають зовнішній дотик. Доведіть, що в цю трапецію можна вписати коло.

14.16.°° Чотирикутник є одночасно вписаним і описаним. Нехай M, N, P і Q — точки дотику вписаного кола з його сторонами (рис. 14.8). Доведіть, що $MP \perp NQ$.

14.17.°° Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що кола, вписані в трикутники ABC і ACD, дотикаються. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — описаний.

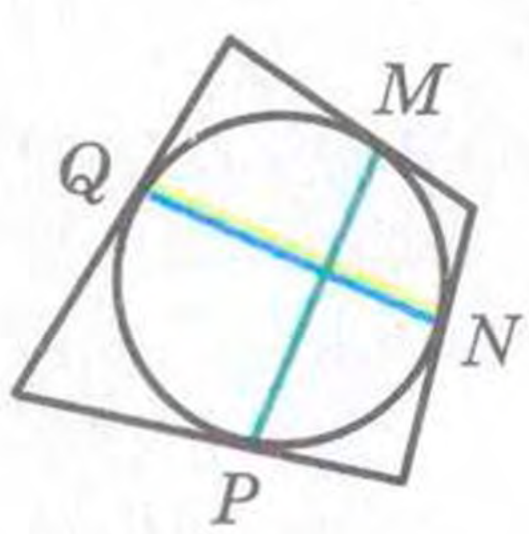


Рис. 14.8

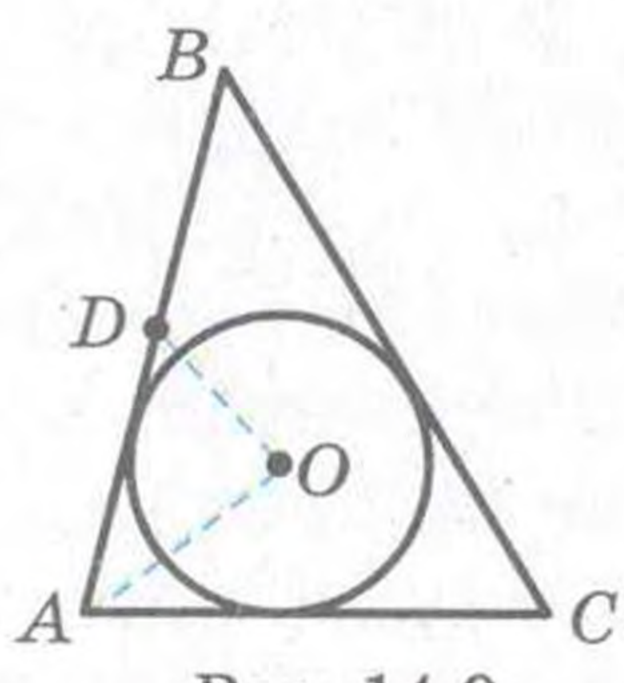


Рис. 14.9

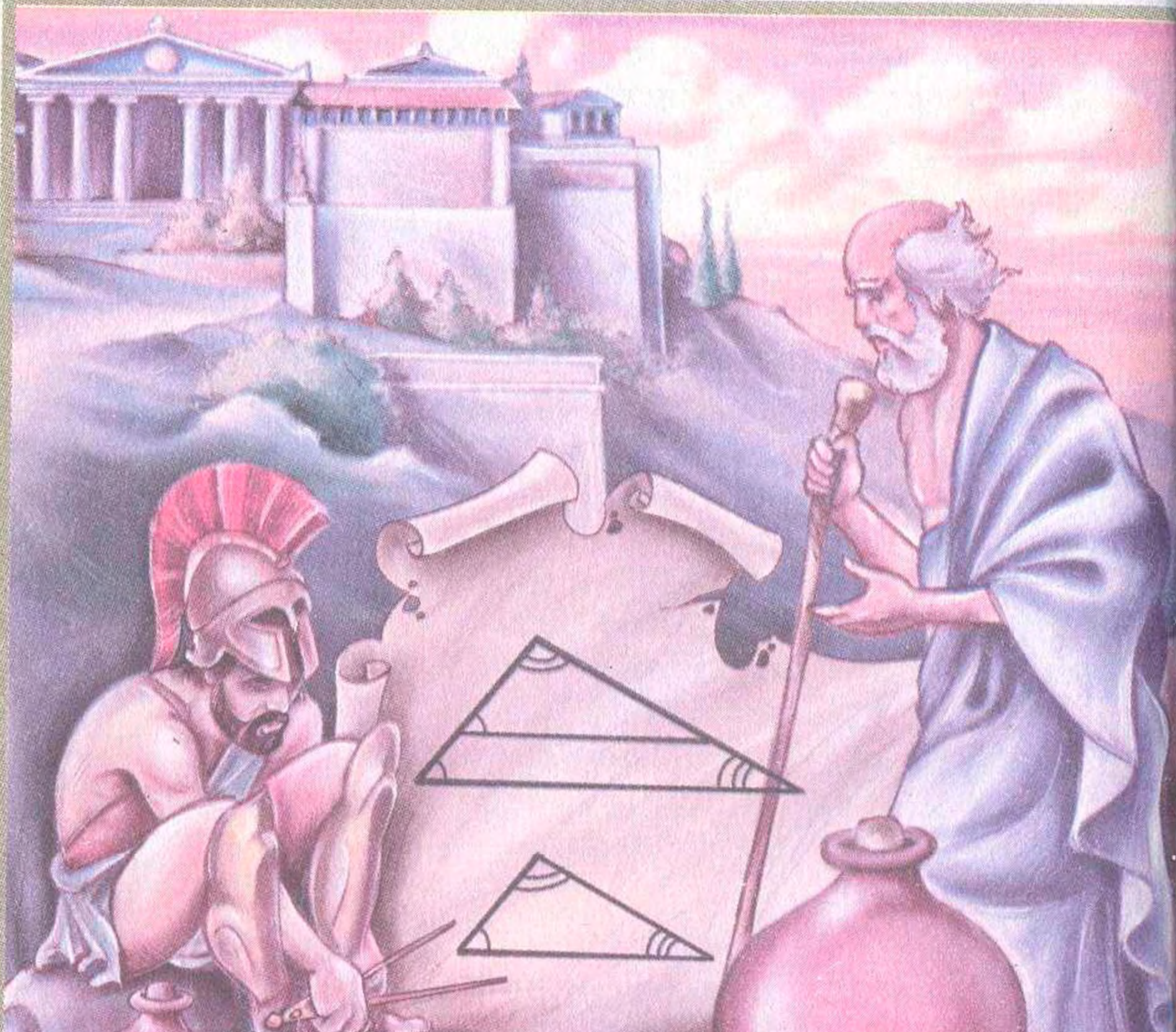
14.18.** Відомо, що чотирикутник $ABCD$ — описаний. Доведіть, що кола, вписані в трикутники ABC і ACD, дотикаються.

14.19.* Доведіть, що відрізки, які з'єднують точки дотику з вписаним колом протилежних сторін описаного чотирикутника, є рівними тоді і тільки тоді, коли чотирикутник має пару рівних протилежних кутів.

14.20.* Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC, точка D — середина сторони AB (рис. 14.9). Відомо, що $\angle AOD = 90°$. Доведіть, що $AB + BC = 3AC$.

14.21.* Дано точки A, B і C, які не лежать на одній прямій. Знайдіть точку D таку, щоб чотирикутник $ABCD$ був як вписаним, так і описаним.

§4 ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ



15. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

Теорема 15.1 (теорема Фалеса). ***Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.***

Доведення. Нехай маємо кут AOB (рис. 15.1). Відомо, що $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Доведемо, що $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.

Припустимо, що $OB_1 \neq B_1B_2$. Нехай серединою відрізка OB_2 є деяка точка C_1. Тоді відрізок A_1C_1 — середня лінія трикутника A_2OB_2. Звідси $A_1C_1 \parallel A_2B_2$. Отже, через точку A_1 проходять дві прямі, паралельні прямій A_2B_2, що неможливо. З отриманої суперечності випливає, що $OB_1 = B_1B_2$.

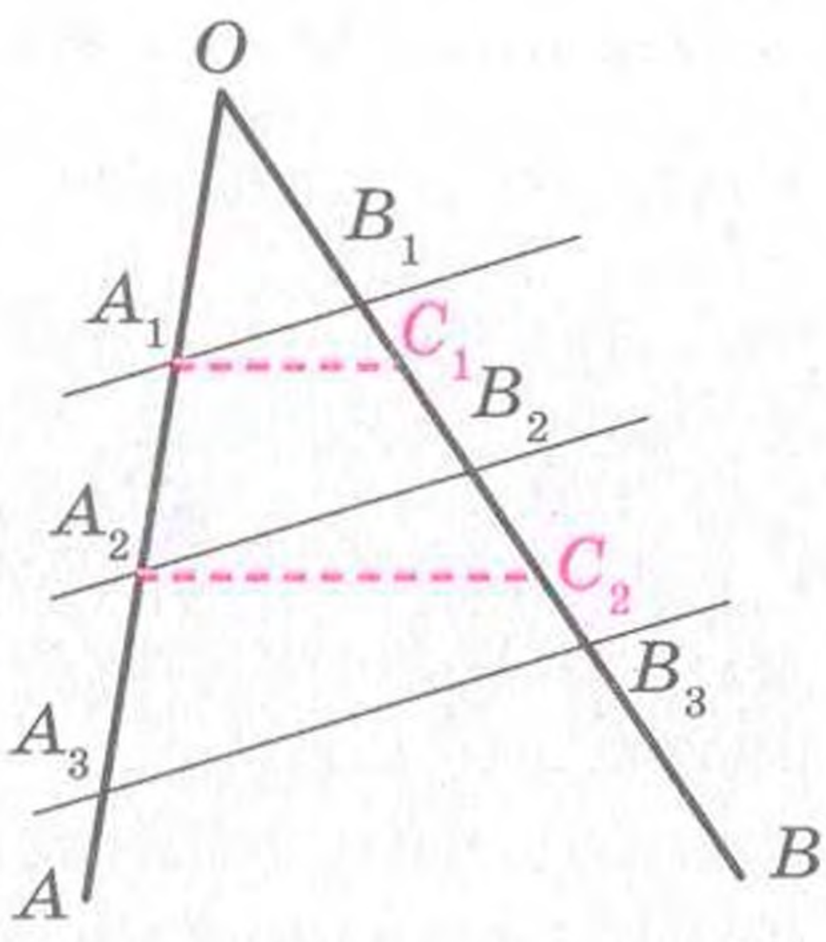
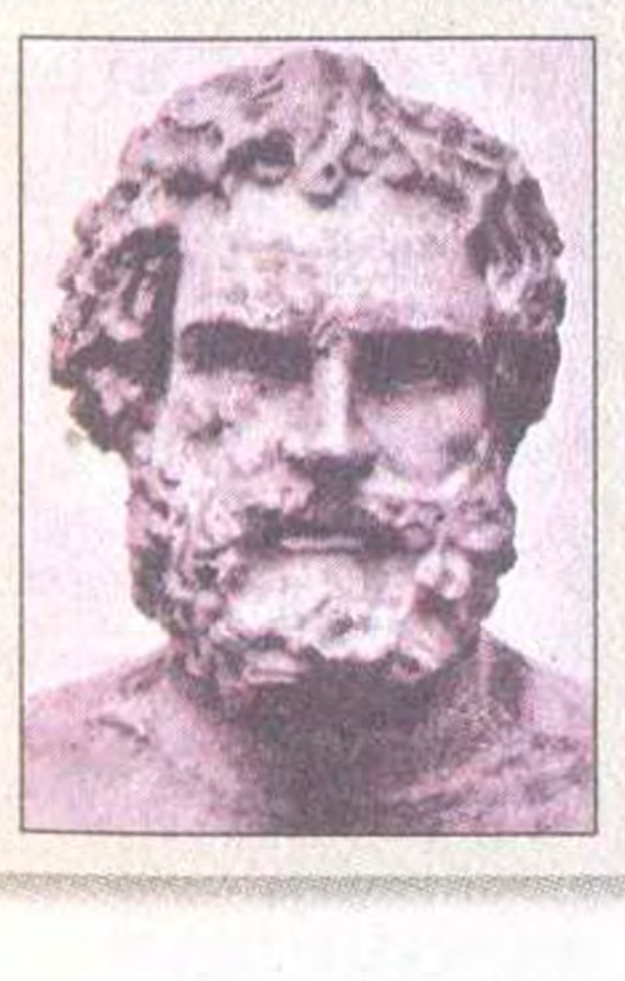


Рис. 15.1

Припустимо, що $B_1B_2 \neq B_2B_3$. Нехай серединою відрізка B_1B_3 є деяка точка C_2. Тоді A_2C_2 — середня лінія трапеції $A_3A_1B_1B_3$. Звідси $A_2C_2 \parallel A_3B_3$. Тоді через точку A_2 проходять дві прямі, паралельні прямій A_3B_3, що неможливо. З отриманої суперечності випливає, що $B_1B_2 = B_2B_3$. ▲

Означення. **Відношенням двох відрізків називають відношення їх довжин, виражених в одних і тих самих одиницях виміру.**



Фалéс Мілетський
(бл. 625 р. — бл. 547 р. до н. е.)

Давньогрецький філософ, учений, купець і державний діяч. Походив з Мілету — порту в Малій Азії на узбережжі Егейського моря.

Якщо, наприклад, $AB = 8$ см, $CD = 6$ см, то відношення відрізка AB до відрізка CD дорівнює $\frac{8}{6}$. Записують: $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$, тобто $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$.

Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, то кажуть, що відрізки AB і CD **пропорційні** відповідно відрізкам A_1B_1 і C_1D_1.

Аналогічно можна говорити про пропорційність більшої кількості відрізків. Наприклад, якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}$, то кажуть, що відрізки AB, CD, MN пропорційні відповідно відрізкам A_1B_1, C_1D_1, M_1N_1.

Теорема 15.2 (теорема про пропорційні відрізки). ***Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворилися на другій стороні кута.***

Доведення. Нехай сторони кута MON перетнуто паралельними прямими AA_1 і BB_1 (рис. 15.2). Доведемо, що:

$$1)\ \frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1};\ 2)\ \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1};\ 3)\ \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Покажемо, як доводити першу з наведених рівностей (інші дві доводяться аналогічно).

Нехай для відрізків OA і AB існує такий відрізок завдовжки l, який укладається ціле число разів у кожному з них. Маємо: $OA = ml$, $AB = nl$, де m і n — деякі натуральні числа.

Тоді відрізки OA і AB можна поділити відповідно на m і n рівних відрізків, кожний з яких дорівнює l.

Через кінці отриманих відрізків проведемо прямі, паралельні прямій BB_1 (рис. 15.3). За теоремою Фалеса ці прямі ділять відрізки OA_1 і A_1B_1 відповідно на m і n рівних відрізків. Нехай кожний з цих відрізків дорівнює l_1. Звідси $OA_1 = ml_1$, $A_1B_1 = nl_1$. Маємо: $\frac{OA}{AB} = \frac{ml}{nl} = \frac{m}{n}$, $\frac{OA_1}{A_1B_1} = \frac{ml_1}{nl_1} = \frac{m}{n}$. Звідси $\frac{OA}{AB} = \frac{OA_1}{A_1B_1}$. Тоді $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

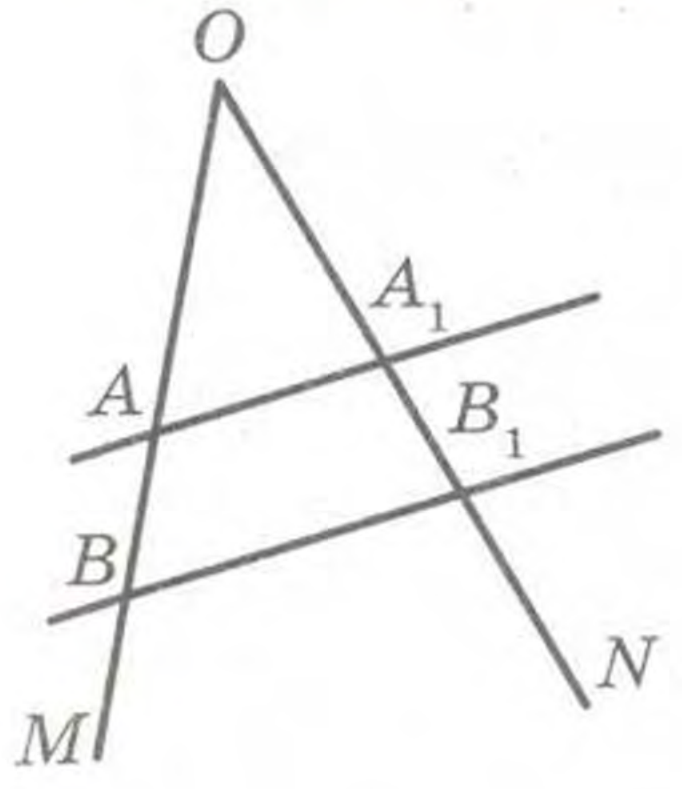


Рис. 15.2

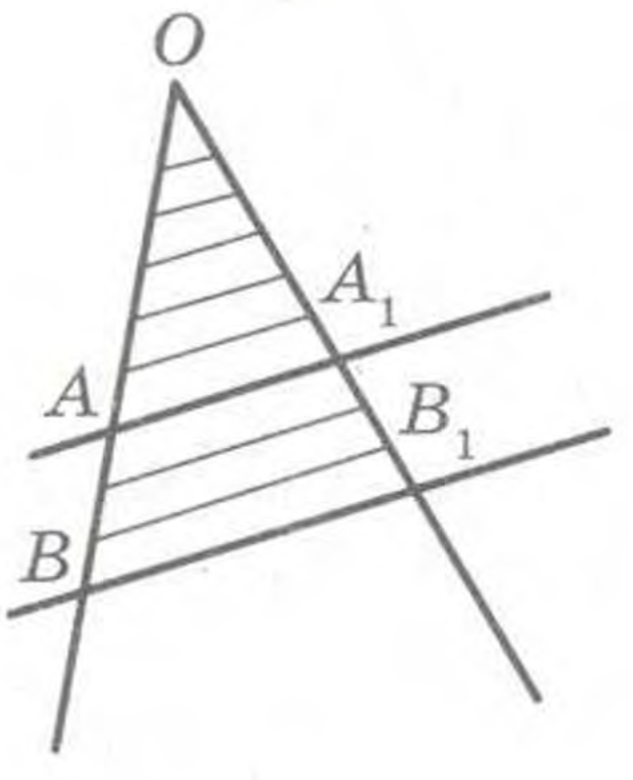


Рис. 15.3

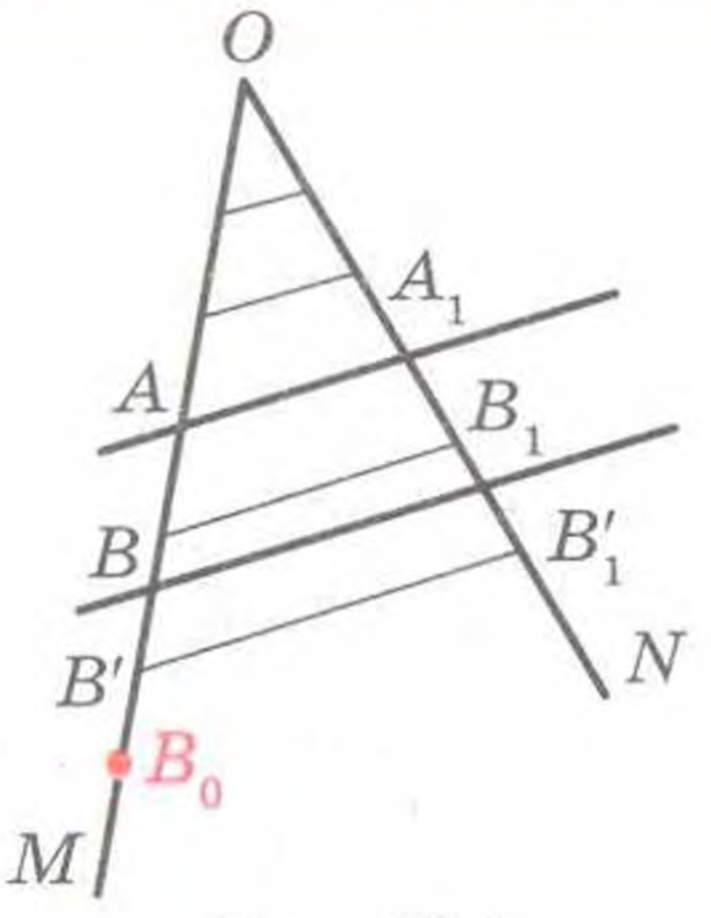


Рис. 15.4

Зауважимо, що наведене доведення цієї теореми не є повним. Справді, не для будь-яких двох відрізків існує відрізок, який уміщується в кожному з них ціле число разів. Зокрема, для відрізків OA і AB такий відрізок може й не існувати. Проведемо доведення для цього випадку.

Доведемо, що $\frac{AB}{OA} = \frac{A_1B_1}{OA_1}$ (рис. 15.4).

Припустимо, що ця рівність неправильна. Нехай, наприклад, $\frac{AB}{OA} < \frac{A_1B_1}{OA_1}$.

Тоді існує відрізок AB_0 такий, що $AB_0 > AB$ і

$$\frac{AB_0}{OA} = \frac{A_1B_1}{OA_1}. \qquad (*)$$

На промені AB відкладемо відрізок AB_0 (рис. 15.4).

Поділимо відрізок OA на рівні відрізки такої довжини m, що $m < BB_0$. Будемо послідовно відкладати відрізки довжини m від точки A доти, доки кінець одного з відрізків, точка B', стане внутрішньою точкою відрізка BB_0. Така точка обов'язково знайдеться, оскільки довжина відрізка, який відкладаємо, менша від BB_0.

Через кінці отриманих відрізків проведемо прямі, паралельні прямій AA_1. Нехай пряма, яка проходить через точку B', перетинає промінь ON у точці B_1' (рис. 15.4).

Отримали, що для відрізків OA_1 і A_1B_1' існує відрізок, який уміщується в кожному з них ціле число разів. Тому справедлива рівність $\frac{AB'}{OA} = \frac{A_1B_1'}{OA_1}$.

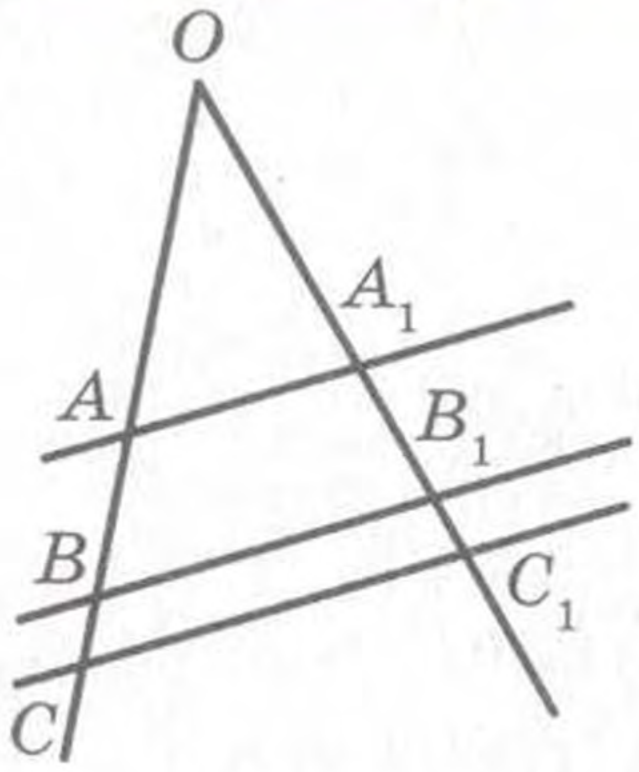


Рис. 15.5

Оскільки $AB_0 > AB'$ і $A_1B_1' > A_1B_1$, то $\frac{AB_0}{OA} > \frac{AB'}{OA} = \frac{A_1B_1'}{OA_1} > \frac{A_1B_1}{OA_1}$, тобто $\frac{AB_0}{OA} > \frac{A_1B_1}{OA_1}$, що суперечить рівності (*).

Якщо рисунок 15.2 доповнити прямою CC_1, паралельною прямій BB_1 (рис. 15.5), то, міркуючи аналогічно, отримаємо, наприклад, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. ▲

Теорема 15.2 залишається справедливою, якщо замість сторін кута взяти дві будь-які прямі.

Приклад 1. Поділіть даний відрізок на три рівних відрізки.

Розв'язання. Через точку A даного відрізка AB проведемо промінь AC, який не належить прямій AB (рис. 15.6). Позначимо на промені AC довільну точку A_1. Потім позначимо точки A_2 і A_3 так, щоб $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ (рис. 15.6). Проведемо відрізок A_3B. Через точки A_1 і A_2 проведемо прямі, паралельні прямій A_3B. Вони перетинатимуть відрізок AB у точках B_1 і B_2 відповідно. За теоремою Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$.

Приклад 2. На стороні BC трикутника ABC обрано точку N так, що $BN : NC = 2 : 3$. У якому відношенні медіана BM ділить відрізок AN?

Розв'язання. Через точку N проведемо $NK \parallel BM$, точка K належить стороні AC (рис. 15.7). Маємо: $\frac{MK}{KC} = \frac{BN}{NC} = \frac{2}{3}$; $MK = \frac{2}{3}KC$. Звідси $MK = \frac{2}{5}MC$. Оскільки $MC = MA$, то $MK = \frac{2}{5}AM$, тобто $\frac{AM}{MK} = \frac{5}{2}$. Маємо: $\frac{AO}{ON} = \frac{AM}{MK} = \frac{5}{2}$.

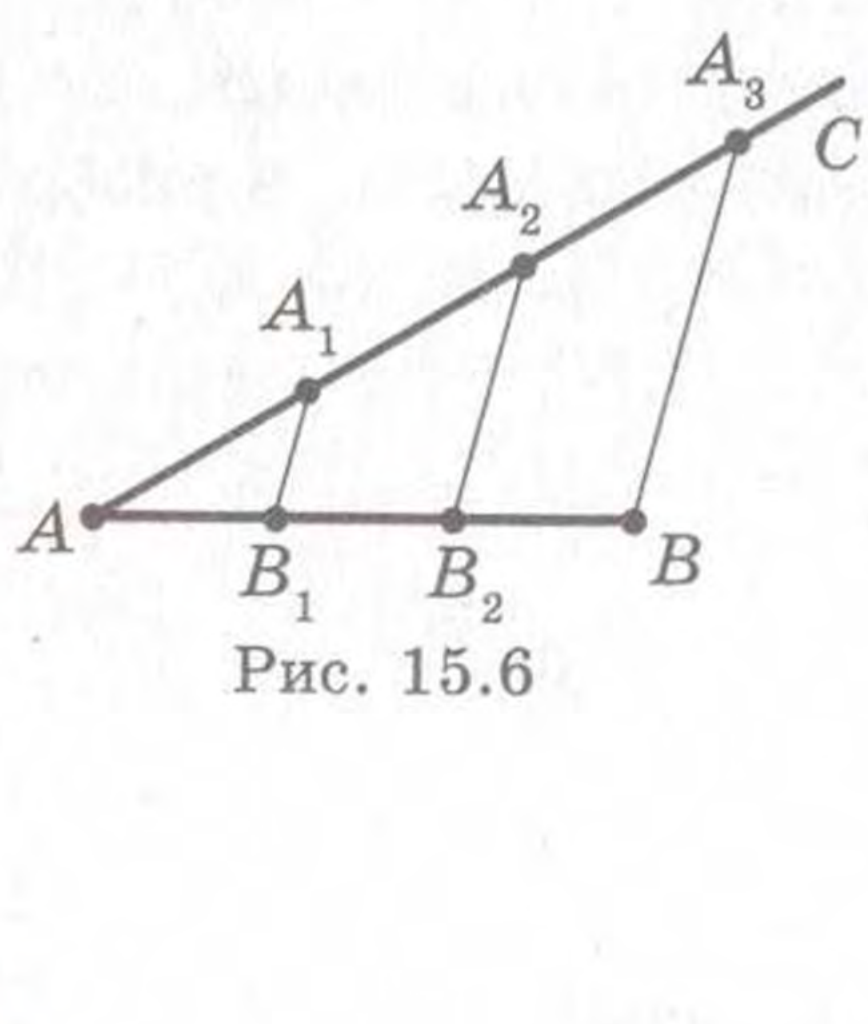


Рис. 15.6

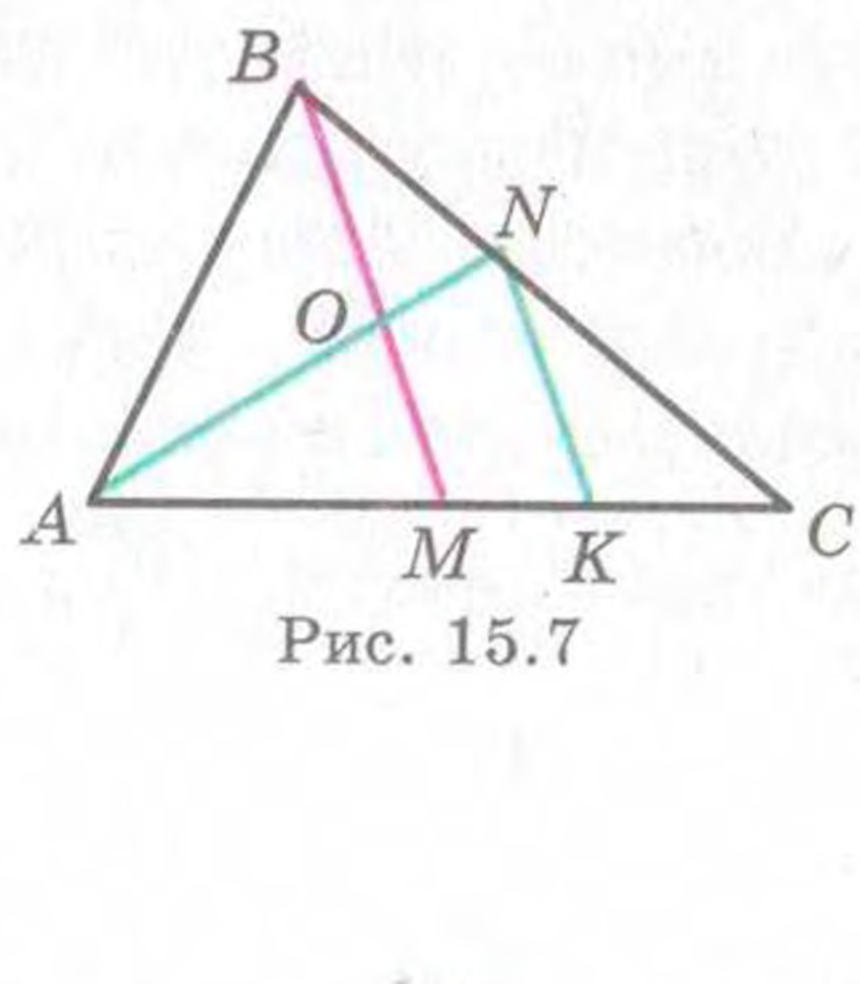


Рис. 15.7

1. Сформулюйте теорему Фалеса.
2. Що називають відношенням двох відрізків?
3. У якому випадку кажуть, що відрізки AB і CD пропорційні відрізкам A_1B_1 і C_1D_1?
4. Сформулюйте теорему про пропорційні відрізки.

ВПРАВИ

15.1.° На рисунку 15.8 $BD \parallel CE$, $AB = 16$ см, $BC = 6$ см, $AD = 8$ см. Знайдіть відрізок DE.

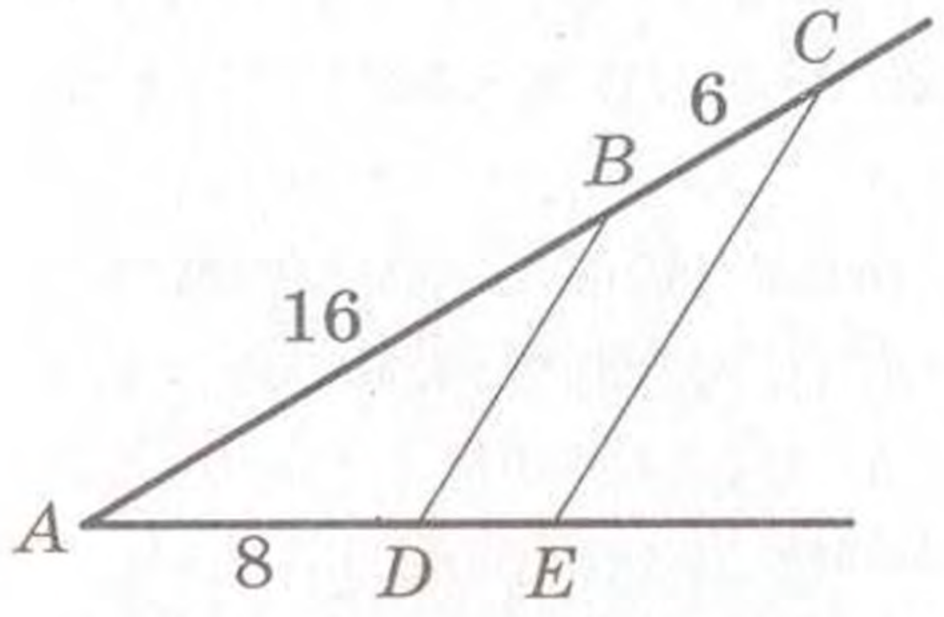


Рис. 15.8

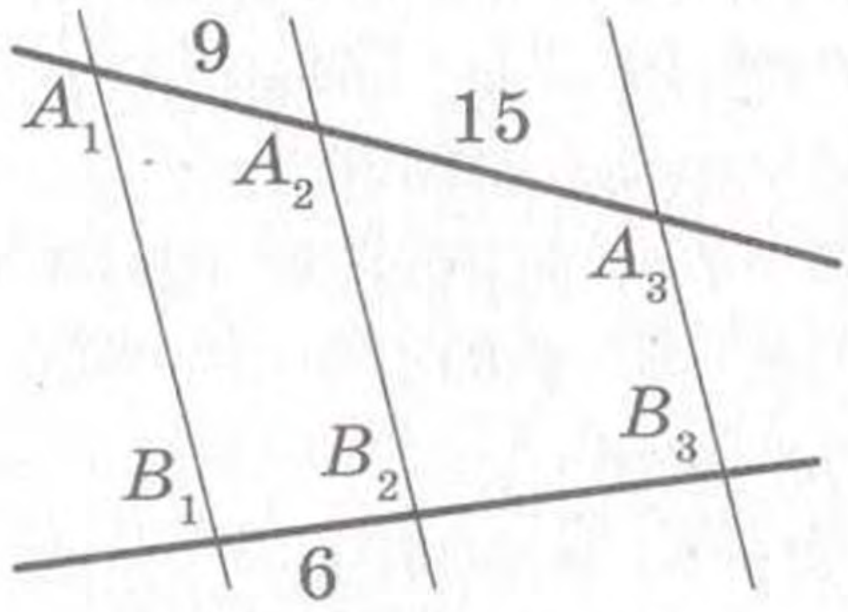


Рис. 15.9

15.2.° На рисунку 15.9 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 9$ см, $A_2A_3 = 15$ см, $B_1B_2 = 6$ см. Знайдіть відрізок B_2B_3.

15.3.° На рисунку 15.10 $DE \parallel AC$, $BE = 10$ см, відрізок BD у 2 рази більший за відрізок AD. Знайдіть відрізок BC.

15.4.° Пряма, паралельна стороні BC трикутника ABC, перетинає його сторону AB у точці M, а сторону AC — у точці K, $AM = 9$ см, $BM = 6$ см, $KC = 8$ см. Знайдіть відрізок AK.

15.5.° Доведіть, що середня лінія трикутника ABC, паралельна стороні AC, ділить навпіл будь-який відрізок, одним з кінців якого є точка B, а другим — довільна точка відрізка AC.

15.6.° Відстань від середини хорди BC до діаметра AC дорівнює 3 см, $\angle BAC = 30°$. Знайдіть хорду AB.

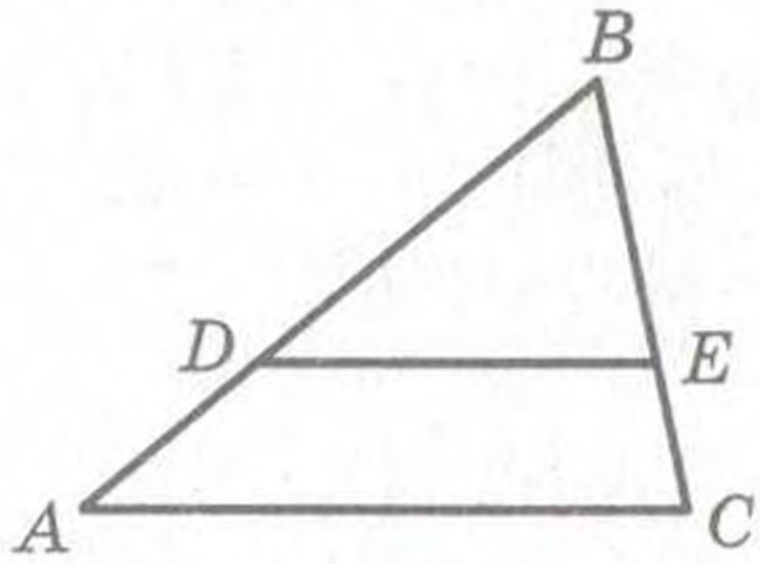


Рис. 15.10

15.7.° Відрізок BM — висота ромба $ABCD$, проведена до сторони AD, $\angle A = 45°$, $AM = 8$ см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей ромба до сторони AD.

15.8.° У трикутнику ABC $AB = BC$, $AC = 8$ см, AD — медіана, BE — висота, $BE = 12$ см. З точки D опущено перпендикуляр DF на сторону AC. Знайдіть DF і $\angle ADF$.

15.9.° Сторона AC трикутника ABC дорівнює 24 см, сторону AB поділено на чотири рівних відрізки і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні AC. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трикутнику.

15.10.° Основи трапеції дорівнюють 16 см і 28 см. Одну з бічних сторін поділено на три рівних відрізки і через точки поділу проведено прямі, паралельні основам. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трапеції.

15.11.° Доведіть, що середня лінія трапеції ділить її діагоналі навпіл.

15.12.° Середня лінія MK трапеції $ABCD$ перетинає діагональ AC у точці E, $ME = 4$ см, $EK = 6$ см. Знайдіть основи трапеції.

15.13.• Діагоналі трапеції перетинають її середню лінію MK у точках E і F. Доведіть, що $ME = KF$.

15.14.• Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і дорівнює їх піврізниці.

15.15.• Основи трапеції дорівнюють 12 см і 22 см. Знайдіть відрізки, на які діагоналі трапеції ділять її середню лінію.

15.16.• Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, належить прямій, яка містить її середню лінію.

15.17.• Точка D — середина основи AC рівнобедреного трикутника ABC. На стороні AB позначено точку M так, що $AM : MB = 2 : 7$. У якому відношенні пряма BD ділить відрізок CM?

15.18.• У рівнобедреному трикутнику DEF проведено висоту EC до його основи і позначено на бічній стороні EF точку A. Відрізки EC і DA перетинаються в точці O, при цьому $AO : OD = 3 : 8$. Знайдіть відношення $EA : AF$.

15.19.$^{\bullet}$ На стороні BC трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MC = 3 : 10$. У якому відношенні відрізок AM ділить медіану BK трикутника ABC?

15.20.$^{\bullet}$ На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MB = 4 : 3$. У якому відношенні медіана BK: 1) ділить відрізок CM; 2) ділиться відрізком CM?

15.21.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC відрізок AK (точка K належить стороні BC) ділить медіану BM у відношенні $3 : 4$, рахуючи від вершини B. У якому відношенні точка K ділить сторону BC?

15.22.$^{\bullet\bullet}$ Дано відрізки a, b, c. Побудуйте відрізок x такий, що $a : x = b : c$.

15.23.$^{\bullet\bullet}$ Через точку O, яка належить даному куту, проведіть відрізок, кінці якого належать сторонам даного кута і який ділиться точкою O: 1) навпіл; 2) у відношенні $2 : 3$.

15.24.$^{\bullet\bullet}$ Точки A і B лежать у різних півплощинах відносно прямої l і віддалені від неї на 6 см і 8 см відповідно. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до прямої l.

15.25.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах кута A позначено точки B_1, B_2, C_1, C_2 так, що $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$ (рис.15.11). Доведіть, що $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

15.26.$^{\bullet\bullet}$ Висота BK ромба $ABCD$, проведена до сторони AD, перетинає діагональ AC у точці M. Знайдіть MD, якщо відомо, що $BK = 4$ см, $AK : KD = 1 : 2$.

15.27.$^{\bullet\bullet}$ У рівнобедреному трикутнику ABC ($AC = CB$) проведено медіану CC_1 і бісектрису AA_1. Знайдіть $\angle ACB$, якщо $AA_1 = 2CC_1$.

15.28.$^{\bullet\bullet}$ Точки M і P — середини відповідно сторін AD і DC паралелограма $ABCD$. Відрізки MC і BP перетинаються в точці K. Знайдіть відношення $BK : KP$.

15.29.$^{\bullet\bullet}$ Через вершину B паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка не має з паралелограмом інших спільних точок. Вершини A і C віддалені від цієї прямої на відстані a і b відповідно. Знайдіть відстань від точки D до цієї прямої.

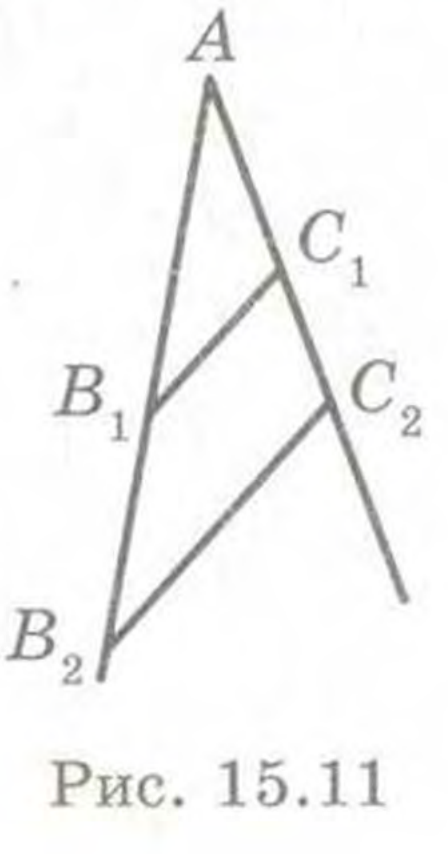


Рис. 15.11

15.30.* У гострокутному трикутнику ABC відрізки CC_1 і AA_1 — висоти. З точок A і C на пряму A_1C_1 опущено перпендикуляри AF і CK. Доведіть, що $FC_1 = KA_1$.

15.31.* В опуклому чотирикутнику $ABCD$ протилежні кути A і C — прямі. На діагональ AC опущено перпендикуляри BE і DF. Доведіть, що $CE = FA$.

16. Теорема про медіани трикутника. Теорема про бісектрису трикутника

Теорема 16.1. ***Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини трикутника.***

Доведення. На рисунку 16.1 медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведемо, що $\frac{BM}{MB_1} = \frac{2}{1}$.

Проведемо $B_1K \parallel AA_1$. Оскільки $AB_1 = B_1C$, то за теоремою Фалеса $A_1K = KC$, тобто $A_1C = 2A_1K$. Проте $BA_1 = A_1C$. Тоді $\frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{BM}{MB_1} = \frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$.

Таким чином, медіана AA_1, перетинаючи медіану BB_1, ділить її у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини B. Аналогічно можна довести (зробіть це самостійно), що медіана CC_1 також ділить медіану BB_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини B (рис. 16.2). А це означає, що всі три медіани трикутника ABC проходять через одну точку. Ми довели, що ця точка ділить медіану BB_1 у відношенні 2 : 1.

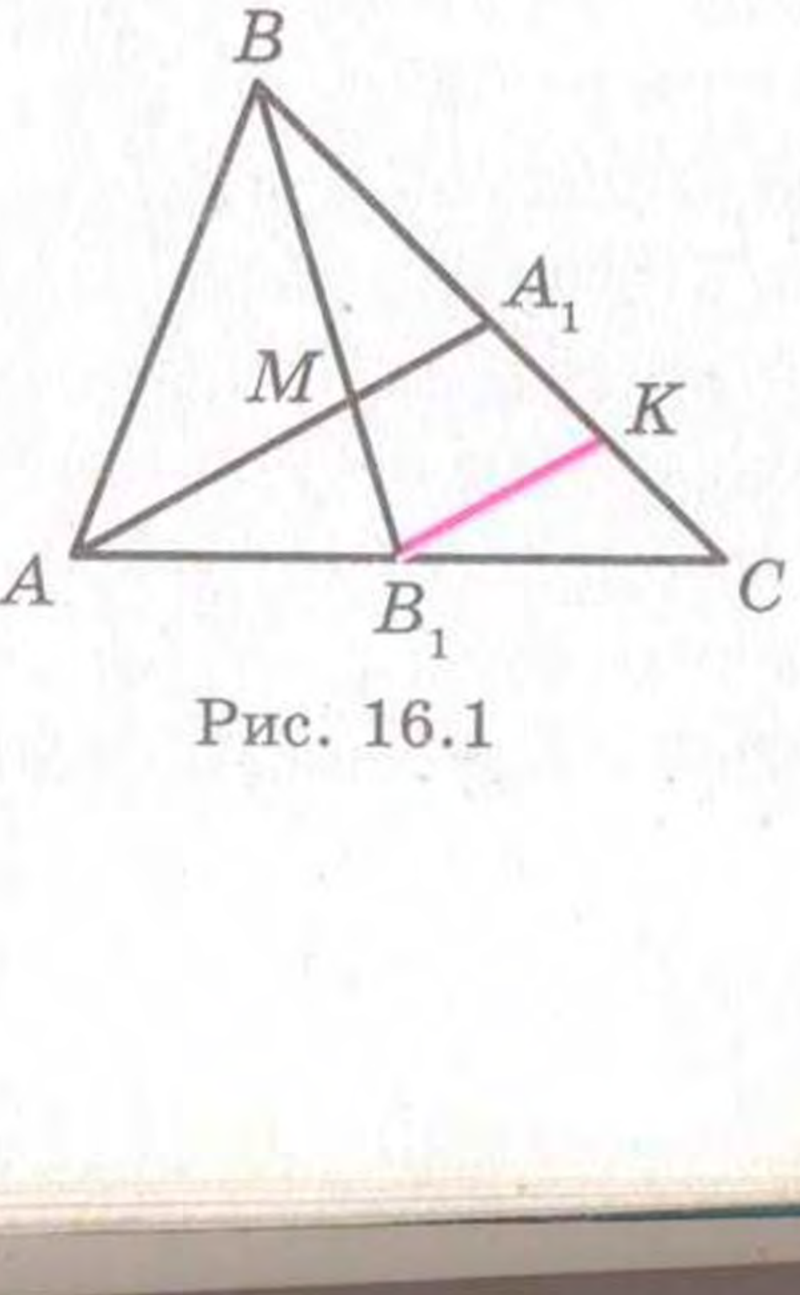


Рис. 16.1

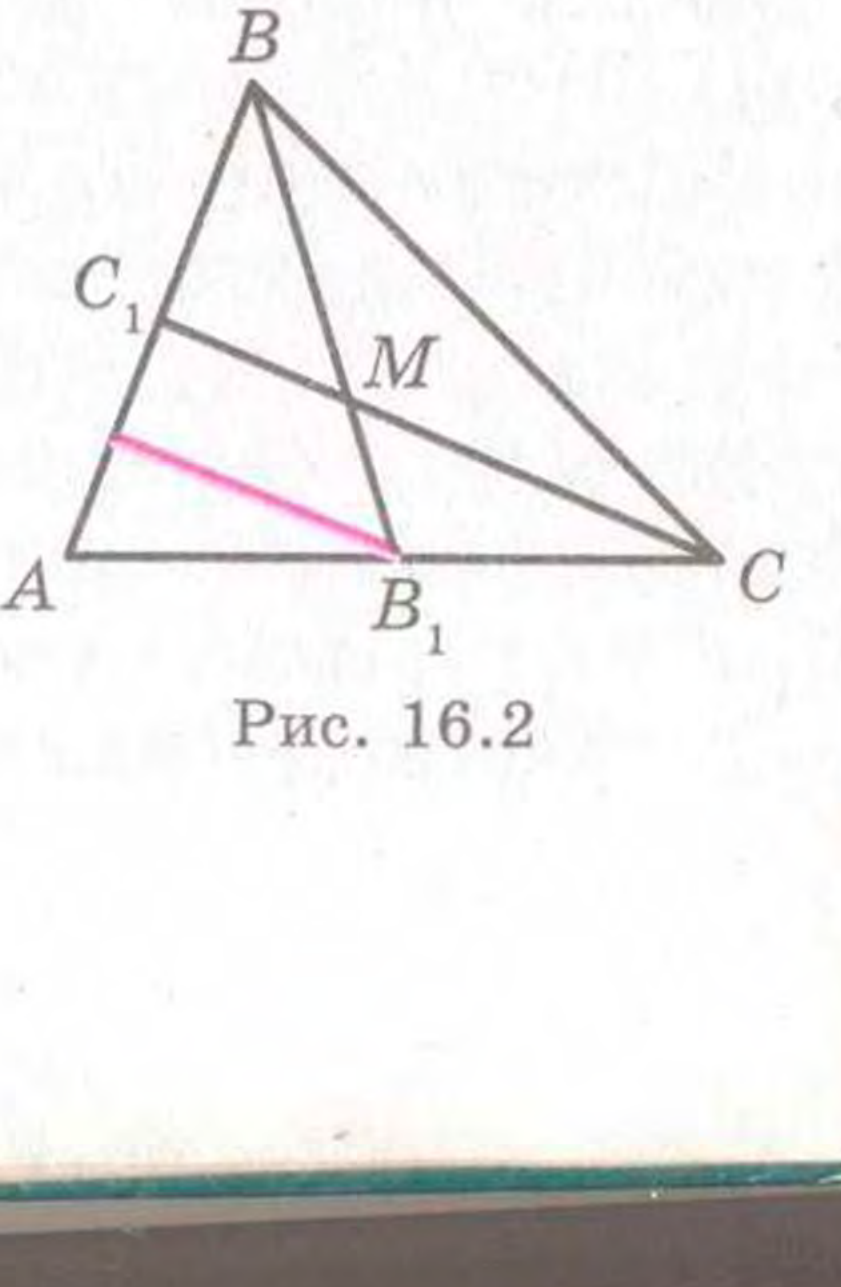


Рис. 16.2

Те, що ця точка ділить у відношенні 2 : 1 також медіани AA_1 і CC_1, доводиться аналогічно. ▲

На рисунку 16.3 зображено трикутник ABC. Точка D належить стороні AC. Кажуть, що сторони AB і BC **прилеглі** відповідно до відрізків AD і DC.

Теорема 16.2 (властивість бісектриси трикутника). ***Бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.***

Доведення. На рисунку 16.4 відрізок BD — бісектриса трикутника ABC. Доведемо, що $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

Через точку C проведемо пряму CE, паралельну прямій BD. Нехай проведена пряма перетинає пряму AB у точці E (рис. 16.4). Маємо: кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BD і CE та січній BC; кути 3 і 4 рівні як відповідні при паралельних прямих BD і CE та січній AE. Проте $\angle 4 = \angle 1$, оскільки BD — бісектриса. Звідси $\angle 2 = \angle 3$ і трикутник CBE — рівнобедрений з рівними сторонами BC і BE. За теоремою про пропорційні відрізки маємо: $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BE}$. Однак $BE = BC$, тоді $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$. ▲

Справедлива теорема, обернена до теореми 16.2:

Теорема 16.3. ***Якщо на стороні AC трикутника ABC обрано точку D так, що*** $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$, ***то відрізок BD — бісектриса трикутника ABC.***

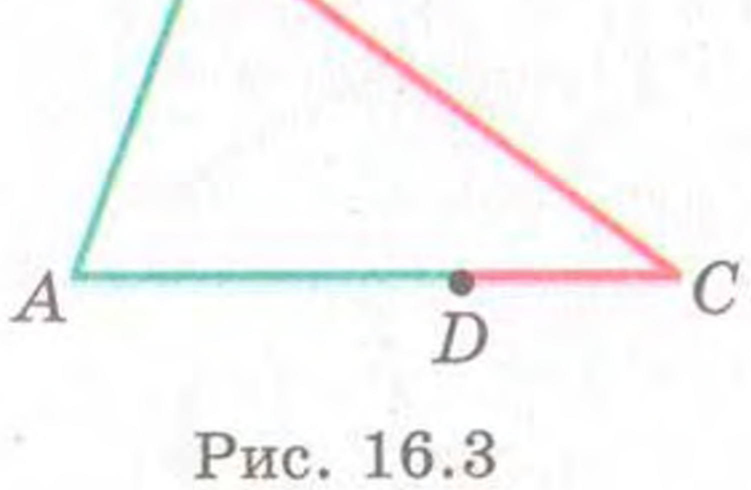


Рис. 16.3

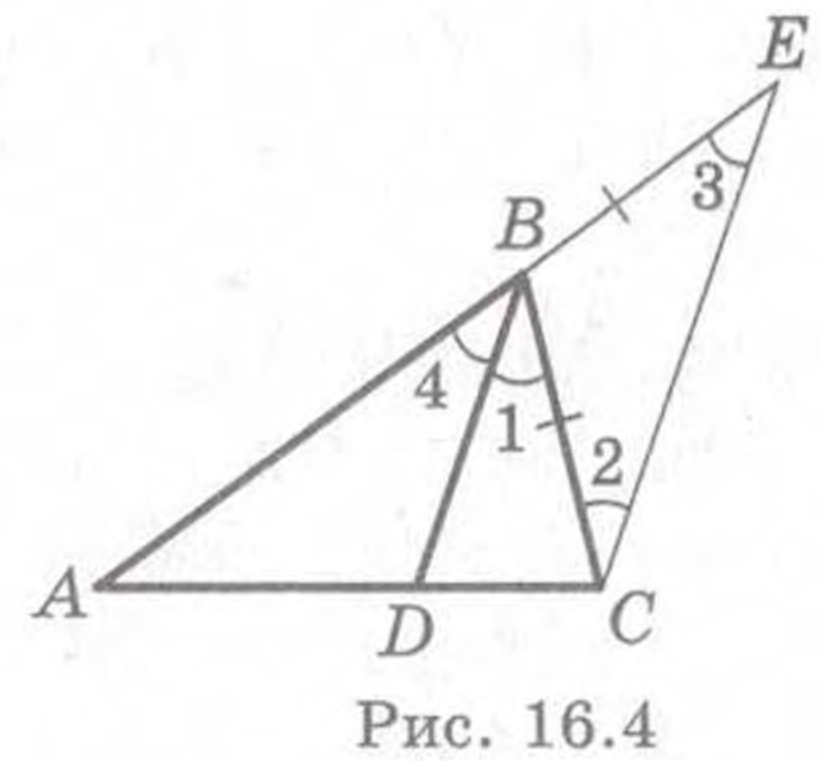


Рис. 16.4

Скориставшись методом доведення від супротивного, доведіть цю теорему самостійно.

Задача 1 (властивість бісектриси зовнішнього кута трикутника). *Бісектриса зовнішнього кута при вершині B трикутника ABC перетинає промінь AC у точці D. Доведіть, що* $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

Вказівка. Проведемо через точку C пряму CE, паралельну прямій BD (рис. 16.5). Завершіть доведення самостійно.

Зауважимо, що справедлива властивість, обернена до властивості бісектриси зовнішнього кута трикутника:

якщо на продовженні сторони AC трикутника ABC обрано точку D так, що $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$, *то промінь BD — бісектриса зовнішнього кута трикутника при вершині B.*

Доведіть цю властивість самостійно.

Задача 2. *Нехай дано точки A і C. Доведіть, що множина точок X таких, що* $\frac{AX}{XC} = k$, *де k — дане додатне число, відмінне від 1, належить одному колу.*

Розв'язання. Для кожного $k > 0$ і $k \neq 1$ на прямій AC існують дві точки D_1 і D_2 такі, що $\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AD_2}{D_2C} = k$, причому точка D_1 належить відрізку AC, а точка D_2 не належить цьому відрізку (цей факт ви можете довести на заняттях математичного гуртка).

Нехай точка M не належить прямій AC і $\frac{AM}{MC} = k$ (рис. 16.6). Тоді MD_1 — бісектриса трикутника AMC, MD_2 — бісектриса зовнішнього кута при вершині M трикутника AMC. Оскільки $\angle D_1MD_2$ — кут між бісектрисами суміжних ку-

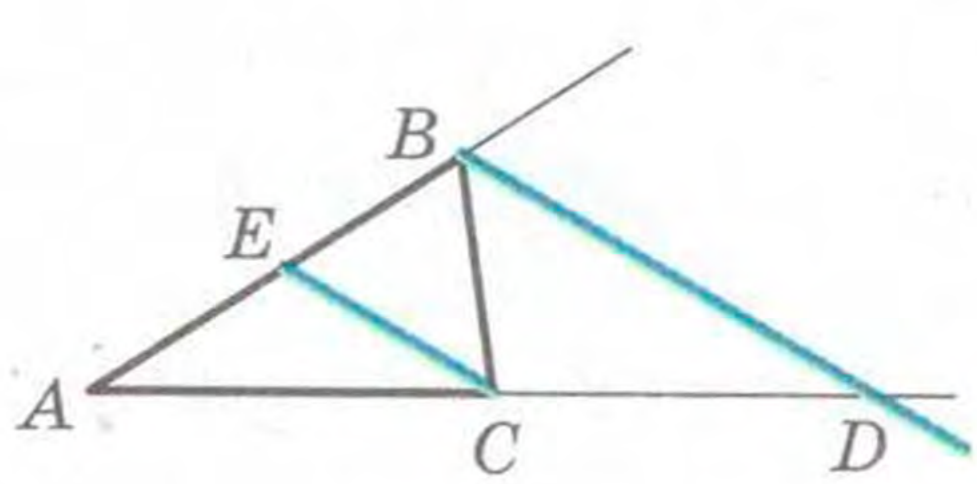


Рис. 16.5

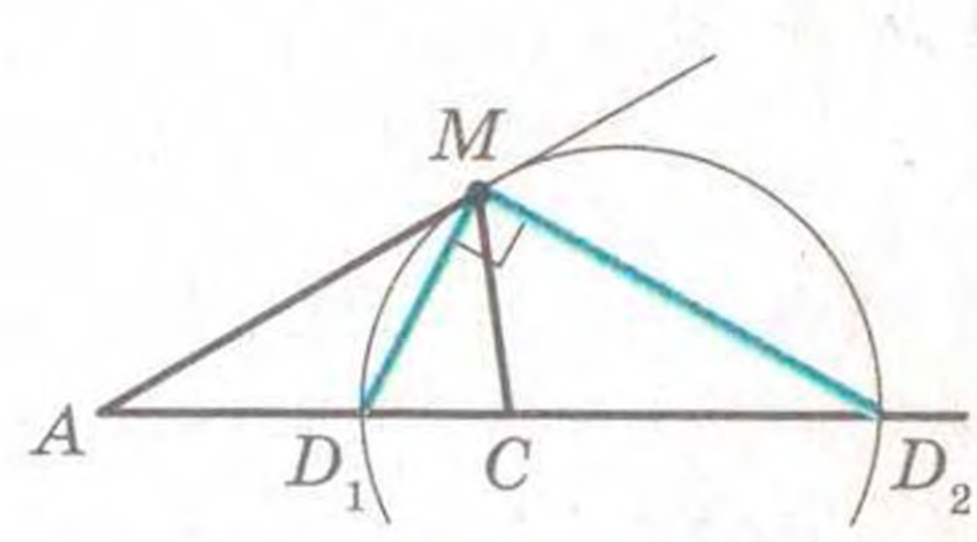
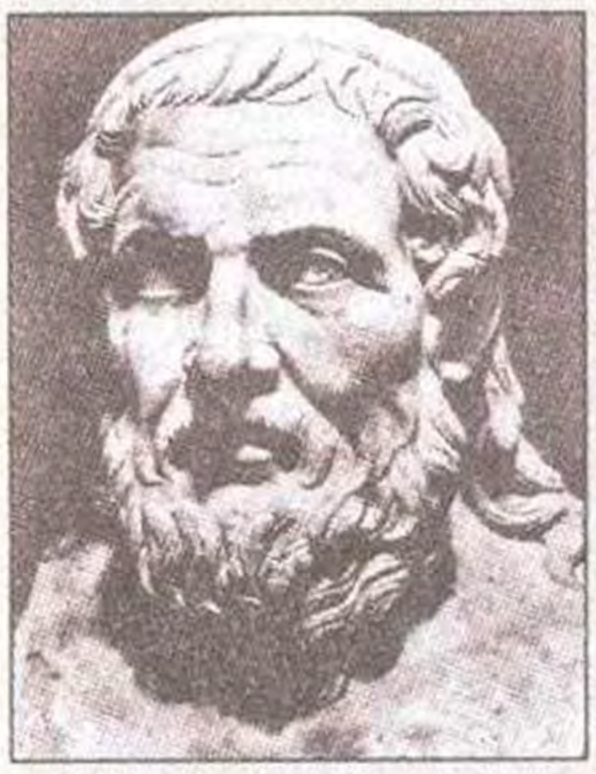


Рис. 16.6



Аполлоній Пергський
(III ст. до н. е.)

Давньогрецький математик. Його праці мали значний вплив на розвиток астрономії, механіки, оптики.

тів, то $\angle D_1MD_2 = 90°$. Отже, точка M належить колу з діаметром D_1D_2.

У пункті 18 буде доведено, що кожна точка X зазначеного кола має таку властивість: $\frac{AX}{XC} = k$. Це коло називають **колом Аполлонія**.

Приклад. Побудуйте трикутник за його медіанами.

Розв'язання. На рисунку 16.7 відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — медіани трикутника ABC, які перетинаються в точці M.

На промені MB_1 позначимо точку B_2 таку, що $MB_1 = B_1B_2$.

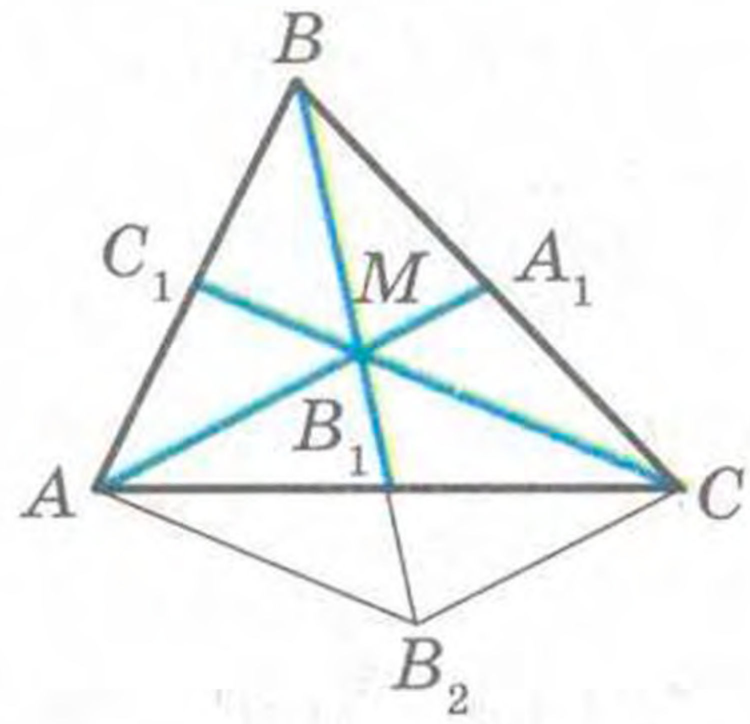


Рис. 16.7

У чотирикутнику $AMCB_2$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл, а отже, цей чотирикутник є паралелограмом. Звідси $CB_2 = AM$.

Оскільки $MB_1 = \frac{1}{2}BM$, то $MB_2 = BM$.

Для трикутника MCB_2 отримуємо: $CB_2 = AM = \frac{2}{3}AA_1$, $B_2M = \frac{2}{3}BB_1$, $MC = \frac{2}{3}CC_1$. Отже, трикутник MCB_2 можна побудувати за трьома сторонами.

Завершіть розв'язання самостійно.

1. Сформулюйте теорему про медіани трикутника.
2. Сформулюйте властивість бісектриси трикутника.
3. Сформулюйте властивість бісектриси зовнішнього кута трикутника.

ВПРАВИ

16.1.° Висота рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. На якій відстані від сторін трикутника знаходиться точка перетину його бісектрис?

16.2.° Медіана CD трикутника ABC дорівнює 9 см. Знайдіть довжини відрізків CO і OD, де O — точка перетину медіан трикутника ABC.

16.3.° Відрізок BD є бісектрисою трикутника ABC, $AB = 40$ см, $AD = 30$ см, $CD = 12$ см. Знайдіть відрізок BC.

16.4.° Відрізок AM — бісектриса трикутника ABC, $AB = 48$ см, $AC = 32$ см, $BM = 18$ см. Знайдіть відрізок BC.

16.5.° Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $AB = 28$ см, $BC = 20$ см, $AC = 36$ см. Знайдіть AD і CD.

16.6.° У трикутник ABC вписано ромб $CDEF$ так, що кут C у них спільний, а вершини D, E і F ромба належать відповідно сторонам AC, AB і BC трикутника. Знайдіть сторони AC і BC, якщо $AE = 30$ см, $BE = 12$ см, а периметр трикутника дорівнює 105 см.

16.7.° Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 65 см і 80 см. Коло, центр якого належить більшій стороні трикутника, дотикається до двох інших сторін. На які частини центр цього кола ділить сторону трикутника?

16.8.• Точки M і K — середини сторін AB і AD паралелограма $ABCD$ відповідно. Доведіть, що точка перетину прямих BK і DM належить діагоналі AC.

16.9.• Точки M і N — середини сторін BC і CD паралелограма $ABCD$ відповідно. Доведіть, що відрізки AM і AN ділять діагональ BD на три рівні частини.

16.10.• Доведіть, що коли дві медіани трикутника рівні, то цей трикутник — рівнобедрений.

16.11.• У трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено медіану AM і висоту BH. Знайдіть BH, якщо $AM = 45$ см, $\angle CAM = 30°$.

16.12.• Дано відрізок AB і точку O, яка не належить прямій AB. Побудуйте трикутник, для якого відрізок AB є стороною, а точка O — точкою перетину медіан.

16.13.• У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 42 см, а основа відноситься до бічної сторони як 6 : 11. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.

16.14.• Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, а центр вписаного кола поділяє медіану, проведену до основи, у відношенні 12 : 5. Знайдіть основу трикутника.

16.15.• У трикутнику ABC медіани, що виходять з вершин A і C, перпендикулярні. Знайдіть відношення медіани BM до сторони AC.

16.16.• Точки M і N — середини сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що коли $DM \perp AC$, то $BN : CD = 3 : 2$.

16.17.• Точка D — середина сторони AC трикутника ABC, відрізки DE і DF — бісектриси трикутників ABD і CBD відповідно. Доведіть, що $EF \parallel AC$.

16.18.• Побудуйте трикутник:

1) за стороною і кутами, які утворює ця сторона з медіанами, проведеними до двох інших сторін;
2) за двома медіанами і кутом між ними;
3) за висотою і медіаною, проведеними до однієї сторони, та кутом між цією стороною і медіаною, проведеною до іншої сторони.

16.19.• Побудуйте трикутник:

1) за стороною і медіанами, проведеними до двох інших сторін;
2) за висотою, проведеною до однієї із сторін, і медіанами, проведеними до двох інших сторін.

16.20.•• Точки K, L, M і N — відповідно середини сторін AB, BC, CD і DA чотирикутника $ABCD$. Прямі AL і CK перетинаються в точці P, прямі AM і CN перетинаються в точці Q. Доведіть, що коли чотирикутник $APCQ$ — паралелограм, то й чотирикутник $ABCD$ — також паралелограм.

16.21.•• У коло вписано квадрат $ABCD$. Хорда AE перетинає сторону CD у точці M, а хорда BE — у точці K. Доведіть, що $DM : MK = DE : EK$.

16.22.** У коло вписано рівносторонній трикутник ABC. Хорда AP перетинає медіану BD у точці K так, що $BK : KD = 1 : 6$. Знайдіть відношення $BP : PC$.

16.23.** Доведіть, що коли m_1, m_2, m_3 — довжини медіан трикутника, p — його півпериметр, то $m_1 + m_2 + m_3 > \frac{3}{2}p$.

16.24.* Побудуйте трикутник за кутом, медіаною, яка виходить з вершини цього кута, та іншою медіаною.

17. Подібні трикутники

На рисунку 17.1 ви бачите зменшене зображення обкладинки підручника з геометрії. Узагалі, у повсякденному житті часто зустрічаються об'єкти, що мають однакову форму, але різні розміри (рис. 17.2).

Рис. 17.1

Рис. 17.2

Геометричні фігури, які мають однакову форму, називають **подібними**. Наприклад, подібними є будь-які два квадрати, два кола, два рівносторонніх трикутники (рис. 17.3).

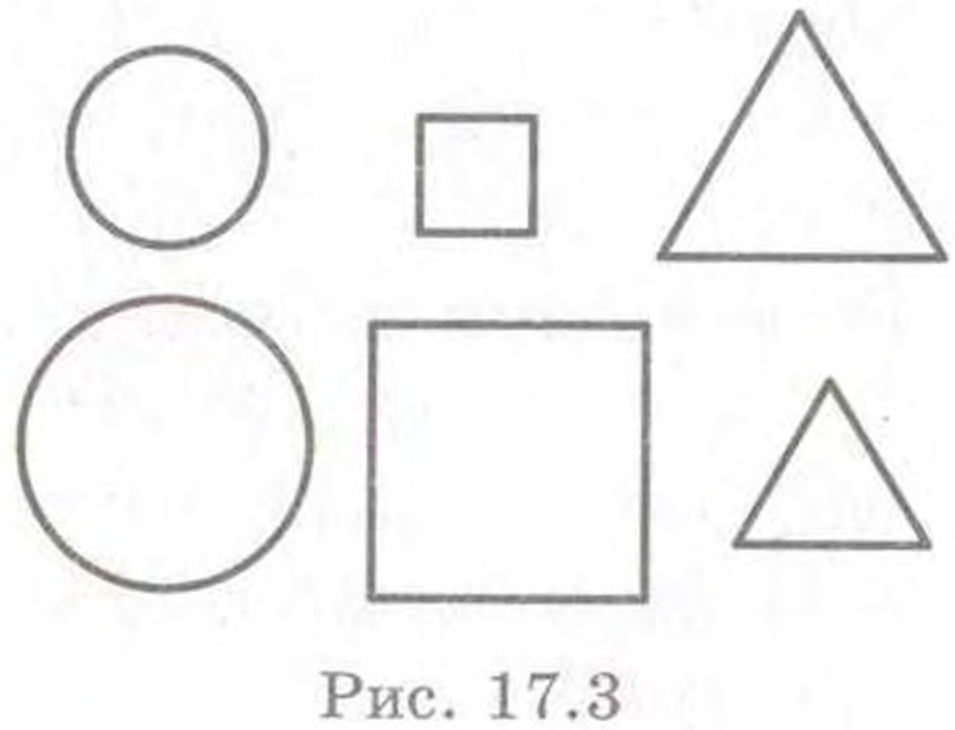


Рис. 17.3

На рисунку 17.4 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких рівні кути, тобто $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Сторони AB і A_1B_1 лежать проти рівних кутів C і C_1. Такі сторони

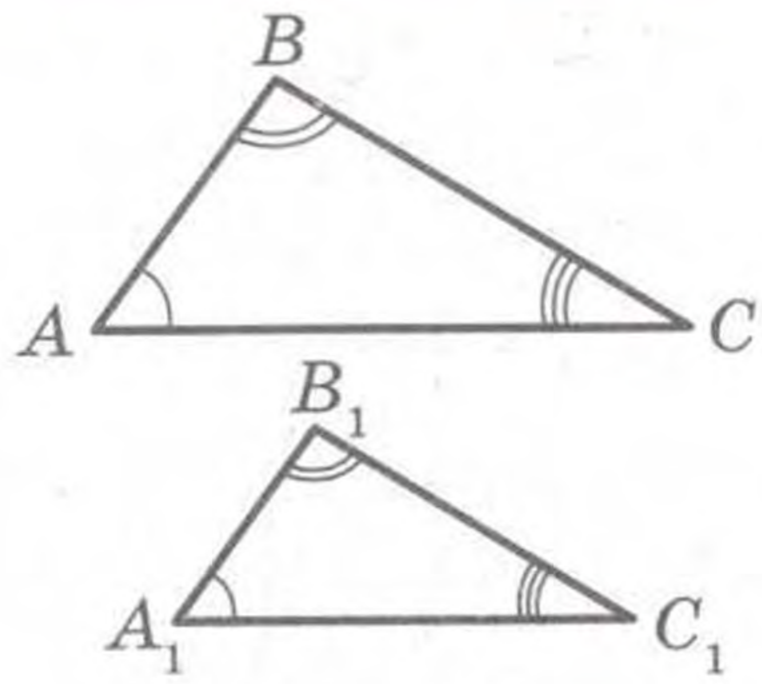


Рис. 17.4

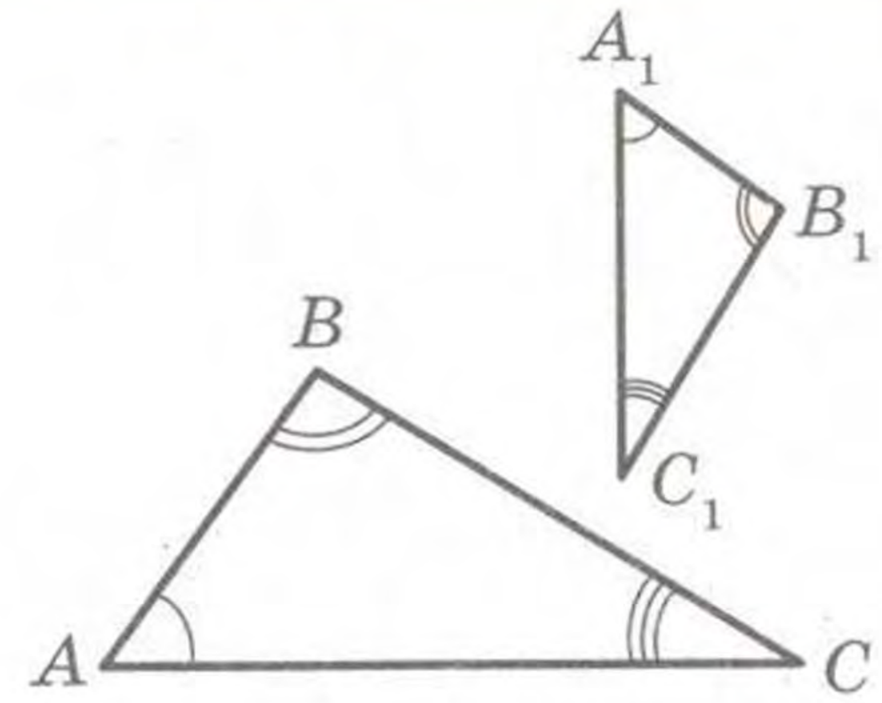


Рис. 17.5

називають **відповідними.** Відповідними також є сторони BC і B_1C_1, CA і C_1A_1.

Означення. Два трикутники називають подібними, якщо у них рівні кути і відповідні сторони пропорційні.

Наприклад, на рисунку 17.5 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$.

За означенням ці трикутники подібні. Пишуть: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (читають: «трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$»).

Число 2, яке дорівнює відношенню відповідних сторін, називають **коефіцієнтом подібності.** Кажуть, що трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$ з коефіцієнтом подібності, який дорівнює 2. Пишуть: $\Delta\ ABC \overset{2}{\sim} \Delta\ A_1B_1C_1$.

Оскільки $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{2}$, то можна також сказати, що трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом подібності, який дорівнює $\frac{1}{2}$. Пишуть:

$$\Delta\ A_1B_1C_1 \overset{\frac{1}{2}}{\sim} \Delta\ ABC.$$

З означення рівних трикутників випливає, що будь-які два рівних трикутники подібні з коефіцієнтом подібності, який дорівнює 1.

Якщо $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ і $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$. Доведіть цю властивість самостійно.

Лема[1] про подібні трикутники. ***Пряма, яка паралельна стороні трикутника і перетинає дві інші його сторони, відтинає від даного трикутника йому подібний.***

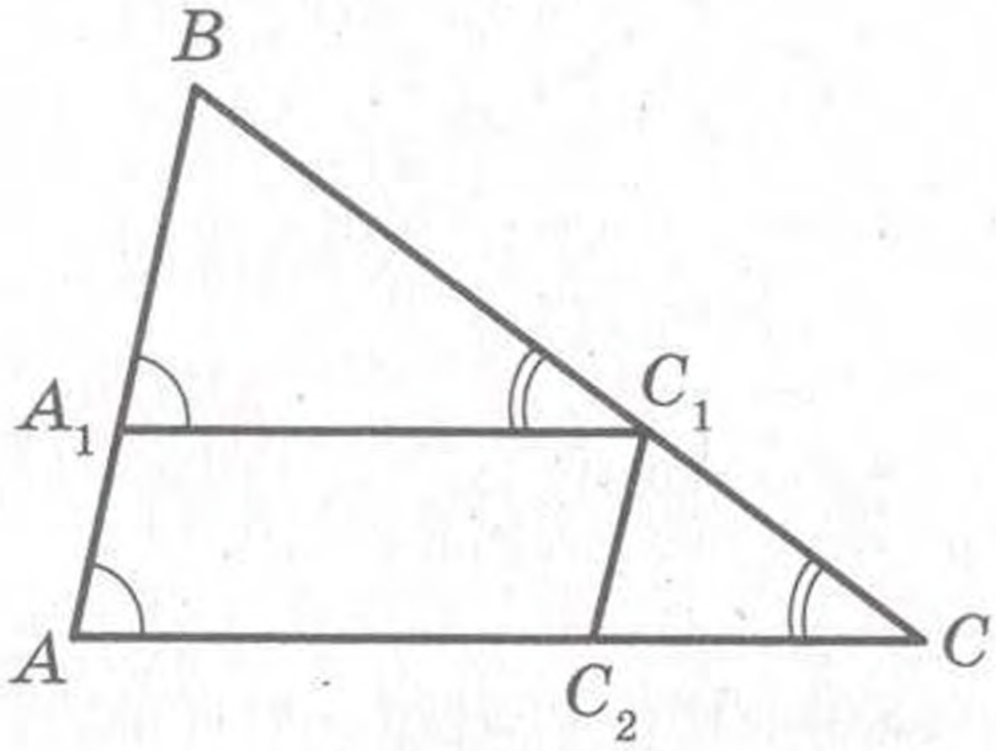


Рис. 17.6

Доведення. На рисунку 17.6 $A_1C_1 \parallel AC$. Доведемо, що $\Delta A_1BC_1 \backsim \Delta ABC$.

$\angle A$ і $\angle A_1$ та $\angle C$ і $\angle C_1$ рівні як відповідні при паралельних прямих A_1C_1 і AC та січних AB і CB відповідно. Отже, кути трикутників, що розглядаються, рівні.

Покажемо, що сторони BA і BC пропорційні відповідно сторонам BA_1 і BC_1.

За теоремою 15.2 $\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Звідси $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$.

Проведемо $C_1C_2 \parallel AB$. За теоремою 15.2 отримуємо, що $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{AC_2}$. Очевидно, що чотирикутник $AA_1C_1C_2$ — паралелограм. Тоді $AC_2 = A_1C_1$. Звідси $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Таким чином, доведено, що $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Отже, у трикутниках A_1BC_1 і ABC кути рівні і відповідні сторони пропорційні. Тому за означенням ці трикутники подібні. ▲

Задача. *Доведіть, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.*

Розв'язання. Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом подібності k. Тоді $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, звідки $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$.

Позначимо P_1 — периметр трикутника $A_1B_1C_1$, P — периметр трикутника ABC. Маємо:

[1] *Лемою* називають допоміжну теорему, яку використовують для доведення інших теорем.

$$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = kAB + kBC + kAC =$$
$$= k\,(AB + BC + AC) = kP,$$

тобто $\frac{P_1}{P} = k$.

?

1. Які два трикутники називають подібними?
2. Чому дорівнює коефіцієнт подібності двох подібних трикутників?
3. Сформулюйте лему про подібні трикутники.

ВПРАВИ

17.1.° На рисунку 17.7 зображено подібні трикутники ABC і DEF, рівні кути яких позначено однаковою кількістю дуг. Які сторони цих трикутників пропорційні? Запишіть відповідні рівності.

17.2.° Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, причому $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 9$ см. Знайдіть сторони B_1C_1 і A_1C_1.

17.3.° Сторони MK і DE та KT і EF — відповідні сторони подібних трикутників MKT і DEF, $MK = 18$ см, $KT = 16$ см, $MT = 28$ см, $MK : DE = 4 : 5$. Знайдіть сторони трикутника DEF.

17.4.° На рисунку 17.8 $AB \parallel CD$. Знайдіть на цьому рисунку подібні трикутники. Запишіть пропорції, які починаються з відношення: 1) $\frac{AB}{AE}$; 2) $\frac{CD}{AB}$; 3) $\frac{AE}{CE}$.

17.5.° Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторону AB у точці D, а сторону BC — у точці E.

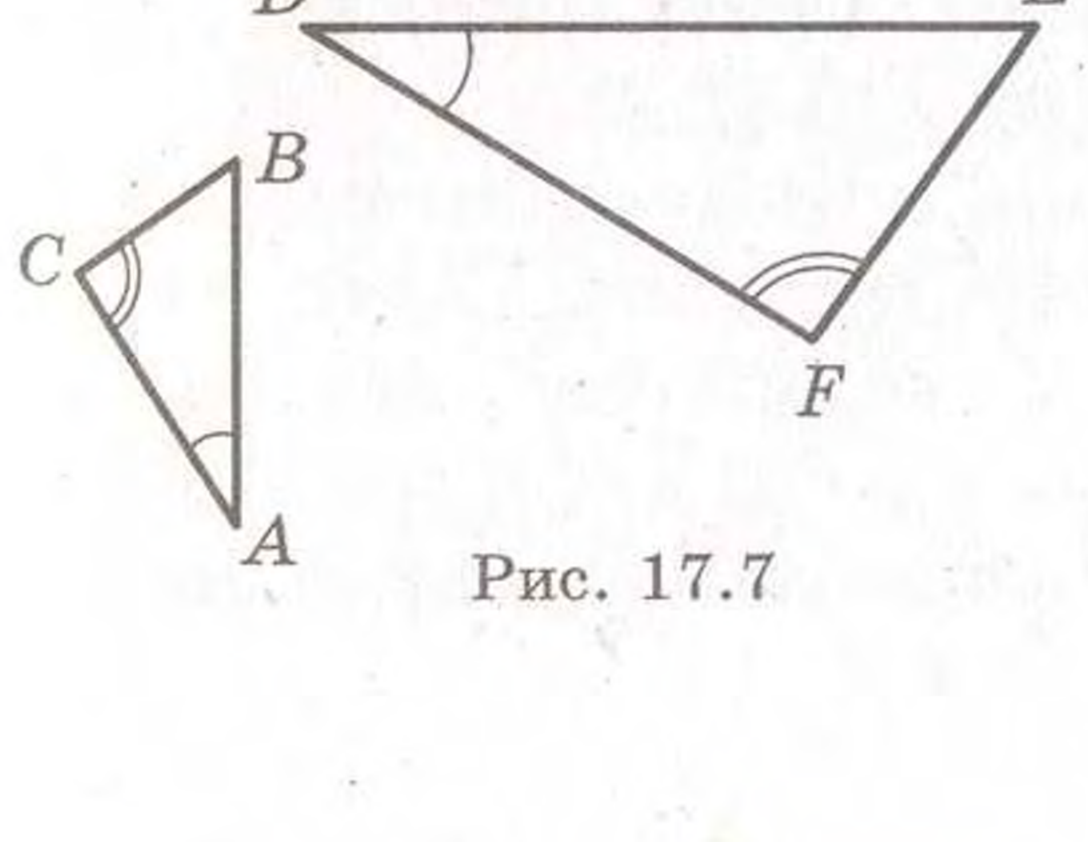


Рис. 17.7

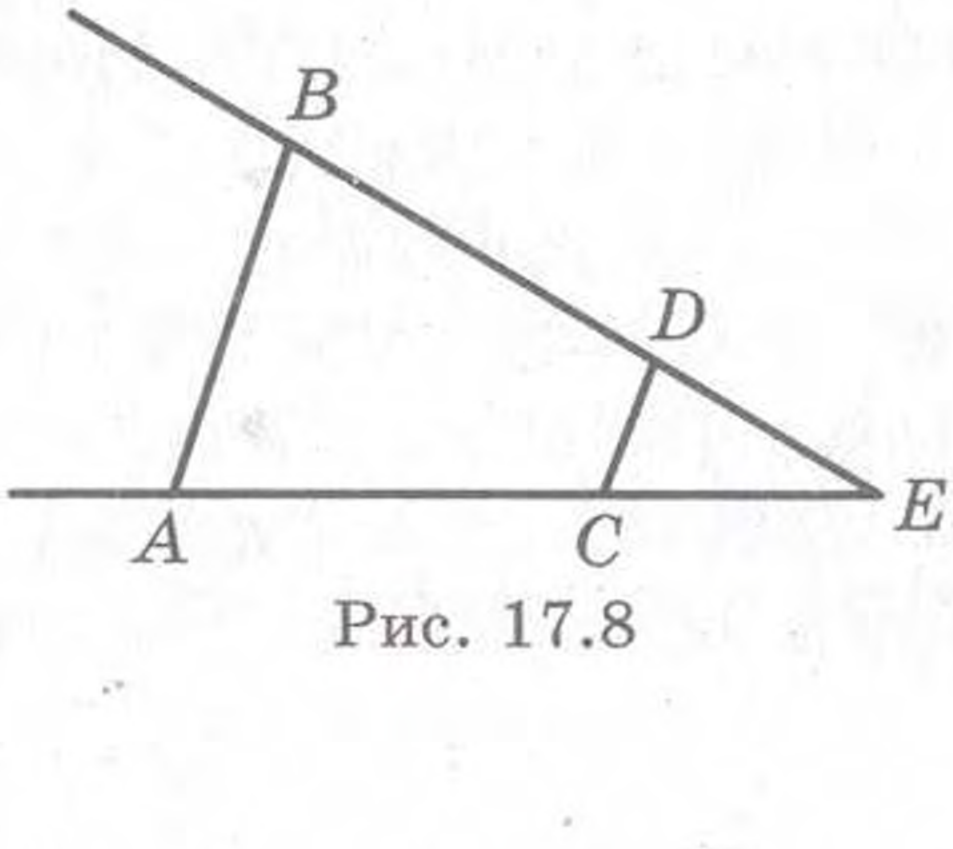


Рис. 17.8

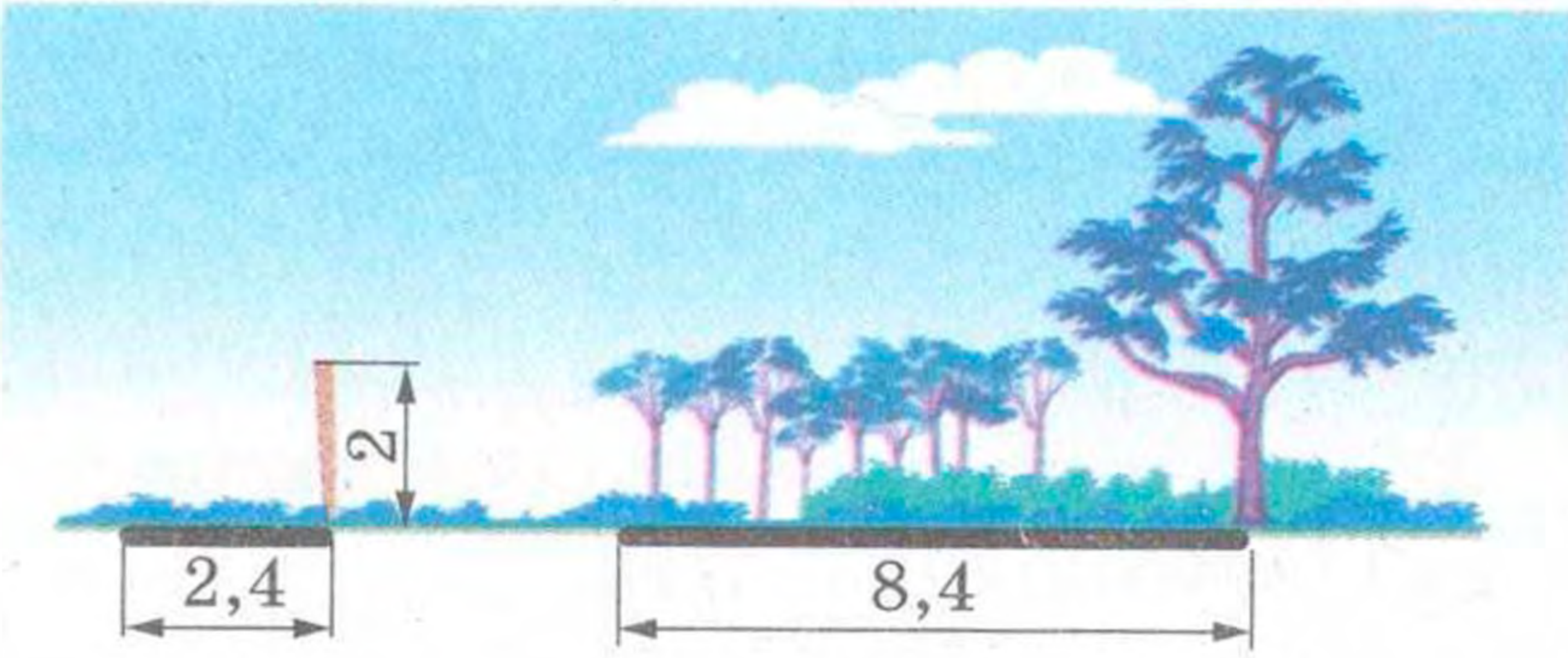


Рис. 17.9

1) Знайдіть відрізок BD, якщо $AB = 16$ см, $AC = 20$ см, $DE = 15$ см.
2) Знайдіть відрізок AD, якщо $AB = 28$ см, $BC = 63$ см, $BE = 27$ см.

17.6.° У трикутнику ABC $AB = 6$ см. Через точку M сторони AB проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці K. Знайдіть невідомі сторони трикутника ABC, якщо $AM = 4$ см, $MK = 8$ см, $AK = 9$ см.

17.7.° Знайдіть висоту дерева, якщо довжина його тіні дорівнює 8,4 м, а тінь від вертикального стовпа заввишки 2 м у той самий час дорівнює 2,4 м (рис. 17.9).

17.8.° Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E. Знайдіть CE, якщо $DE = 40$ см, $BC : AD = 4 : 5$.

17.9.° Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо більша основа AD дорівнює 42 см, $AB = 9$ см, $BM = 54$ см.

17.10.° Доведіть, користуючись означенням подібних трикутників, що будь-які два рівносторонніх трикутники подібні.

17.11.° Точки M і K — відповідно середини сторін CD і AD квадрата $ABCD$. Користуючись означенням подібних трикутників, доведіть, що $\triangle MDK \backsim \triangle BCD$.

17.12.° Сторони трикутника відносяться як 5 : 4 : 7. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якому: 1) периметр дорівнює 64 см; 2) менша сторона дорівнює 24 см.

17.13.° Сторони даного трикутника дорівнюють 15 см, 25 см і 35 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника,

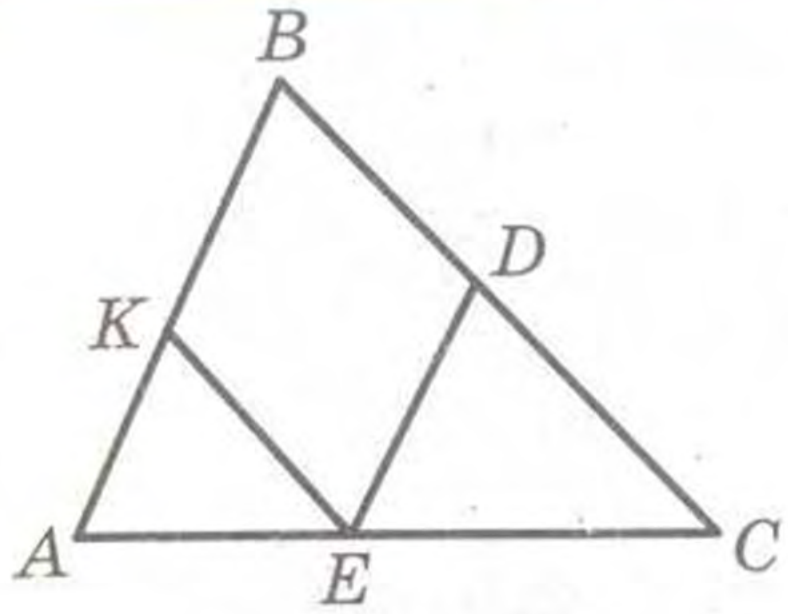


Рис. 17.10

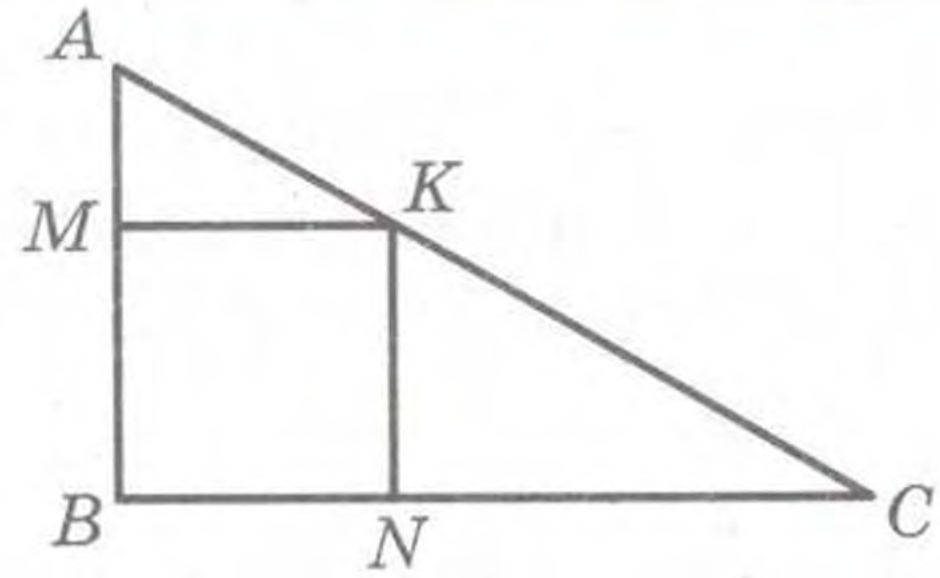


Рис. 17.11

у якому: 1) периметр дорівнює 45 см; 2) різниця найбільшої і найменшої сторін дорівнює 16 см.

17.14.° На рисунку 17.10 зображено трикутник ABC і вписаний у нього ромб $BDEK$. Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = 10$ см, $BC = 15$ см.

17.15.° На рисунку 17.11 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle B = 90°$) і вписаний у нього квадрат $BMKN$. Знайдіть CN, якщо $BM = 6$ см, $AB = 10$ см.

17.16.° Два кола з центрами O_1 і O_2 і радіусами 8 см і 12 см відповідно мають зовнішній дотик у точці A. Їх спільна зовнішня дотична перетинає пряму O_1O_2 у точці B. Знайдіть відстані від точки B до центрів даних кіл.

17.17.* Точка D належить стороні AC трикутника ABC. Точки M і N належать сторонам AB і BC відповідно, F — точка перетину відрізків MN і BD. Доведіть, що коли $MN \parallel AC$, то $\frac{MF}{FN} = \frac{AD}{DC}$.

17.18.* Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Через середину висоти трикутника, опущеної на його основу, проведено пряму, паралельну бічній стороні. Знайдіть периметр трикутника, який ця пряма відтинає від даного.

17.19.* У рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а бічна сторона — 18 см, вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику цього кола до бічних сторін трикутника.

17.20.** У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$, відрізок BD — бісектриса. Знайдіть BD.

17.21.** Через точку перетину діагоналей трапеції проведено пряму, яка паралельна основам і перетинає бічні сторони трапеції в точках M і K. Знайдіть MK, якщо основи трапеції дорівнюють a і b.

17.22.* Побудуйте трикутник за двома сторонами і бісектрисою, проведеною до третьої сторони.

18. Перша ознака подібності трикутників

Якщо для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ виконуються умови $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, то за означенням ці трикутники подібні.

Чи можна за меншою кількістю умов визначати подібність трикутників? На це запитання відповідають ознаки подібності трикутників.

Теорема 18.1 (перша ознака подібності трикутників: за двома кутами). ***Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.***

Рис. 18.1

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Якщо $AB = A_1B_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ за другою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $AB > A_1B_1$. Відкладемо на стороні BA відрізок BA_2, який дорівнює стороні B_1A_1. Через точку A_2 проведемо пряму A_2C_2, паралельну стороні AC (рис. 18.1).

Кути A і BA_2C_2 є відповідними при паралельних прямих A_2C_2 і AC та січній AB. Звідси $\angle A = \angle BA_2C_2$. Отже, $\Delta A_2BC_2 = \Delta A_1B_1C_1$ за другою ознакою рівності трикутників. За лемою про подібні трикутники $\Delta A_2BC_2 \backsim \Delta ABC$. Отже, $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$. ▲

Приклад 1. Середня лінія трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 24 см, а її діагоналі перетинаються в точці O,

$AO : OC = 5 : 3$. Знайдіть основи трапеції.

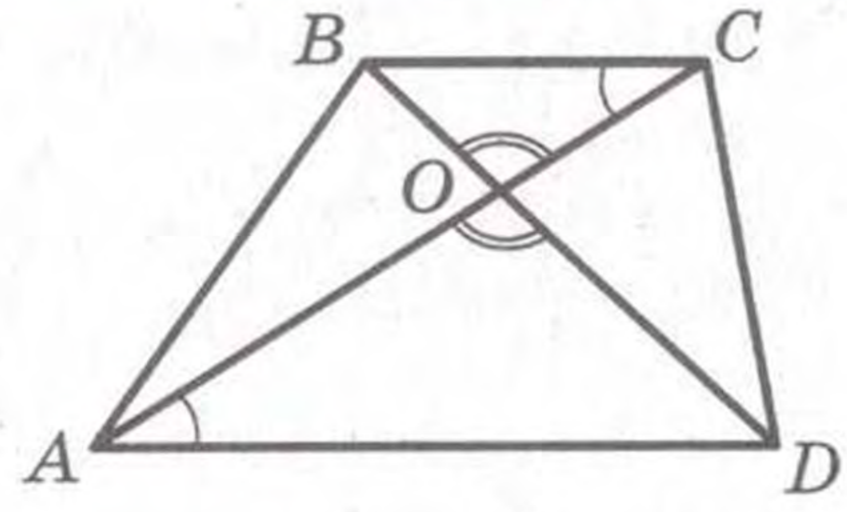


Рис. 18.2

Розв'язання. Розглянемо трикутники AOD і COB (рис. 18.2). Кути AOD і BOC рівні як вертикальні, кути CAD і ACB рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC. Отже, $\triangle AOD \sim \triangle COB$ за двома кутами.

Тоді $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{OC} = \frac{5}{3}$.

Оскільки середня лінія трапеції дорівнює 24 см, то $BC + AD = 48$ см.

Нехай $BC = 3x$ см, тоді $AD = 5x$ см.

Маємо: $3x + 5x = 48$; $x = 6$.

Отже, $BC = 18$ см, $AD = 30$ см.

Відповідь: 18 см, 30 см.

Приклад 2. У трикутнику ABC ($AB \neq BC$) BD_1 — бісектриса, BD_2 — бісектриса зовнішнього кута при вершині B. На відрізку D_1D_2 як на діаметрі побудовано коло (рис. 18.3). Доведіть, що для будь-якої точки X цього кола виконується рівність $\frac{AX}{XC} = \frac{AB}{BC}$.

Розв'язання. Якщо точка X збігається з точкою D_1 або з точкою D_2, то твердження задачі випливає з властивостей бісектриси кута трикутника і бісектриси зовнішнього кута трикутника.

Нехай X — довільна точка кола, відмінна від точок D_1 і D_2. Через точку C проведемо пряму, паралельну прямій AX. Нехай ця пряма перетинає пряму XD_1 у точці K, а пряму XD_2 — у точці E.

$\triangle AD_1X \sim \triangle CD_1K$. Звідси

$$\frac{AX}{CK} = \frac{AD_1}{D_1C}. \quad (1)$$

$\triangle AD_2X \sim \triangle CD_2E$. Звідси

$$\frac{AX}{CE} = \frac{AD_2}{D_2C}. \quad (2)$$

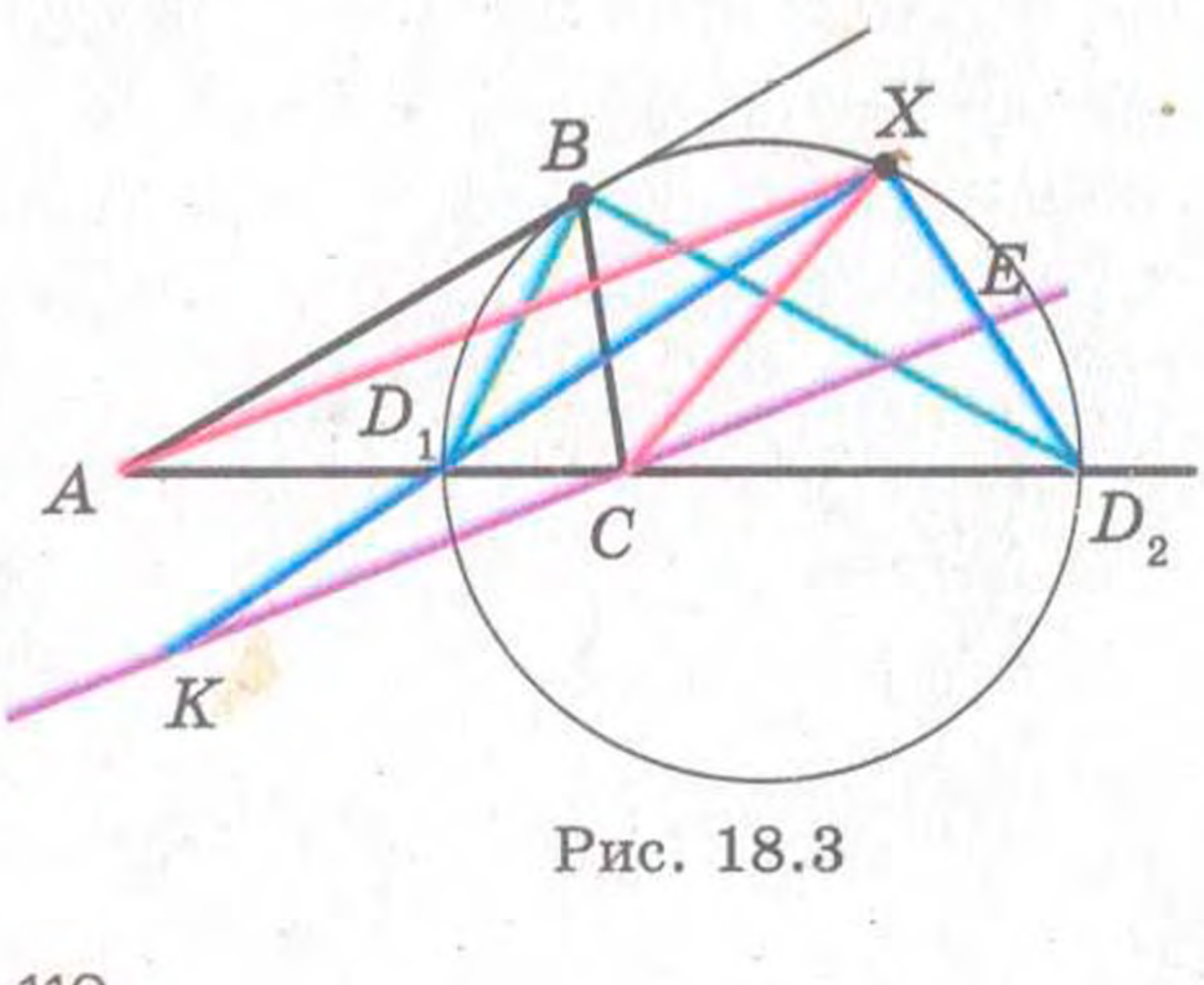


Рис. 18.3

Але за властивостями бісектриси кута трикутника і бісектриси зовнішнього кута трикутника $\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AD_2}{D_2C} = \frac{AB}{BC}$. Тоді з рівностей (1) і (2) отримуємо:

$$\frac{AX}{CK} = \frac{AX}{CE}.$$

Звідси $CK = CE$.

Оскільки D_1D_2 — діаметр, то $\angle KXE = 90°$. У прямокутному трикутнику KXE відрізок XC — медіана, проведена до гіпотенузи KE. Звідси $XC = KC$. З урахуванням рівності (1) запишемо: $\frac{AX}{XC} = \frac{AX}{CK} = \frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AB}{BC}$.

Цей приклад і ключова задача 2 п. 16 дозволяють зробити такий висновок:

геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок є заданим додатним числом, відмінним від 1, — це коло (***коло Аполлонія***).

Задача 1 (властивість хорд, які перетинаються). *Доведіть, що коли хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, то* $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ (рис. 18.4).

Розв'язання. Розглянемо трикутники ACM і DBM. Маємо: $\angle 3$ і $\angle 4$ рівні як вертикальні, $\angle 1$ і $\angle 2$ рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу. Отже, $\triangle ACM \sim \triangle DBM$ за першою ознакою подібності трикутників. Тоді $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$. Звідси $AM \cdot MB = DM \cdot MC$.

Задача 2 (властивість дотичної та січної). *Доведіть, що коли через точку A до кола проведено дотичну AM (M — точка дотику) і пряму (січну), яка перетинає коло в точках B і C* (рис. 18.5), *то* $AM^2 = AC \cdot AB$.

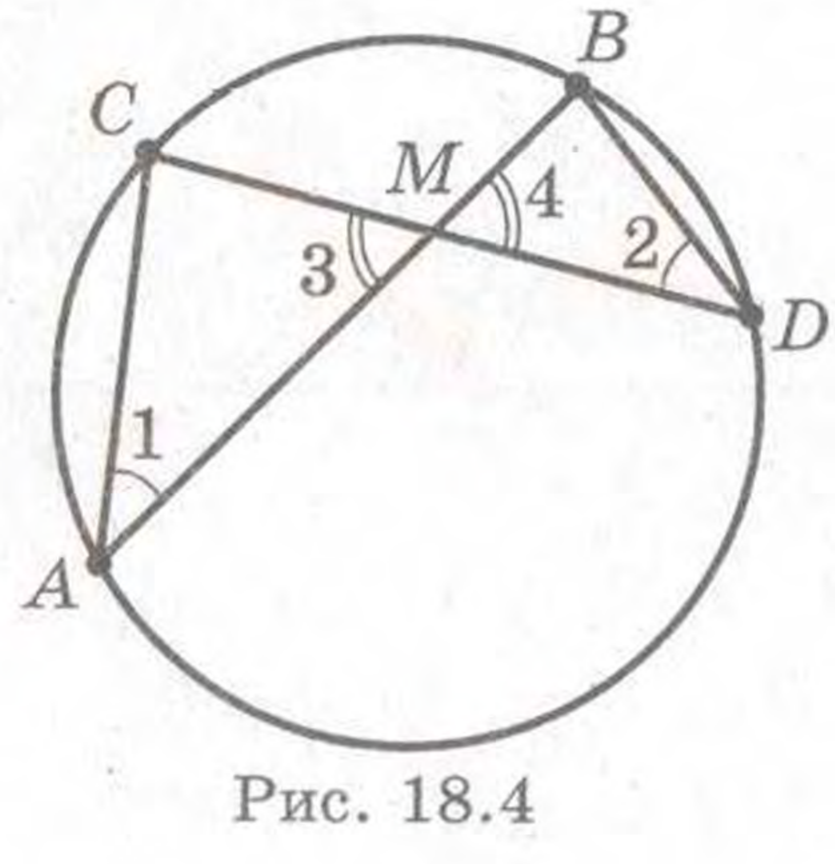


Рис. 18.4

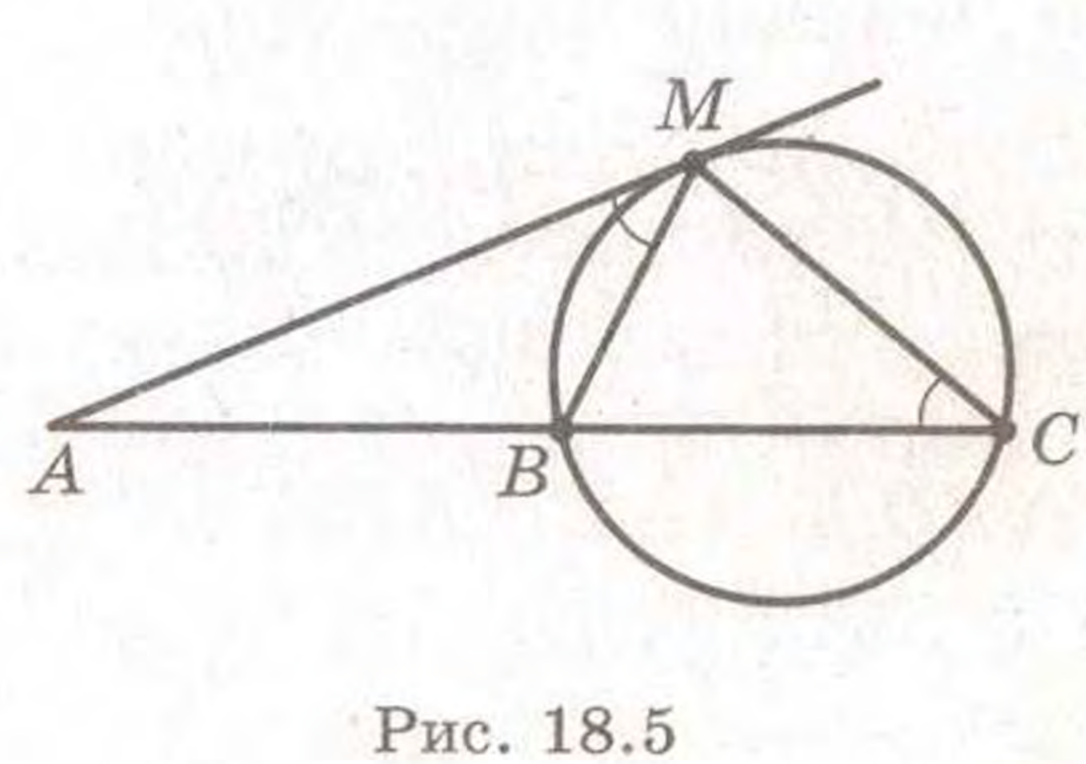


Рис. 18.5

Розв'язання. Розглянемо трикутники AMB і ACM. У них кут A — спільний. За властивістю кута між дотичною і хордою (див. ключову задачу 1 п. 12) маємо $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MB$. Оскільки кут MCB — вписаний, то $\angle MCB = \frac{1}{2} \cup MB$. Звідси $\angle AMB = \angle MCB$. Отже, $\Delta AMB \sim \Delta ACM$ за першою ознакою подібності трикутників. Тоді $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$. Звідси $AM^2 = AC \cdot AB$.

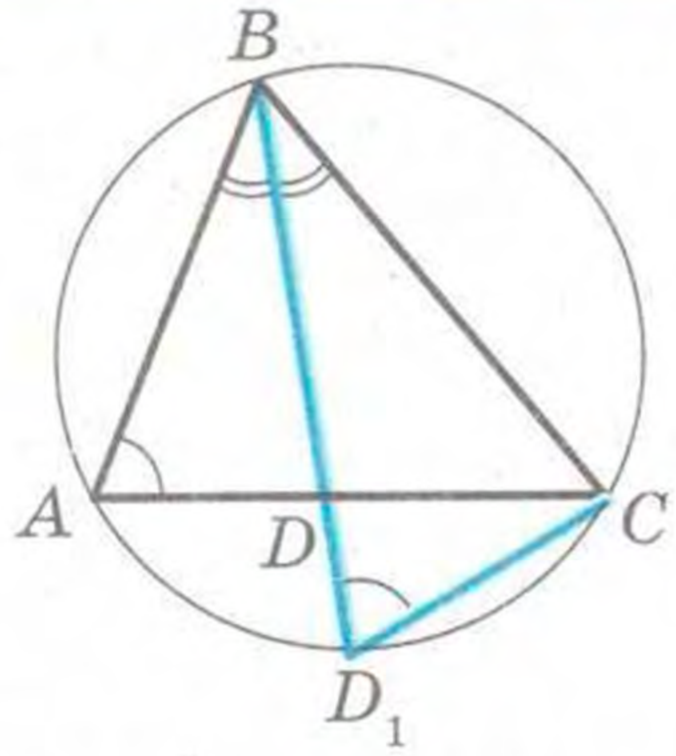


Рис. 18.6

Задача 3. *У трикутнику ABC проведено бісектрису BD. Доведіть, що $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$* (рис. 18.6).

Розв'язання. Нехай промінь BD перетинає описане коло трикутника ABC у точці D_1. Маємо: кути BAC і BD_1C рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу; $\angle ABD = \angle D_1BC$. Тоді $\Delta ABD \sim \Delta D_1BC$. Звідси $\frac{AB}{BD_1} = \frac{BD}{BC}$, тобто $AB \cdot BC = BD_1 \cdot BD$. Оскільки $BD_1 = BD + DD_1$, то можна записати $AB \cdot BC = BD^2 + BD \cdot DD_1$. Застосовуючи ключову задачу 1, отримаємо $BD \cdot DD_1 = AD \cdot DC$. Тоді $AB \cdot BC = BD^2 + AD \cdot DC$. Звідси $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.

Теорема 18.2 (теорема Птолемея[1]). ***Добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.***

Доведення. На діагоналі AC вписаного чотирикутника $ABCD$ (рис. 18.7) візьмемо точку K таку, що $\angle 1 = \angle 2$.

$\Delta ABK \sim \Delta DBC$ за першою ознакою подібності трикутників (кути 3 і 4 рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу). Звідси $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$, тобто

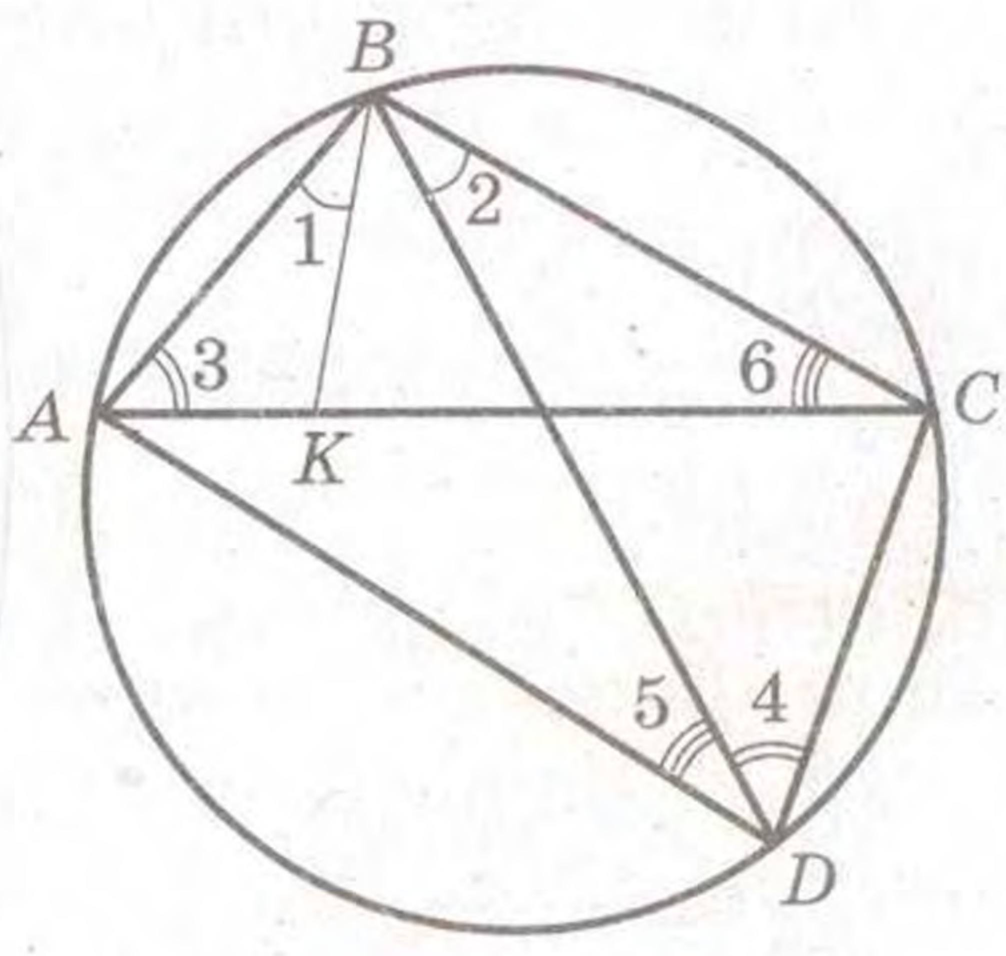


Рис. 18.7

[1] *Клавдій Птолемей* (бл. 90 — бл. 160) — давньогрецький математик і астроном.

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \qquad (3)$$

Зрозуміло, що $\angle ABD = \angle KBC$. Також кути 5 і 6 рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу. Тому $\Delta KBC \backsim \Delta ABD$. Звідси $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$, тобто

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \qquad (4)$$

Додавши рівності (3) і (4), отримуємо:

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC, \text{ тобто}$$

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD\,(AK + KC) = BD \cdot AC. \ \blacktriangle$$

Приклад 3. Нехай M — довільна точка описаного кола рівностороннього трикутника ABC. Доведіть, що один з відрізків MA, MB, MC дорівнює сумі двох інших.

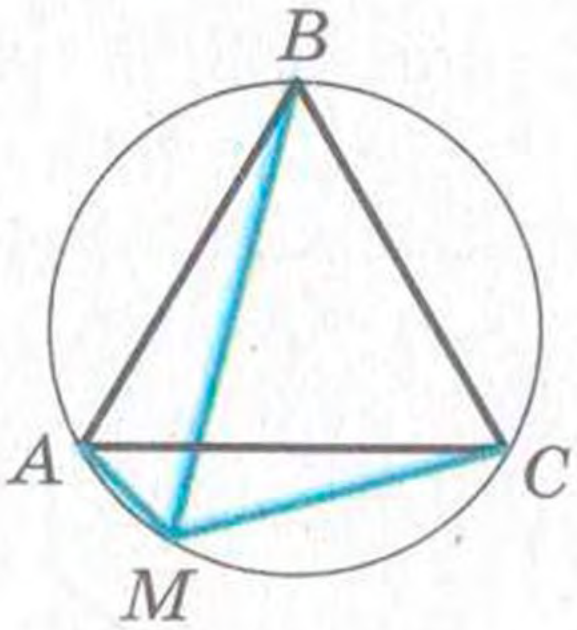


Рис. 18.8

Розв'язання. Якщо точка M збігається з однією з вершин трикутника ABC, то твердження задачі очевидне.

Нехай, наприклад, точка M належить дузі AC, причому відмінна від її кінців (рис. 18.8). Чотирикутник $MABC$ є вписаним. Тоді за теоремою Птолемея $AC \cdot MB = AB \cdot MC + BC \cdot MA$. Оскільки $AB = BC = AC$, то $MB = MC + MA$.

?

1. Сформулюйте першу ознаку подібності трикутників.
2. Сформулюйте властивість хорд, які перетинаються.
3. Сформулюйте властивість дотичної та січної, проведених до кола через одну точку.

ВПРАВИ

18.1.° На рисунку 18.9 $\angle BAC = \angle BED$. Чи подібні трикутники ABC і EDB? У разі позитивної відповіді вкажіть пари відповідних сторін.

18.2.° На рисунку 18.10 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажіть усі пари подібних трикутників, які є на цьому рисунку.

18.3.° На рисунку 18.11 $\angle ABC = \angle BDC$. Які трикутники на цьому рисунку подібні? Запишіть рівність відношень їх відповідних сторін.

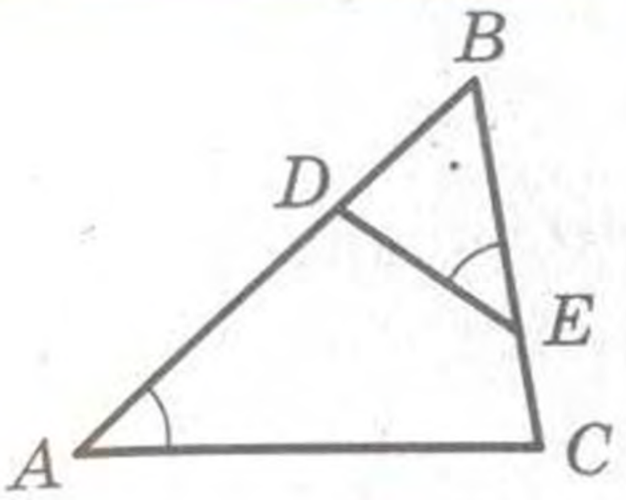


Рис. 18.9

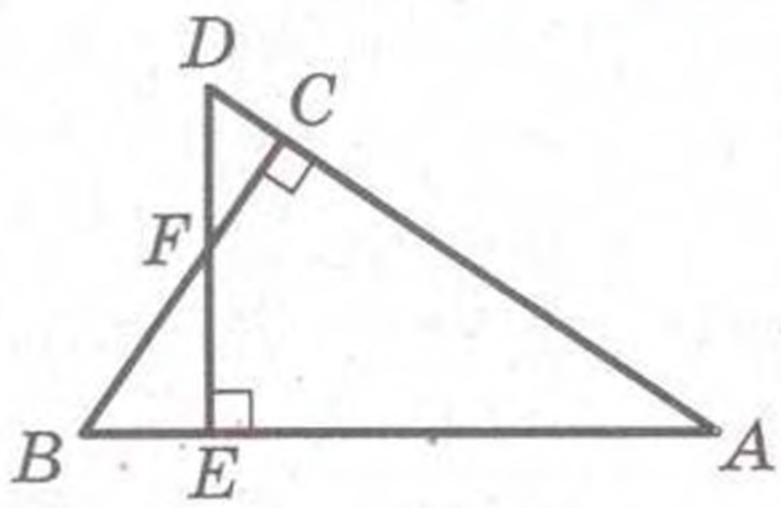


Рис. 18.10

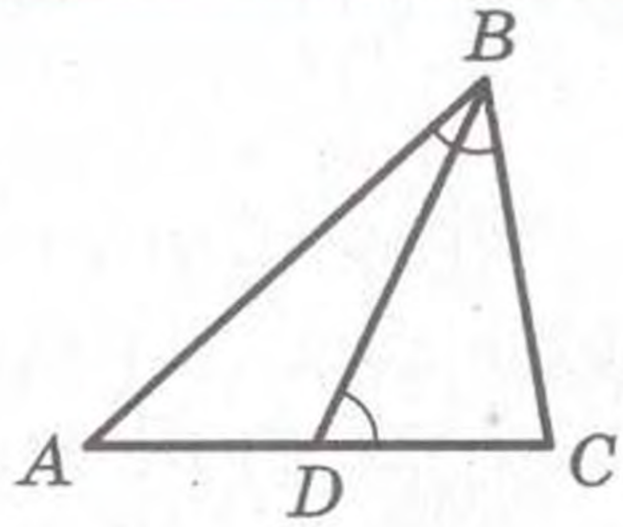


Рис. 18.11

18.4.° Укажіть пари подібних трикутників, зображених на рисунку 18.12, знайдіть довжину відрізка x (розміри дано в сантиметрах).

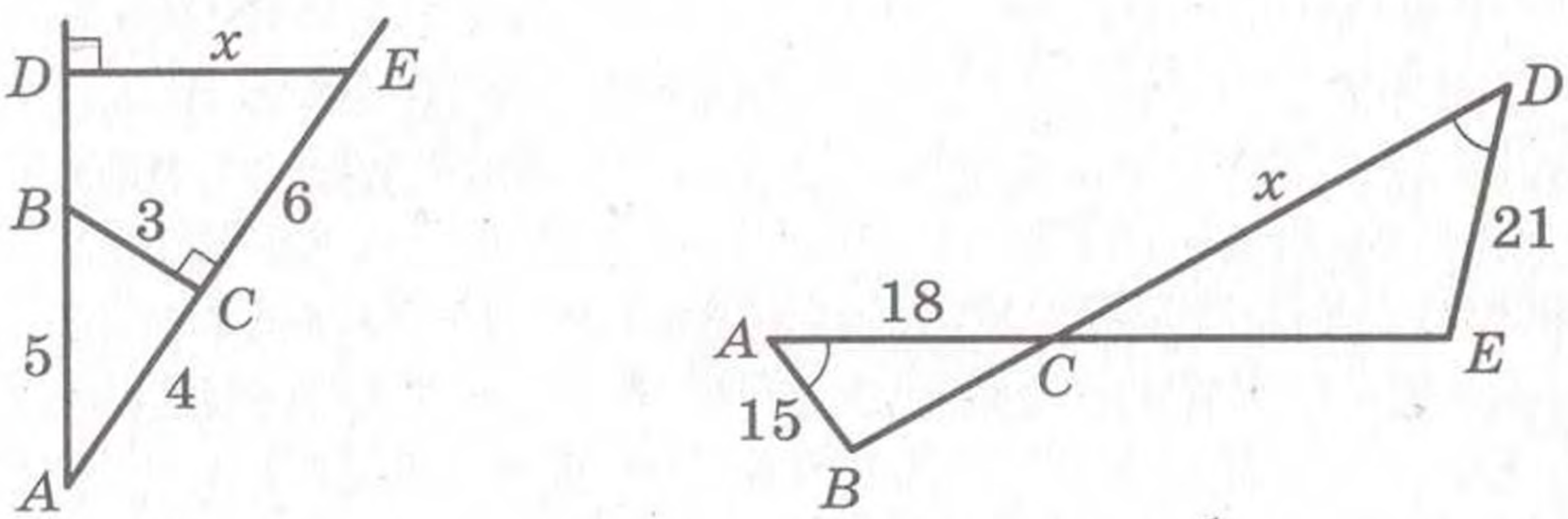


Рис. 18.12

18.5.° На стороні CD паралелограма $ABCD$ (рис. 18.13) позначено точку E, прямі BE і AD перетинаються в точці F, $CE = 8$ см, $DE = 4$ см, $BE = 10$ см, $AD = 9$ см. Знайдіть відрізки EF і FD.

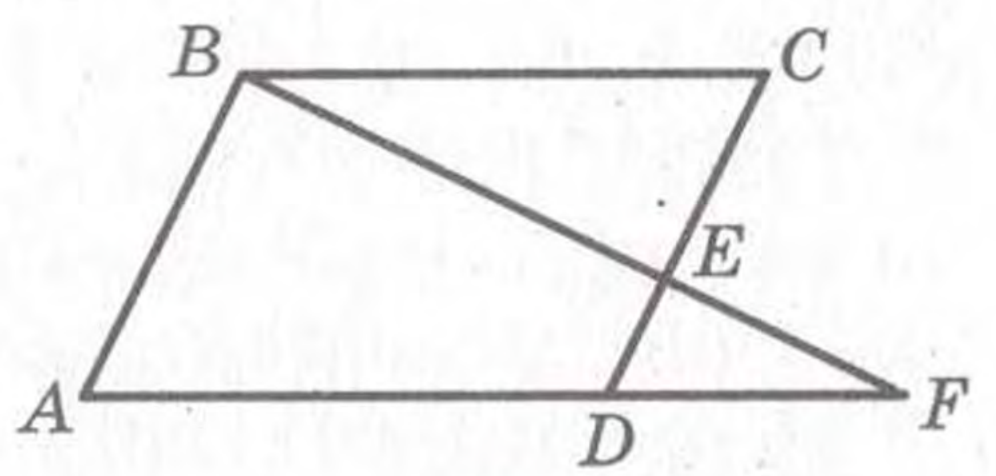


Рис. 18.13

18.6.° У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AD = 20$ см, $BC = 15$ см, O — точка перетину діагоналей, $AO = 16$ см. Знайдіть OC.

18.7.° Діагоналі трапеції $ABCD$ з основами BC і AD перетинаються в точці O, $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ см. Знайдіть основу AD.

18.8.° У трапеції $ABCD$ з основами BC і AD діагоналі перетинаються в точці O, $BO = 4$ см, $OD = 20$ см, $AC = 36$ см. Знайдіть відрізки AO і OC.

18.9.° У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AD = 18$ см, $BC = 14$ см, $AC = 24$ см. Знайдіть відрізки, на які діагональ AC ділиться точкою перетину діагоналей.

18.10.° Чи подібні рівнобедрені трикутники, якщо в них є:

1) по рівному гострому куту;

2) по прямому куту;

3) по рівному тупому куту?

18.11.° З вершини прямого кута трикутника проведено висоту до гіпотенузи. Скільки подібних трикутників утворилося при цьому?

18.12.° Сторони паралелограма дорівнюють 20 см і 14 см, висота, проведена до більшої сторони, — 7 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до меншої сторони.

18.13.° Доведіть, що в подібних трикутниках бісектриси, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.

18.14.° Доведіть, що в подібних трикутниках висоти, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.

18.15.° Основи BC і AD трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 28 см і 63 см, $\angle ABC = \angle ACD$. Знайдіть діагональ AC.

18.16.° На стороні AC трикутника ABC позначено точку D таку, що $\angle ABD = \angle C$, $AB = 20$ см, $BC = 28$ см, $AC = 40$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутника ABD.

18.17.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 20 см, а більший катет — 16 см. Знайдіть відрізки, на які серединний перпендикуляр гіпотенузи ділить більший катет.

18.18.° Поясніть за допомогою рисунка 18.14, як можна знайти ширину BM річки, використовуючи подібність трикутників.

18.19.° Зображення дерева, віддаленого на 60 м від об'єктива фотоапарата, має на плівці висоту 8 мм (рис. 18.15).

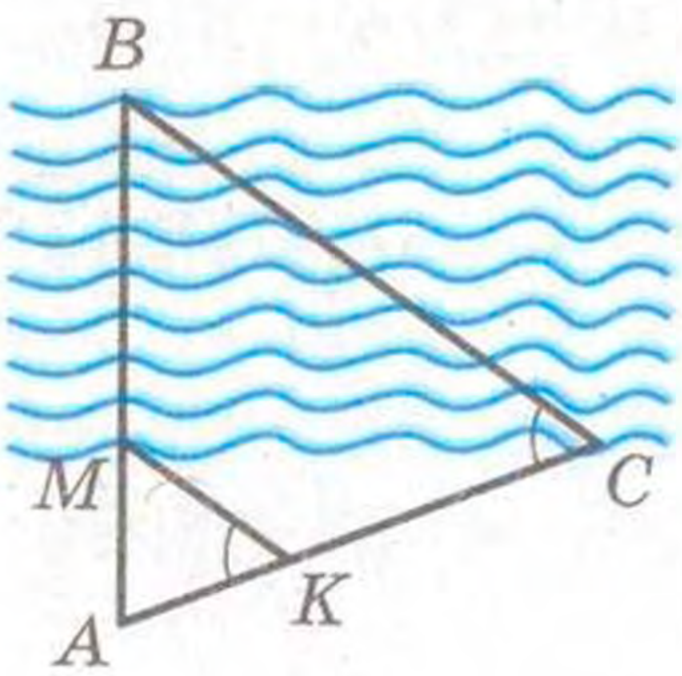


Рис. 18.14

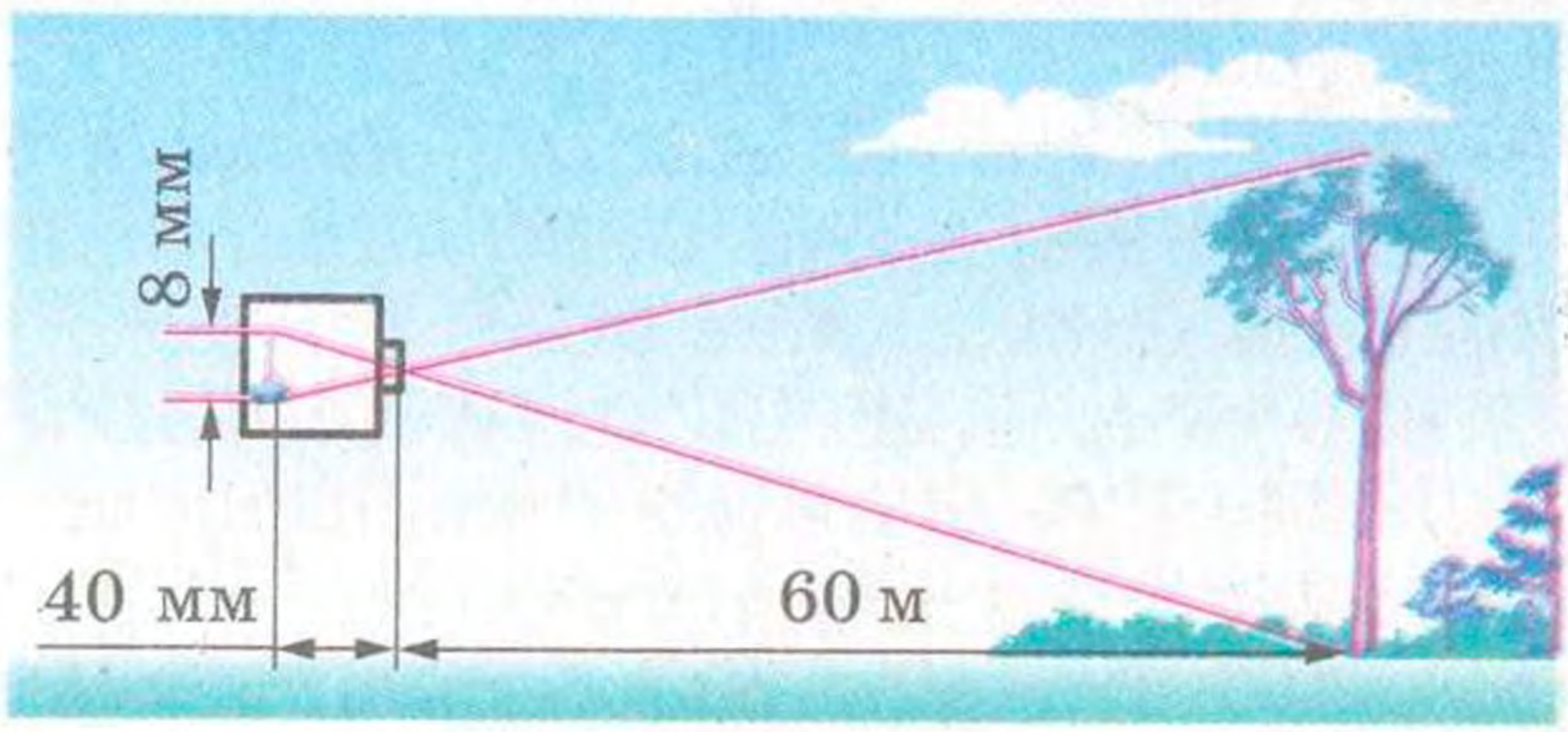


Рис. 18.15

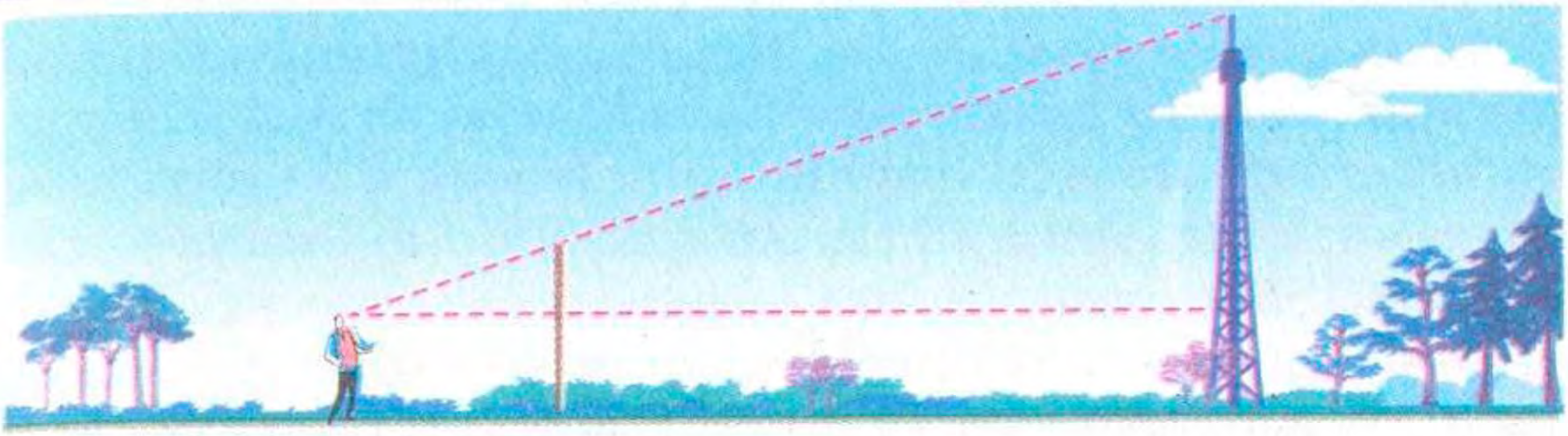


Рис. 18.16

Відстань від об'єктива до зображення дорівнює 40 мм. Яка висота дерева?

18.20.° Знайдіть висоту вежі (рис. 18.16), якщо відстань від спостерігача до жердини дорівнює 1,5 м, до вежі — 39 м, висота жердини — 3 м, а зріст спостерігача — 1,8 м.

18.21.° Чи може пряма перетинати дві сторони рівнобедреного трикутника, відтинати від нього трикутник, йому подібний, і не бути паралельною третій стороні?

18.22.° Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, $AM = 6$ см, $BM = 14$ см, $CM = 12$ см. Знайдіть відрізок DM.

18.23.° Хорди MK і NP кола перетинаються в точці F, $MF = 9$ см, $KF = 12$ см, а відрізок NF у 3 рази довший за відрізок PF. Знайдіть довжину хорди NP.

18.24.° Точка K ділить хорду AC кола навпіл, а хорду DE — на відрізки завдовжки 2 см і 32 см. Знайдіть довжину хорди AC.

18.25.• На хорді AB позначено точку M. Доведіть, що $MA \cdot MB = R^2 - d^2$, де R — радіус кола, d — відстань від точки M до центра кола.

18.26.• Точка E ділить хорду CD кола на відрізки завдовжки 15 см і 16 см. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від точки E до центра кола дорівнює 4 см.

18.27.• Хорда MK ділиться точкою P на два відрізки завдовжки 8 см і 12 см. Знайдіть відстань від точки P до центра кола, якщо його радіус дорівнює 11 см.

18.28.• Через точку A проведено до кола дотичну AM (M — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках K і P (точка K лежить між точками A і P). Знайдіть KP, якщо $AM = 12$ см, $AP = 18$ см.

18.29.* Через точку A, яка лежить поза колом, проведено дві прямі, одна з яких дотикається до кола в точці B, а друга перетинає коло в точках C і D (точка C лежить між точками A і D), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. Знайдіть AD.

18.30.* Через точку A, яка лежить поза колом, проведено дві прямі, одна з яких перетинає коло в точках B і C (точка B лежить між точками A і C), а друга — у точках D і E (точка D лежить між точками A і E).

1) Доведіть, що $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

2) Знайдіть AE, якщо $AB = 18$ см, $BC = 12$ см і $AD : DE = 5 : 7$.

18.31.* Через точку M поза колом проведено пряму, яка перетинає дане коло в точках A і B. Доведіть, що $MA \cdot MB = d^2 - R^2$, де R — радіус кола, d — відстань від точки M до центра кола.

18.32.* У колі, радіус якого дорівнює 8 см, проведено хорду AB. На прямій AB поза відрізком AB позначено точку C таку, що $AC : BC = 1 : 4$. Знайдіть відстань від точки C до центра кола, якщо $AB = 9$ см.

18.33.* У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона відповідно дорівнюють 5 см і 20 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену до бічної сторони.

18.34.* У трикутнику ABC $BC = 18$ см, $AC = 15$ см, $AB = 12$ см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену до сторони BC.

18.35.* У трикутник ABC вписано квадрат так, що дві його сусідні вершини належать стороні AC, а дві інші — сторонам AB і BC відповідно. Знайдіть сторону квадрата, якщо $AC = a$, а висота, проведена до сторони AC, дорівнює h.

18.36.* У трикутнику ABC $BC = 72$ см, AD — висота, $AD = 24$ см. У даний трикутник вписано прямокутник $MNKP$ так, що вершини M і P належать стороні BC, а вершини N і K — сторонам AB і AC відповідно. Знайдіть сторони прямокутника, якщо $MP : MN = 9 : 5$.

18.37.* Через вершини B і C трикутника ABC проходить коло, яке перетинає сторони AB і AC у точках K і M відповідно. Знайдіть MK і AM, якщо $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см, $AK = 1$ см.

18.38.•• На продовженні бісектриси CF трикутника ABC за точку C позначили точку D так, що $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ACB$. Доведіть, що $CD^2 = AC \cdot CB$.

18.39.•• Продовження медіани AM трикутника ABC перетинає його описане коло в точці D. Відомо, що $AC = DC = 1$ см. Знайдіть сторону BC.

18.40.•• У коло вписано трикутник, одна із сторін якого дорівнює 21 см. Паралельно цій стороні через точку перетину медіан проведено хорду. Відрізки хорди, розміщені поза трикутником, дорівнюють 8 см і 11 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

18.41.•• У коло вписано трикутник ABC, у якому проведено медіани AF і BK. Медіану AF продовжено до перетину з колом у точці D. Знайдіть сторони AC і BC, якщо $BK = 63$ см, $AF = 45$ см, $FD = 24{,}2$ см.

18.42.•• Висоти AA_1, BB_1 і CC_1 гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

18.43.•• Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC. Відомо, що $AB - BD = 4$ см, $AC + CD = 9$ см. Знайдіть відрізок AD.

18.44.•• У кут вписано два кола. Точки A і B — точки дотику першого кола до сторін кута, точки A_1 і B_1 — точки дотику другого кола (рис. 18.17). Відрізок AB_1 перетинає ці кола в точках C і C_1. Доведіть, що $AC = B_1C_1$.

18.45.•• В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle BAC = \angle CBD$ і $\angle BCA = \angle CDB$. Через точки A, D і точку перетину діагоналей чотирикутника проведено коло. Через точки B і C до кола провели дотичні BK і CF (K і F — точки дотику). Доведіть, що $BK = CF$.

18.46.•• Доведіть, що середини основ трапеції, точка перетину діагоналей і точка перетину бічних сторін лежать на одній прямій.

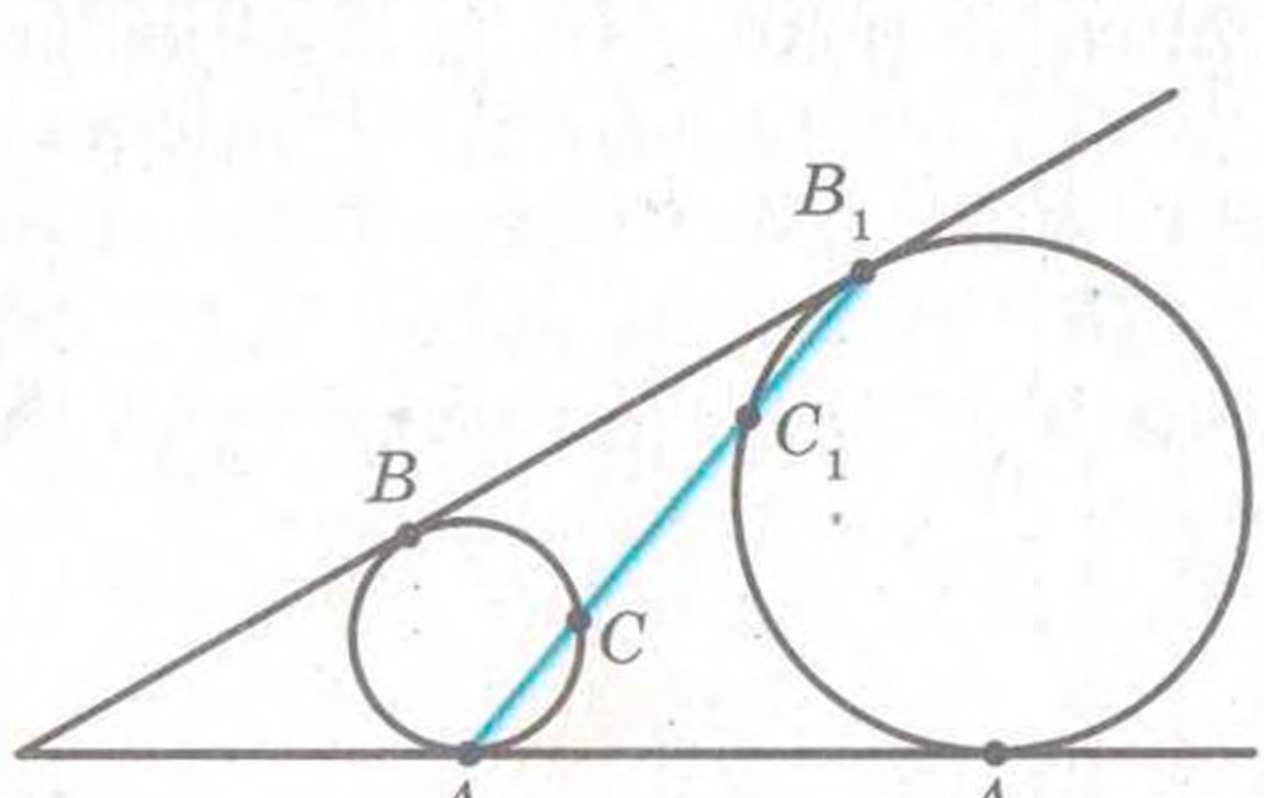


Рис. 18.17

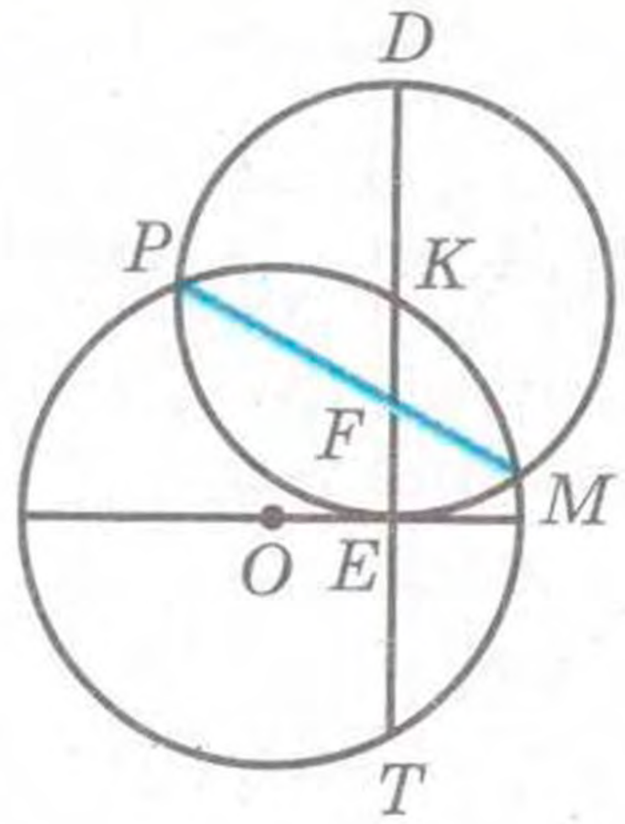


Рис. 18.18

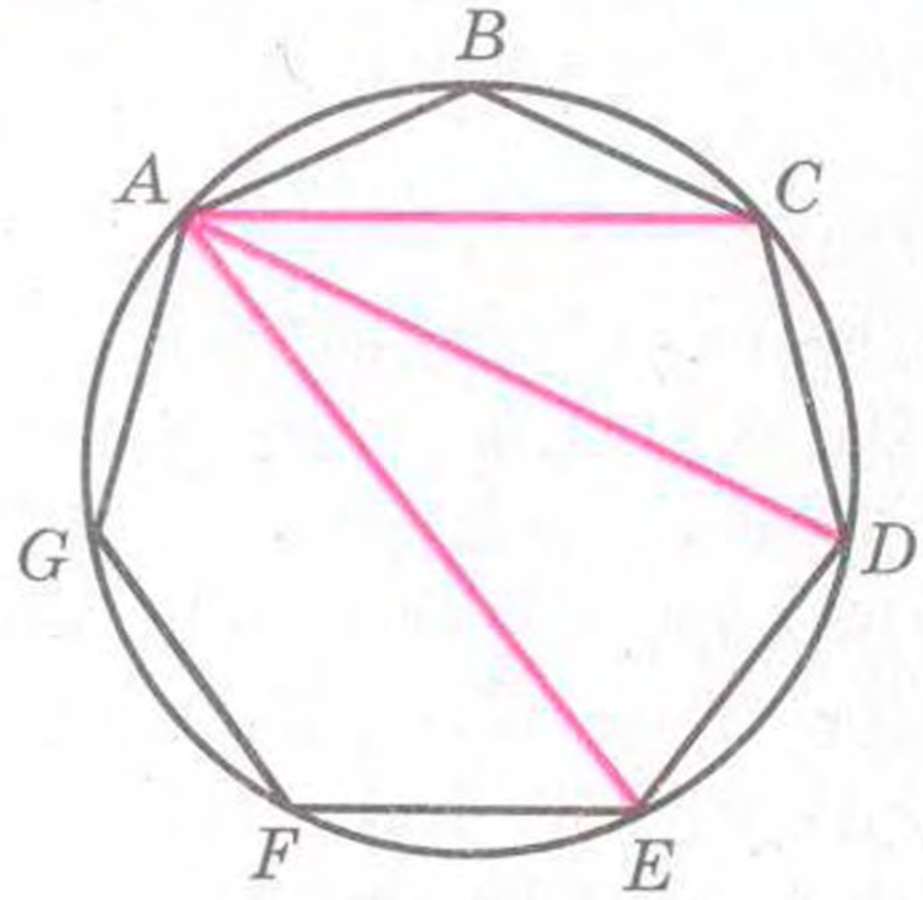


Рис. 18.19

18.47.•• Дано опуклий чотирикутник $ABCD$. Промені AB і DC перетинаються в точці F, а промені BC і AD — у точці E. Точки E і F рівновіддалені від прямої BD. Доведіть, що діагональ AC ділить діагональ BD навпіл.

18.48.•• Дано відрізок AB і пряму l, яка паралельна цьому відрізку. За допомогою тільки лінійки поділіть відрізок AB навпіл.

18.49.* Навколо гострокутного трикутника ABC описано коло з центром у точці O. Через точки B і C перпендикулярно до прямої AO проведено прямі, які перетинають прямі AC і AB у точках M і N відповідно. Доведіть, що $BC^2 = BM \cdot CN$.

18.50.* На колі взято точку K. З центром у точці K проведено коло, яке дотикається до діаметра першого кола в точці E і перетинає перше коло в точках P і M (рис. 18.18). Доведіть, що пряма PM ділить відрізок KE навпіл.

18.51.* Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане коло в точці D. Доведіть, що $AB + AC < 2AD$.

18.52.* На колі взято точки A, B, C, D такі, що $\cup AB = \cup BC = \cup CD$. Доведіть, що $AC^2 = AB\,(BC + AD)$.

18.53.* На рисунку 18.19 зображено вписаний семикутник $ABCDEFG$, у якого всі сторони рівні. Доведіть, що $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

19. Теорема Менелая. Теорема Чеви

Нагадаємо, що точки, які належать одній прямій, називають **колінеарними**.

У цьому пункті ви дізнаєтеся про знамениту теорему, присвячену критерію колінеарності трьох точок. Ця теорема носить ім'я давньогрецького математика і астронома Менелая Александрійського (I–II ст. н. е.).

Теорема 19.1 (теорема Менелая). ***На сторонах AB і BC трикутника ABC взято відповідно точки C_1 і A_1, а на продовженні сторони AC — точку B_1. Для того щоб точки A_1, B_1, C_1 лежали на одній прямій, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (*)$$

Доведення. Спочатку доведемо необхідну умову колінеарності: якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій, то виконується рівність (*).

З вершин трикутника ABC опустимо перпендикуляри AM, BN і CP на пряму C_1B_1 (рис. 19.1). Оскільки $\angle MC_1A = \angle NC_1B$, то $\triangle AMC_1 \backsim \triangle BNC_1$ за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AM}{BN}$. З подібності трикутників BNA_1 і CPA_1 отримуємо, що $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BN}{CP}$. З подібності трикутників B_1CP і B_1AM маємо рівність $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CP}{AM}$. З трьох отриманих пропорцій випливає, що $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AM}{BN}\cdot\frac{BN}{CP}\cdot\frac{CP}{AM}=1$.

Тепер доведемо достатню умову колінеарності: якщо виконується рівність (*), то точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

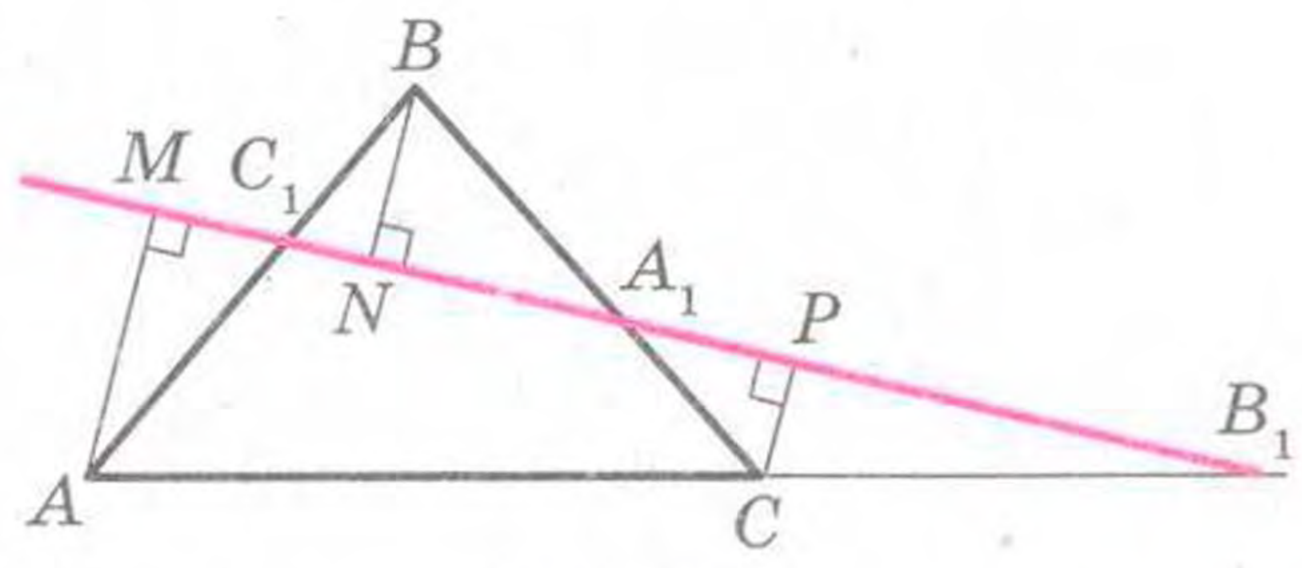


Рис. 19.1

Нехай пряма C_1B_1 перетинає сторону BC три-

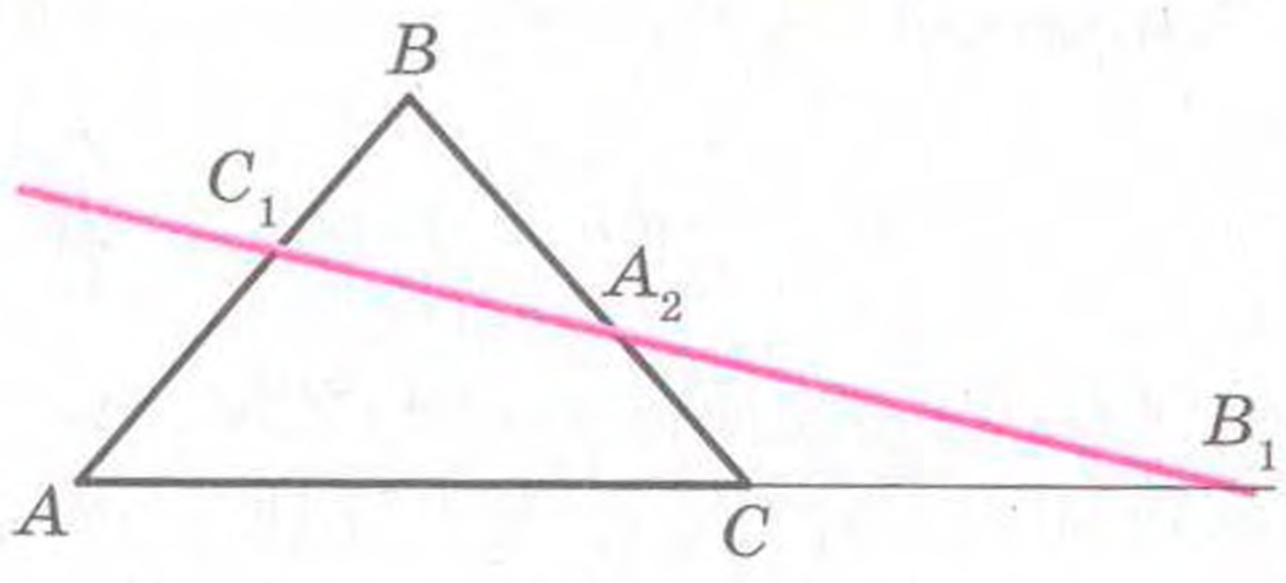


Рис. 19.2

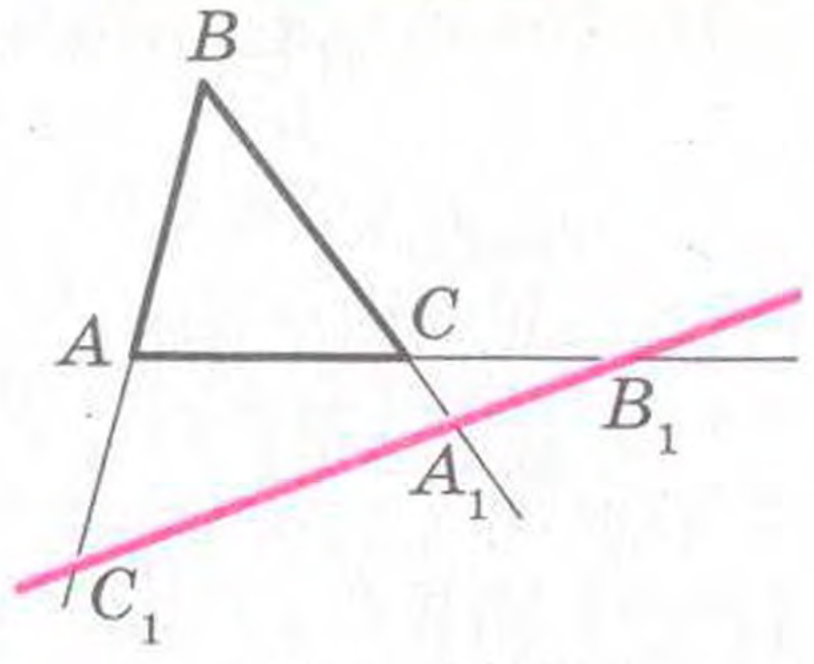


Рис. 19.3

кутника ABC у деякій точці A_2 (рис. 19.2). З доведеного вище можна записати: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Зіставляючи цю рівність з рівністю (*), доходимо висновку, що $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_2}{A_2C}$, тобто точки A_2 і A_1 поділяють відрізок BC в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Звідси випливає, що пряма C_1B_1 перетинає сторону BC у точці A_1.

Зауважимо, що теорема справедлива й тоді, коли точки A_1 і C_1 лежать не на сторонах трикутника ABC, а на їх продовженнях (рис. 19.3). Для цього випадку проведіть доведення самостійно. ▲

Приклад 1. На стороні BC трикутника ABC обрано точку N так, що $BN : NC = 2 : 3$. У якому відношенні медіана BM ділить відрізок AN?

Розв'язання. Зауважимо, що цю задачу за допомогою теореми про пропорційні відрізки ми розв'язували в п. 15. Тепер розв'яжемо її за допомогою теореми Менелая.

Нехай відрізки AN і BM перетинаються в точці O (рис. 19.4). Пряма BM перетинає дві сторони трикутника ANC. Тоді за теоремою Менелая можна записати: $\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AO}{ON} \cdot \frac{NB}{BC} = 1$.

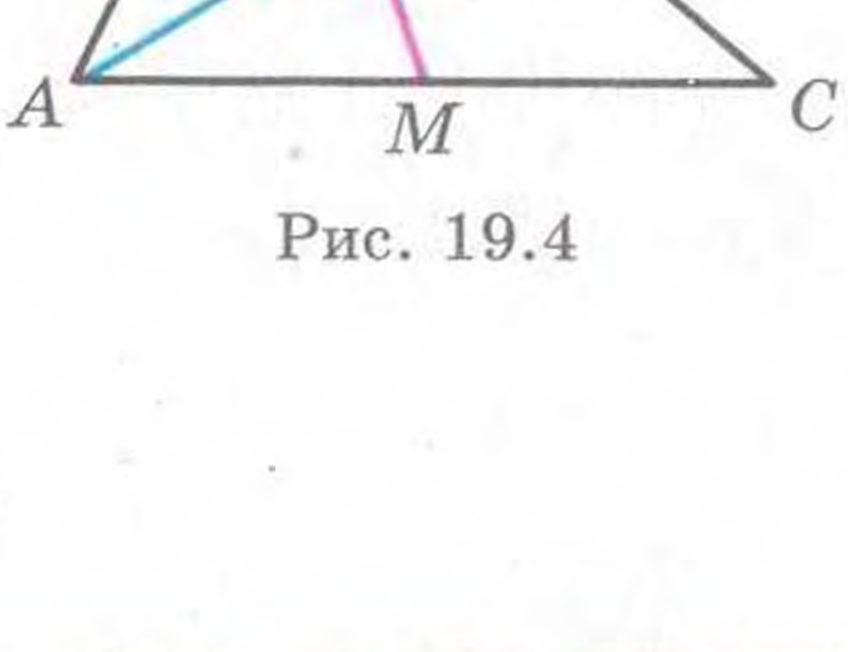


Рис. 19.4

З урахуванням того, що $\frac{CM}{MA} = 1$ і $\frac{NB}{BC} = \frac{2}{5}$, отримуємо: $\frac{AO}{ON} \cdot \frac{2}{5} = 1$. Звідси $\frac{AO}{ON} = \frac{5}{2}$.

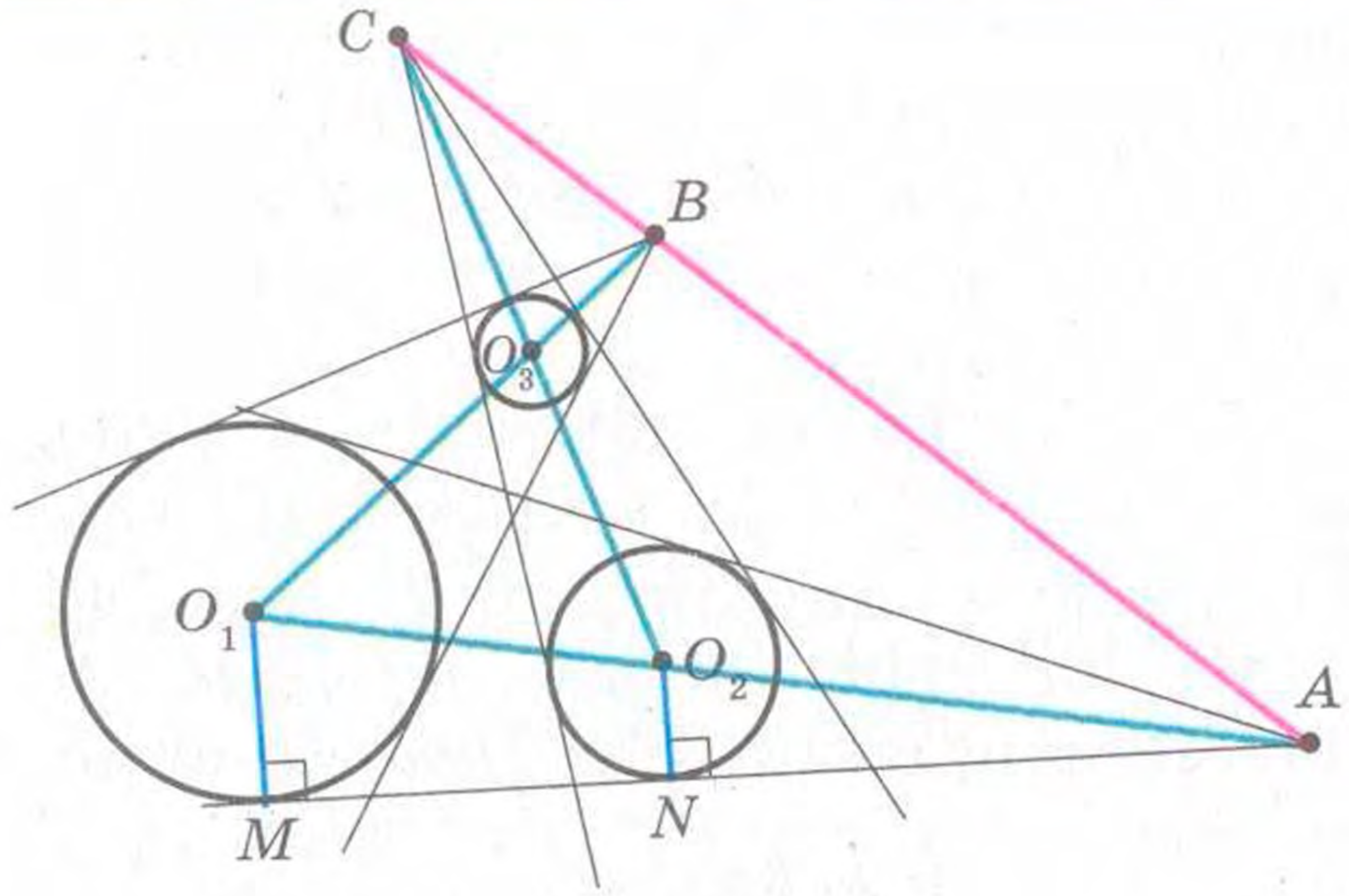


Рис. 19.5

Приклад 2. Спільні зовнішні дотичні до трьох кіл перетинаються в точках A, B і C (рис. 19.5). Доведіть, що ці точки колінеарні.

Розв'язання. Позначимо радіуси кіл з центрами O_1, O_2 і O_3 відповідно r_1, r_2 і r_3. O_1M і O_2N — радіуси, проведені в точки дотику (рис. 19.5).

Легко показати, що точки O_1, O_2 і A лежать на одній прямій. Звідси $\Delta AO_1M \backsim \Delta AO_2N$. Отримуємо $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2}$.

Аналогічно $\frac{BO_1}{BO_3} = \frac{r_1}{r_3}$, $\frac{CO_2}{CO_3} = \frac{r_2}{r_3}$.

Для точок A, B і C, які лежать на продовженнях сторін трикутника $O_1O_2O_3$, розглянемо добуток трьох відношень $\frac{O_2A}{AO_1} \cdot \frac{O_1B}{BO_3} \cdot \frac{O_3C}{CO_2}$. Цей добуток дорівнює $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_2} = 1$. Отже, точки A, B і C лежать на одній прямій.

На сторонах BC, CA і AB трикутника ABC візьмемо довільні точки A_1, B_1, C_1 (рис. 19.6). Кожен з відрізків AA_1, BB_1, CC_1 називають **чевіаною** трикутника ABC. Така назва пов'язана з ім'ям італійського інженера і математика *Джованні Чеви* (1648–1734), який відкрив дивовижну теорему.

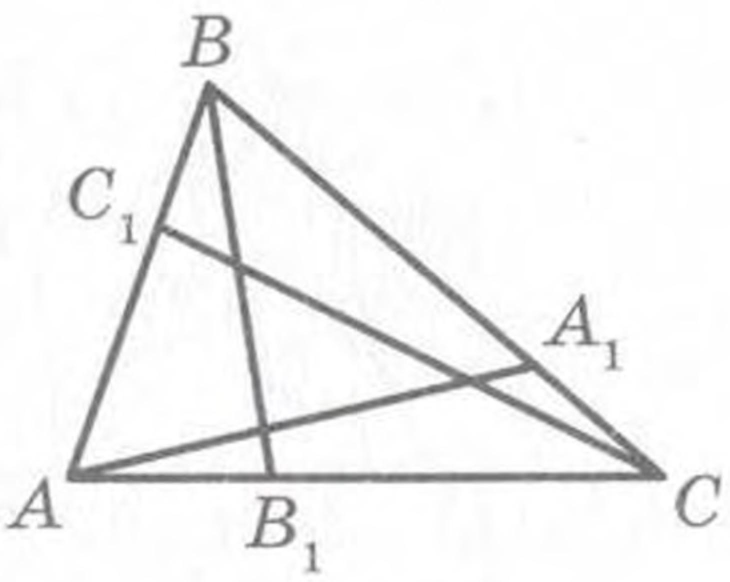


Рис. 19.6

Якщо точки A_1, B_1 і C_1 узято так, що чевіани є бісектрисами, або медіанами, або висотами гострокутного трикутника, то ці чевіани перетинаються в одній точці.

Якщо три прямі перетинаються в одній точці, то їх називають **конкурентними**.

Теорема Чеви дає загальний критерій конкурентності трьох чевіан.

Теорема 19.2 (теорема Чеви). ***Для того щоб чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC перетиналися в одній точці, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Доведення. Доведемо спочатку необхідну умову конкурентності: якщо чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці (рис. 19.7), то виконується рівність (*).

Застосуємо теорему Менелая до трикутників ABB_1, CBB_1 і прямих CC_1 та AA_1 відповідно:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1; \qquad (1)$$

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} = 1. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) отримуємо, що

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC}.$$

Звідси $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{1} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{1}$ або $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{CA_1} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1.$

Доведемо тепер достатню умову конкурентності: якщо виконується рівність (*), то чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці.

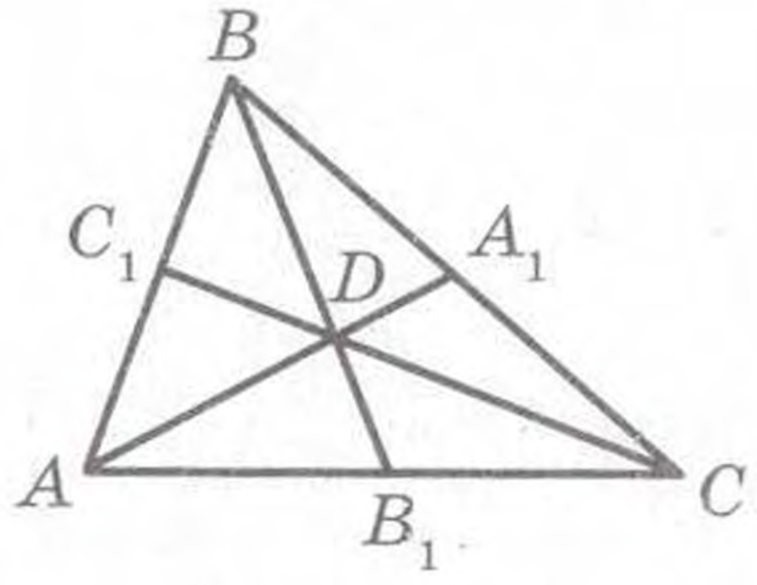


Рис. 19.7

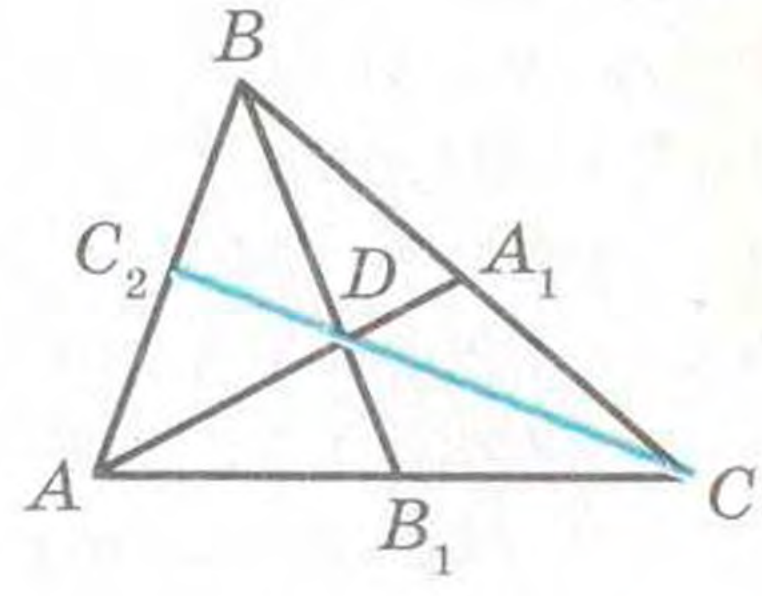


Рис. 19.8

Нехай чевіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці D, а чевіана, яка проходить через вершину C і точку D, перетинає сторону AB у деякій точці C_2 (рис. 19.8). З доведеного вище можна записати:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Зіставляючи цю рівність з рівністю (*), доходимо висновку, що $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$, тобто точки C_1 і C_2 ділять відрізок AB в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Звідси випливає, що пряма CD перетинає сторону AB у точці C_1. ▲

П р и к л а д 3. Вписане коло дотикається до сторін BC, AC, AB трикутника ABC у точках A_1, B_1, C_1 відповідно (рис. 19.9). Доведіть, що чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні.

Розв'язання. За властивістю дотичних маємо: $AC_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$.

Для точок C_1, A_1 і B_1 розглянемо добуток трьох відношень $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}$. З урахуванням записаних вище рівностей цей добуток дорівнює 1. Отже, чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні.

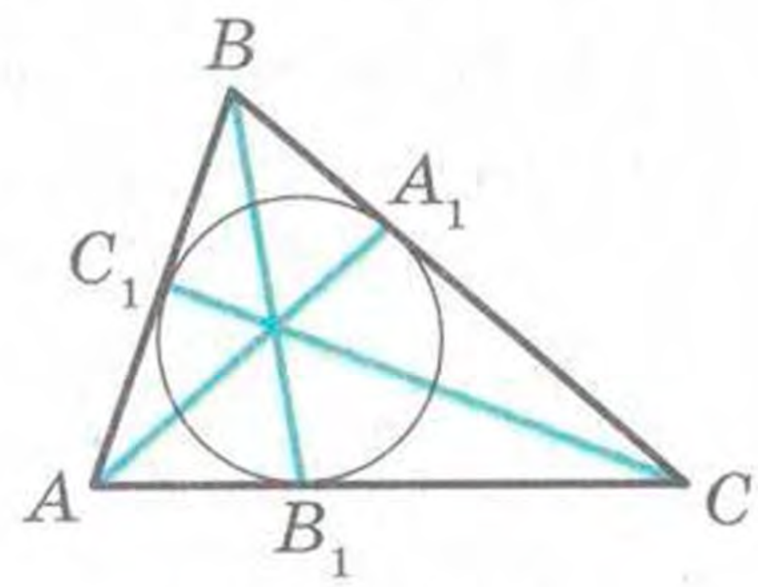


Рис. 19.9

?

1. Які точки називають колінеарними?
2. Сформулюйте теорему Менелая.
3. Які прямі називають конкурентними?
4. Сформулюйте теорему Чеви.

ВПРАВИ

19.1.° На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено відповідно точки C_1 і A_1 так, що $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{3}{4}$. Відрізки AA_1 і CC_1 перетинаються в точці F. У якому відношенні точка F ділить кожний з відрізків AA_1 і CC_1?

19.2.$^{\bullet}$ На сторонах CB і CA трикутника ABC позначили точки A_1 і B_1 відповідно. Відрізки AA_1 і BB_1 перетинаються в точці K. Відомо, що $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{2}{3}$, $\frac{BK}{KB_1} = 4$. Знайдіть, у якому відношенні точка K ділить відрізок AA_1.

19.3.$^{\bullet}$ На стороні AC трикутника ABC позначили точку M так, що $AM = \frac{1}{3}AC$, а на промені CB позначили точку N так, що $BN = BC$. У якому відношенні точка P перетину відрізків AB і MN ділить кожний з цих відрізків?

19.4.$^{\bullet}$ Використовуючи теорему Чеви, доведіть, що:

1) медіани трикутника перетинаються в одній точці;

2) бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

19.5.$^{\bullet}$ На сторонах BC і AC трикутника ABC відповідно позначили точки A_1 і B_1 так, що відрізки AA_1, BB_1 і медіана CD трикутника перетинаються в одній точці. Доведіть, що $A_1B_1 \parallel AB$.

19.6.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC проведено бісектриси AA_1 і BB_1. Бісектриса зовнішнього кута при вершині C перетинає пряму AB у точці C_1. Доведіть, що точки A_1, B_1 і C_1 колінеарні.

19.7.$^{\bullet}$ Бісектриси зовнішніх кутів при вершинах A, B і C трикутника ABC перетинають прямі BC, AC і AB у точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що ці точки колінеарні.

19.8.$^{\bullet}$ Вписане коло трикутника ABC дотикається до сторін AB, BC і AC у точках M, N і K відповідно. Пряма MN перетинає пряму AC у точці Pтакій, що $PC = AC$. У якому відношенні точка K ділить сторону AC?

19.9.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть за допомогою теореми Чеви задачу 18.46.

19.10.$^{\bullet\bullet}$ Точки P, M, Q і N — середини відповідно сторін AB, BC, CD і DA трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Доведіть, що прямі MN, AQ і DP перетинаються в одній точці.

19.11.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах AB і AD паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки E і F такі, що $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$, $AF = FD$. У якому відношенні діагональ AC ділиться точкою її перетину з прямою EF?

19.12.$^{\bullet\bullet}$ На стороні AD і діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки N і M так, що $AN = \frac{1}{5}AD$,

$AM = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки N, M і B лежать на одній прямій.

19.13.** У чотирикутник $ABCD$ вписано коло, яке дотикається до сторін AB, BC, CD і DA у точках M, N, K і P відповідно. Прямі MN і PK перетинаються в точці F. Доведіть, що точка F належить прямій AC.

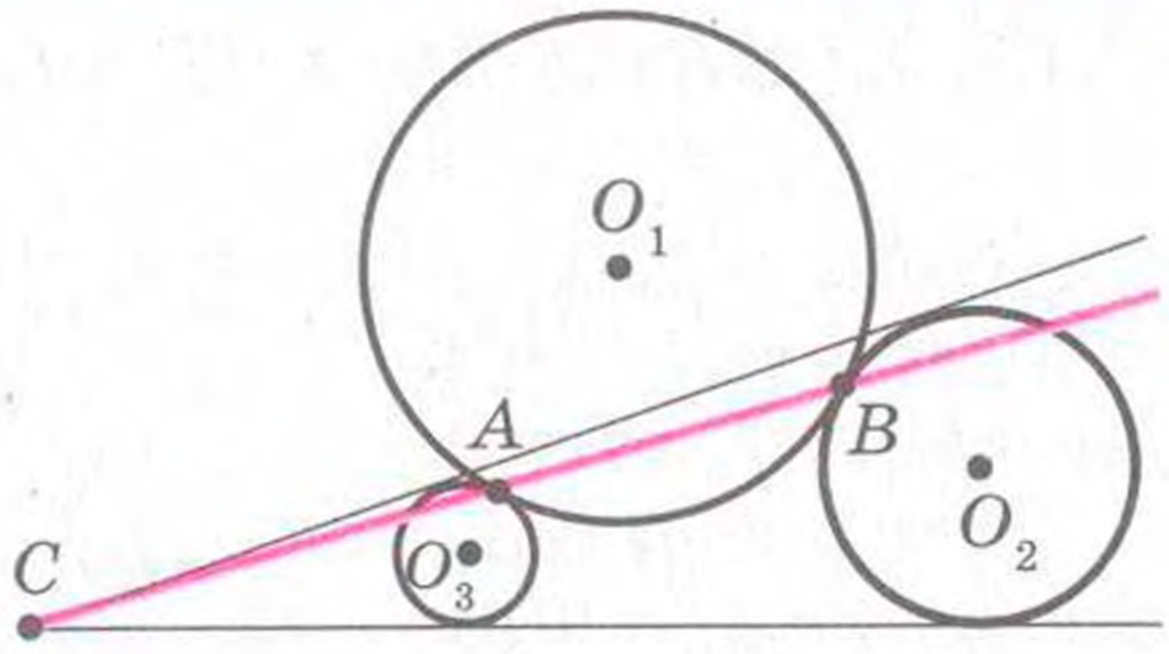


Рис. 19.10

19.14.** Коло з центром O_1 дотикається до двох кіл з центрами O_2 і O_3 у точках B і A відповідно (рис. 19.10). Доведіть, що прямій AB належить точка C перетину спільних зовнішніх дотичних до кіл з центрами O_2 і O_3.

19.15.* Коло перетинає сторону AB трикутника ABC у точках C_1 і C_2, сторону CA — у точках B_1 і B_2, сторону BC — у точках A_1 і A_2. Доведіть, що коли прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці, то й прямі AA_2, BB_2 і CC_2 перетинаються в одній точці.

19.16.* Пряма перетинає сторони AB, BC і продовження сторони AC трикутника ABC відповідно в точках D, E, F. Доведіть, що середини відрізків DC, AE, BF лежать на одній прямій (*пряма Гаусса*[1]).

19.17.* Чевіани AA_1, BB_1, CC_1 трикутника ABC перетинаються в точці P. Доведіть, що прямі, які проходять через середини сторін BC, CA і AB паралельно прямим AP, BP і CP відповідно, конкурентні.

19.18.* На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначено точки C_1, A_1, B_1 відповідно так, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в точці O. Пряма, яка проходить через точку O паралельно стороні AC, перетинає відрізки A_1B_1 і B_1C_1 у точках K і M відповідно. Доведіть, що $OK = OM$.

19.19.* Чевіани AA_1 і CC_1 та висота BH трикутника ABC конкурентні. Доведіть, що $\angle BHA_1 = \angle BHC_1$.

---

[1] *Карл Фрідріх Гаусс* (1777–1855) — видатний німецький математик, астроном, фізик, геодезист.

20. Пряма Ейлера. Коло дев'яти точок

Точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника — це центр кола, описаного навколо трикутника. Позначимо цю точку буквою O.

Точка перетину бісектрис трикутника — це центр вписаного кола. Позначимо цю точку буквою J.

Ви знаєте також, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці, яку називають **ортоцентром** трикутника. Позначимо її буквою H.

Точку перетину медіан трикутника називають **центроїдом** трикутника. Позначимо цю точку буквою M.

Точки O, J, H, M називають **чудовими** точками трикутника. Використання такого емоційного епітета цілком обґрунтовано. Адже цим точкам притаманний цілий ряд красивих властивостей. Хіба не чудово вже те, що вони є в будь-якому трикутнику?

Розглянемо дві теореми про чудові точки трикутника.

Теорема 20.1. ***У будь-якому трикутнику центр описаного кола, центроїд і ортоцентр лежать на одній прямій.***

Цю пряму називають **прямою Ейлера**.

Доведення. Для рівнобедреного трикутника твердження, що доводиться, є очевидним.

Якщо даний трикутник ABC прямокутний ($\angle C = 90°$), то його ортоцентр — це точка C, центр описаного кола — середина гіпотенузи AB. Тоді зрозуміло, що всі три точки, про які йдеться в теоремі, належать медіані, проведеній до гіпотенузи.

Леонард Ейлер
(1707—1783)

Видатний математик, фізик, механік, астроном

Доведемо теорему для гострокутного різностороннього трикутника.

Лема. ***Якщо точка H — ортоцентр трикутника ABC, а OM_1 — відстань від центра O описаного кола до сторони BC, то $AH = 2OM_1$*** (рис. 20.1).

Доведення. Виконаємо додаткову побудову, вже знайому вам з доведення теореми 5.4: через кожну вершину трикутника ABC проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 20.1). У зазначеній теоремі було показано, що ортоцентр H трикутника ABC є центром описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$. Для цього кола кут B_1HC_1 є центральним, а кут $B_1A_1C_1$ — вписаним. Оскільки вони спираються на одну й ту саму дугу, то $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$. $\angle BAC$ і $\angle B_1A_1C_1$ рівні як протилежні кути паралелограма ABA_1C, тому $\angle B_1HC_1 = 2\angle BAC = \angle BOC$. Тоді рівнобедрені трикутники B_1HC_1 і COB подібні з коефіцієнтом подібності, який дорівнює 2 ($B_1C_1 = 2BC$). Оскільки AH і OM_1 — відповідні висоти подібних трикутників, то $AH = 2OM_1$.

Доведемо тепер основну теорему.

Оскільки точка M_1 — середина сторони BC, то відрізок AM_1 — медіана трикутника ABC (рис. 20.2). Нехай M — точка перетину відрізків AM_1 і HO. Оскільки $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$. Крім того, $\angle AMH$ і $\angle M_1MO$ рівні як вертикальні. Отже, $\Delta HAM \sim \Delta OM_1M$ за першою ознакою

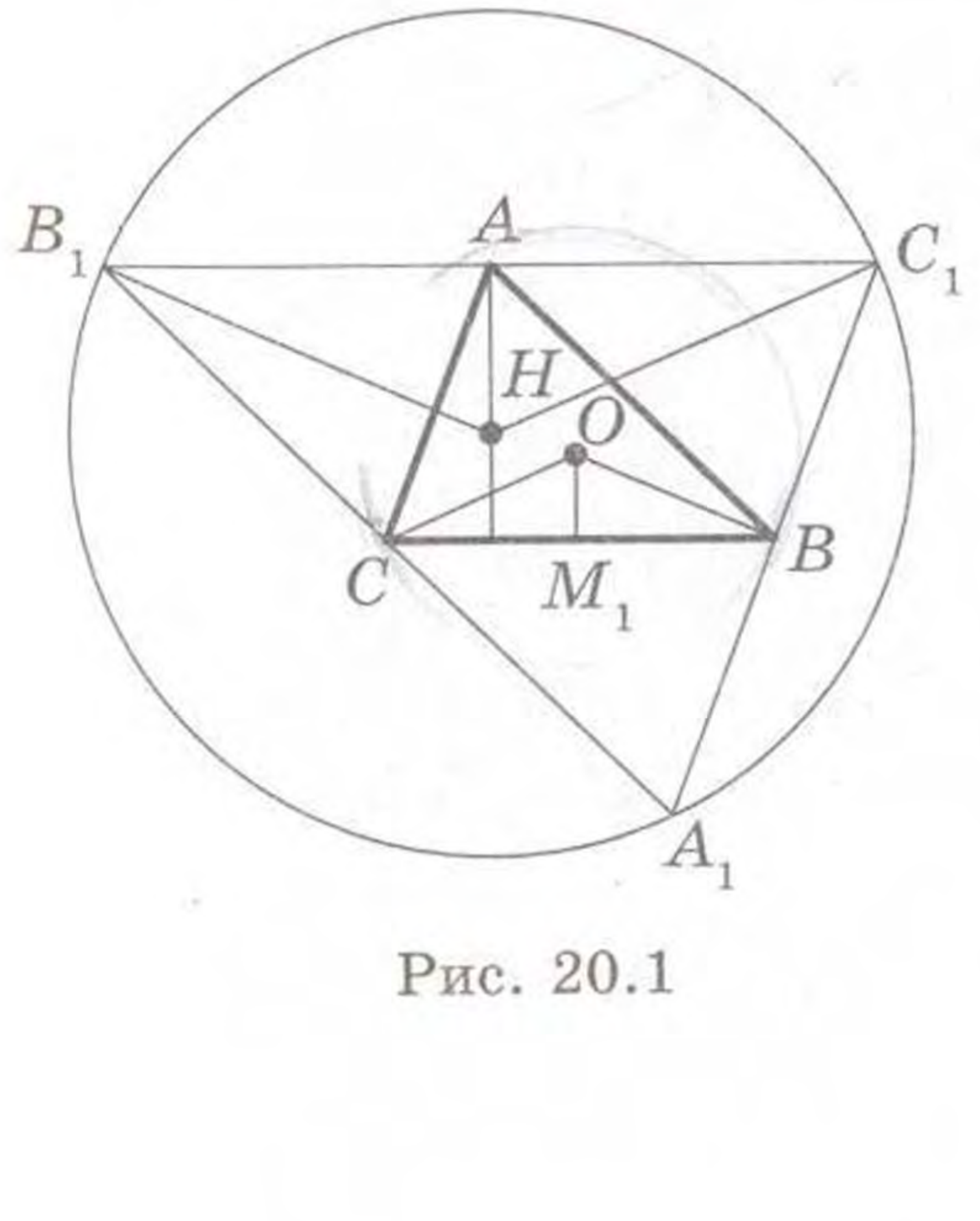


Рис. 20.1

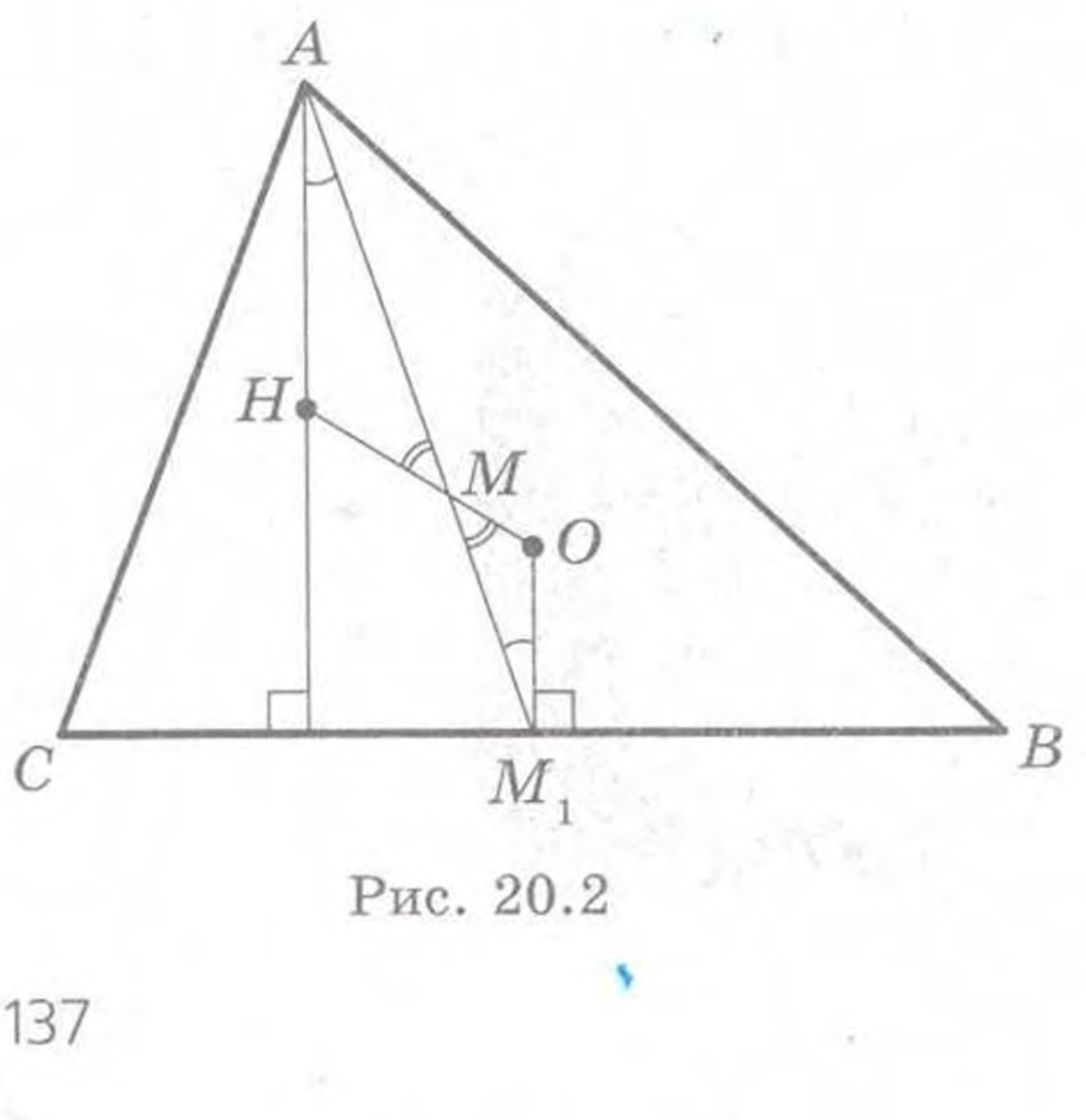


Рис. 20.2

подібності трикутників. Звідси $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$. Отже, точка M ділить медіану AM_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини A. Звідси точка M — центроїд трикутника ABC.

Звернемо увагу на те, що ми не лише встановили факт належності точок O, M, H одній прямій, а й довели рівність

$$HM = 2MO,$$

яка є ще однією властивістю чудових точок трикутника.

Доведення для випадку тупокутного трикутника аналогічне. ▲

Теорема 20.2. ***Середини сторін трикутника, основи його висот і середини відрізків, які з'єднують вершини трикутника з його ортоцентром, лежать на одному колі, радіус якого дорівнює $\frac{1}{2}R$, де R — радіус описаного кола даного трикутника.***

Це коло називають **колом дев'яти точок.**

Доведення. У трикутнику ABC точка H — ортоцентр, точка O — центр описаного кола, точка A_1 — основа висоти, проведеної з вершини A, точка M_1 — середина сторони CB, точка K_1 — середина відрізка AH (рис. 20.3).

За лемою $OM_1 = \frac{1}{2}AH = K_1H$. Оскільки $HK_1 \parallel OM_1$, то чотирикутник HK_1OM_1 — паралелограм. Нехай діагоналі цього паралелограма перетинаються в точці F.

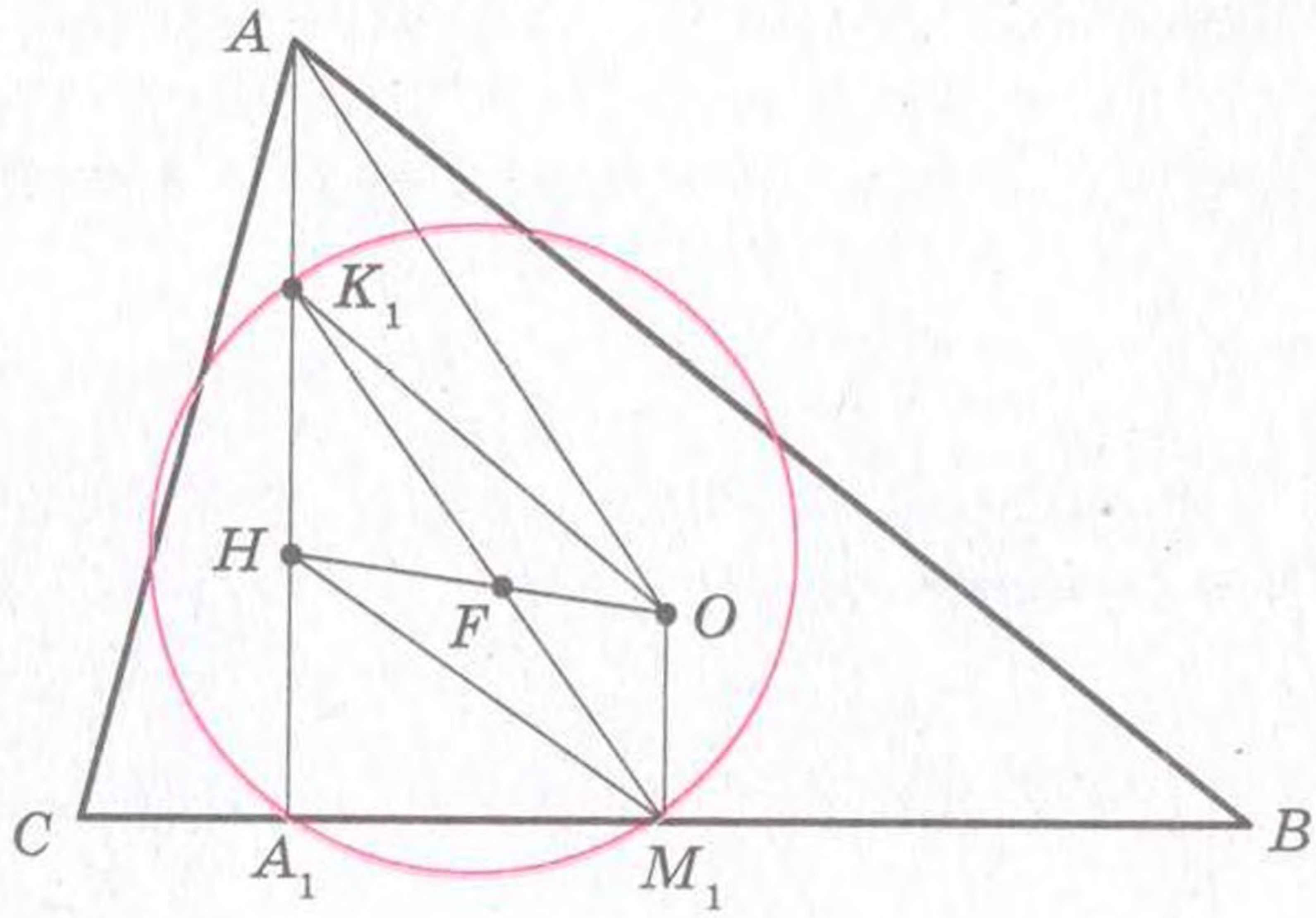


Рис. 20.3

Зауважимо, що точка F — середина гіпотенузи K_1M_1 прямокутного трикутника $A_1K_1M_1$. Отже, точки K_1, A_1 і M_1 лежать на колі з центром у точці F радіуса FK_1.

Очевидно, що чотирикутник K_1AOM_1 — паралелограм. Звідси $K_1M_1 = OA$. Тоді $FK_1 = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$.

Отже, ми довели, що трійка точок — середина M_1 сторони CB, основа A_1 висоти AA_1 і середина K_1 відрізка HA лежать на колі з центром в середині F відрізка HO і радіусом, який дорівнює $\frac{1}{2}R$.

Аналогічно доводиться, що інші дві трійки точок B_1, M_2, K_2 і C_1, M_3, K_3, де B_1 і C_1 — основи висот BB_1 і CC_1, M_2 і M_3 — середини сторін AC і AB відповідно, K_2 і K_3 — середини відрізків HB і HC відповідно, лежать на колі з центром F радіуса $\frac{1}{2}R$.

Доведення теореми для випадку тупокутного трикутника аналогічне. ▲

1. Які точки називають чудовими точками трикутника?
2. Які чудові точки належать одній прямій? Як називають цю пряму?
3. Сформулюйте теорему про коло дев'яти точок.

ВПРАВИ

20.1.° Дано дві точки, які лежать в одній півплощині відносно даної прямої. Побудуйте трикутник, одна із сторін якого лежить на даній прямій, а центр описаного кола і ортоцентр є двома даними точками.

20.2.° На площині задано пряму l, якій належать вершини B і C трикутника ABC, точку O, яка є центром описаного кола, і точку M, яка є точкою перетину медіан цього трикутника. Побудуйте трикутник ABC.

20.3.° Відновіть трикутник ABC за трьома даними точками: вершиною A, ортоцентром H і точкою перетину серединних перпендикулярів O.

20.4.$^{\bullet}$ Відновіть трикутник ABC за центром описаного кола, ортоцентром і серединою сторони BC.

20.5.$^{\bullet}$ На площині задано точки O, M і B_1, які є відповідно центром описаного кола, точкою перетину медіан і основою висоти BB_1 трикутника ABC. Побудуйте трикутник ABC.

20.6.$^{\bullet}$ Відновіть трикутник ABC за його ортоцентром, вершиною A і серединою сторони BC.

20.7.$^{\bullet\bullet}$ На площині задано точки O, M і A_1, які є відповідно центром описаного кола, точкою перетину медіан і точкою перетину бісектриси кута A трикутника ABC з описаним колом. Побудуйте трикутник ABC.

20.8.$^{\bullet\bullet}$ Відновіть трикутник ABC за прямою, яка містить сторону BC, центроїдом і точкою перетину описаного кола з прямою, яка містить висоту, проведену з вершини A.

20.9.$^{\bullet\bullet}$ Пряма, яка містить висоту AA_1 трикутника ABC, перетинає описане коло цього трикутника в точці D. Знайдіть відстань від центра кола дев'яти точок трикутника ABC до сторони BC, якщо $AD = a$.

20.10.$^{\bullet\bullet}$ Точки O і J — відповідно центри описаного і вписаного кіл трикутника ABC. Бісектриси кутів A, B і C перетинають описане коло в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що пряма OJ містить точку перетину медіан трикутника $A_1B_1C_1$.

20.11.$^{\bullet\bullet}$ Точка H — ортоцентр трикутника ABC. Доведіть, що трикутники ABC, ABH, BCH, CAH мають одне й те саме коло дев'яти точок.

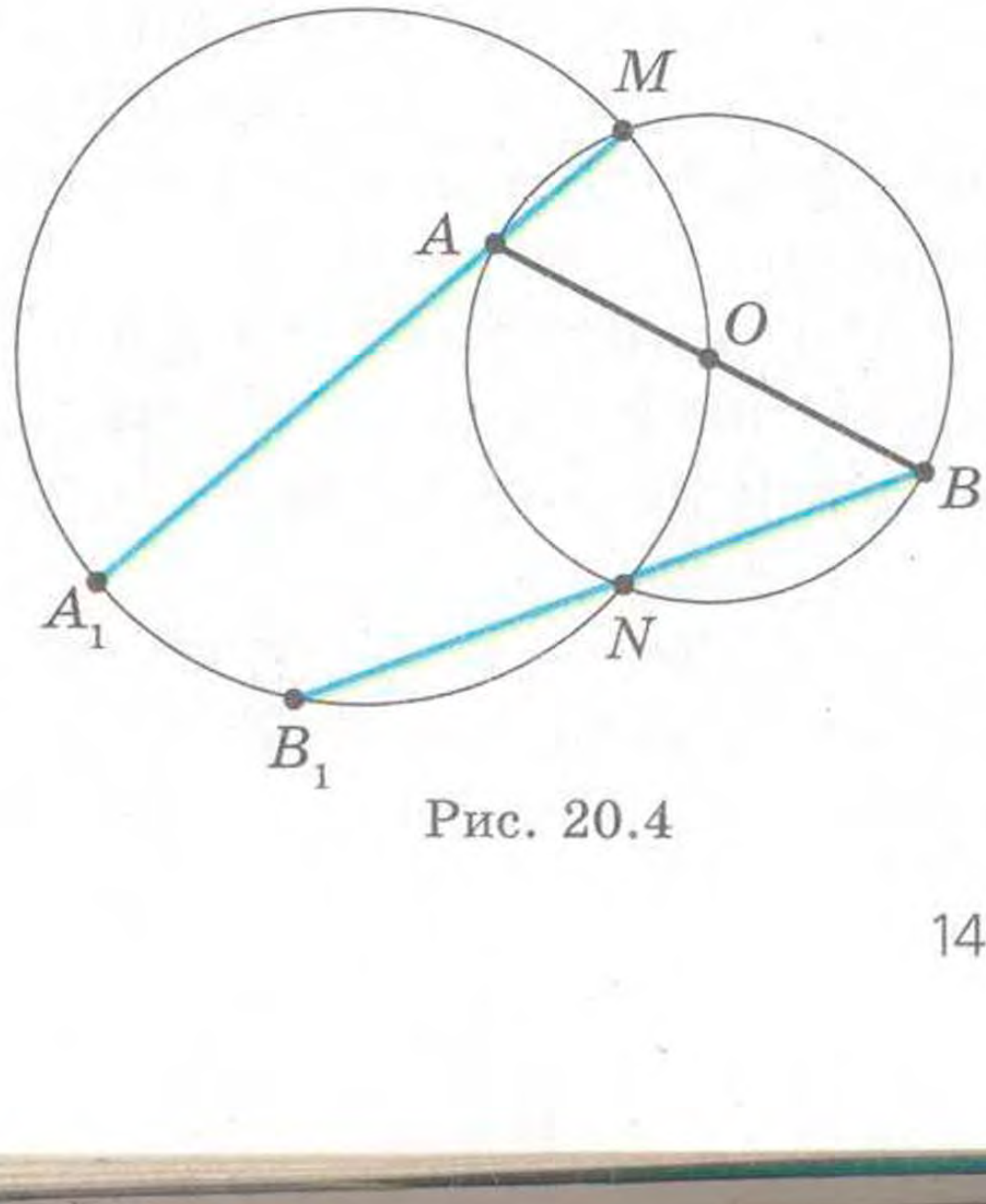


Рис. 20.4

20.12.$^{\bullet\bullet}$ Точка H — ортоцентр трикутника ABC. Доведіть, що прямі Ейлера трикутників ABC, ABH, BCH, CAH перетинаються в одній точці.

20.13.* Бісектриса кута A гострокутного трикутника ABC перпендикулярна до прямої Ейлера цього трикутника. Доведіть, що $\angle A = 60°$.

20.14.* Бісектриса кута A тупокутного трикутника ABC паралельна прямій Ейлера цього трикутника. Доведіть, що $\angle A = 120°$.

20.15.* Дано два кола. Перше з них проходить через центр O другого кола і перетинає це коло в точках M і N (рис. 20.4). Відрізок AB — діаметр другого кола. Прямі AM і BN перетинають перше коло в точках A_1 і B_1 відповідно. Доведіть, що $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$.

21. Друга і третя ознаки подібності трикутників

Теорема 21.1 (друга ознака подібності трикутників). ***Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ і $\angle B = \angle B_1$.

Якщо $k = 1$, то $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, а отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників, тобто ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $k > 1$, тобто $AB > A_1B_1$ і $BC > B_1C_1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідно точки A_2 і C_2 так, що $BA_2 = B_1A_1$ і $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 21.1).

Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$.

Покажемо, що $A_2C_2 \parallel AC$. Нехай це не так. Тоді на стороні BC позначимо точку M таку, що $A_2M \parallel AC$. Маємо: $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BM}$. Але $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$, тоді $\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BM}$, тобто $BC_2 = BM$. Отже, буквами M і C_2 позначено одну й ту саму точку. Тоді $A_2C_2 \parallel AC$.

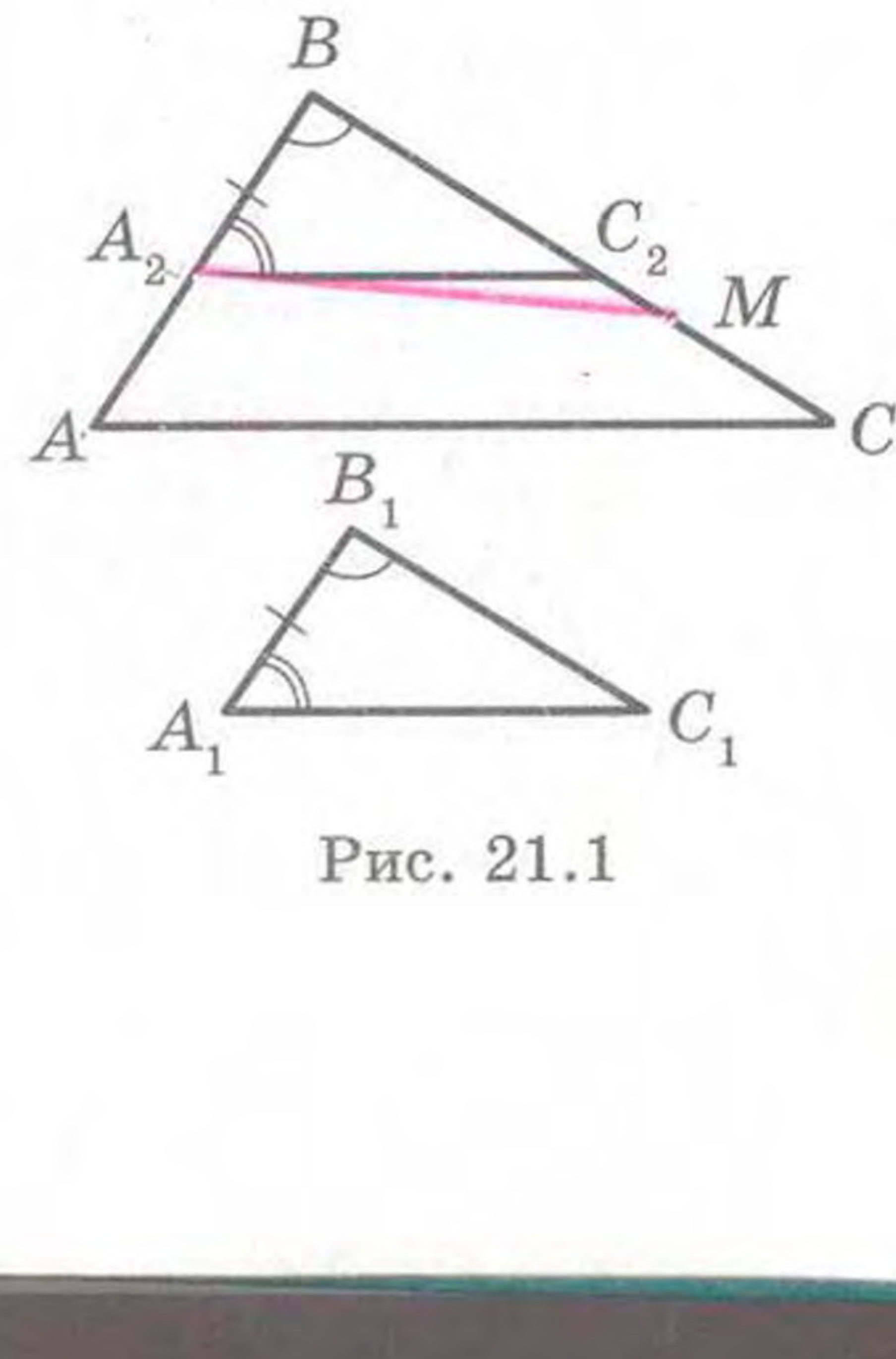


Рис. 21.1

За лемою про подібні трикутники $\triangle ABC \backsim \triangle A_2BC_2$. Проте очевидно, що $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. ▲

Теорема 21.2 (третя ознака подібності трикутників). ***Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k.$

Якщо $k = 1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників, тобто ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $k > 1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідно точки A_2 і C_2 такі, що $BA_2 = B_1A_1$, $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 21.2). Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k.$ Звідси отримуємо, що $A_2C_2 \parallel AC$ (ми встановили цей факт під час доведення другої ознаки подібності). Отже, за лемою про подібні трикутники $\triangle ABC \backsim \triangle A_2BC_2$, причому коефіцієнт подібності дорівнює k. Тоді $\frac{CA}{C_2A_2} = k$, але за умовою $\frac{CA}{C_1A_1} = k$. Звідси $A_1C_1 = A_2C_2$. Отже, $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників. З урахуванням того, що $\triangle A_2BC_2 \backsim \triangle ABC$, отримуємо: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. ▲

Задача 1. *Доведіть, що відрізок, який сполучає основи двох висот гострокутного трикутника, відтинає від даного трикутника йому подібний.*

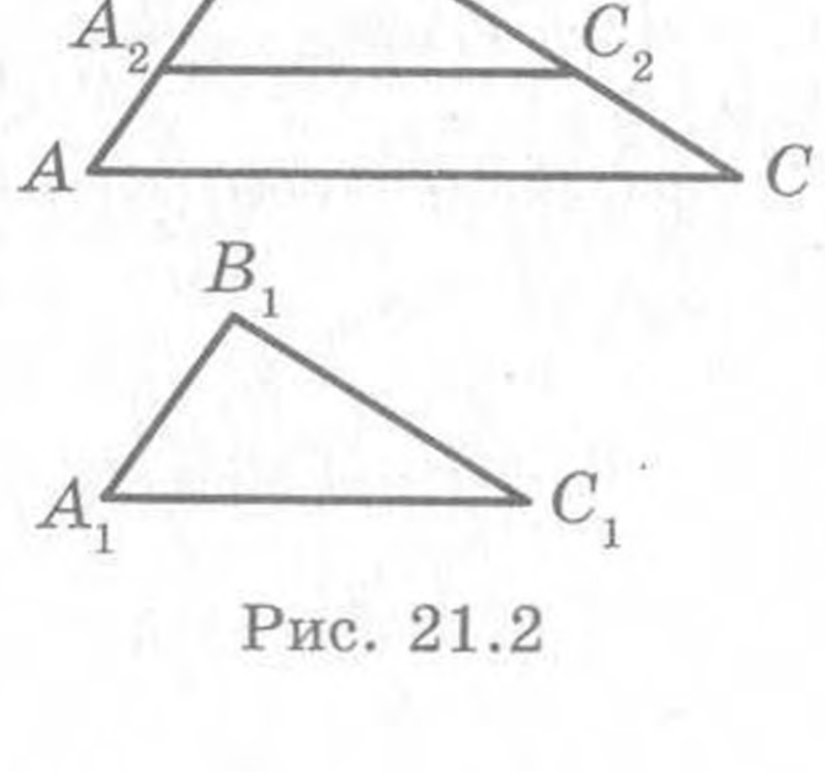


Рис. 21.2

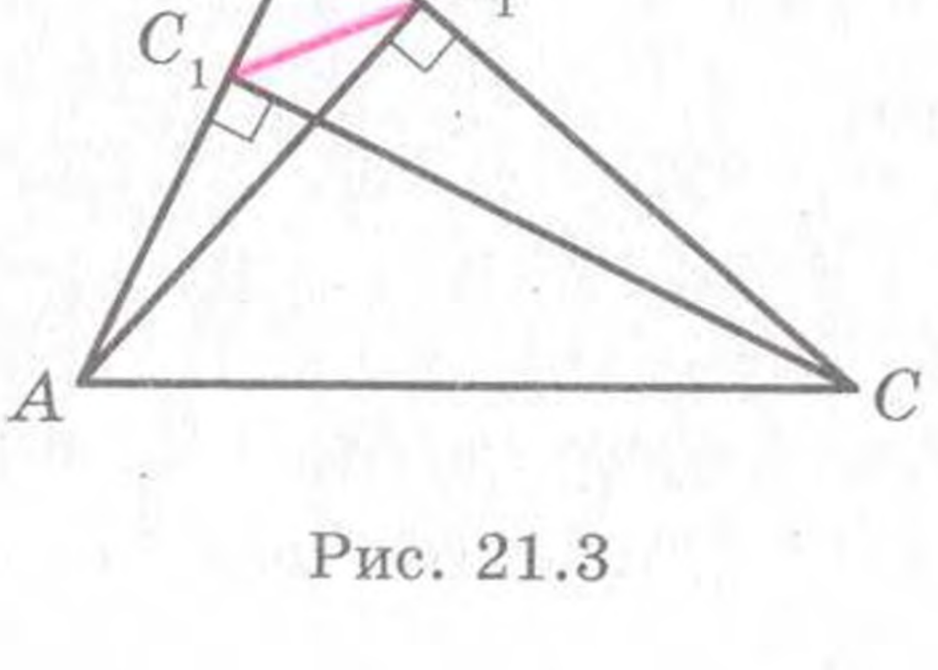


Рис. 21.3

Розв'язання. На рисунку 21.3 AA_1 і CC_1 — висоти трикутника ABC. Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$.

У прямокутних трикутниках ABA_1 і CBC_1 гострий кут B — спільний. Отже, $\triangle ABA_1 \sim \triangle CBC_1$ за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Тоді $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$. Оскільки кут B — спільний для трикутників ABC і A_1BC_1, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ за другою ознакою подібності трикутників.

Задача 2. *Відрізки AB і CD перетинаються в точці M. Відомо, що $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Доведіть, що точки A, B, C і D лежать на одному колі.*

Розв'язання. Розглянемо трикутники ACM і DMB (рис. 21.4). У них кути AMC і BMD рівні як вертикальні. З умови випливає, що $\frac{AM}{MD} = \frac{CM}{MB}$. Отже, $\triangle ACM \sim \triangle DBM$ за другою ознакою подібності трикутників. Звідси $\angle ACM = \angle DBM$. Тоді з урахуванням доведеного у ключовій задачі п. 13 точки A, B, C і D лежать на одному колі.

Задача 3. *З точки A проведено два промені AM і AN, які не лежать на одній прямій. На промені AM узято точки H і B, а на промені AN — точки C і D так, що $AH \cdot AB = AC \cdot AD$. Доведіть, що точки H, B, D і C лежать на одному колі.*

Розв'язання. Розглянемо трикутники AHC і ADB (рис. 21.5). Кут A у них спільний. З умови випливає, що $\frac{AH}{AD} = \frac{AC}{AB}$. Отже, $\triangle AHC \sim \triangle ADB$ за другою ознакою подібності трикутників. Тоді $\angle ACH = \angle HBD$. Але $\angle ACH + \angle HCD = 180°$. Звідси $\angle HBD + \angle HCD = 180°$, тобто навколо чотирикутника $HCDB$ можна описати коло.

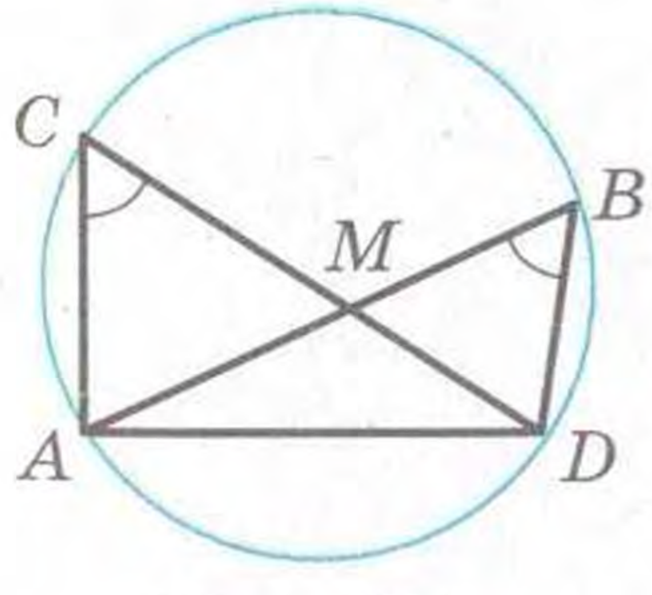


Рис. 21.4

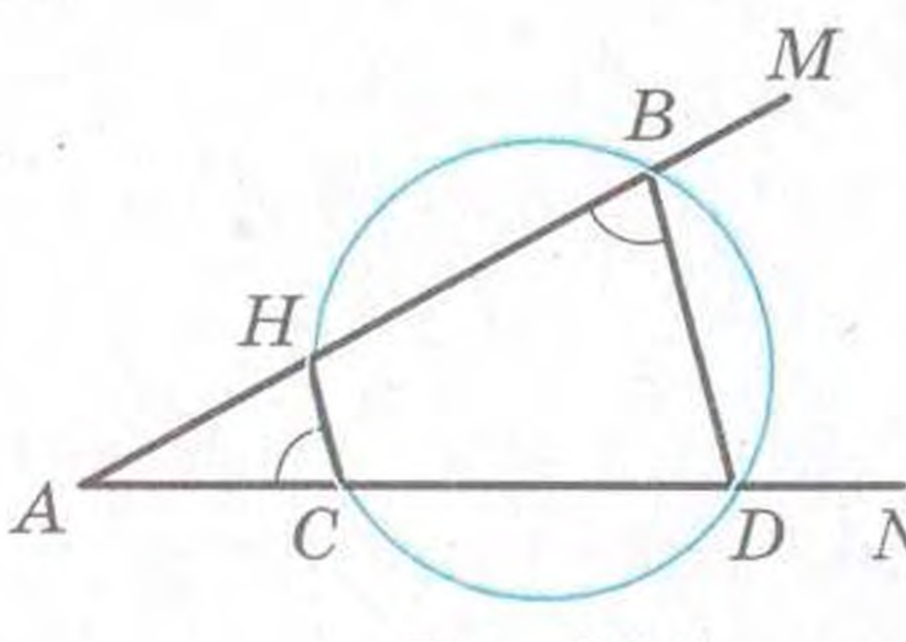


Рис. 21.5

1. Сформулюйте другу ознаку подібності трикутників.
2. Сформулюйте третю ознаку подібності трикутників.

ВПРАВИ

21.1.° На сторонах AB і AC трикутника ABC (рис. 21.6) позначили відповідно точки D і E так, що $AD = \frac{4}{7}AC$, $AE = \frac{4}{7}AB$. Знайдіть відрізок DE, якщо $BC = 21$ см.

21.2.° У трикутнику ABC $AB = 21$ см, $AC = 42$ см, $BC = 28$ см. На продовженнях відрізків AB і BC за точку B відкладено відповідно відрізки BM і BK, $BM = 8$ см, $BK = 6$ см (рис. 21.7). Знайдіть відрізок KM.

21.3.° Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (рис. 21.8), $AO = 24$ см, $BO = 16$ см, $CO = 15$ см, $OD = 10$ см, $\angle ACO = 72°$. Знайдіть $\angle BDO$.

21.4.° На сторонах AC і BC трикутника ABC позначили відповідно точки M і K так, що $CM = 15$ см, $CK = 12$ см. Знайдіть відрізок MK, якщо $AC = 20$ см, $BC = 25$ см, $AB = 30$ см.

21.5.° Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 14$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 15$ см, $A_1C_1 = 21$ см;
2) $AB = 1{,}3$ см, $BC = 2{,}5$ см, $AC = 3{,}2$ см, $A_1B_1 = 26$ см, $B_1C_1 = 50$ см, $A_1C_1 = 60$ см?

21.6.° Чи подібні два трикутники, якщо сторони одного відносяться як 3 : 8 : 9, а сторони другого дорівнюють 24 см, 9 см, 27 см?

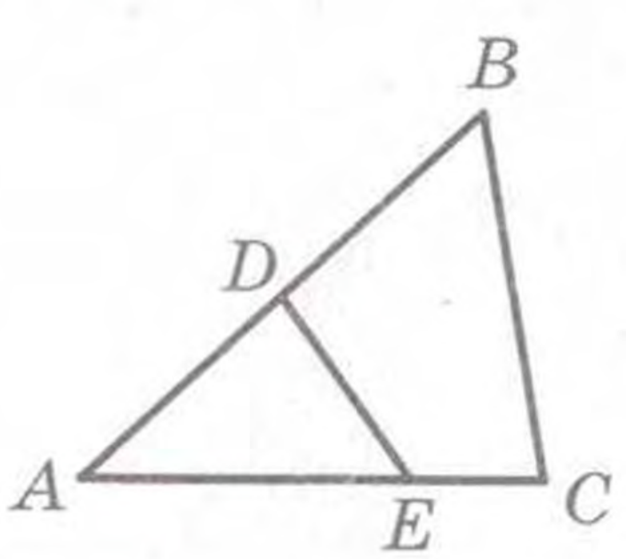


Рис. 21.6

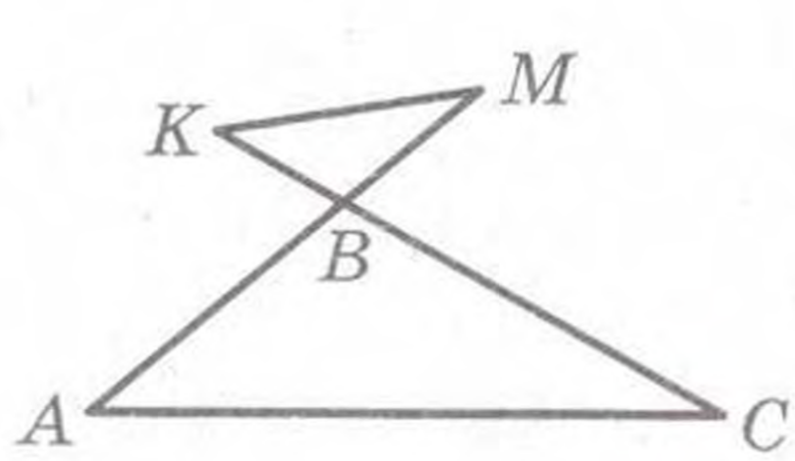


Рис. 21.7

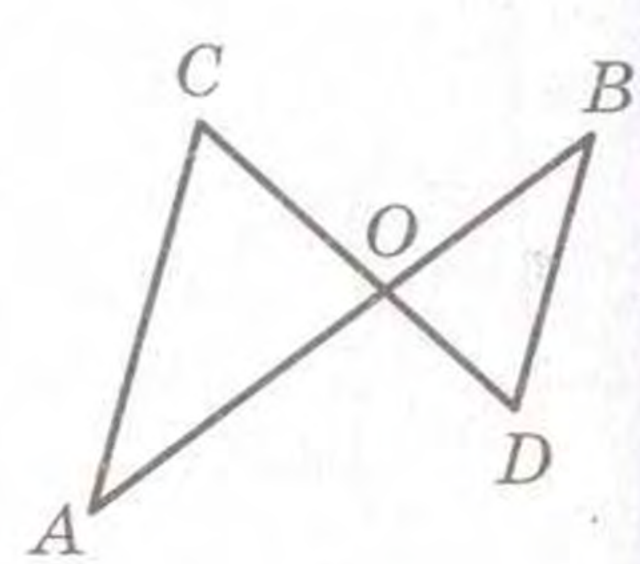


Рис. 21.8

21.7.° У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, кожна із сторін AB і AC становить 0,6 сторони A_1B_1 і A_1C_1 відповідно. Знайдіть сторони BC і B_1C_1, якщо їх сума дорівнює 48 см.

21.8.° У трикутниках DEF і MKN $\angle E = \angle K$, а кожна із сторін DE і EF у 2,5 раза більша за сторони MK і KN відповідно. Знайдіть сторони DF і MN, якщо їх різниця дорівнює 30 см.

21.9.° Доведіть, що в подібних трикутниках медіани, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.

21.10.° На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено відповідно точки D і E так, що $AD : DB = AE : EC = 3 : 5$. Знайдіть відрізок DE, якщо $BC = 16$ см.

21.11.° З дерев'яних паличок виготовили три різносторонніх подібних трикутники. У кожному з них більшу сторону пофарбували у блакитний колір, а меншу — у жовтий. З блакитних і жовтих паличок окремо склали два трикутники. Чи будуть ці трикутники подібні?

21.12.° Два відрізки AB і CD перетинаються в точці M так, що $MA = 6$ см, $MB = 8$ см, $MC = 3$ см, $MD = 16$ см. Чи лежать точки A, B, C, D на одному колі?

21.13.• У трикутнику ABC $AC = a$, $AB = BC = b$, AM і CK — бісектриси трикутника. Знайдіть відрізок MK.

21.14.• У трикутнику ABC проведено висоту CD (точка D належить стороні AB). Відомо, що $CD^2 = AD \cdot DB$. Доведіть, що $\angle ACB = 90°$.

21.15.• На стороні BC трикутника ABC позначено точку M. Точка E — середина відрізка AM. Пряма CE перетинає сторону AB у точці D. Відомо, що $AE^2 = EC \cdot ED$. Доведіть, що точки A, D, M і C лежать на одному колі.

21.16.• Коло, побудоване на стороні AC трикутника ABC як на діаметрі, проходить через середину M сторони AB і перетинає сторону BC у точці N так, що $BN : NC = 2 : 7$. Знайдіть відрізок MN, якщо $AC = 6$ см.

21.17.•• У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см. На стороні AC позначено точку D так, що $CD = 9$ см. Знайдіть відрізок BD.

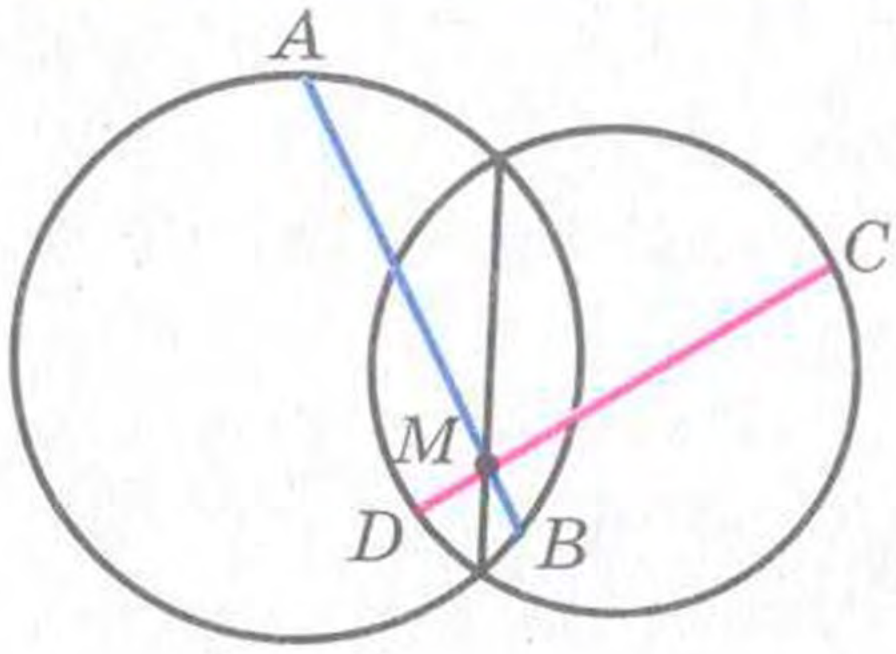


Рис. 21.9

√ **21.18.**•• На спільній хорді двох кіл, які перетинаються, узято точку M і через неї проведено хорди AB і CD (рис. 21.9). Доведіть, що $\angle DAB = \angle BCD$.

21.19.•• Точка M лежить поза колом. На колі обрано точки A, B і C такі, що $MC^2 = MA \cdot MB$. Доведіть, що пряма MC — дотична до кола.

21.20.•• У паралелограмі $ABCD$ діагональ AC більша за діагональ BD. На діагоналі AC позначено точку M так, що чотирикутник $BCDM$ — вписаний. Доведіть, що пряма BD є дотичною до описаних кіл трикутників ABM і ADM.

21.21.•• У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і CC_1. Точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Доведіть, що відрізки BO і A_1C_1 перпендикулярні.

21.22.•• Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. На сторонах AC і BC обрано відповідно точки M і K так, що $BK \cdot AB = BO^2$ і $AM \cdot AB = AO^2$. Доведіть, що точки M, O і K лежать на одній прямій.

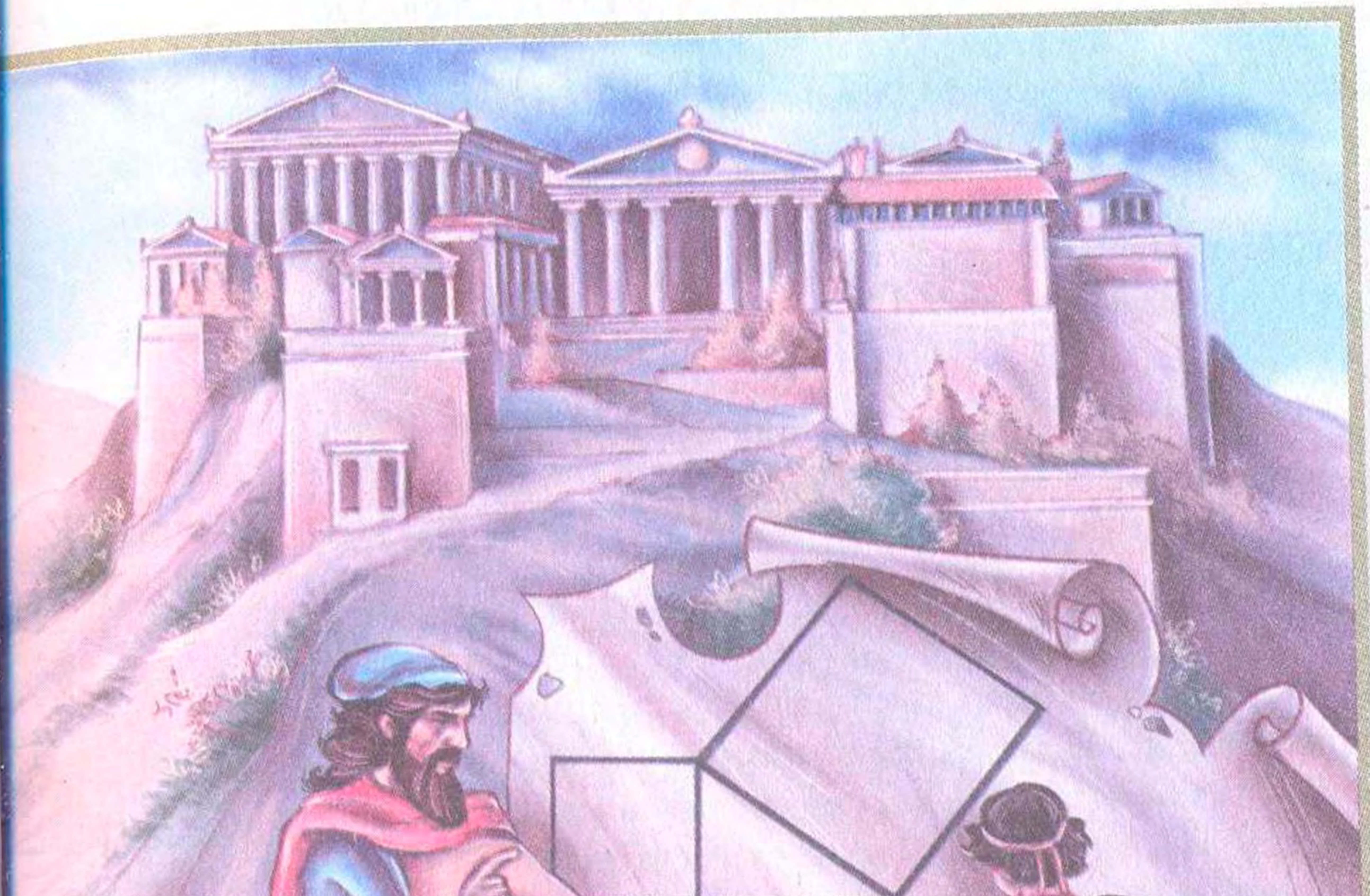
21.23* (13.39). На медіані BM трикутника ABC позначено точку K так, що $\angle MKC = \angle BCM$. Доведіть, що $\angle AKM = \angle BAM$.

21.24.* У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено бісектрису AM. На промені CA відкладено відрізок CN, рівний відрізку BM. Доведіть, що точки A, B, M і N лежать на одному колі.

21.25.* Для сторін трикутника ABC виконується рівність $BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$. Доведіть, що $\angle A = 2 \angle B$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

§5



22. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

На рисунку 22.1 відрізок CD — висота трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$).

Відрізки AD і DB (рис. 22.1) називають **проекціями** на гіпотенузу катетів AC і CB відповідно.

Теорема 22.1. ***Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу. Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи і проекції цього катета на гіпотенузу.***

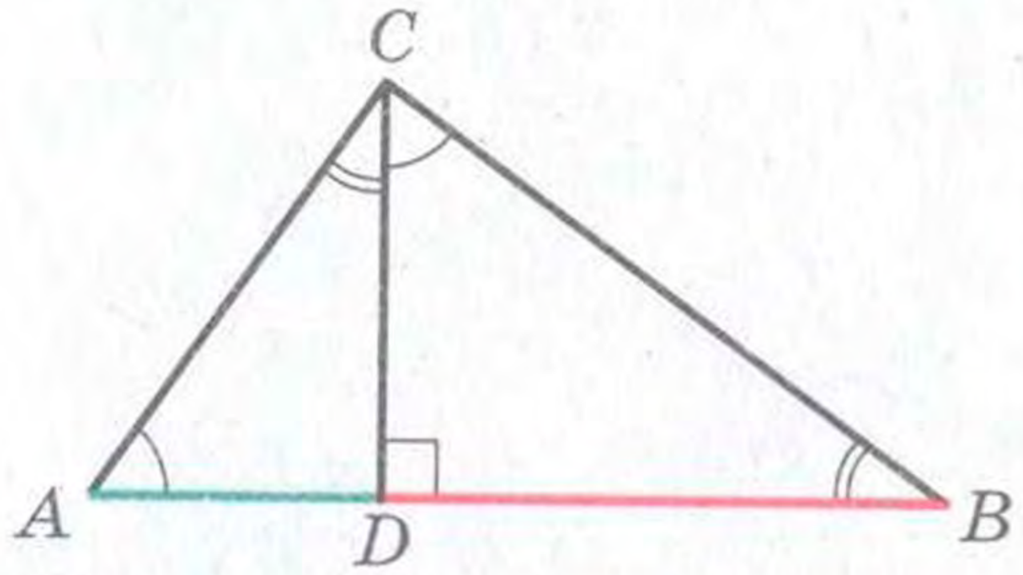


Рис. 22.1

Доведення. На рисунку 22.1 відрізок CD — висота прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$). Доведемо, що:

$$CD^2 = AD \cdot DB;$$
$$AC^2 = AB \cdot AD;$$
$$BC^2 = AB \cdot DB.$$

Лема. ***Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два подібних прямокутних трикутники, кожен з яких подібний даному трикутнику.*** (Доведіть це самостійно.)

Оскільки $\Delta\ CBD \backsim \Delta\ ACD$, то $\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD}$. Звідси $CD^2 = AD \cdot DB$.

Оскільки $\Delta\ ABC \backsim \Delta\ ACD$, то $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$. Звідси $AC^2 = AB \cdot AD$.

Оскільки $\Delta\ ABC \backsim \Delta\ CBD$, то $\frac{BC}{AB} = \frac{DB}{BC}$. Звідси $BC^2 = AB \cdot DB$. ▲

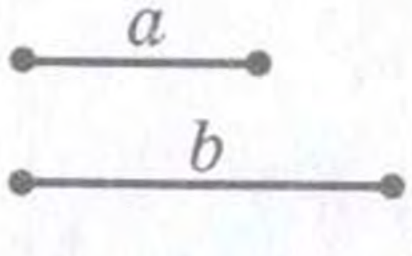


Рис. 22.2

Приклад 1. Дано два відрізки, довжини яких дорівнюють a і b (рис. 22.2). Побудуйте третій відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{ab}$.

Розв'язання. На прямій позначимо точки A, B і C так, щоб $AB = a$, $BC = b$. Побудуємо коло з діаметром AC. Через точку B проведемо пряму, перпендикулярну до прямої AC (рис. 22.3). Нехай D — одна з точок перетину прямої і кола. Доведемо, що відрізок DB — шуканий. Дійсно, $\angle ADC = 90°$ як вписаний, що спирається на діаметр AC. Тоді за теоремою 22.1 $DB^2 = AB \cdot BC$, тобто $DB = \sqrt{ab}$.

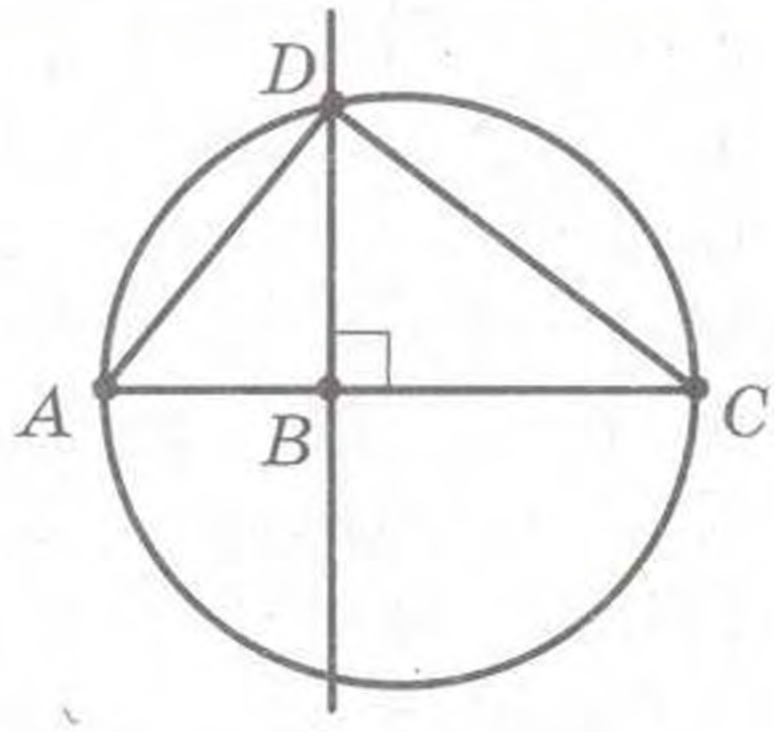


Рис. 22.3

Приклад 2. На катеті AC прямокутного трикутника ABC як на діаметрі побудовано півколо, яке перетинає гіпотенузу AB у точці M так, що $AM : MB = 1 : 3$ (рис. 22.4). Знайдіть кути трикутника ABC.

Розв'язання. Оскільки кут CMA вписаний, що спирається на діаметр, то $CM \perp MA$.

Нехай $AM = x$, тоді $MB = 3x$. За теоремою 22.1 $AC^2 = AM \cdot AB$, тобто $AC^2 = x \cdot 4x$. Звідси $AC = 2x$. Отримали, що в прямокутному трикутнику ABC катет AC у два рази менший від гіпотенузи. Звідси $\angle ABC = 30°$, $\angle BAC = 60°$.

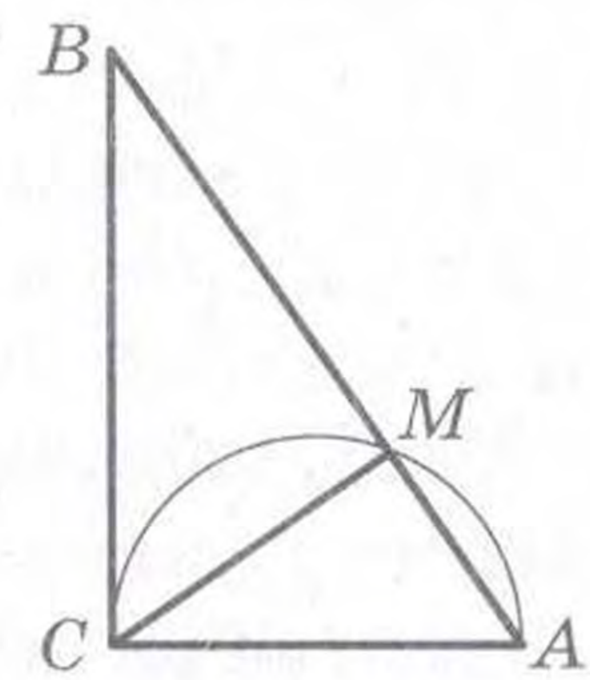


Рис. 22.4

1. Як пов'язані висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, і проекції катетів на гіпотенузу?
2. Як пов'язані катет, гіпотенуза і проекція цього катета на гіпотенузу?

ВПРАВИ

22.1.° Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 2 см і 18 см.

22.2.° Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а його проекція на гіпотенузу — 4 см. Знайдіть гіпотенузу.

22.3.° Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 5 см і 20 см. Знайдіть катети трикутника.

22.4.° Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 48 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу — 36 см. Знайдіть сторони даного трикутника.

22.5.° Знайдіть катети прямокутного трикутника, висота якого ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких на 3 см менший від цієї висоти, а другий — на 4 см більший за висоту.

22.6.° Знайдіть менший катет прямокутного трикутника і його висоту, проведену до гіпотенузи, якщо більший катет менший від гіпотенузи на 10 см і більший за свою проекцію на гіпотенузу на 8 см.

22.7.° Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, дорівнює 2 см і ділить її на відрізки, які відносяться як 1 : 4. Знайдіть діагоналі ромба.

22.8.° Перпендикуляр, опущений з точки кола на його діаметр, ділить його на два відрізки, один з яких дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 10 см.

22.9.° Прямі, які дотикаються до кола з центром O в точках A і B, перетинаються в точці M. Знайдіть хорду AB, якщо вона ділить відрізок MO на відрізки завдовжки 2 см і 18 см.

22.10.• Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 25 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

22.11.• Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, належить її більшій основі. Знайдіть радіус цього кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а проекція діагоналі на більшу основу — 16 см.

22.12.• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 12 см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює 10 см.

22.13.$^{\bullet}$ Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а різниця квадратів основ дорівнює 25 см^2.

22.14.$^{\bullet}$ У прямокутному трикутнику ABC проведено висоту з вершини C прямого кута. На цій висоті як на діаметрі побудовано коло. Коло відтинає на катетах відрізки завдовжки 12 см і 18 см. Знайдіть катети трикутника ABC.

22.15.$^{\bullet}$ Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а проекція другого катета на гіпотенузу дорівнює 16 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

22.16.$^{\bullet}$ Діагоналі прямокутної трапеції перпендикулярні, і точка перетину ділить більшу з них на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть меншу діагональ трапеції.

22.17.$^{\bullet}$ Побудуйте відрізок x, якщо $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, де a і b — довжини даних відрізків.

22.18.$^{\bullet}$ Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та проекцією одного з катетів на гіпотенузу.

22.19.$^{\bullet}$ Коло, вписане в трапецію $ABCD$, дотикається до бічних сторін AB і CD трапеції відповідно в точках K і M. Доведіть, що $AK \cdot KB = CM \cdot MD$.

22.20.$^{\bullet}$ У трапецію вписано коло радіуса 6 см. Точка дотику ділить одну з основ на відрізки завдовжки 9 см і 12 см. Знайдіть сторони трапеції.

22.21.$^{\bullet}$ У рівнобічну трапецію можна вписати коло. Доведіть, що квадрат висоти цієї трапеції дорівнює добутку її основ.

22.22.$^{\bullet}$ Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр трапеції.

22.23.$^{\bullet}$ Коло, вписане в рівнобічну трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки 3 см і 27 см. Знайдіть висоту трапеції.

22.24.$^{\bullet}$ Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить його більшу діагональ на відрізки завдовжки 3,5 см і 12,5 см. Знайдіть меншу діагональ ромба.

22.25.$^{\bullet\bullet}$ На висотах BB_1 і CC_1 гострокутного трикутника ABC позначено відповідно точки B_2 і C_2 так, що $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90°$. Доведіть, що $AB_2 = AC_2$.

23. Теорема Піфагора

Теорема 23.1 (теорема Піфагора). ***У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.***

Доведення. На рисунку 23.1 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$). Доведемо, що $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

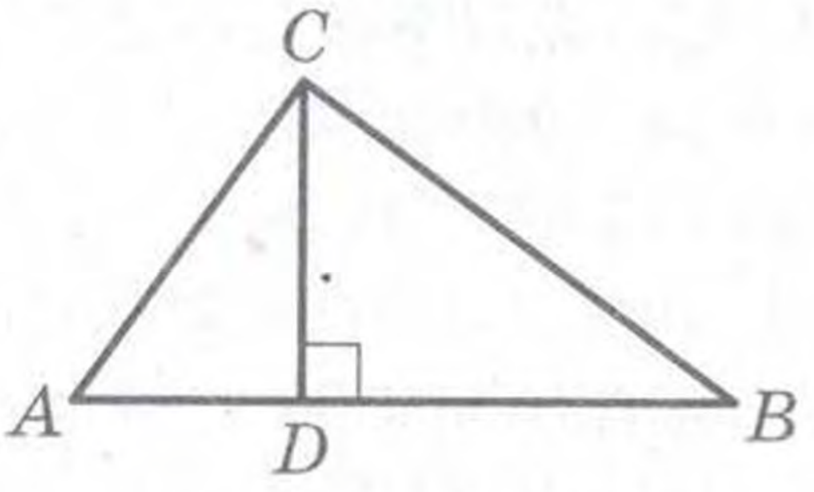


Рис. 23.1

Проведемо висоту CD. Застосувавши теорему 22.1, отримуємо:

$$AC^2 = AD \cdot AB;$$
$$BC^2 = DB \cdot AB.$$

Звідси $AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + DB \cdot AB = AB(AD + DB) = AB^2$. ▲

Якщо в прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють a і b, а довжина гіпотенузи дорівнює c, то теорема Піфагора може бути записана так:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Теорема Піфагора дає змогу за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2};$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

З рівності $c^2 = a^2 + b^2$ також випливає, що $c^2 > a^2$ і $c^2 > b^2$, звідси $c > a$ і $c > b$, тобто ***гіпотенуза більша за будь-який з катетів***[1].

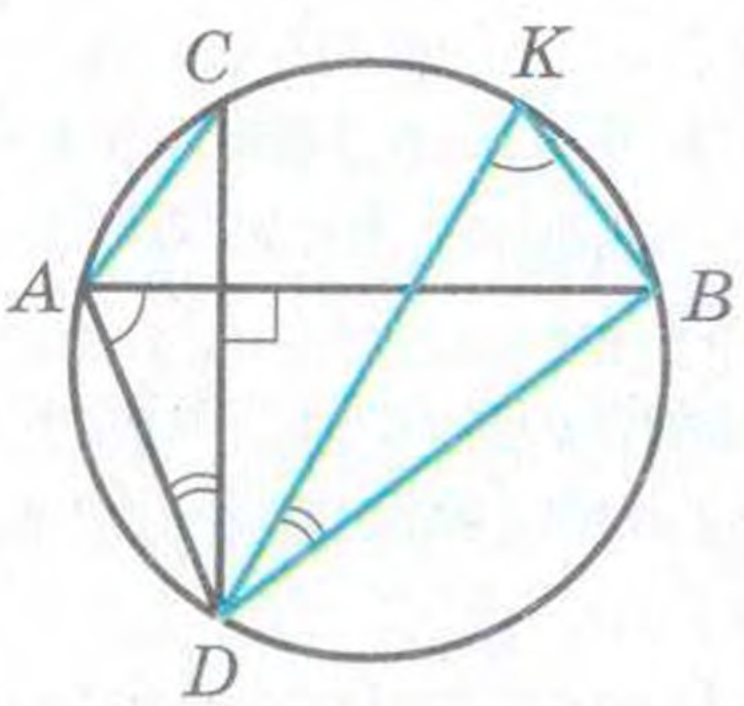


Рис. 23.2

Приклад. У колі радіуса R проведено дві перпендикулярні хорди AB і CD, які перетинаються (рис. 23.2). Доведіть, що $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

Розв'язання. Позначимо на колі таку точку K, що $\smile BK = \smile AC$ (рис. 23.2). Тоді $AC = KB$ і $\angle ADC = \angle KDB$. Зауважимо, що $\angle DAB$ і $\angle DKB$ рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу BD. Оскільки $AB \perp CD$, то $\angle ADC +$

[1] Іншим способом цей факт було встановлено в курсі геометрії 7 класу.

$+ \angle DAB = 90°$. Тоді $\angle KDB + \angle DKB = 90°$. Отже, $\angle KBD = 90°$ і KD — діаметр кола.

За теоремою Піфагора $KB^2 + BD^2 = KD^2$ або $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

?

1. Сформулюйте теорему Піфагора.
2. Як можна записати теорему Піфагора, якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють *a* і *b*, а гіпотенуза дорівнює *c*?
3. Яка із сторін прямокутного трикутника є найбільшою?

ВПРАВИ

23.1.° Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 3 см і 4 см; 2) 6 см і 9 см.

23.2.° Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет відповідно дорівнюють:
1) 15 см і 12 см; 2) 7 см і $\sqrt{13}$ см.

23.3.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 29 см, а висота, проведена до основи, — 21 см. Чому дорівнює основа трикутника?

23.4.° Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 35 см, а його основа — 24 см. Чому дорівнює бічна сторона трикутника?

23.5.° У колі, радіус якого дорівнює 10 см, проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть відстань від центра кола до даної хорди.

23.6.° Знайдіть периметр ромба, діагоналі якого дорівнюють 24 см і 32 см.

23.7.° Сторона ромба дорівнює 26 см, а одна з діагоналей — 48 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

23.8.° Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а другий катет на 7 см менший від гіпотенузи. Знайдіть периметр трикутника.

23.9.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 26 см, а катети відносяться як 5 : 12. Знайдіть катети цього трикутника.

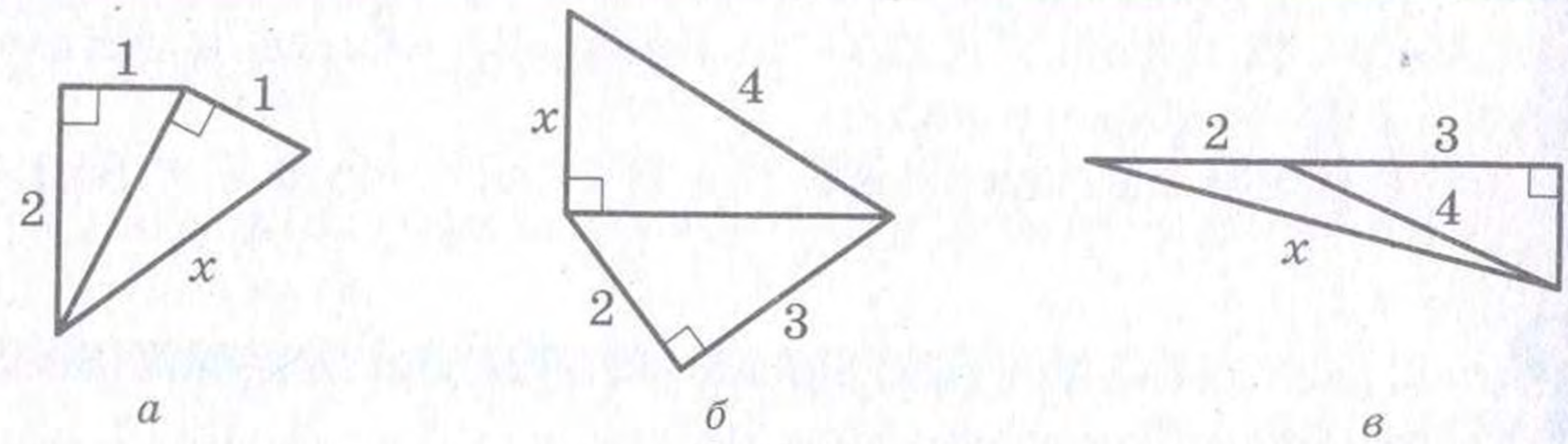


Рис. 23.3

23.10.° Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, — 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

23.11.° У трикутнику ABC $BC = 20$ см, висота BD ділить сторону AC на відрізки $AD = 5$ см і $CD = 16$ см. Знайдіть сторону AB.

23.12.° У трикутнику ABC $AB = 17$ см, $BC = 9$ см, $\angle C$ — тупий, висота AD дорівнює 8 см. Знайдіть сторону AC.

23.13.° Знайдіть висоту рівностороннього трикутника зі стороною a.

23.14.° Знайдіть діагональ квадрата зі стороною a.

23.15.° Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 23.3 (розміри дано в сантиметрах).

23.16.° Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 23.4 (розміри дано в сантиметрах).

23.17.° У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см і ділить її на дві частини, одна з яких, прилегла до вершини рівнобедреного трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть основу трикутника.

23.18.° Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см,

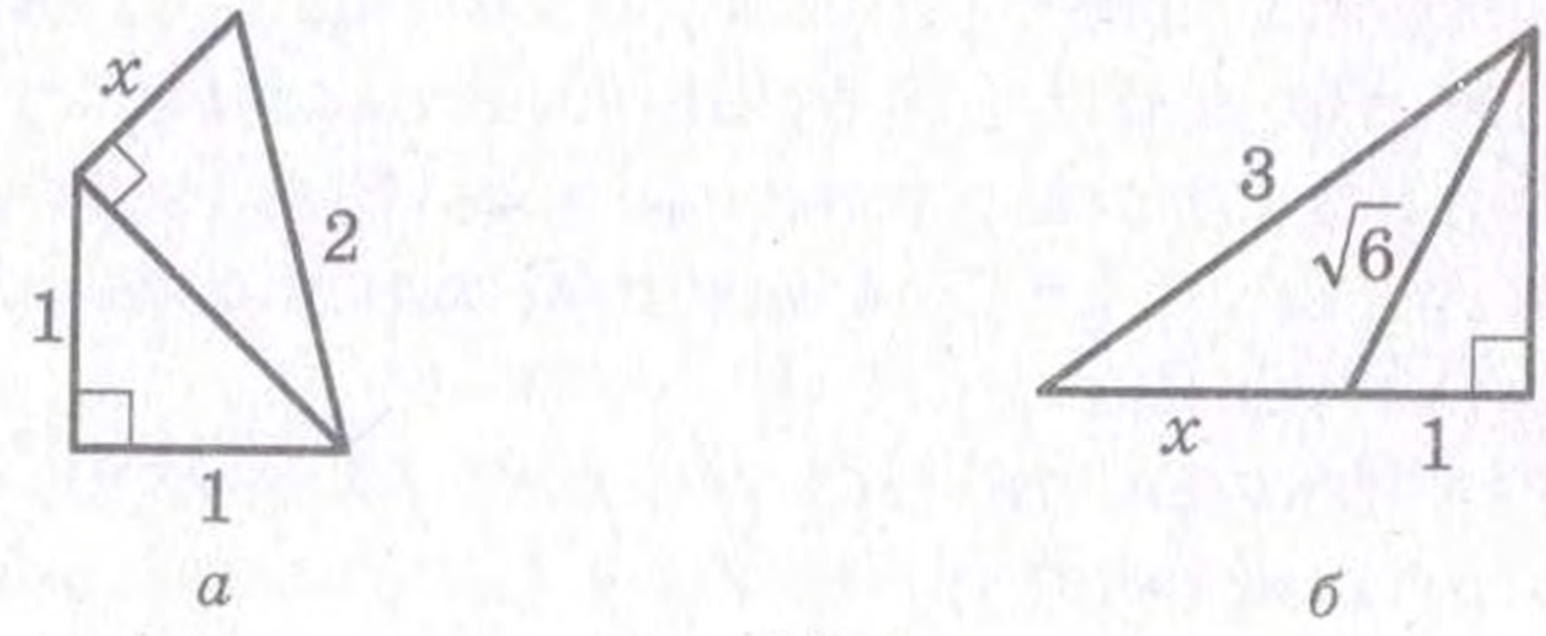


Рис. 23.4

рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника.

23.19.° Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

23.20.° Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

23.21.° З точки, віддаленої від прямої на 5 см, проведено до цієї прямої дві похилі завдовжки $5\sqrt{5}$ см і $\sqrt{89}$ см. Знайдіть відстань між основами похилих.

23.22.° З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 5 : 6, а проекції цих похилих на пряму дорівнюють 7 см і 18 см. Знайдіть відстань від даної точки до цієї прямої.

23.23.° З точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 15 см і 27 см. Сума довжин проекцій цих похилих на пряму дорівнює 24 см. Знайдіть проекцію кожної з похилих.

23.24.• Сторони трикутника дорівнюють 29 см, 25 см і 6 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до меншої сторони.

23.25.• Сторони трикутника дорівнюють 36 см, 29 см і 25 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до більшої сторони.

23.26.• Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить один із його катетів на відрізки 2 см і 6 см. Знайдіть сторони трикутника.

23.27.• Знайдіть сторони паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см, якщо одна з них перпендикулярна до сторони паралелограма.

23.28.• Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 30 см і 40 см.

23.29.• Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 24 см і 51 см.

23.30.° Дано відрізок, рівний 1. Побудуйте відрізок, який дорівнює: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{7}$.

23.31.° Дано відрізок, рівний 1. Побудуйте відрізок, який дорівнює: 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{6}$.

23.32.° Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 20 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Знайдіть цю діагональ.

23.33.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 18 см і 12 см, а діагональ є бісектрисою її гострого кута. Знайдіть цю діагональ.

23.34.° У колі по різні сторони від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 16 см і 32 см. Відстань між хордами дорівнює 16 см. Знайдіть радіус кола.

23.35.° У колі по одну сторону від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 48 см і 24 см. Відстань між хордами дорівнює 12 см. Знайдіть радіус кола.

23.36.° Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, дорівнює 12 см, а відстань від вершини рівнобедреного трикутника до центра кола — 20 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

23.37.° Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її більшу основу на відрізки завдовжки 20 см і 25 см. Обчисліть периметр трапеції.

23.38.° Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її меншу основу на відрізки завдовжки 6 см і 3 см. Обчисліть периметр трапеції.

23.39.° Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини меншого гострого кута.

23.40.° Медіани AM і CK трикутника ABC перпендикулярні. Знайдіть сторони трикутника, якщо $AM = 9$ см і $CK = 12$ см.

23.41.° У трикутнику ABC медіани BM і CK перпендикулярні і перетинаються в точці O. Знайдіть відрізок AO, якщо $BM = 36$ см і $CK = 15$ см.

23.42.° Доведіть, що для будь-якої точки X кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, сума $XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2$ є величиною сталою.

23.43.* Через точку A, яка лежить поза колом, проведено до нього дотичну і січну. Відстань від точки A до точки дотику дорівнює 16 см, а до однієї з точок перетину січної з колом — 32 см. Знайдіть радіус кола, якщо січна віддалена від його центра на 5 см.

23.44.** Доведіть, що коли в трапеції діагоналі перпендикулярні, то сума квадратів діагоналей дорівнює квадрату суми основ.

23.45.** Навколо трикутника ABC описано коло. Дотична до цього кола, проведена в точці B, перпендикулярна до сторони AC. Знайдіть сторону AC, якщо $AB = 20$ см, $BC = 15$ см.

23.46.** Точка H — ортоцентр трикутника ABC, R — радіус його описаного кола. Доведіть, що $AH^2 = 4R^2 - BC^2$.

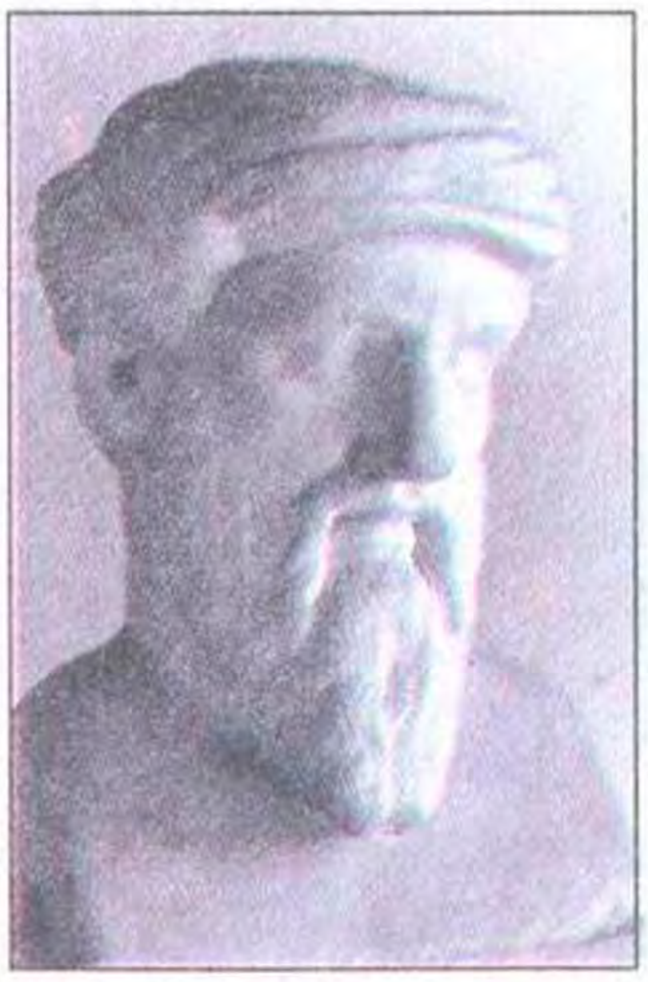
23.47.* У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 1$ см, $BC = 3$ см. На сторонах BC і AB як на гіпотенузах у зовнішній бік побудовано рівнобедрені прямокутні трикутники BKC і BDA. Знайдіть відрізок KD.

23.48.* На гіпотенузі AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC позначено точки M і N так, що $\angle MCN = 45°$ ($AM < AN$). Доведіть, що $AM^2 + BN^2 = MN^2$.

ПІФАГОР

Ви вивчили знамениту теорему, яка носить ім'я видатного давньогрецького вченого Піфагора.

Дослідження стародавніх текстів свідчать, що твердження цієї теореми було відоме задовго до Піфагора. Чому ж її приписують Піфагору? Найімовірніше тому, що саме Піфагор розумів необхідність доведення цього твердження і знайшов його.



Про життя Піфагора мало що відомо достовірно. Він народився у VI ст. до н. е. на грецькому острові Самос. За легендами, він багато подорожував, побував у Єгипті та Вавилоні, де набув мудрощів і знань.

Після того як він оселився у грецькій колонії Кротон (на півдні Італії), навколо нього сформувалося численне коло відданих учнів і однодумців. Так виник піфагорійський союз (кротонське братство). Вплив цього союзу був таким сильним, що навіть через сторіччя після смерті Піфагора багато великих математиків Стародавнього світу називали себе піфагорійцями.

24. Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника

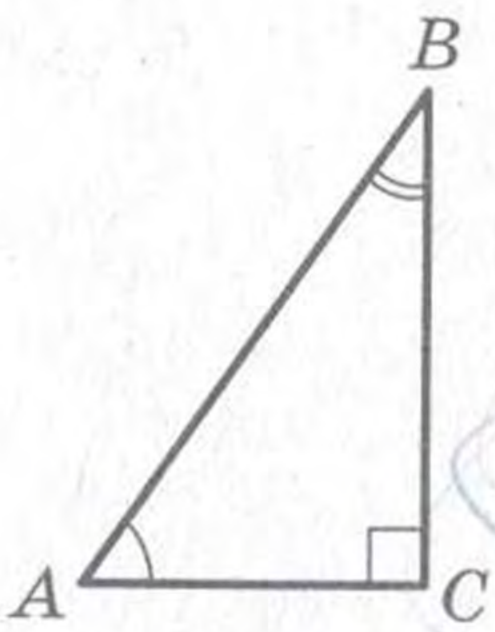


Рис. 24.1

На рисунку 24.1 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Нагадаємо, що катет BC називають **протилежним** куту A, а катет AC — **прилеглим** до цього кута.

Означення. Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Синус кута A позначають так: $\sin A$ (читають: «синус A»). Для гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC маємо:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}; \ \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

Для прямокутного трикутника, зображеного на рисунку 24.2, записують: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\sin \beta = \frac{b}{c}$.

Розглянемо прямокутний рівнобедрений трикутник ABC ($\angle C = 90°$), у якому $AC = BC = a$ (рис. 24.3).

Маємо: $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

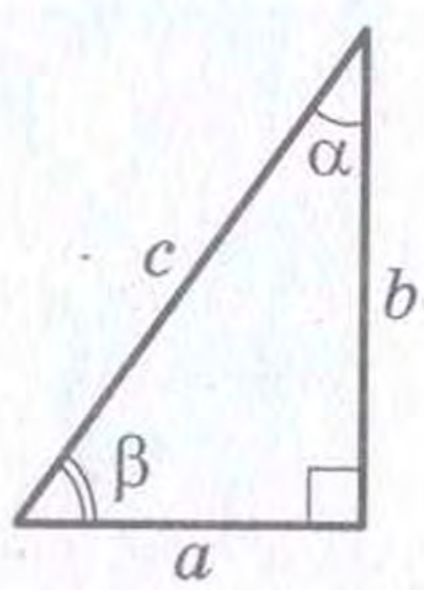


Рис. 24.2

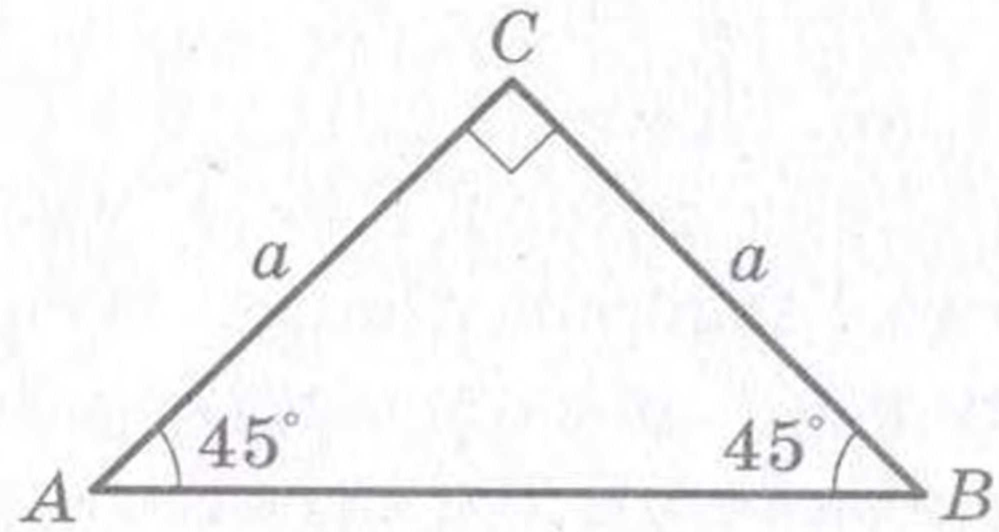


Рис. 24.3

Тоді за означенням $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Бачимо, що синус гострого кута прямокутного рівнобедреного трикутника не залежить від розмірів трикутника (адже значення a можна вибрати довільно). Оскільки $\angle A = 45°$, то пишуть $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, не пов'язуючи цей запис із жодним конкретним прямокутним рівнобедреним трикутником.

Узагалі, ***якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні.***

Дійсно, ці прямокутні трикутники є подібними за першою ознакою подібності трикутників. Тому відношення катета до гіпотенузи одного трикутника дорівнює відношенню відповідного катета до гіпотенузи другого трикутника.

Наприклад, запис $\sin 17°$ можна віднести до всіх кутів, градусні міри яких дорівнюють $17°$. Значення цього синуса можна обчислити один раз для якогось обраного прямокутного трикутника з гострим кутом $17°$. Діючи у такий спосіб, можна скласти таблицю значень синусів різних кутів (див. с. 233).

Отже, ***синус кута залежить тільки від величини цього кута.***

Означення. Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Косинус кута A позначають так: $\cos A$ (читають: «косинус A»).

Означення. Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.

Тангенс кута A позначають так: $\operatorname{tg} A$ (читають: «тангенс A»).

Означення. Котангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до протилежного.

Котангенс кута A позначають так: ctg A (читають: «котангенс A»).

Для гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC (рис. 24.1) маємо:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}; \ \cos B = \frac{BC}{AB};$$
$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}; \ \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC};$$
$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}; \ \operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC}.$$

Для прямокутного трикутника, зображеного на рисунку 24.2, записують: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$.

Як було встановлено, синус кута залежить тільки від величини кута. Міркуючи аналогічно, можна дійти такого висновку:

косинус, тангенс і котангенс кута залежать тільки від величини цього кута.

Узагалі, кожному гострому куту α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса, котангенса) цього кута. Тому залежність значень синусів (косинусів, тангенсів, котангенсів) гострих кутів від величин цих кутів є функціональною. Функцію, яка відповідає цій залежності, називають **тригонометричною**.

Існують таблиці наближених значень тригонометричних функцій різних кутів (див. с. 233). Також ці значення можна знаходити за допомогою мікрокалькулятора.

Знову звернемося до рисунка 24.2.

Запишемо: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$. Отже,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Аналогічно $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$. Отже,

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Очевидно, що

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

Якщо обидві частини рівності $a^2 + b^2 = c^2$ поділити на c^2, то отримаємо $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, тобто

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Прийнято записувати $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$; $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$. Звідси

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Зазначимо, що $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ (рис. 24.2). Оскільки $\beta = 90° - \alpha$, то:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(90° - \alpha) &= \sin\alpha \\ \sin(90° - \alpha) &= \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(90° - \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(90° - \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \end{aligned}}$$

Ми вже знаємо, що $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Знайдемо тепер $\cos 45°$, $\operatorname{tg} 45°$ і $\operatorname{ctg} 45°$. Маємо:

$$\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1; \quad \operatorname{ctg} 45° = \frac{1}{\operatorname{tg} 45°} = 1.$$

Знайдемо синус, косинус, тангенс і котангенс кутів 30° і 60°.

Розглянемо прямокутний трикутник ABC, у якому $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 24.4). Нехай $BC = a$. Тоді за властивістю катета, який лежить проти кута 30°, отримуємо, що $AB = 2a$. Маємо:

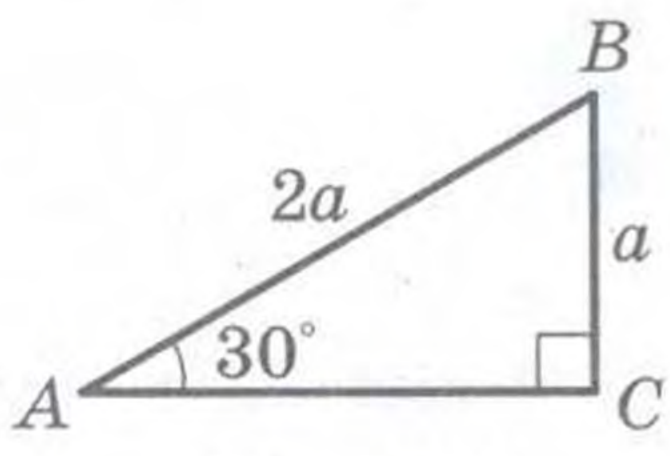


Рис. 24.4

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$. Звідси:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};\ \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{ctg } 30^\circ = \frac{1}{\text{tg } 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

Оскільки $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, то отримуємо:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\text{tg } 60^\circ = \text{ctg } 30^\circ = \sqrt{3};\ \text{ctg } 60^\circ = \text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса для кутів 30°, 45° і 60° корисно запам'ятати. Таблиця цих значень наведена на форзаці.

Приклад. Доведіть, що в усіх трапецій зі спільною бічною стороною, вписаних в одне коло, відношення висоти до середньої лінії є сталим.

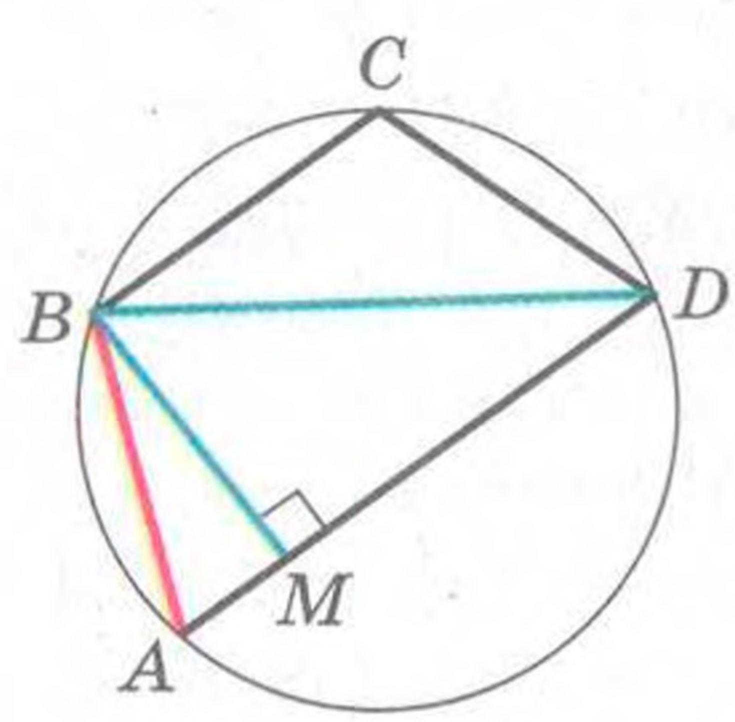


Рис. 24.5

Розв'язання. Чотирикутник $ABCD$ — одна з трапецій, про які йдеться в задачі (рис. 24.5). Її бічна сторона AB є спільною для всіх трапецій.

Нехай $\angle ADB = \alpha$. Тоді в усіх трапеціях кут між діагоналлю і більшою основою дорівнює α. Проведемо висоту BM трапеції. Відрізок MD дорівнює середній лінії трапеції (див. ключову задачу п. 10).

Маємо: $\frac{BM}{MD} = \text{tg } \alpha$. Отже, для всіх трапецій, що розглядаються, відношення висоти до середньої лінії дорівнює $\text{tg } \alpha$.

?

1. Що називають синусом гострого кута прямокутного трикутника?
2. Що називають косинусом гострого кута прямокутного трикутника?
3. Що називають тангенсом гострого кута прямокутного трикутника?

4. Що називають котангенсом гострого кута прямокутного трикутника?

5. Від чого залежать синус, косинус, тангенс і котангенс кута?

6. Як пов'язані між собою tg α, ctg α, sin α і cos α?

7. Як пов'язані між собою синус і косинус одного й того самого кута?

8. Чому дорівнює sin $(90° - \alpha)$? cos $(90° - \alpha)$? tg $(90° - \alpha)$? ctg $(90° - \alpha)$?

9. Чому дорівнює sin 45°? cos 45°? tg 45°? ctg 45°?

10. Чому дорівнює sin 30°? cos 30°? tg 30°? ctg 30°?

11. Чому дорівнює sin 60°? cos 60°? tg 60°? ctg 60°?

ВПРАВИ

24.1.° Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 8 см і 10 см. Знайдіть:

1) синус кута, протилежного меншому катету;
2) косинус кута, який прилягає до більшого катета;
3) тангенс кута, протилежного меншому катету;
4) котангенс кута, який прилягає до більшого катета.

24.2.° Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 2 см. Знайдіть:

1) тангенс кута, прилеглого до більшого катета;
2) синус кута, протилежного меншому катету;
3) косинус кута, прилеглого до більшого катета;
4) котангенс кута, протилежного більшому катету.

24.3.° Знайдіть значення виразу:

1) $\cos^2 45° + \mathrm{tg}^2\, 60°$;
2) $2\cos^2 60° - \sin^2 30° + \sin 60°\ \mathrm{ctg}\, 60°$.

24.4.° Знайдіть значення виразу:

1) $\cos^2 30° - \sin^2 45°$;
2) $3\,\mathrm{tg}^2\, 30° + 4\,\mathrm{tg}\, 45° + \cos 30°\ \mathrm{ctg}\, 30°$.

24.5.° У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $BC = 77$ см, $AB = 125$ см. Знайдіть гострі кути трикутника, скориставшись таблицею значень тригонометричних функцій, розміщеною на с. 233.

24.6.° У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $BC = 41$ см, $AC = 20$ см. Знайдіть гострі кути трикутника, скориставшись таблицею значень тригонометричних функцій, розміщеною на с. 233.

24.7.° Знайдіть $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

24.8.° Знайдіть $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ і $\operatorname{ctg}\beta$, якщо $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

24.9.° Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута між бічною стороною трикутника і висотою, проведеною до його основи.

24.10.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, — 8 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута при основі трикутника.

24.11.° Знайдіть кути ромба, діагоналі якого дорівнюють 4 см і $4\sqrt{3}$ см.

24.12.° Знайдіть кути між діагоналлю прямокутника і його сторонами, довжини яких дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 3 см.

24.13.° У рівнобічній трапеції $ABCD$ $AB = CD = 9$ см, $BC = 10$ см, $AD = 14$ см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута A трапеції.

24.14.° У прямокутній трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle A = 90°$, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см. Знайдіть кути трапеції, прилеглі до її більшої бічної сторони.

24.15.° Чи може синус кута дорівнювати: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$?

24.16.° Доведіть, що тангенси гострих кутів прямокутного трикутника є взаємно оберненими числами.

24.17.° Доведіть тотожність:

1) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; 2) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

24.18.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin^2 18° + \sin^2 72°$; 2) $\cos^3 36° - \sin^3 54°$.

24.19.* Катети прямокутного трикутника дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута між медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи.

24.20.° У трикутнику ABC $AB = = BC$, BD і AM — висоти трикутника, $BD : AM = 3 : 1$. Знайдіть $\cos C$.

24.21.° У трикутнику ABC $AB = BC$, BD і CK — висоти трикутника, $\cos A = \frac{3}{7}$. Знайдіть відношення $CK : BD$.

24.22.° Доведіть, що радіус вписаного кола трикутника ABC можна обчислити за формулою $r = (p - BC)\ \mathrm{tg}\ \frac{A}{2}$, де p — півпериметр трикутника ABC.

24.23.•• Доведіть, що кути ABC і DEF, зображені на рисунку 24.6, рівні.

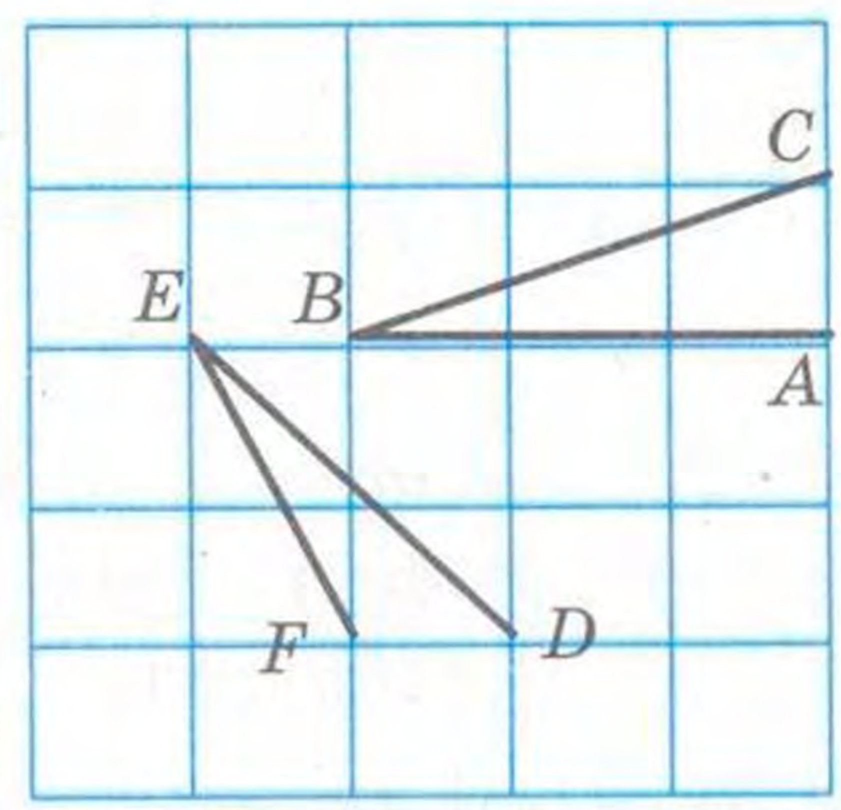


Рис. 24.6

24.24.•• У рівнобедреному трикутнику ABC відношення висоти BD до основи AC дорівнює $\sqrt{3}$. На стороні BC позначено точку M так, що $BM : MC = 1 : 2$. Знайдіть кут MAC.

24.25.•• Доведіть, що відстань від вершини A гострокутного трикутника ABC до ортоцентра H можна обчислити за формулою: 1) $AH = 2R \cos A$; 2) $AH = BC\ \mathrm{ctg}\ A$.

24.26.•• Знайдіть кут C гострокутного трикутника ABC, якщо відстань від вершини C до ортоцентра трикутника дорівнює радіусу описаного кола.

24.27.•• Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Відомо, що $CH = AB$. Знайдіть кут C трикутника ABC.

24.28.•• Використовуючи теорему Чеви, доведіть, що висоти гострокутного трикутника перетинаються в одній точці.

24.29.•• Коло, центр якого належить стороні AC трикутника ABC, дотикається до сторін AB і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що відрізки CM, AN і висота BF перетинаються в одній точці.

25. Розв'язування прямокутних трикутників

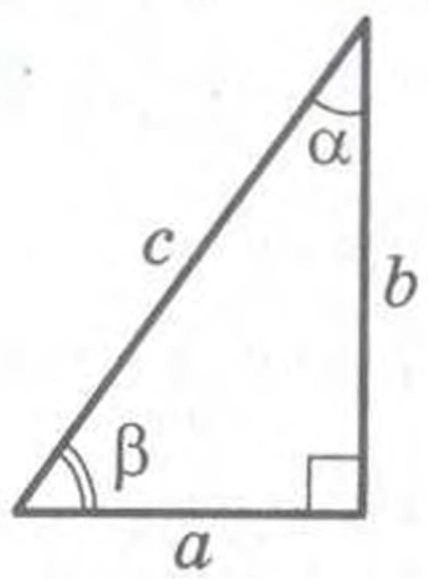


Рис. 25.1

На рисунку 25.1 зображено прямокутний трикутник з гострими кутами α і β, катети якого дорівнюють a і b, а гіпотенуза дорівнює c.

Маємо: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\sin \beta = \frac{b}{c}$. Звідси $a = c \sin \alpha$, $b = c \sin \beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на синус кута, протилежного цьому катету.***

Маємо: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$; $\cos \beta = \frac{a}{c}$. Звідси $b = c \cos \alpha$, $a = c \cos \beta$.

Таким чином, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на косинус кута, прилеглого до цього катета.***

Маємо: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$. Звідси $a = b \operatorname{tg} \alpha$, $b = a \operatorname{tg} \beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на тангенс кута, протилежного першому катету.***

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, то $b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$.

Таким чином, ***катет прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення другого катета на тангенс кута, прилеглого до першого катета.***

Маємо: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$; $\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$. Звідси $b = a \operatorname{ctg} \alpha$, $a = b \operatorname{ctg} \beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на котангенс кута, прилеглого до першого катета.***

З рівностей $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ і $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ отримуємо $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ і $c = \frac{b}{\cos \alpha}$.

Таким чином, ***гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на синус протилежного йому кута;***

гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на косинус прилеглого до нього кута.

Розв'язати прямокутний трикутник означає знайти невідомі його сторони і кути за відомими сторонами і кутами.

Наведені вище правила дають змогу розв'язувати прямокутний трикутник за однією стороною і одним гострим кутом.

Приклад 1. Розв'яжіть прямокутний трикутник (рис. 25.1) за катетом і гострим кутом: $a = 14$ см, $\alpha = 38°$.

Розв'язання. Маємо:

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 38° = 52°;$$

$$b = a \operatorname{tg} \beta = 14 \operatorname{tg} 52° \approx 14 \cdot 1{,}280 = 17{,}92 \approx 17{,}9 \text{ (см)};$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{14}{\sin 38°} \approx \frac{14}{0{,}616} \approx 22{,}7 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $c \approx 22{,}7$ см, $b \approx 17{,}9$ см, $\beta = 52°$.

Зауважимо, що значення тригонометричних функцій знайдено за таблицею, розміщеною на с. 233 підручника. Їх також можна було знайти за допомогою мікрокалькулятора.

Зазначимо, що цю задачу можна розв'язати й інакше: наприклад, знайти гіпотенузу, використовуючи теорему Піфагора.

Приклад 2. Розв'яжіть прямокутний трикутник (рис. 25.1) за катетом і гіпотенузою: $a = 26$ см, $c = 34$ см.

Розв'язання. Маємо: $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{26}{34} = 0{,}7647... \approx 0{,}765.$

Числа 0,765 немає в таблиці значень синуса, найближчим до нього в таблиці є число 0,766. Тоді отримуємо $\alpha \approx 50°$. Звідси $\beta \approx 40°$.

$$b = c \sin \beta \approx 34 \sin 40° \approx 34 \cdot 0{,}643 = 21{,}862 \approx 21{,}9 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $b \approx 21{,}9$ см, $\alpha \approx 50°$, $\beta \approx 40°$.

Приклад 3. Висота AD трикутника ABC (рис. 25.2) ділить його сторону BC на відрізки BD і CD такі, що $BD = 2\sqrt{3}$ см, $CD = 8$ см. Знайдіть сторони AB і AC, якщо $\angle B = 60°$.

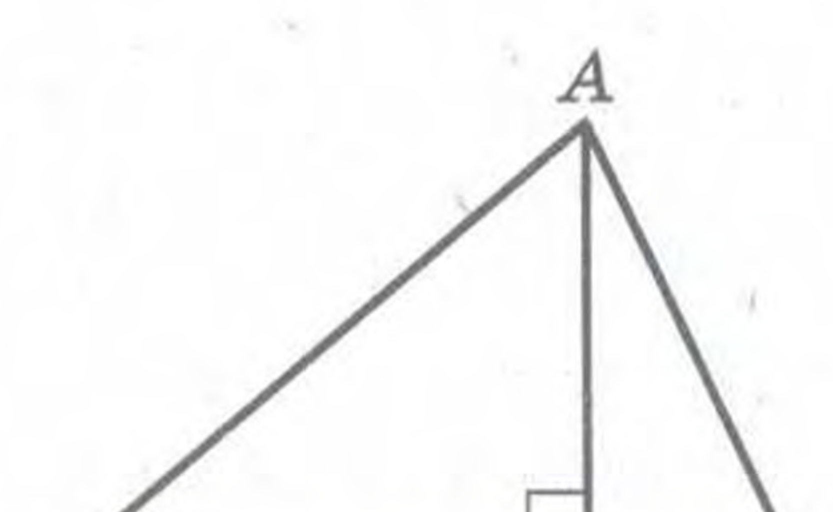


Рис. 25.2

Розв'язання. З $\triangle ADB$ ($\angle ADB = 90°$):

$$AD = BD \operatorname{tg} B = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 60° = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \text{ (см)};$$

$$AB = \frac{BD}{\cos B} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60°} = 2\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

З $\triangle ADC$ ($\angle ADC = 90°$):

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $4\sqrt{3}$ см, 10 см.

Приклад 4. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, кут при основі дорівнює α. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

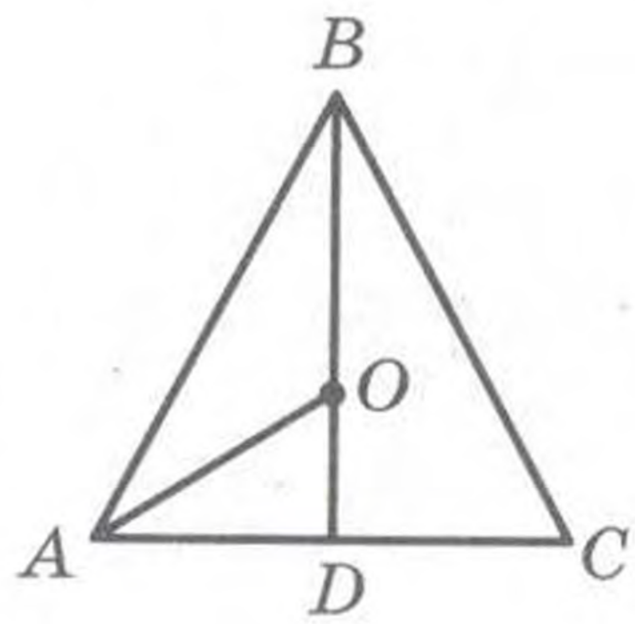


Рис. 25.3

Розв'язання. У трикутнику ABC (рис. 25.3) $AB = BC = b$, $\angle BAC = \alpha$, BD — висота.

З $\triangle ADB$ ($\angle ADB = 90°$):

$$AD = AB \cos \angle BAD = b \cos \alpha.$$

Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC. Вона належить висоті BD і бісектрисі AO кута BAC. Оскільки $OD \perp AC$, то вписане коло дотикається сторони AC у точці D. Отже, OD — шуканий радіус. Маємо: $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$.

З $\triangle ADO$ ($\angle ADO = 90°$):

$$OD = AD \operatorname{tg} \angle OAD = b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь: $b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

?

1. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі гіпотенуза і кут, протилежний цьому катету?
2. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі гіпотенуза і кут, прилеглий до цього катета?
3. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі другий катет і кут, протилежний шуканому катету?
4. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі другий катет і кут, прилеглий до шуканого катета?

5. Як можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомі катет і протилежний цьому катету кут?

6. Як можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомі катет і прилеглий до цього катета кут?

ВПРАВИ

25.1.° У трикутнику ABC $\angle C = 90°$. Знайдіть:

1) катет BC, якщо $AB = 12$ см, $\sin A = \frac{3}{4}$;

2) катет AC, якщо $AB = 21$ см, $\cos A = 0{,}4$;

3) катет AC, якщо $BC = 4$ см, $\operatorname{tg} A = 1{,}6$;

4) гіпотенузу AB, якщо $BC = 14$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;

5) гіпотенузу AB, якщо $AC = 3{,}2$ см, $\sin B = 0{,}16$;

6) катет BC, якщо $AC = 2{,}3$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$.

25.2.° У трикутнику DEF $\angle E = 90°$. Знайдіть:

1) катет DE, якщо $DF = 18$ см, $\cos D = \frac{2}{9}$;

2) гіпотенузу DF, якщо $EF = 3{,}5$ см, $\cos F = 0{,}7$;

3) катет EF, якщо $DE = 2{,}4$ см, $\operatorname{tg} D = \frac{11}{12}$.

25.3.° У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 17 см, а синус одного з гострих кутів дорівнює $\frac{8}{17}$. Знайдіть катети трикутника.

25.4.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а косинус одного з гострих кутів дорівнює 0,8. Знайдіть катети трикутника.

25.5.° Катет прямокутного трикутника дорівнює 48 см, а тангенс протилежного кута дорівнює $3\frac{3}{7}$. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.

25.6.° У прямокутному трикутнику один з катетів дорівнює 12 см, а тангенс прилеглого кута — 0,75. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.

25.7.° Розв'яжіть прямокутний трикутник[1]:
1) за гіпотенузою і гострим кутом: $c = 28$ см, $\alpha = 48°$;
2) за катетом і гострим кутом: $a = 56$ см, $\beta = 74°$;
3) за катетом і гіпотенузою: $a = 5$ см, $c = 9$ см;
4) за двома катетами: $a = 3$ см, $b = 7$ см.

25.8.° Розв'яжіть прямокутний трикутник за його відомими елементами:
1) $a = 34$ см, $\alpha = 55°$;
2) $c = 16$ см, $\beta = 18°$;
3) $b = 12$ см, $c = 13$ см;
4) $a = 4$ см, $b = 14$ см.

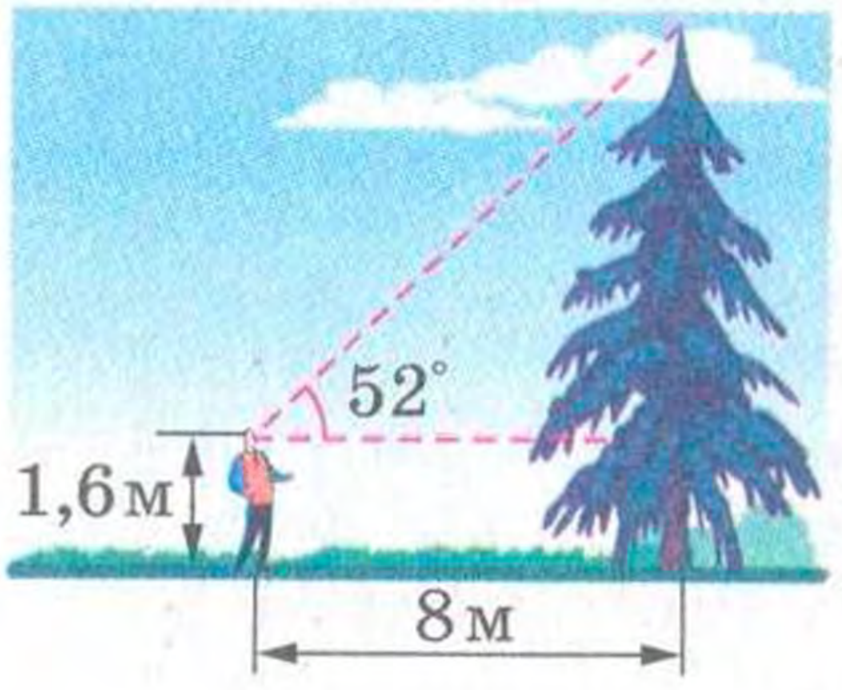


Рис. 25.4

25.9.° За рисунком 25.4 знайдіть висоту ялинки.

25.10.° Якої довжини має бути пожежна драбина, щоб по ній можна було піднятися на дах будинку заввишки 9 м, якщо ставити її під кутом 70° до поверхні землі?

25.11.° Проїхавши від старту прямолінійною ділянкою шосе 300 м, велосипедист опинився на 11 м вище, ніж точка старту. Знайдіть кут підйому шосе на цій ділянці.

25.12.° Під яким кутом падає на землю сонячний промінь, якщо вертикальна жердина, довжина якої становить 1,5 м, відкидає тінь завдовжки 0,7 м?

25.13.° Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120°, а висота, проведена до основи, — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторони трикутника.

25.14.° Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а кут при основі — 45°. Знайдіть висоту і бічну сторону трапеції.

25.15.° Діагональ паралелограма перпендикулярна до його сторони і дорівнює a. Знайдіть сторони паралелограма, якщо один з його кутів дорівнює 30°.

25.16.° Сторона ромба дорівнює a, а один з його кутів — 60°. Знайдіть діагоналі ромба.

---

[1] У задачах 25.7, 25.8 прийнято позначення: c — гіпотенуза прямокутного трикутника, a і b — катети, α і β — кути, протилежні катетам a і b відповідно.

25.17.° Висота BD трикутника ABC ділить сторону AC на відрізки AD і CD так, що $AD = 12$ см, $CD = 4$ см. Знайдіть довжину сторони BC, якщо $\angle A = 30°$.

25.18.° Висота AF ділить сторону BC трикутника ABC на відрізки BF і CF. Знайдіть довжину сторони AC, якщо $CF = \sqrt{13}$ см, $\angle B = 60°$, а сторона AB дорівнює 18 см.

25.19.° З точки D, що лежить поза прямою n, проведено до цієї прямої похилі DK і DB, які утворюють з нею кути 45° і 60° відповідно. Знайдіть довжину проекції похилої DK на пряму n, якщо $DB = 10\sqrt{3}$ см.

25.20.° З точки M, що лежить поза прямою l, проведено до цієї прямої похилі MN і MK, які утворюють з нею кути 30° і 45° відповідно. Знайдіть довжину похилої MK, якщо довжина проекції похилої MN на пряму l дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

25.21.° Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює β, висота, проведена до бічної сторони, дорівнює h. Знайдіть основу трикутника.

25.22.° Висота, проведена з вершини прямого кута трикутника, дорівнює h, гострий кут дорівнює α. Знайдіть сторони трикутника.

25.23.° Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює a. Кут між другим катетом і висотою, проведеною з вершини прямого кута, дорівнює φ. Знайдіть невідомі сторони трикутника та проведену висоту.

25.24.° Більша діагональ ромба дорівнює d, а гострий кут — α. Знайдіть сторону та меншу діагональ ромба.

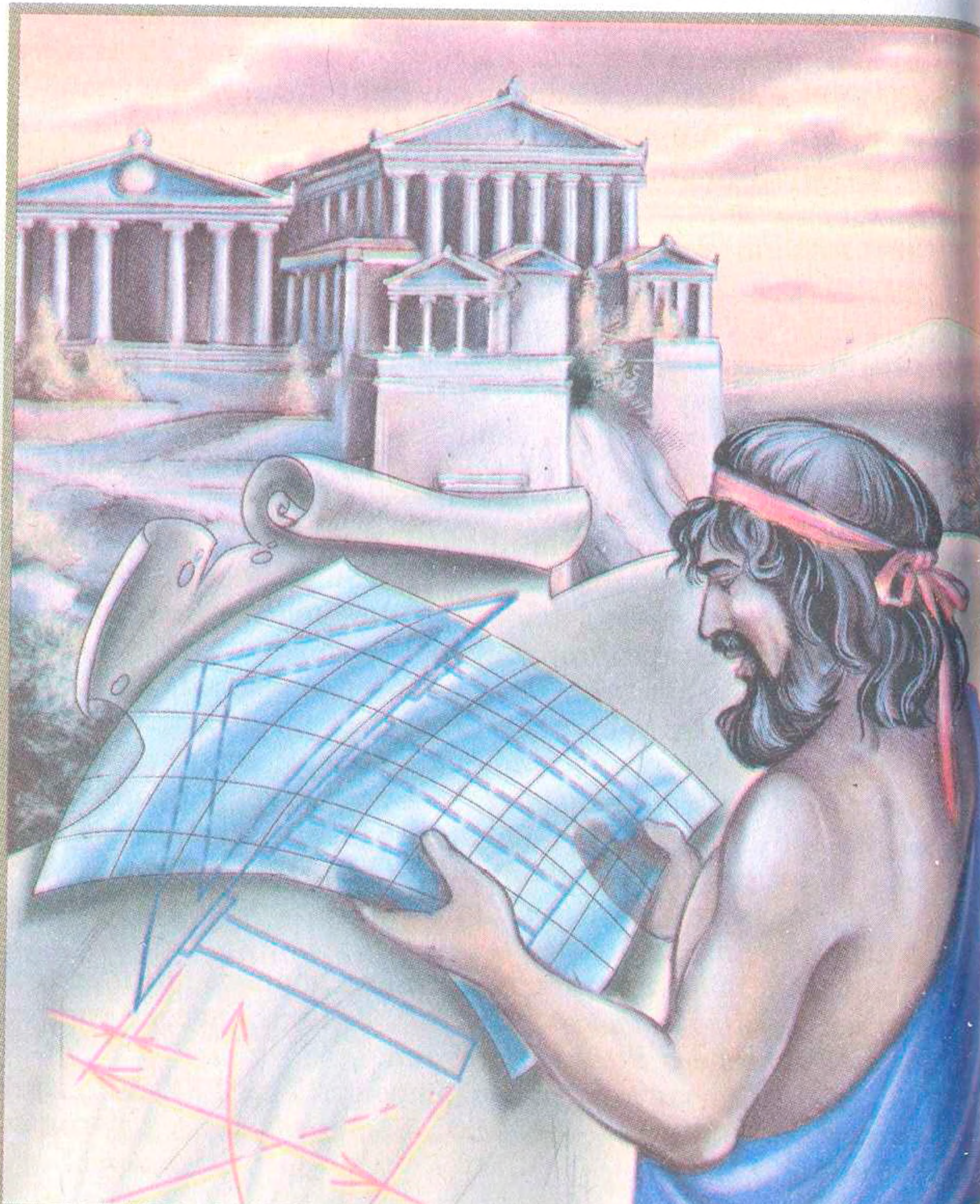
25.25.° Гострий кут ромба дорівнює α, радіус вписаного кола дорівнює r. Знайдіть сторону та діагоналі ромба.

25.26.• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони і утворює з основою трапеції кут 30°. Знайдіть висоту трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює R.

25.27.• Одна із сторін трикутника дорівнює a, прилеглі до неї кути дорівнюють 45° і 60°. Знайдіть висоту трикутника, проведену до даної сторони.

25.28.• Основи трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а кути при більшій основі — 30° і 60°. Знайдіть висоту і діагоналі трапеції.

§6. ПЛОЩА МНОГОКУТНИКА



26. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

З такою величиною як площа ви часто стикаєтеся в повсякденному житті: площа квартири, дачної ділянки, поля тощо.

Досвід підказує вам, що рівні земельні ділянки мають рівні площі, що площа квартири дорівнює сумі площ усіх її приміщень (кімнат, кухні, коридору і т. д.).

Ви знаєте, що площі земельних ділянок вимірюють у сотках (арах) і гектарах; площі регіонів і держав — у квадратних кілометрах; площу квартири — у квадратних метрах.

На цих практичних знаннях про площу будується означення площі многокутника.

Означення. **Площею многокутника називають додатну величину, яка має такі властивості:**

1) **рівні многокутники мають рівні площі;**
2) **якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;**
3) **за одиницю виміру площі приймають площу одиничного квадрата, тобто квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.**

Виміряти площу многокутника — це означає порівняти його площу з площею одиничного квадрата. У результаті отримують **числове значення площі** даного многокутника. Це число показує, у скільки разів площа даного многокутника відрізняється від площі одиничного квадрата.

Наприклад, якщо клітинку вашого зошита прийняти за одиничний квадрат, то площа многокутника, зображеного на рисунку 26.1, дорівнюватиме 11 квадратним одиницям (коротко записують: 11 од^2).

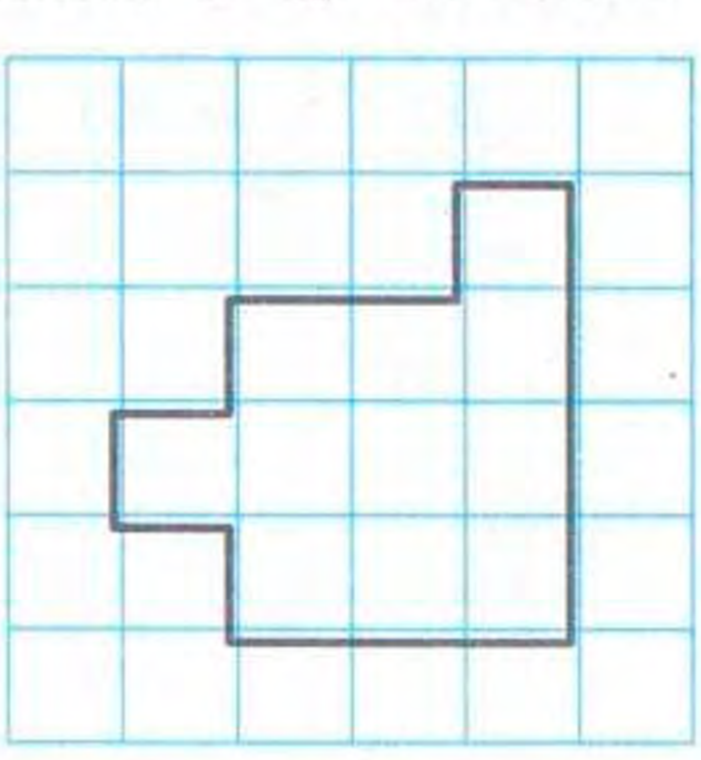


Рис. 26.1

Зазвичай для знаходження площі використовують формули, тобто обчислюють площу многокутника за певними його елементами (сторонами, діагоналями, висотами тощо). Деякі з них ви вже знаєте. Наприклад, формулу $S = ab$, де

S — площа прямокутника, a і b — довжини його сусідніх сторін, ви застосовували неодноразово. Доведемо цю формулу.

Лема. ***Площа квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$ од (n — натуральне число) дорівнює $\frac{1}{n^2}$ од^2.***

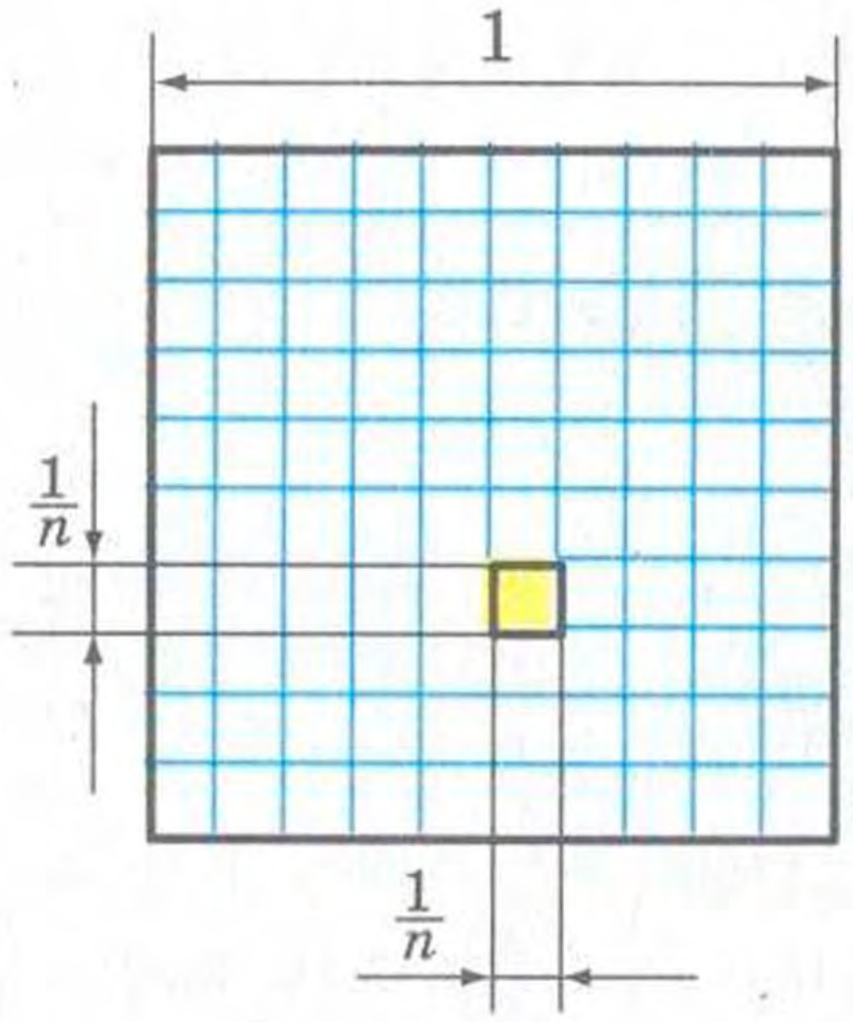


Рис. 26.2

Доведення. Розглянемо одиничний квадрат і поділимо його на n^2 рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$ (рис. 26.2).

З означення площі многокутника (властивість 1) випливає, що всі ці квадрати мають рівні площі. За властивістю 2 сума площ цих квадратів дорівнює площі одиничного квадрата, тобто дорівнює 1 од^2. Тому площа кожного маленького квадрата дорівнює $\frac{1}{n^2}$ од^2. ▲

Теорема 26.1. ***Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін.***

Доведення. На рисунку 26.3 зображено прямокутник $ABCD$, довжини сусідніх сторін якого дорівнюють a і b: $AB = a$, $BC = b$. Доведемо, що площа S прямокутника обчислюється за формулою $S = ab$.

Нехай a і b — раціональні числа. Тоді ці числа можна подати у вигляді звичайних дробів, які зведено до однакових знаменників. Маємо:

$$a = \frac{p}{n}, \; b = \frac{q}{n},$$

де p, q, n — натуральні числа.

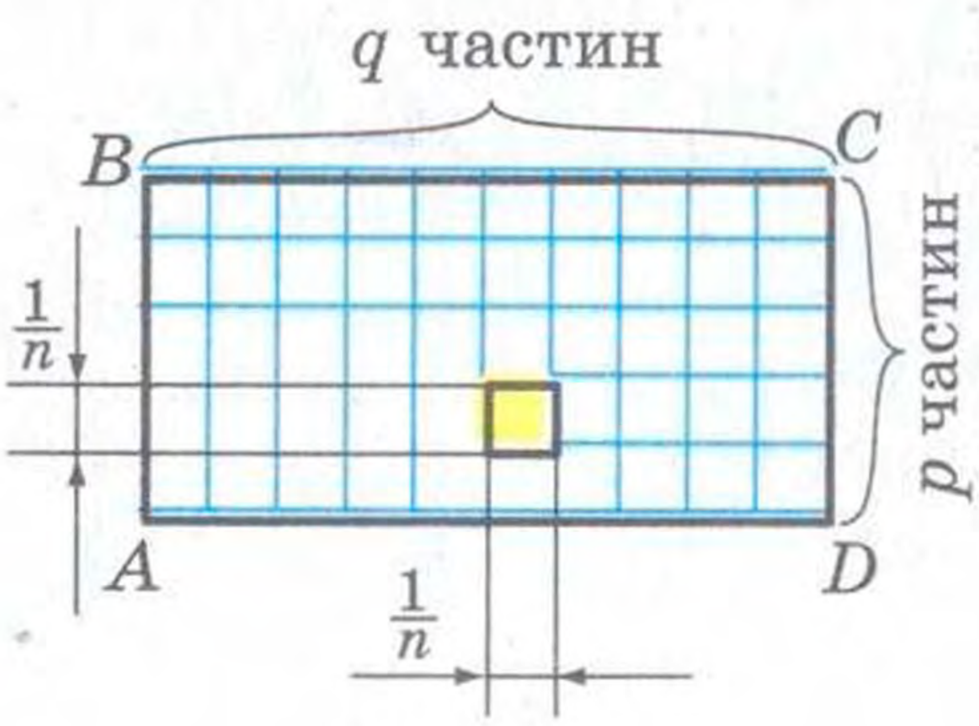


Рис. 26.3

Поділимо сторону AB на p рівних частин, а сторону BC — на q рівних частин. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні сторонам прямокутника. Тоді прямокутник буде поділено на pq рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$.

Згідно з лемою площа кожного квадрата дорівнює $\frac{1}{n^2}$. З означення площі (властивість 2) випливає, що площа прямокутника дорівнює сумі площ усіх квадратів, тобто

$$S = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{pq \text{ доданків}} = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

Тепер розглянемо випадок, коли a — ірраціональне число, b — раціональне число (випадок, коли a і b — ірраціональні числа, розглядається аналогічно).

Розглянемо довільне натуральне число n і позначимо на координатній прямій числа $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ..., $\frac{k}{n}$, ..., $k \in \mathbb{N}$. Оскільки a — ірраціональне число, то знайдеться таке натуральне число k, що $a \in \left(\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right)$ (рис. 26.4).

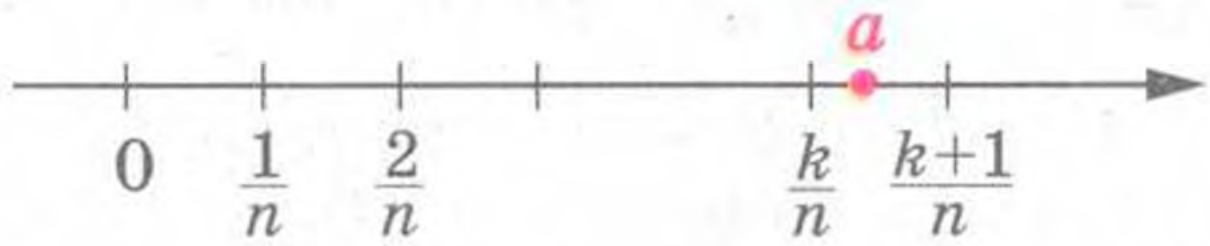


Рис. 26.4

Розглянемо три прямокутники зі сторонами $\frac{k}{n}$ і b, a і b, $\frac{k+1}{n}$ і b. Оскільки $\frac{k}{n} < a < \frac{k+1}{n}$, то ці прямокутники можна розташувати так, як показано на рисунку 26.5.

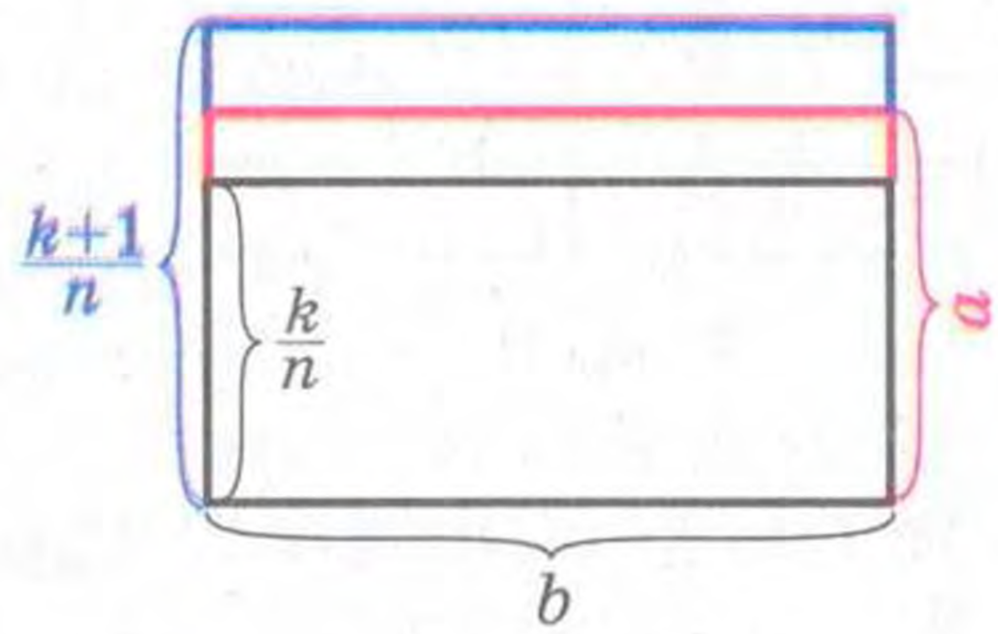


Рис. 26.5

Площа першого прямокутника дорівнює $\frac{kb}{n}$, третього — $\frac{(k+1)\,b}{n}$. Тоді площа S другого прямокутника задовольняє нерівність $\frac{kb}{n} < S < \frac{(k+1)\,b}{n}$.

З нерівності $\frac{k}{n} < a < \frac{k+1}{n}$ отримуємо:

$$k < an < k + 1;$$
$$-an < -k < 1 - an;$$
$$an - 1 < k < an.$$

Маємо:

$$\frac{(an-1)\,b}{n} < \frac{kb}{n} < S < \frac{(k+1)\,b}{n} < \frac{(an+1)\,b}{n}.$$

Звідси

$$ab - \frac{b}{n} < S < ab + \frac{b}{n};$$

$$-\frac{b}{n} < S - ab < \frac{b}{n};$$

$$|\,S - ab\,| < \frac{b}{n}.$$

Нехай $S \neq ab$. Тоді $|\,S - ab\,| > 0$. Дріб $\frac{b}{n}$ при достатньо великих n може стати меншим від будь-якого наперед заданого числа, а отже, і меншим від $|\,S - ab\,|$. Але ми показали, що при будь-якому натуральному n має місце нерівність $\frac{b}{n} > |\,S - ab\,|$. Отримали суперечність. Отже, $S = ab$. ▲

Означення. Многокутники, які мають рівні площі, називають рівновеликими.

З означення площі (властивість 1) випливає, що всі рівні фігури рівновеликі. Проте не всі фігури, які мають рівні площі, є рівними. Наприклад, на рисунку 26.6 зображено два многокутники, кожний з яких складається із 7 одиничних квадратів. Ці многокутники рівновеликі, але не рівні.

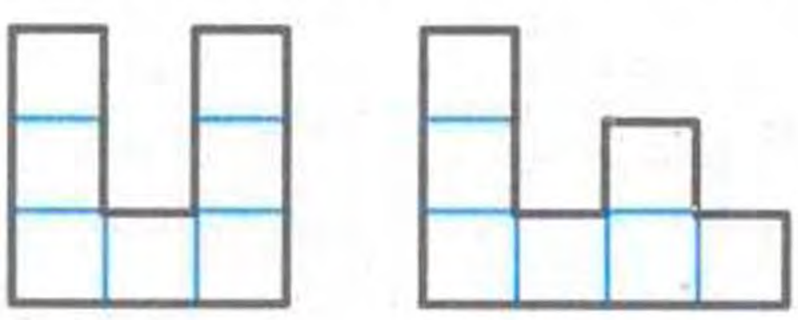


Рис. 26.6

1. Що називають площею многокутника?
2. Що означає виміряти площу многокутника?
3. Що показує числове значення площі?
4. Чому дорівнює площа квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$ од, де n — натуральне число?
5. Чому дорівнює площа прямокутника?
6. Які многокутники називають рівновеликими?
7. Чи можна стверджувати, що коли дві фігури рівні, то вони рівновеликі?
8. Чи можна стверджувати, що коли дві фігури рівновеликі, то вони рівні?

ВПРАВИ

26.1.° Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з однією зі сторін кут α. Знайдіть площу прямокутника.

26.2.° Сторона прямокутника дорівнює 15 см і утворює з діагоналлю кут 30°. Знайдіть площу прямокутника.

26.3.° На продовженні сторони AD паралелограма $ABCD$ за точку D позначено точку M так, що $AD = MD$. Доведіть, що паралелограм $ABCD$ і трикутник ABM рівновеликі.

26.4.° Площа квадрата $ABCD$ дорівнює 10 см^2 (рис. 26.7). Чому дорівнює площа прямокутника $BMKD$?

26.5.° Доведіть, що коли точка E — середина відрізка AK (рис. 26.8), то трикутник AKD і прямокутник $ABCD$ рівновеликі.

26.6.° У скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша за площу квадрата, вписаного в коло?

26.7.° Площа прямокутного листа паперу, довжини сторін якого виражаються цілим числом сантиметрів, дорівнює 12 см^2. Скільки квадратів площею 4 см^2 можна вирізати з цього листа?

26.8.° Площа прямокутного листа паперу, довжини сторін якого виражаються цілим числом сантиметрів, дорівнює 18 см^2. Скільки квадратів зі стороною 3 см можна вирізати з цього листа?

26.9.° Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 2 : 7. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 108 см.

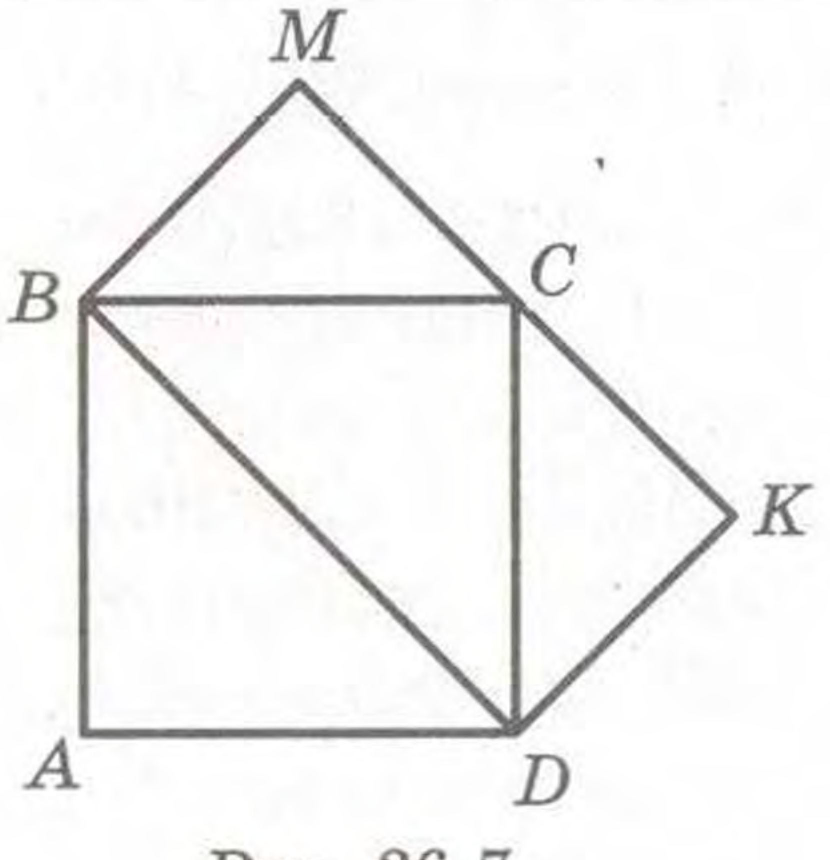


Рис. 26.7

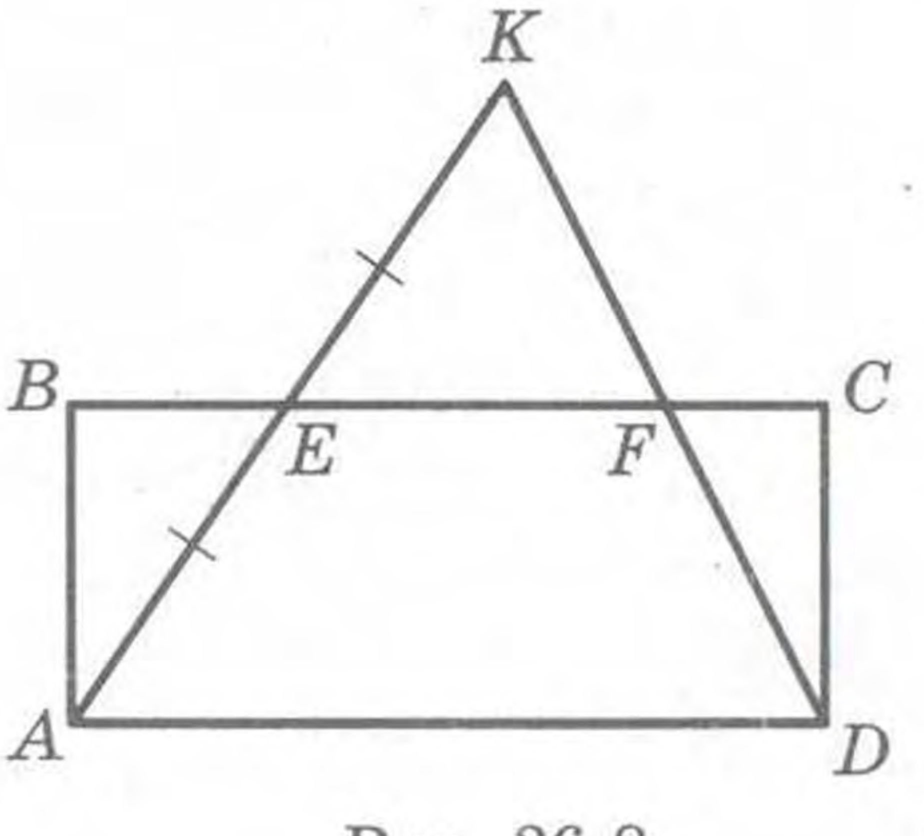


Рис. 26.8

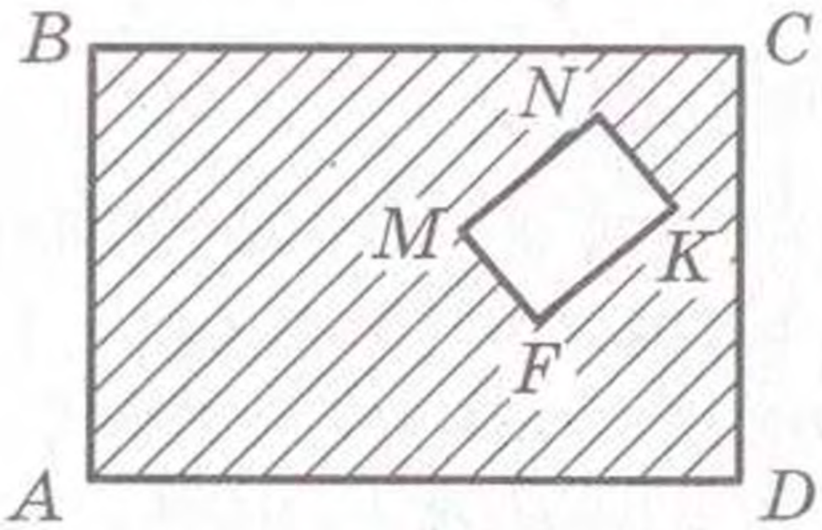


Рис. 26.9

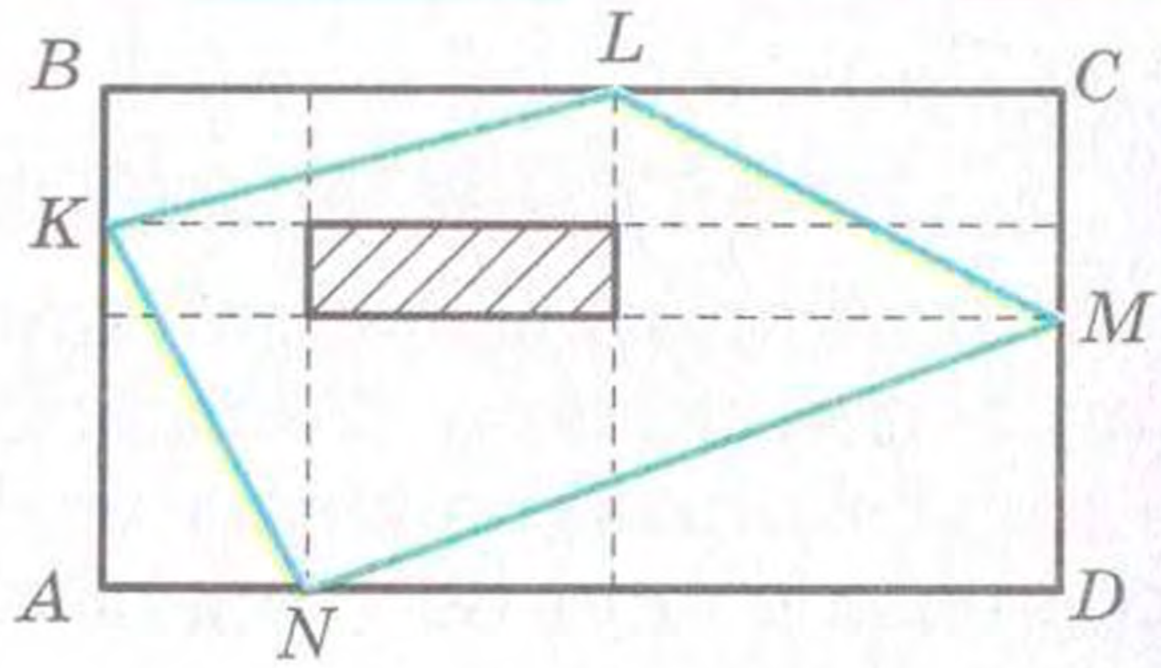


Рис. 26.10

26.10.° Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 1 : 4. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 36 см^2.

26.11.• З прямокутника $ABCD$ вирізали прямокутник $MNKF$ (рис. 26.9). Проведіть пряму, яка поділить заштриховану фігуру на дві рівновеликі фігури.

26.12.• Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних квадратів.

26.13.• Сторони прямокутника дорівнюють a і b. Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює площі даного прямокутника.

26.14.• Прямокутник $ABCD$ поділено паралельними лініями на 9 прямокутників (рис. 26.10). Площа заштрихованого прямокутника дорівнює S, а площа прямокутника $ABCD$ дорівнює Q. Знайдіть площу чотирикутника $KLMN$.

27. Площа паралелограма

Теорема 27.1. ***Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони і висоти, яка відповідає цій стороні.***

Доведення. На рисунку 27.1 зображено паралелограм $ABCD$, площа якого дорівнює S. Проведемо дві його висоти BM і CN. Доведемо, що $S = BC \cdot BM$.

Очевидно, що чотирикутник $MBCN$ — прямокутник. Покажемо, що він рівновеликий даному паралелограму.

Площа паралелограма дорівнює сумі площ трикутника ABM і трапеції $MBCD$. Площа прямокутника дорівнює сумі площ зазначеної трапеції і трикутника DCN. Проте $\triangle ABM = \triangle DCN$

за гіпотенузою і гострим кутом (відрізки AB і CD рівні як протилежні сторони паралелограма, кути 1 і 2 рівні як відповідні при паралельних прямих AB і DC та січній AD). Отже, ці трикутники рівновеликі. Звідси випливає, що паралелограм $ABCD$ і прямокутник $MBCN$ рівновеликі.

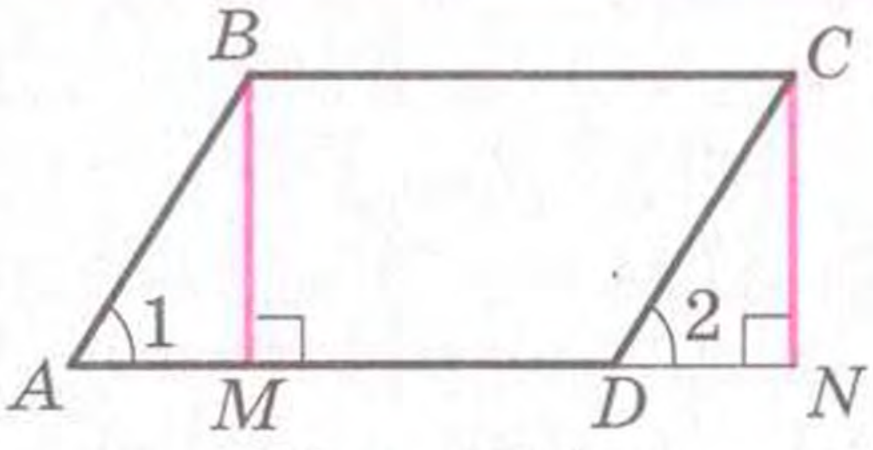


Рис. 27.1

За теоремою 26.1 площа прямокутника $MBCN$ дорівнює добутку $BM \cdot BC$. Тоді $S = BM \cdot BC$, де S — площа паралелограма $ABCD$.

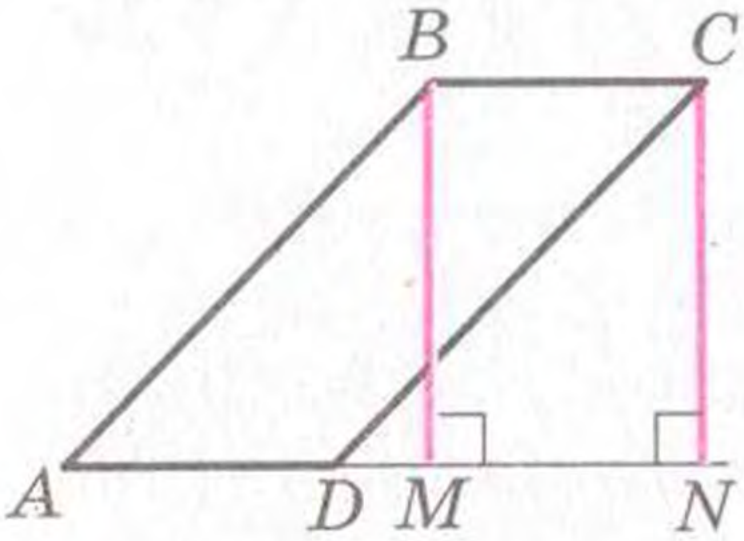


Рис. 27.2

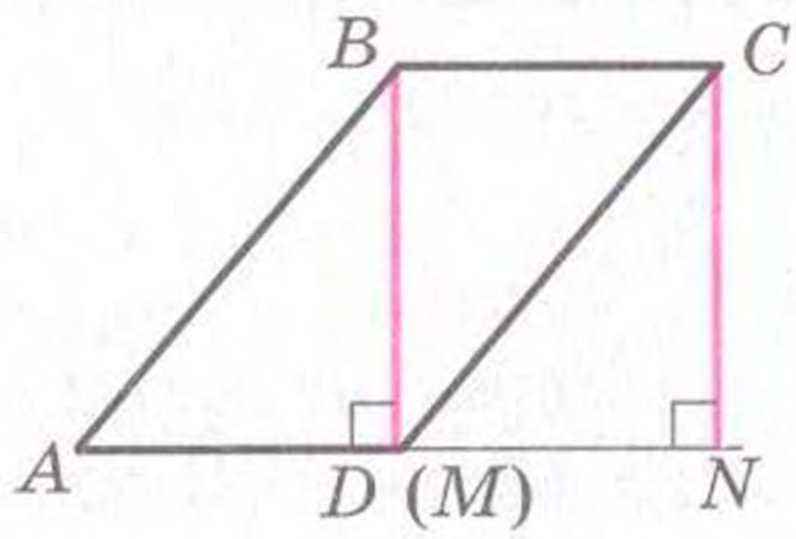


Рис. 27.3

Доведення буде повним, якщо розглянути випадки, коли основа M висоти BM не буде належати стороні AD (рис. 27.2) або збігатиметься з вершиною D (рис. 27.3). І в цих випадках паралелограм $ABCD$ рівновеликий з прямокутником $MBCN$. Доведіть цей факт самостійно. ▲

- Чому дорівнює площа паралелограма?

ВПРАВИ

27.1.° Які з паралелограмів, зображених на рисунку 27.4, рівновеликі?

27.2.° Площа паралелограма $ABCD$ (рис. 27.5) дорівнює S. Чому дорівнює площа зафарбованої фігури?

27.3.° Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 15 см, а одна з висот дорівнює: 1) 6 см; 2) 12 см. Знайдіть другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків у кожному випадку має задача?

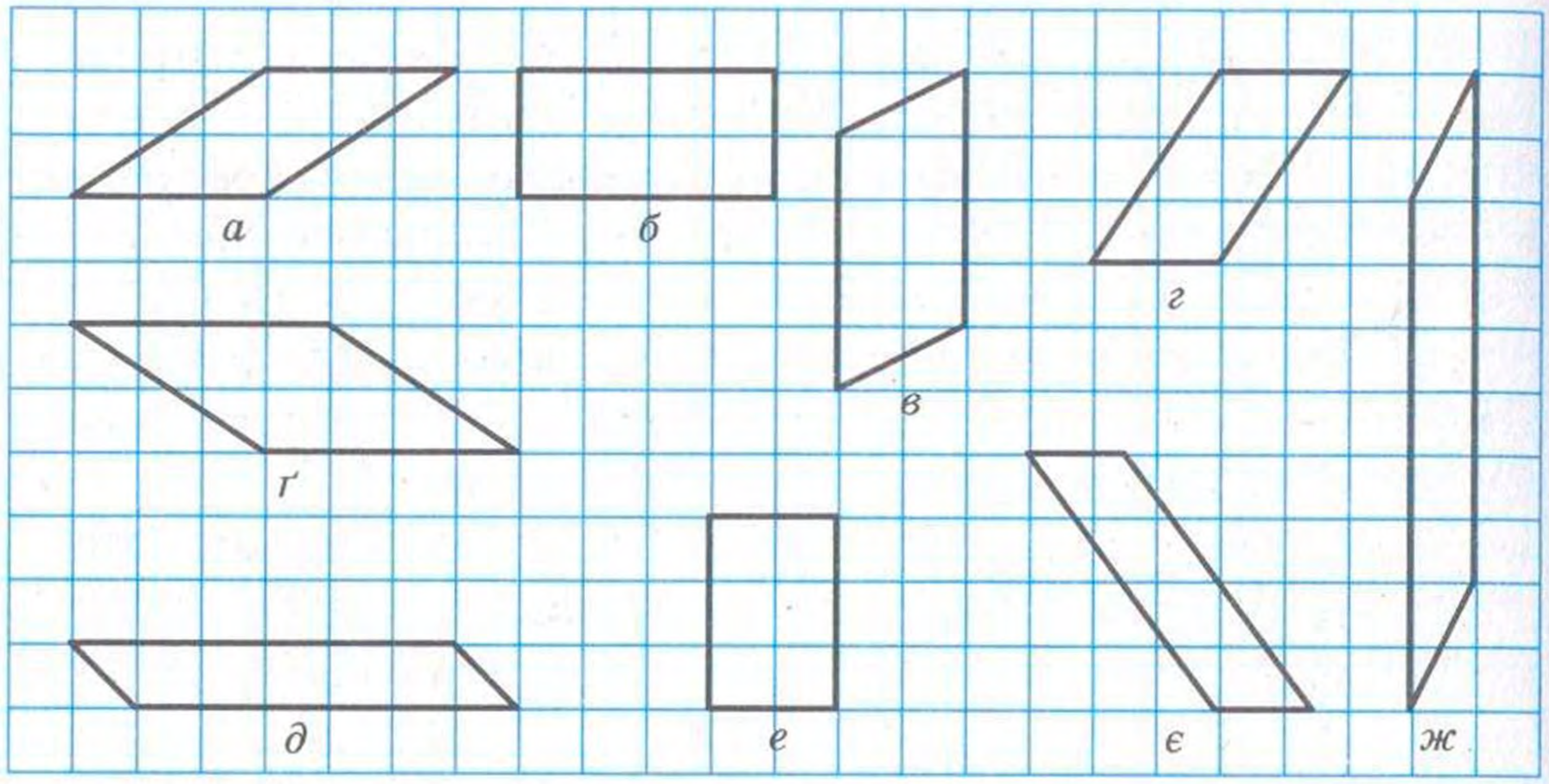


Рис. 27.4

27.4.° Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 15 см і 25 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до меншої сторони.

27.5.° Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 26 см і 24 см, а одна з них перпендикулярна до сторони паралелограма.

27.6.° Діагональ паралелограма дорівнює 18 см, перпендикулярна до однієї зі сторін і утворює кут 30° з другою стороною. Знайдіть площу паралелограма.

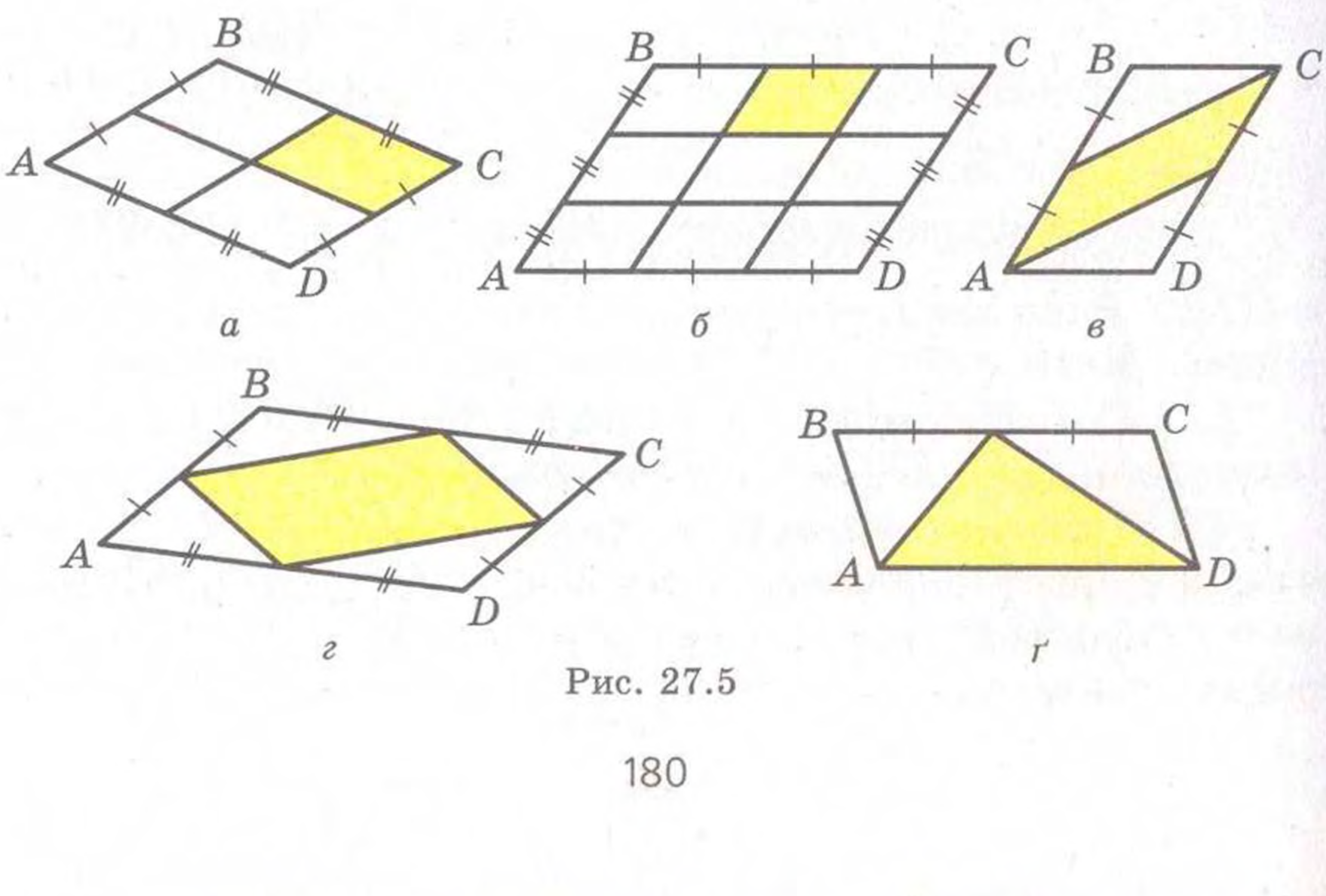


Рис. 27.5

27.7.° Сторони паралелограма дорівнюють a і b, його гострий кут дорівнює α. Знайдіть площу паралелограма.

27.8.° Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 60°. Знайдіть площу паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 8 см і 12 см.

27.9.° Сторони паралелограма дорівнюють 14 см і 20 см, а кут між його висотами, проведеними з вершини тупого кута, — 45°. Знайдіть площу паралелограма.

27.10.° Знайдіть площу ромба, якщо його висота дорівнює 6 см, а більша діагональ — 10 см.

27.11.° Менша діагональ ромба дорівнює a, а один з кутів — 60°. Знайдіть площу ромба.

27.12.° Доведіть, що висоти паралелограма обернено пропорційні сторонам, яким вони відповідають.

27.13.° Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а сума двох його нерівних висот дорівнює 14 см. Знайдіть площу паралелограма.

27.14.° Різниця двох сторін паралелограма дорівнює 12 см, а висоти дорівнюють 15 см і 10 см. Знайдіть площу паралелограма.

27.15.• Доведіть, що з усіх паралелограмів зі сторонами a і b найбільшу площу має прямокутник.

28. Площа трикутника

Теорема 28.1. ***Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони і проведеної до неї висоти.***

Доведення. На рисунку 28.1 зображено трикутник ABC, площа якого дорівнює S. Проведемо його висоту BM. Доведемо, що $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$.

Через вершини B і C трикутника проведемо прямі, паралельні сторонам AC і AB відповідно (рис. 28.1). Нехай ці прямі перетинаються в точці N. Очевидно, що чотирикутник $ABNC$ — паралелограм. Трикутники

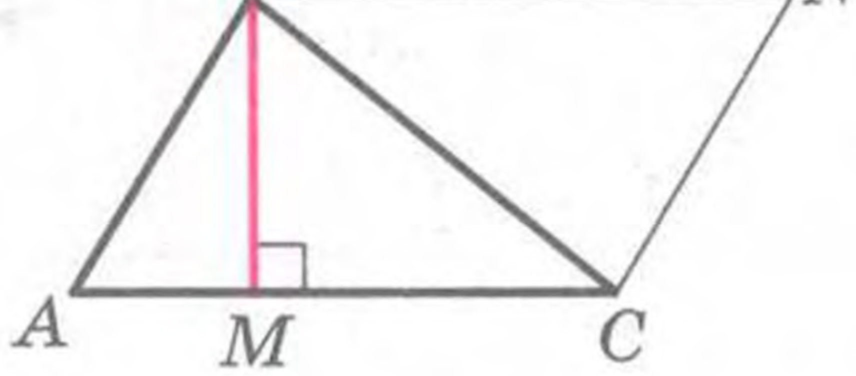


Рис. 28.1

ABC і NCB рівні (доведіть це самостійно). Отже, їх площі також рівні. Тоді площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма $ABNC$. Висота BM трикутника ABC є також висотою паралелограма $ABNC$. Звідси

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BM. \blacktriangle$$

Якщо скористатися позначеннями для висот і сторін трикутника ABC (див. форзац), то згідно з доведеною теоремою маємо:

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c,$$

де S — площа трикутника.

Наслідок. ***Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Площу многокутника $A_1A_2...A_n$ позначатимемо так: $S_{A_1A_2...A_n}$.

Задача 1. *Діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці M. Доведіть, що для паралельності сторін BC і AD необхідно й достатньо виконання рівності $S_{ABM} = S_{DCM}$.*

Розв'язання. Доведемо необхідну умову. Нехай в чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$. Тоді в трикутниках ABD і ACD висоти BE і CF рівні, а сторона AD — спільна (рис. 28.2).

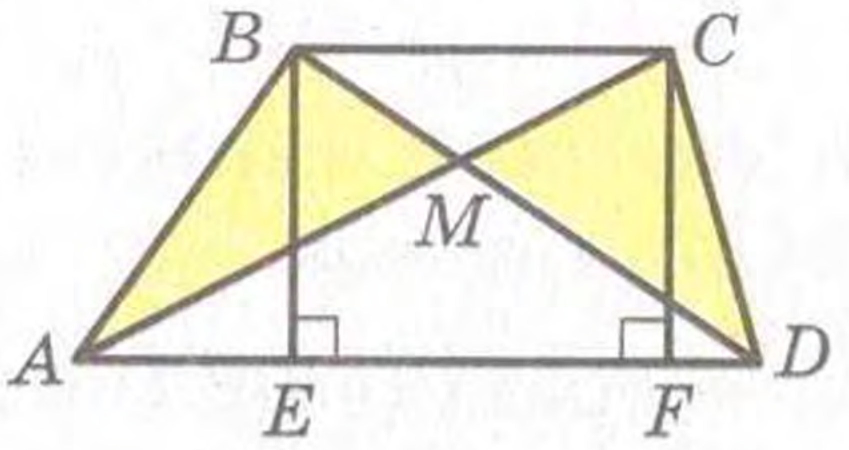


Рис. 28.2

Звідси $S_{ABD} = S_{DCA}$. Маємо:

$$S_{ABM} = S_{ABD} - S_{AMD};$$
$$S_{DCM} = S_{DCA} - S_{AMD}.$$

Тоді $S_{ABM} = S_{DCM}$.

Доведемо достатню умову. Нехай $S_{ABM} = S_{DCM}$. Маємо:

$$S_{ABD} = S_{ABM} + S_{AMD};$$
$$S_{DCA} = S_{DCM} + S_{AMD}.$$

Тоді $S_{ABD} = S_{DCA}$.

У рівновеликих трикутниках ABD і DCA сторона AD спільна. Отже, висоти трикутників, проведені до цієї сторони, рівні. Це означає, що точки B і C віддалені на однакову відстань від прямої AD. Звідси $BC \parallel AD$.

Задача 2. *На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$.*

1) *Нехай X — довільна точка відрізка BM, відмінна від точки M. Доведіть, що $\frac{S_{AXM}}{S_{MXC}} = \frac{m}{n}$.*

2) *Нехай X — довільна внутрішня точка відрізка BM. Доведіть, що $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}$.*

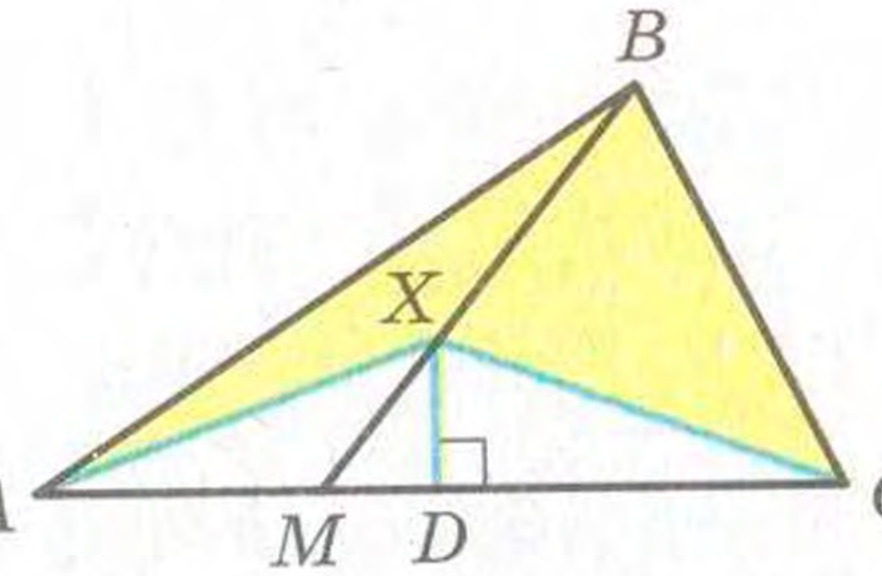


Рис. 28.3

Розв'язання. У трикутниках AXM і MXC (рис. 28.3) висота XD — спільна. Маємо:

$$\frac{S_{AXM}}{S_{MXC}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot XD}{\frac{1}{2} MC \cdot XD} = \frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}.$$

Аналогічно доводимо, що $\frac{S_{ABM}}{S_{MBC}} = \frac{m}{n}$.

Запишемо:

$$S_{ABM} = \frac{m}{n} S_{MBC}; \qquad (1)$$

$$S_{AXM} = \frac{m}{n} S_{MXC}. \qquad (2)$$

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2):

$$S_{ABM} - S_{AXM} = \frac{m}{n}(S_{MBC} - S_{MXC}).$$

Звідси

$$S_{ABX} = \frac{m}{n} S_{CBX},$$

тобто

$$\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}.$$

Задача 3. *Діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці M. Доведіть, що $S_{ABM} \cdot S_{DCM} = S_{BCM} \cdot S_{ADM}$.*

Розв'язання. Трикутники ABM і ADM мають спільну висоту AK (рис. 28.4). Тоді $\frac{S_{ABM}}{S_{ADM}} = \frac{BM}{MD}$.

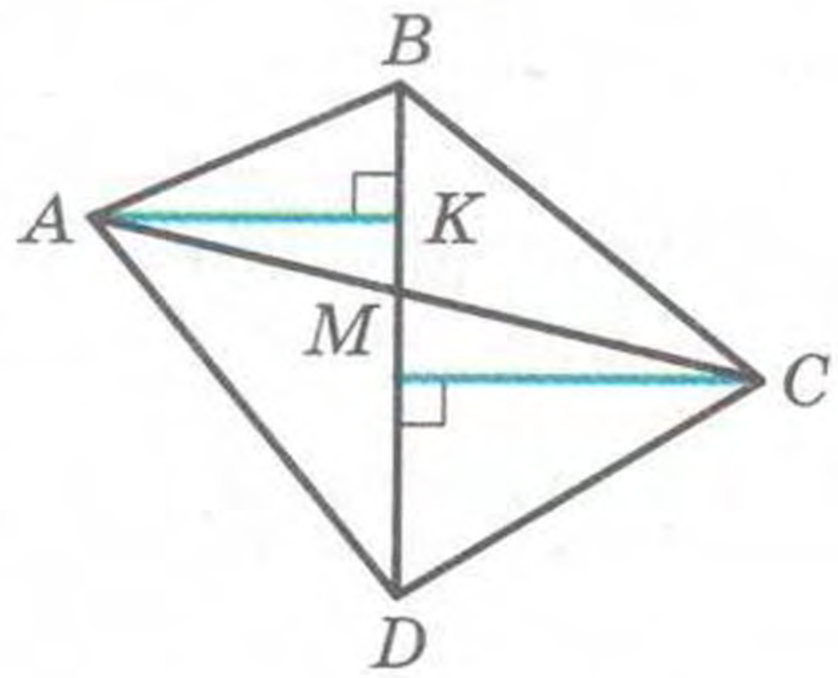


Рис. 28.4

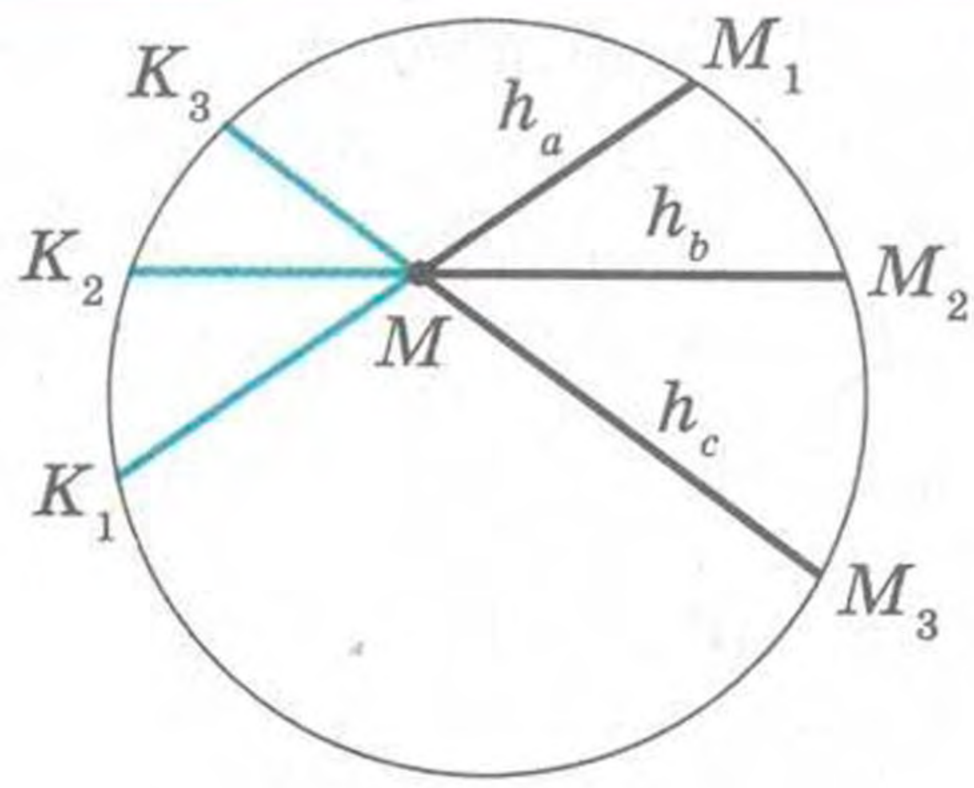


Рис. 28.5

Аналогічно $\frac{S_{BCM}}{S_{DCM}} = \frac{BM}{MD}$.

Звідси

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ADM}} = \frac{S_{BCM}}{S_{DCM}},$$

тобто

$$S_{ABM} \cdot S_{DCM} = S_{BCM} \cdot S_{ADM}.$$

Приклад. Побудуйте трикутник за трьома його висотами.

Розв'язання. Нехай a, b, c — сторони, а h_a, h_b, h_c — відповідні висоти шуканого трикутника ABC. Від довільної точки M відкладемо відрізки MM_1, MM_2, MM_3, які відповідно дорівнюють h_a, h_b, h_c, так, щоб точки M_1, M_2, M_3 не лежали на одній прямій (рис. 28.5). Навколо трикутника $M_1M_2M_3$ опишемо коло.

Нехай промені M_1M, M_2M, M_3M перетинають коло в точках K_1, K_2, K_3 відповідно. Маємо: $MM_1 \cdot MK_1 = MM_2 \cdot MK_2 = MM_3 \cdot MK_3$, тобто

$$h_a \cdot MK_1 = h_b \cdot MK_2 = h_c \cdot MK_3. \qquad (1)$$

Крім того,

$$h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) отримуємо, що

$$\frac{MK_1}{a} = \frac{MK_2}{b} = \frac{MK_3}{c}.$$

Це означає, що трикутник зі сторонами, які дорівнюють MK_1, MK_2, MK_3, подібний трикутнику ABC. Побудувавши трикутник, подібний трикутнику ABC, знайдемо кути шуканого трикутника ABC.

Тепер залишилося побудувати трикутник за кутами і висотами. Завершіть розв'язання самостійно.

1. Як знайти площу трикутника, якщо відомо його сторону і висоту, проведену до неї?
2. Як знайти площу прямокутного трикутника, якщо відомо його катети?

ВПРАВИ

28.1.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см.

28.2.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 61 см, а висота, проведена до основи, — 60 см. Знайдіть площу трикутника.

28.3.° Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 18,5 см. Обчисліть площу трикутника.

28.4.° Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 27 см.

28.5.° Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 8 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу — 6 см. Знайдіть площу трикутника.

28.6.° Висота BD трикутника ABC ділить його сторону AC на відрізки AD і CD. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $BC = \sqrt{37}$ см, $\angle A = 30°$, $CD = 5$ см.

28.7.° Висота AM трикутника ABC ділить його сторону BC на відрізки BM і MC. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см, $\angle B = 45°$.

28.8.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює b, а кут при основі дорівнює α.

28.9.° Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює h, а кут при вершині дорівнює β. Знайдіть площу трикутника.

28.10.° Знайдіть площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a.

28.11.° Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c.

28.12.° Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо його катети дорівнюють 10 см і 24 см.

28.13.° Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки завдовжки 8 см і 12 см. Знайдіть площу трикутника.

28.14.° Доведіть, що площа опуклого чотирикутника, діагоналі якого перпендикулярні, дорівнює їх півдобутку.

28.15.° Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см, а сума діагоналей — 62 см.

28.16.° Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 39 см, а різниця діагоналей — 42 см.

28.17.° Дано пряму l і паралельний їй відрізок AB. Доведіть, що всі трикутники AXB, де X — довільна точка прямої l, рівновеликі.

28.18.° Доведіть, що медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.

28.19.° Середину однієї з діагоналей опуклого чотирикутника з'єднано з кінцями іншої. Доведіть, що одержана ламана ділить чотирикутник на дві рівновеликі частини.

28.20.• У трикутнику провели всі три медіани. Доведіть, що вони розбили трикутник на шість рівновеликих трикутників.

28.21.• Через вершину B трикутника ABC проведіть дві прямі так, щоб вони розбили даний трикутник на три рівновеликих трикутники.

28.22.• Через вершину паралелограма проведіть прямі так, щоб вони розбили даний паралелограм на: 1) чотири рівновеликих многокутники; 2) п'ять рівновеликих многокутників.

28.23.• Через вершину ромба проведіть дві прямі так, щоб вони розбили даний ромб на три рівновеликих многокутники.

28.24.• Побудуйте трикутник, рівновеликий даному паралелограму.

28.25.° Доведіть, що більшій стороні трикутника відповідає менша висота.

28.26.° Точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу прямокутного трикутника на відрізки, один з яких на 14 см більший за другий. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 4 см.

28.27.° У прямокутному трикутнику ABC до гіпотенузи AB проведено висоту CM. Площа трикутника ACM дорівнює 6 см^2, а площа трикутника BCM — 54 см^2. Знайдіть сторони трикутника ABC.

28.28.° Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса його гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 21 см і 35 см.

28.29.° Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 2 см і 6 см.

28.30.° Центр кола, вписаного у рівнобедрений трикутник, ділить його висоту, проведену до основи, на відрізки, довжини яких дорівнюють 34 см і 16 см. Знайдіть площу даного трикутника.

28.31.° У рівнобедрений трикутник вписано коло. Точка дотику ділить бічну сторону трикутника у відношенні 9 : 8, рахуючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.

28.32.° У трапеції $ABCD$ на бічній стороні AB взято точку M так, що $AM : MB = 3 : 1$. Знайдіть відношення площ трикутників BCD і MBD, якщо $BC : AD = 1 : 2$.

28.33.° Доведіть, що площа прямокутного трикутника дорівнює добутку відрізків, на які точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу.

28.34.° Площі трикутників, утворених відрізками діагоналей трапеції та її основами, дорівнюють 4 см^2 і 9 см^2. Знайдіть площу трапеції.

28.35.° Площа трапеції дорівнює 16 см^2. Площа трикутника, утвореного відрізками діагоналей і однією з бічних сторін, дорівнює 3 см^2. Знайдіть площі трикутників, утворених відрізками діагоналей і основами трапеції.

28.36.$^{\bullet}$ Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки основи рівнобедреного трикутника до бічних сторін не залежить від положення точки на основі.

28.37.$^{\bullet}$ Доведіть, що сума відстаней від довільної точки рівностороннього трикутника до його сторін є сталою для даного трикутника.

28.38.$^{\bullet\bullet}$ Відрізок, що сполучає середини двох протилежних сторін опуклого чотирикутника, ділить його на два рівновеликих чотирикутники. Доведіть, що ці сторони паралельні.

28.39.$^{\bullet\bullet}$ Кожна діагональ чотирикутника ділить його на два рівновеликих трикутники. Доведіть, що цей чотирикутник — паралелограм.

28.40.$^{\bullet\bullet}$ На продовженнях сторін AB, BC, AC рівностороннього трикутника ABC за точки B, C і A відповідно позначено точки D, E і F так, що $BD = CE = AF = 2AB$. Знайдіть площу трикутника DEF, якщо площа трикутника ABC дорівнює 1 см^2.

28.41.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC позначено точку M так, що площі трикутників AMB, BMC і AMC рівні. Доведіть, що M — точка перетину медіан трикутника ABC.

28.42.$^{\bullet\bullet}$ Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Доведіть, що коли $S_{ABCD} = \left(\sqrt{S_{AOD}} + \sqrt{S_{COB}}\right)^2$, то $AD \parallel BC$.

28.43.$^{\bullet\bullet}$ Діагональ опуклого чотирикутника ділить навпіл відрізок, який з'єднує середини двох протилежних сторін чотирикутника. Доведіть, що ця діагональ розбиває чотирикутник на два рівновеликих трикутники.

28.44.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ обрано відповідно точки M, N, K, F так, що $MK \parallel BC$, $NF \parallel AB$. Відрізки MK і NF перетинаються в точці Q. Площі паралелограмів $MBNQ$, $NCKQ$, $KDFQ$ дорівнюють відповідно 3 см^2, 4 см^2 і 5 см^2. Знайдіть площу паралелограма $FAMQ$.

28.45.$^{\bullet\bullet}$ Два паралелограми розміщено так, що вони мають спільну вершину і ще одна вершина кожного з паралелограмів лежить на стороні іншого паралелограма (рис. 28.6). Доведіть, що площі цих паралелограмів рівні.

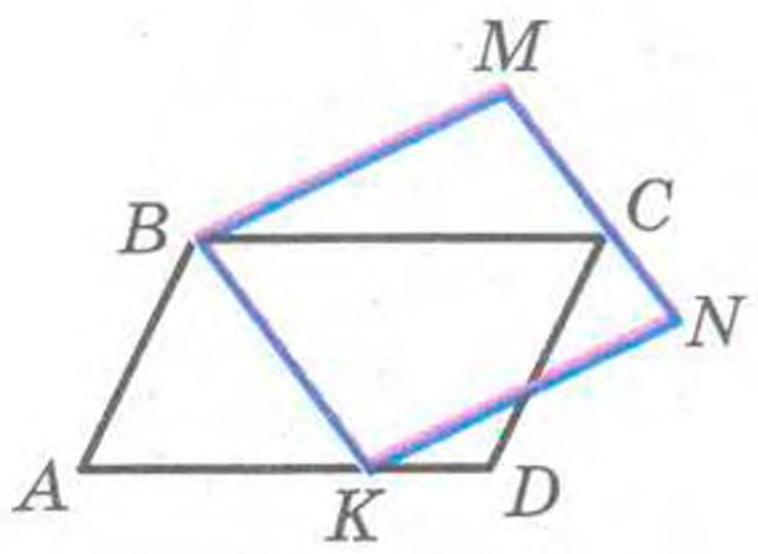


Рис. 28.6

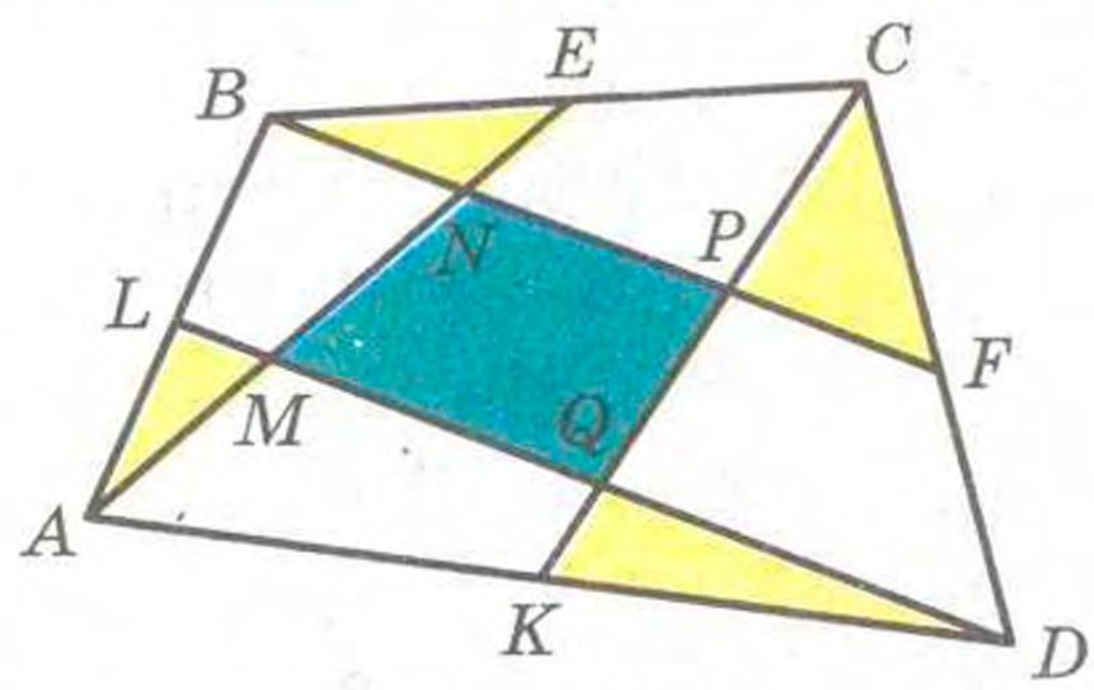


Рис. 28.7

28.46.* На стороні AC трикутника ABC позначено точку D. Проведіть через цю точку пряму так, щоб вона розбила даний трикутник на два рівновеликих многокутники.

28.47.* Дано опуклий n-кутник. Побудуйте рівновеликий йому $(n - 1)$-кутник.

28.48.* Дано квадрат $ABCD$. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$.

28.49.* Точки E, F, K, L — середини сторін чотирикутника $ABCD$ (рис. 28.7). Доведіть, що сума площ трикутників ALM, BNE, CPF, KQD дорівнює площі чотирикутника $MNPQ$.

28.50.* Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці E. Відомо, що $S_{ABE} = S_{DCE} = 1$ см^2, $S_{ABCD} \leqslant 4$ см^2, $AD = 3$ см. Знайдіть сторону BC.

28.51.* Дано опуклий чотирикутник $ABCD$. Промені AB і DC перетинаються в точці M, а промені BC і AD — у точці N. Відомо, що $S_{BMC} = S_{DNC}$. Доведіть, що діагональ AC ділить діагональ BD навпіл.

29. Площа трапеції. Рівноскладені многокутники

Теорема 29.1. ***Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ і висоти.***

Доведення. На рисунку 29.1 зображено трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$), площа якої дорівнює S. Діагональ AC розбиває її на два трикутники: ABC і ACD. Висоти AM і CN цих трикутників є і висотами трапеції. Тому $AM = CN$.

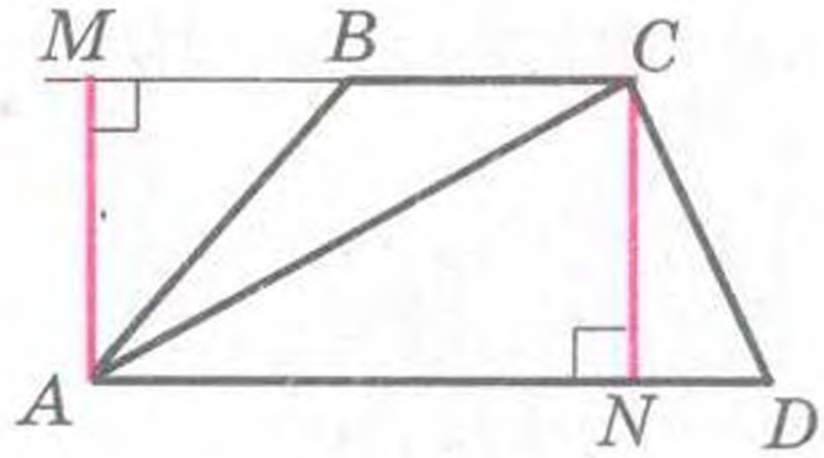


Рис. 29.1

Маємо:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} BC \cdot AM + \frac{1}{2} AD \cdot CN =$$

$$= \frac{1}{2} BC \cdot CN + \frac{1}{2} AD \cdot CN = \frac{1}{2} (BC + AD) \cdot CN. \blacktriangle$$

Позначимо довжини основ трапеції та її висоти відповідно буквами a, b і h. Тоді площа S трапеції обчислюється за формулою

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Зауважимо, що теорему 29.1 можна сформулювати так: ***площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії і висоти.***

Якщо деякий многокутник можна розрізати на частини і скласти з них інший многокутник, то такі два многокутники називають **рівноскладеними**.

Наприклад, якщо прямокутник розрізати вздовж його діагоналі (рис. 29.2), то отримаємо два рівних прямокутних трикутники, з яких можна скласти рівнобедрений трикутник (рис. 29.3). Фігури, зображені на рисунках 29.2 і 29.3, — рівноскладені.

Очевидно, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Цей факт застосовується при доведенні теорем і розв'язуванні задач. Наприклад, доводячи теорему 27.1, ми фактично розрізали паралелограм на трикутник ABM і трапецію $MBCD$, з яких склали прямокутник $MBCN$ (рис. 27.1).

Якщо трикутник розрізати вздовж середньої лінії, то з отриманих трикутника і трапеції можна скласти паралелограм (рис. 29.4).

Легко встановити (зробіть це самостійно), що, застосувавши таке розрізання трикутника, можна довести теорему

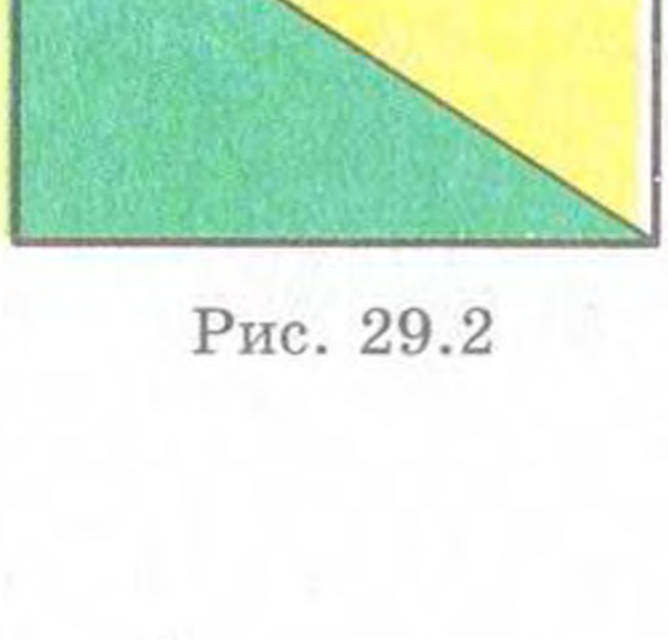


Рис. 29.2

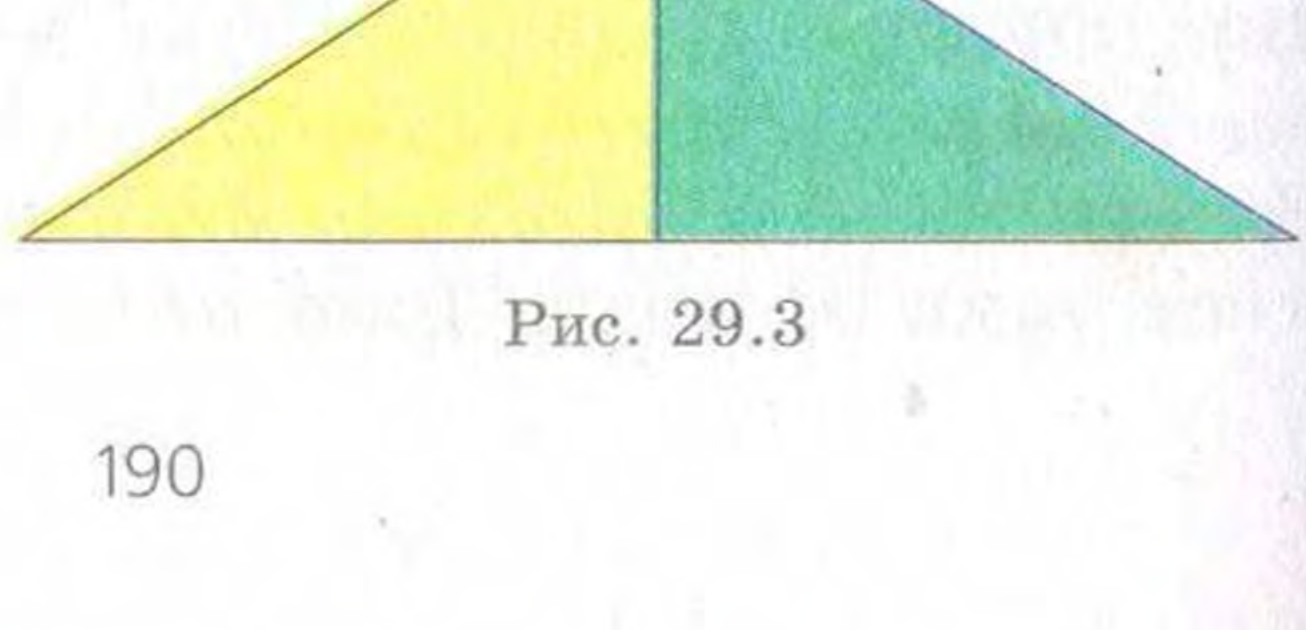


Рис. 29.3

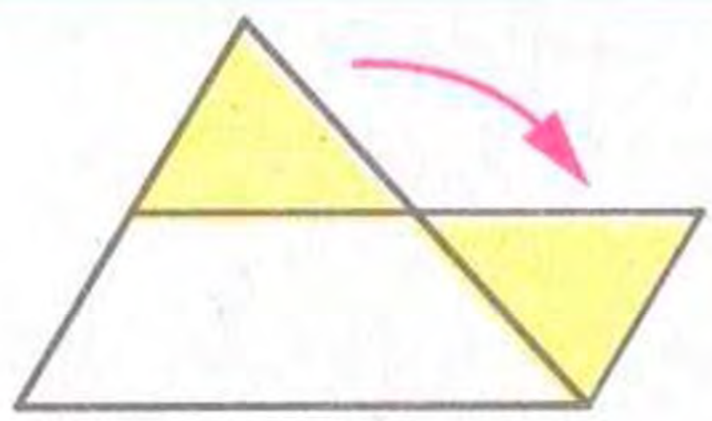


Рис. 29.4

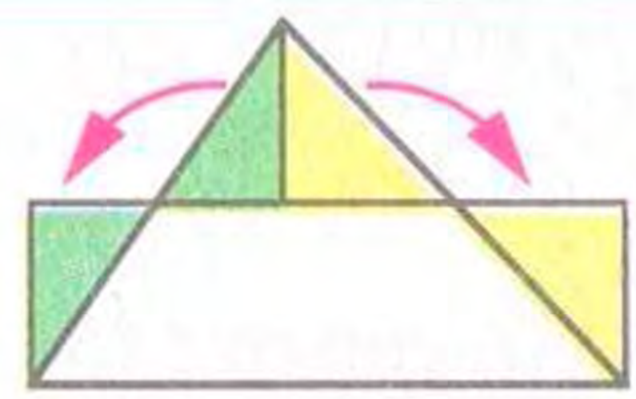


Рис. 29.5

про площу трикутника (теорема 28.1) ще в один спосіб. Цій самій меті слугує розрізання трикутника на частини, з яких можна скласти прямокутник (рис. 29.5).

Евклід у своїй знаменитій книзі «Начала» формулює теорему Піфагора так:

«Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах».

Якщо показати, що квадрат, побудований на гіпотенузі, розрізається на частини, з яких можна скласти два квадрати зі сторонами, які дорівнюють катетам, то тим самим буде доведено теорему Піфагора.

На рисунку 29.6 показано один з можливих способів такого розрізання. Квадрати, побудовані на катетах, розрізано на частини, площі яких дорівнюють S_1, S_2, S_3, S_4. З цих частин складено квадрат, побудований на гіпотенузі.

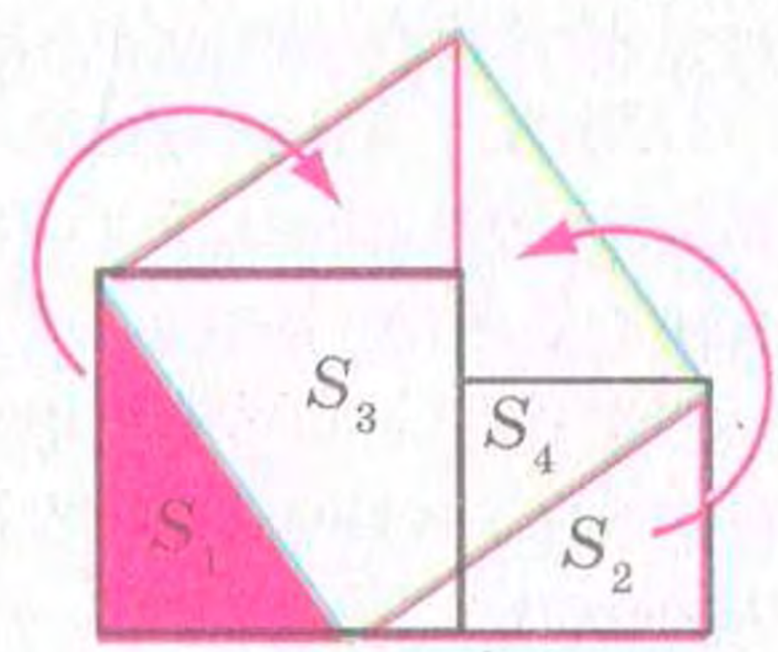


Рис. 29.6

З означення площі многокутника випливає, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Проте зовсім неочевидною, а отже, й неочікуваною є така теорема.

Теорема 29.2. ***Будь-які два рівновеликих многокутники є рівноскладеними.***

Уперше цей факт довів у 1832 р. угорський математик Фаркаш Бойяї. Дещо пізніше німецький математик П. Гервін знайшов інше доведення. Тому цю теорему називають теоремою Бойяї–Гервіна.

?

1. Сформулюйте теорему про площу трапеції.
2. За якою формулою обчислюється площа трапеції?

3. Які многокутники називають рівноскладеними?

4. Яку властивість мають рівновеликі многокутники?

ВПРАВИ

29.1.° Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 16 см, а діагональ — 17 см.

29.2.° Чому дорівнює площа прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 9 см і 16 см, а більша бічна сторона — $\sqrt{65}$ см?

29.3.° Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 32 см, а бічна сторона — 15 см.

29.4.° Знайдіть площу трапеції, зображеної на рисунку 29.7 (розміри дано в сантиметрах).

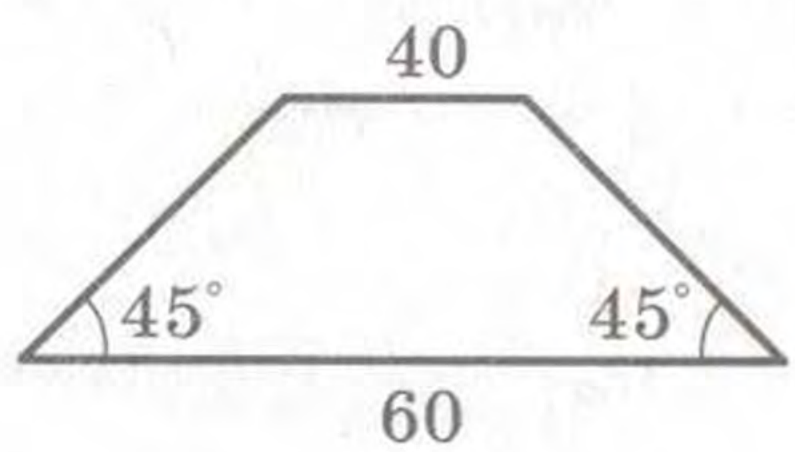
29.5.° Знайдіть площу трапеції, зображеної на рисунку 29.8 (розміри дано в сантиметрах).

29.6.° У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 6 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції.

29.7.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 9 см і 17 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Обчисліть площу трапеції.

29.8.° Точка перетину бісектрис гострих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 17 см і 25 см, а висота — 15 см.

29.9.° Точка перетину бісектрис тупих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 10 см і 17 см, а висота — 8 см.



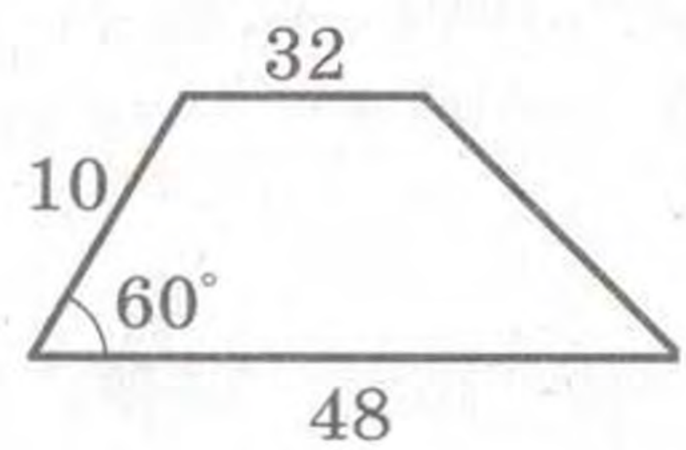


Рис. 29.7

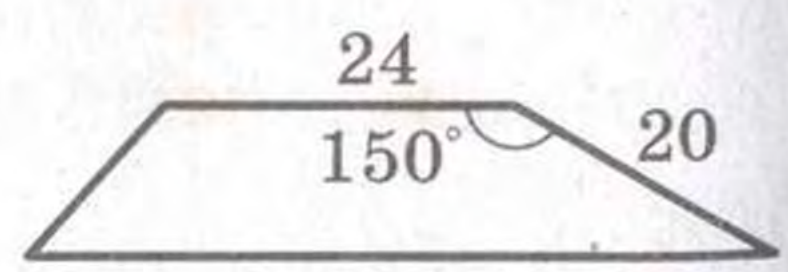


Рис. 29.8

29.10.° Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює $20\sqrt{3}$ см і утворює з основою кут $60°$. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

29.11.° Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 32 см і 50 см. Чому дорівнює площа трапеції, якщо в неї можна вписати коло?

29.12.° Менша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 8 см, а гострий кут — $45°$. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

29.13.° Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 28 см, а гострий кут — $30°$. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

29.14.° Доведіть, що пряма, яка проходить через середину середньої лінії трапеції та перетинає її основи, розбиває дану трапецію на два рівновеликих многокутники.

29.15.• Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 24 см і 40 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

29.16.• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 15 см. Знайдіть площу трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо неї, дорівнює 12,5 см.

29.17.• Діагональ трапеції розбиває її на трикутники, площі яких відносяться як 3 : 7. Як відносяться площі трапецій, на які розбиває дану трапецію її середня лінія?

29.18.• На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки K і M так, що $AK : KB = 3 : 4$ і $DM : MC = 5 : 3$. Знайдіть відношення площ чотирикутників, на які відрізок KM розбиває даний паралелограм.

29.19.• Доведіть, що площа прямокутної трапеції, у яку можна вписати коло, дорівнює добутку її основ.

29.20.• У рівнобічну трапецію вписано коло. Одна з її бічних сторін точкою дотику ділиться на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.

29.21.• У прямокутну трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB \perp AD$) вписано коло з центром у точці O. Знайдіть площу трапеції, якщо $OC = 6$ см, $OD = 8$ см.

29.22.• У прямокутну трапецію вписано коло радіуса 12 см. Більша з бічних сторін точкою дотику ділиться на два відрізки, більший з яких дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції.

29.23.** Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

29.24.** Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 9 см. Більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

29.25.** Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює a.

29.26.** Діагоналі трапеції перпендикулярні, одна з них дорівнює 48 см, а середня лінія трапеції — 25 см. Знайдіть площу трапеції.

29.27.** У трапеції $ABCD$ з основами BC і AD діагоналі перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції, якщо діагональ AC дорівнює 20 см, а висота трапеції — 12 см.

29.28.** Трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписано в коло. Точка O — центр цього кола. Знайдіть площу трапеції, якщо $\angle BOA = 60°$, а висота трапеції дорівнює h.

29.29.** У трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$, точка M — середина AB. Знайдіть площу трикутника CMD, якщо площа даної трапеції дорівнює S.

29.30.** На відрізку, який з'єднує середини основ трапеції, взято точку і сполучено її з усіма вершинами трапеції. Доведіть, що утворені трикутники, прилеглі до бічних сторін трапеції, рівновеликі.

29.31.** Доведіть, що трапеція є рівноскладеною з паралелограмом, основа якого дорівнює середній лінії трапеції, а висота — висоті трапеції.

29.32.** Доведіть, що площа трапеції дорівнює добутку бічної сторони і перпендикуляра, опущеного на пряму, яка містить цю сторону, із середини другої бічної сторони.

29.33.** У чотирикутнику $ABCD$ кути ABC і ADC прямі, а сторони AB і BC рівні (рис. 29.9). Відомо, що $BH \perp AD$ і $BH = 1$ см. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

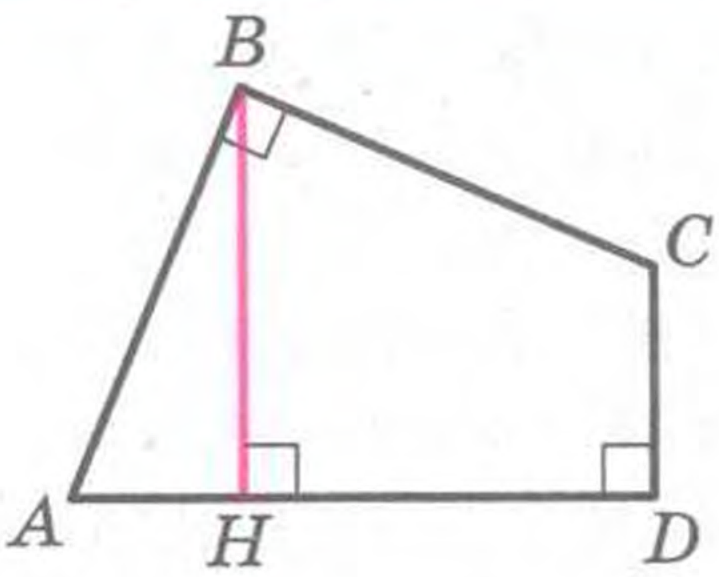


Рис. 29.9

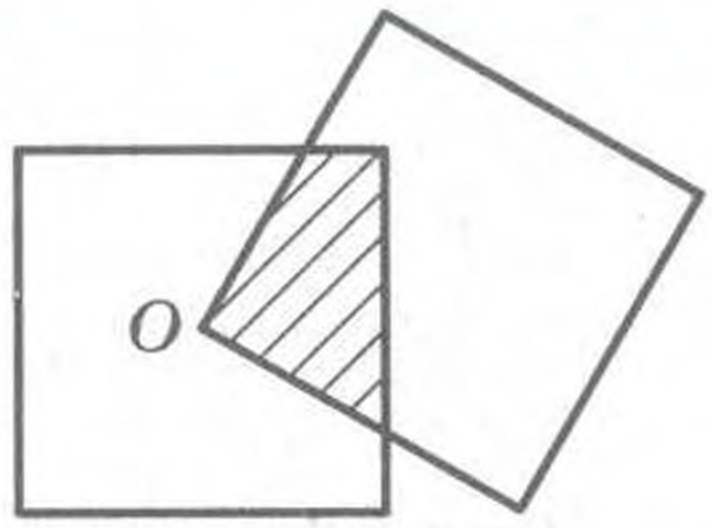


Рис. 29.10

29.34.** На рисунку 29.10 зображено два квадрати, сторони яких дорівнюють 1 см. Ці квадрати розміщено так, що вершина O одного є точкою перетину діагоналей другого. Чому дорівнює площа заштрихованого чотирикутника?

29.35.* В опуклому п'ятикутнику $ABCDE$ $\angle ABC = \angle CDE = 90°$, $BC = CD = AE = 1$ см, $AB + DE = 1$ см. Знайдіть площу п'ятикутника $ABCDE$.

29.36.* Кожна з п'яти прямих, які перетинають сторони BC і AD квадрата $ABCD$, ділить його на два чотирикутники, площі яких відносяться як $2 : 3$. Доведіть, що принаймні три з цих прямих проходять через одну точку.

30. Зовнівписане коло трикутника

Проведемо бісектриси двох зовнішніх кутів з вершинами A і C трикутника ABC (рис. 30.1). Нехай O — точка перетину цих бісектрис. Ця точка рівновіддалена від прямих AB, BC і AC.

Проведемо три перпендикуляри: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Зрозуміло, що $OM = OK = ON$. Отже, існує коло з центром у точці O, яке дотикається до сторони трикутника і продовжень двох інших його сторін. Таке коло називають **зовнівписаним колом** трикутника ABC (рис. 30.1).

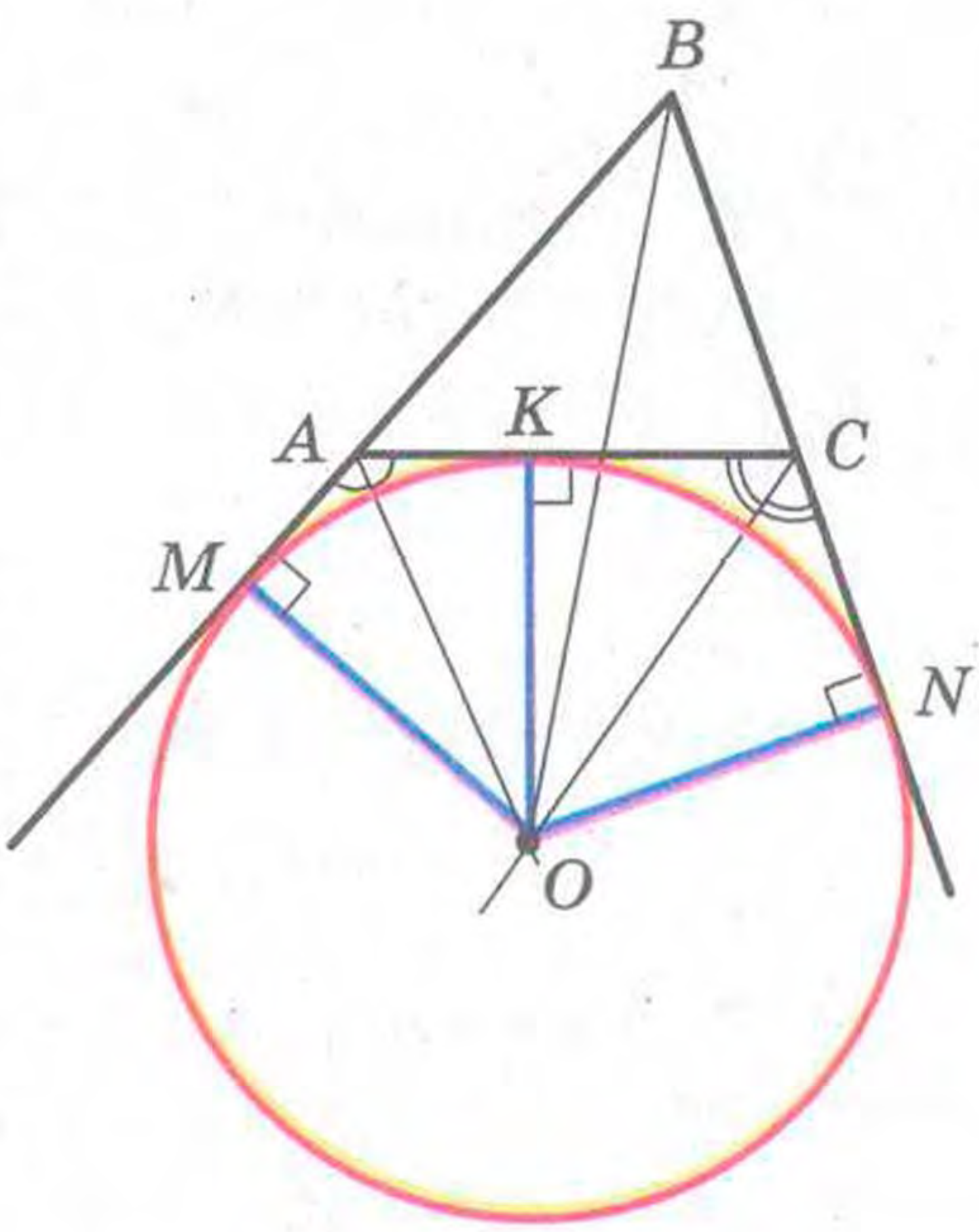


Рис. 30.1

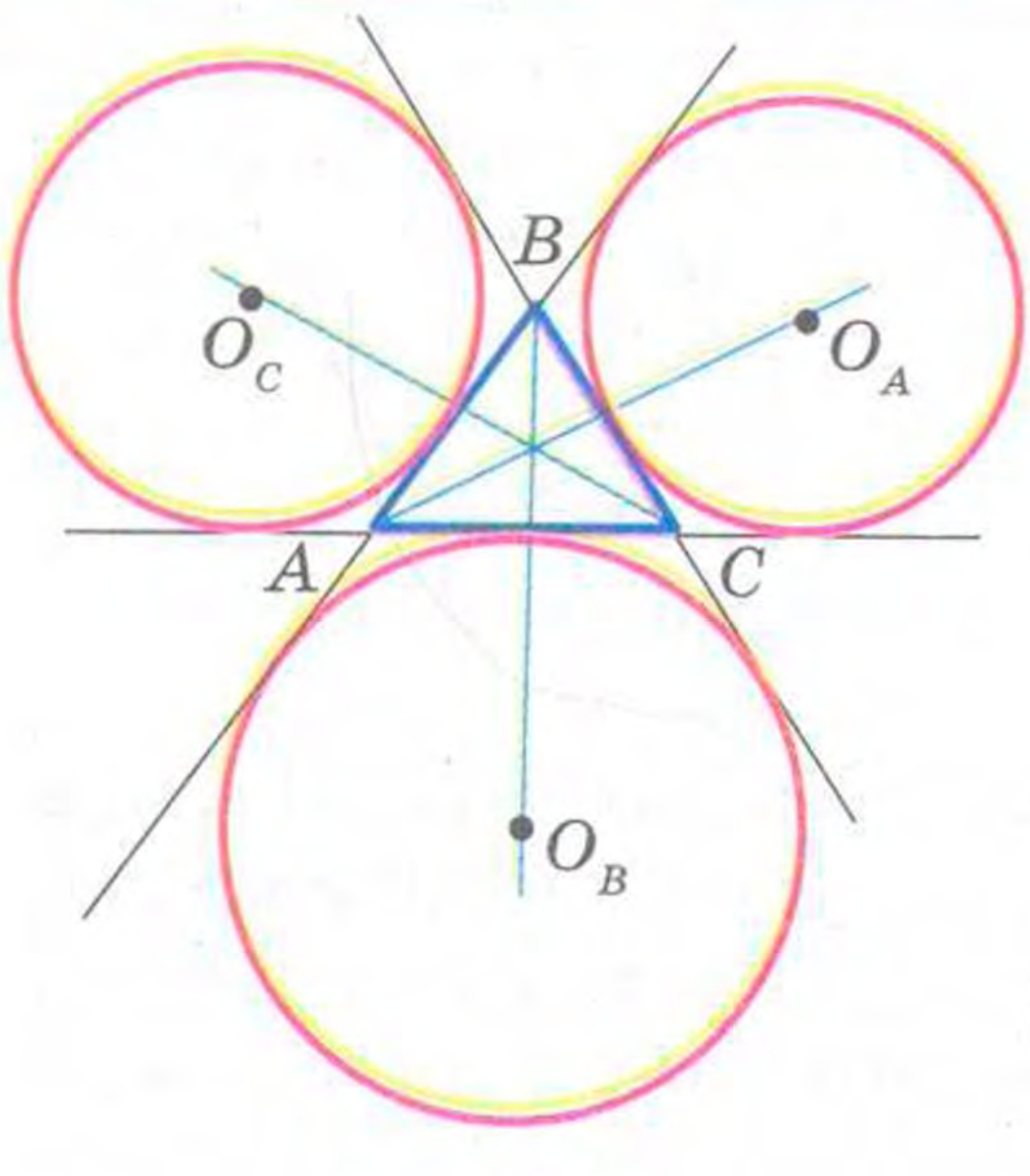


Рис. 30.2

Оскільки $OM = ON$, то точка O належить бісектрисі кута ABC.

Очевидно, що будь-який трикутник має три зовнівписаних кола (рис. 30.2) з центрами O_A, O_B, O_C, які дотикаються до сторін a, b, c відповідно. Радіуси цих кіл позначимо відповідно R_A, R_B, R_C.

Теорема 30.1. ***Радіуси зовнівписаних кіл трикутника ABC можна обчислити за формулами***

$$R_A = \frac{S}{p-a}; \; R_B = \frac{S}{p-b}; \; R_C = \frac{S}{p-c},$$

де S — площа трикутника ABC, p — його півпериметр.

Доведення. Нехай зовнівписане коло з центром O трикутника ABC дотикається до його сторони AC у точці K, а до продовження сторін AB і BC — у точках M і N відповідно (рис. 30.1). Маємо:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} = \frac{1}{2}OM \cdot AB + \frac{1}{2}ON \cdot BC - \frac{1}{2}OK \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2}R_B(c + a - b) = R_B \cdot \frac{a+b+c-2b}{2} = R_B \cdot \frac{2p-2b}{2} = R_B(p-b).$$

Звідси

$$R_B = \frac{S}{p-b}.$$

Аналогічно можна показати, що

$$R_A = \frac{S}{p-a}, \; R_C = \frac{S}{p-c}. \; ▲$$

Задача. *Зовнівписане коло трикутника ABC дотикається до продовження сторони AB за точку A в точці M. Доведіть, що BM = p, де p — півпериметр трикутника ABC.*

Розв'язання. Нехай дане зовнівписане коло з центром O дотикається до сторони AC у точці K, а до продовження сторони BC — у точці N (рис. 30.1). За властивістю дотичних, проведених до кола через одну точку, маємо: $CK = CN$, $AK = AM$. Тоді $AC = CN + AM$. Отже, периметр трикутника ABC дорівнює сумі $BM + BN$. Проте $BM = BN$. Тоді $BM = BN = p$, де p — півпериметр $\Delta\ ABC$.

Приклад. У трикутнику ABC з кутом B, який дорівнює $120°$, проведено бісектриси AA_1, BB_1 і CC_1. Знайдіть кут $A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай $\angle MBC$ — зовнішній кут трикутника ABC при вершині B (рис. 30.3). Очевидно, що $\angle\ MBC = 60°$. Тоді промінь BA_1 — бісектриса кута MBB_1. Отже, точка A_1 — центр зовнівписаного кола трикутника ABB_1. Тоді промінь B_1A_1 — бісектриса кута BB_1C. Аналогічно промінь B_1C_1 — бісектриса кута AB_1B.

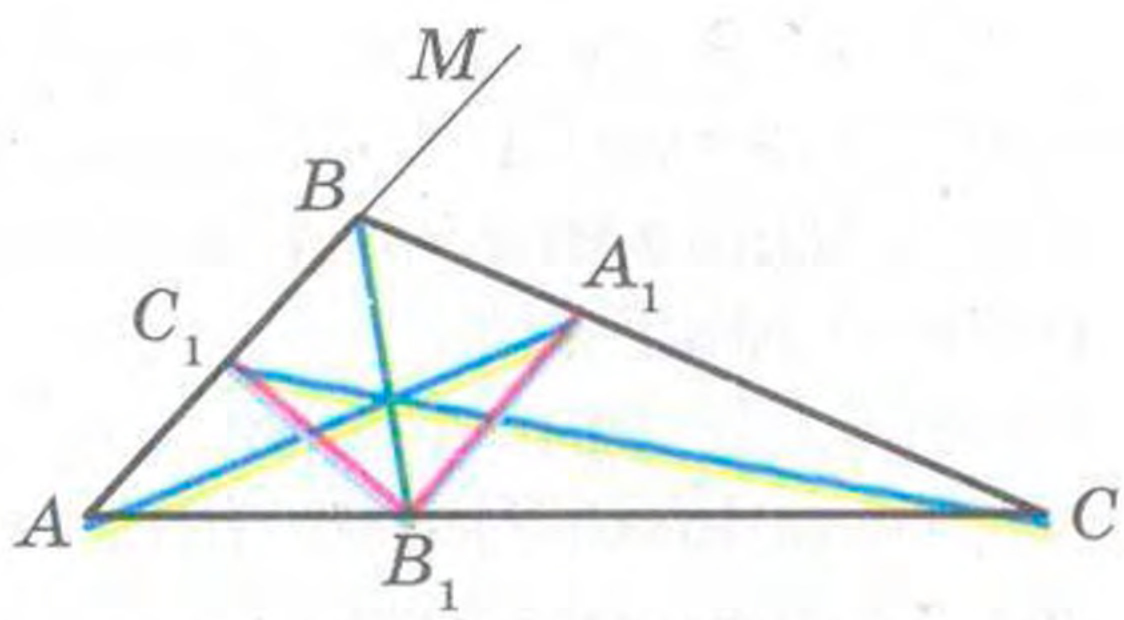


Рис. 30.3

Отже, $\angle\ A_1B_1C_1$ дорівнює половині розгорнутого кута, тобто $\angle\ A_1B_1C_1 = 90°$.

?

1. Яке коло називають зовнівписаним колом трикутника?
2. За якими формулами можна обчислити радіуси зовнівписаних кіл трикутника?

ВПРАВИ

30.1.° Зовнівписане коло трикутника ABC дотикається до сторони AC у точці K. Доведіть, що $KC = p - a$ і $KA = p - c$, де p — півпериметр трикутника ABC.

30.2.° Дано трикутник ABC. Доведіть, що

$$R_A = (p - c)\ \text{ctg}\ \frac{B}{2} = (p - b)\ \text{ctg}\ \frac{C}{2} = p\ \text{tg}\ \frac{A}{2}.$$

30.3.° У трикутнику ABC K і L — точки дотику сторони AB до вписаного і зовнівписаного кіл відповідно. Доведіть, що $AL = BK$.

30.4.° У трикутнику ABC радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони AC, дорівнює півпериметру даного трикутника. Доведіть, що кут ABC — прямий.

30.5.° У трикутник зі сторонами 6 см, 10 см, 12 см вписано коло. До кола проведено дотичну так, що вона перетинає дві більші сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який дотична відтинає від даного трикутника.

30.6.° Позначимо через O_A, O_B і O_C центри зовнівписаних кіл трикутника ABC, які дотикаються до сторін BC, CA і AB відповідно. Виразіть кути трикутника $O_AO_BO_C$ через кути трикутника ABC.

30.7.• У трикутник ABC з периметром, який дорівнює 20 см, вписано коло. Відрізок дотичної, проведеної до кола паралельно стороні AC, розміщений між сторонами трикутника, дорівнює 2,4 см. Знайдіть сторону AC.

30.8.• До кола, вписаного в трикутник, проведено три дотичні, паралельні сторонам трикутника. Ці дотичні відтинають від даного трикутника три трикутники, радіуси описаних кіл яких дорівнюють R_1, R_2, R_3. Знайдіть радіус описаного кола даного трикутника.

30.9.• У рівнобедрений трикутник з основою 12 см вписано коло, а до нього проведено три дотичні так, що вони відтинають від даного трикутника три трикутники по одному біля кожної вершини. Сума периметрів трьох утворених трикутників дорівнює 48 см. Знайдіть бічну сторону даного трикутника.

30.10.• Дано точку, яка належить куту з вершиною O, але не належить його сторонам. Проведіть через цю точку пряму так, щоб трикутник, який ця пряма відтинає від кута, мав даний периметр.

30.11.• Дотична до кола, вписаного в рівносторонній трикутник ABC, перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Знайдіть площу трикутника MBN, якщо $AB = a$, $MN = b$.

30.12.$^{\bullet}$ Площа прямокутного трикутника дорівнює $\frac{2}{3}r^2$, де r — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до одного з катетів. Знайдіть сторони трикутника.

30.13.$^{\bullet}$ Доведіть, що коло, яке дотикається до бічних сторін AB і BC рівнобедреного трикутника ABC у точках A і C відповідно, проходить через центр зовнівписаного кола трикутника ABC.

30.14.$^{\bullet}$ Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає його описане коло в точці A_1. Доведіть, що $OA_1 = A_1O_A$, де O і O_A — центри вписаного і зовнівписаного кіл трикутника ABC.

30.15.$^{\bullet}$ На площині задано пряму, якій належать вершини B і C трикутника ABC. У різних півплощинах відносно цієї прямої позначили точки O і O_A, які є відповідно центрами вписаного кола і зовнівписаного кола, що дотикається до сторони BC. Побудуйте трикутник ABC.

30.16.$^{\bullet}$ За точками O_A, O_B, O_C, які є центрами зовнівписаних кіл трикутника ABC, відновіть трикутник ABC.

30.17.$^{\bullet}$ Зовнівписані кола трикутника ABC дотикаються до сторін AB, BC і CA у точках C_1, A_1 і B_1 відповідно. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці.

30.18.$^{\bullet}$ Коло з центром у точці D проходить через точки A, B і центр O_A зовнівписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що точки A, B, C і D лежать на одному колі.

30.19.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC проведено бісектриси AK і BL. Знайдіть кут A, якщо промінь KL — бісектриса кута AKC.

30.20.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ позначили відповідно точки M і N так, що $\angle MNC = 2\angle NAD$. Знайдіть величину кута MAN.

30.21.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах BA і BC рівностороннього трикутника ABC позначили відповідно точки M і N так, що $\angle NMA = 2\angle NAC$. Через точку B проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає пряму MN у точці K. Знайдіть кут NAK.

30.22.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC з кутом при вершині B, що дорівнює $120°$, проведено бісектрису BD. Знайдіть відношення сторін AB і AC трикутника, якщо $BD : DC = k$.

30.23.* У квадраті $ABCD$ зі стороною 1 см на сторонах AB і BC обрано відповідно точки P і Q так, що периметр трикутника PBQ дорівнює 2 см. Знайдіть кут PDQ.

30.24.* У трикутнику ABC $\angle B = 100°$, відрізок CE — бісектриса. На стороні AC обрано точку D так, що $\angle DBC = 20°$. Знайдіть величину кута CED.

30.25.* У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle D = 135°$, $\angle BDA = 90°$. У якому відношенні діагональ AC ділить діагональ BD?

ВІДОМОСТІ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

Найпростіші геометричні фігури та їх властивості

1. Точки і прямі

Основна властивість прямої. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.

Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

2. Відрізок і його довжина

Точки A і B прямої a (рис. 1) обмежують частину прямої, яку разом з точками A і B називають відрізком, а точки A і B — кінцями цього відрізка.

Рис. 1

Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити.

Кожний відрізок має певну довжину.

Рівні відрізки мають рівні довжини і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.

Основна властивість довжини відрізка. Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB, то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB, тобто $AB = AC + CB$.

Якщо точка C не належить відрізку AB, то $AB < AC + CB$.

Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB.

Якщо три точки A, B і C такі, що виконується рівність $AB = AC + CB$, то точка C є внутрішньою точкою відрізка AB.

3. Промінь. Кут

Точка O прямої AB (рис. 2) розбиває пряму на дві частини, кожну з яких разом з точкою O називають променем або півпрямою. Точку O називають початком променя.

Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.

Два промені OA і OB, що мають спільний початок, розбивають площину на дві частини, кожну з яких

Рис. 2

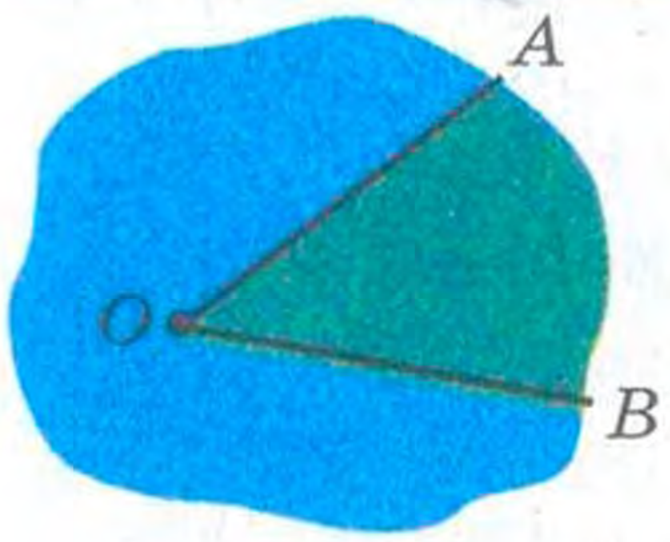


Рис. 3

разом з променями OA і OB називають кутом (рис. 3). Промені OA і OB називають сторонами кута, а точку O — вершиною кута.

Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.

Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити.

Бісектрисою кута називають промінь з початком у його вершині, який ділить цей кут на два рівних кути.

4. Вимірювання кутів

Кожний кут має певну величину (градусну міру).

Кут, градусна міра якого дорівнює 90°, називають прямим. Кут, градусна міра якого менша від 90°, називають гострим. Кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°, називають тупим.

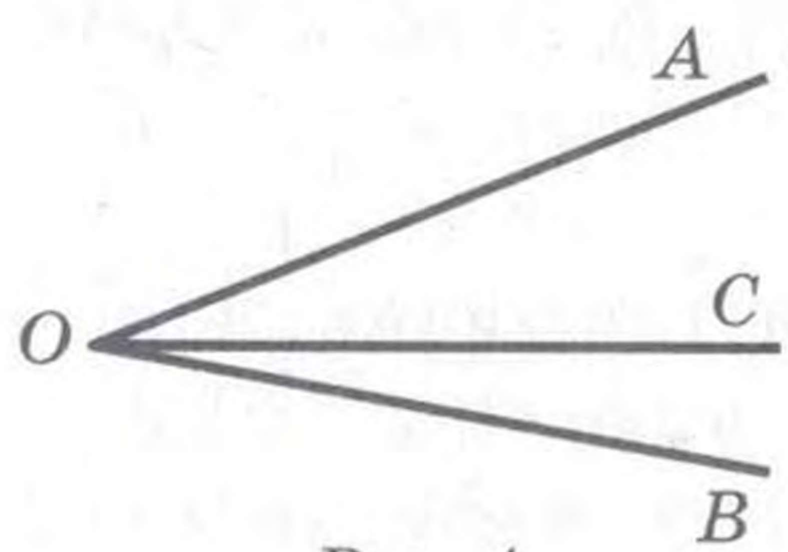


Рис. 4

Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.

Основна властивість величини кута. Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB (рис. 4), то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

5. Суміжні і вертикальні кути

Два кути називають суміжними, якщо у них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

Вертикальні кути рівні.

6. Перпендикулярні прямі. Серединний перпендикуляр

Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при перетині вони утворюють прямі кути.

Якщо прямі a і b перпендикулярні, то пишуть $a \perp b$ або $b \perp a$.

Неперпендикулярні прямі при перетині утворюють пару рівних гострих кутів і пару рівних тупих кутів. Величину гострого кута називають кутом між неперпендикулярними прямими.

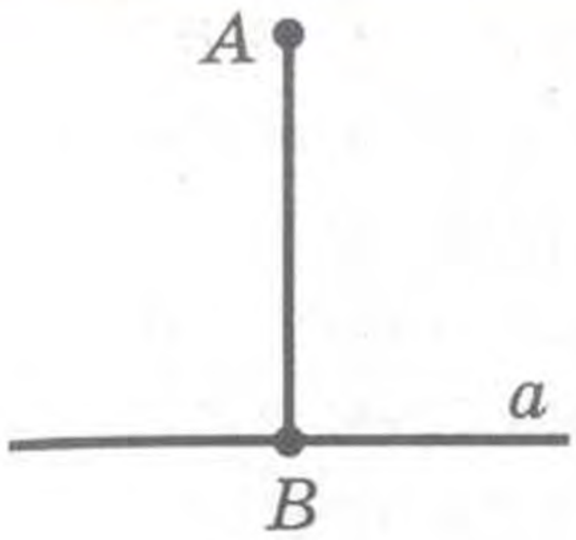


Рис. 5

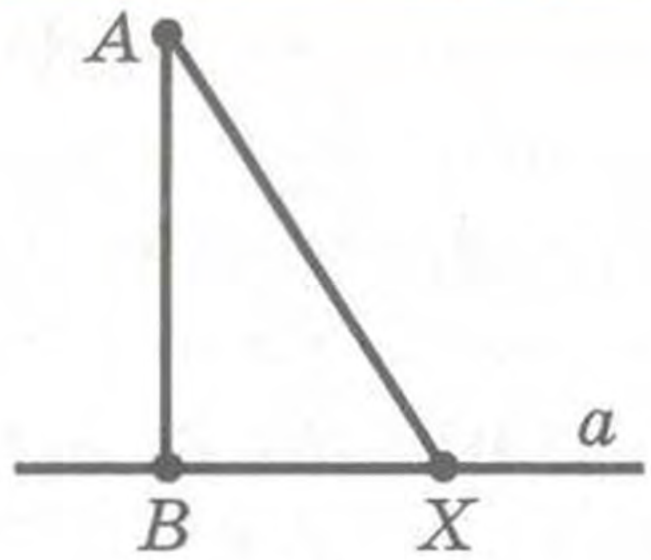


Рис. 6

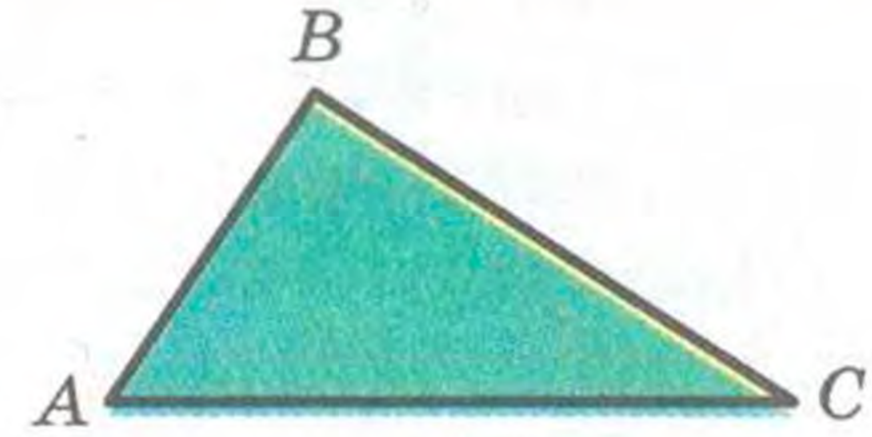


Рис. 7

Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює 90°.

Два відрізки називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

На рисунку 5 зображено пряму a і перпендикулярний до неї відрізок AB, кінець B якого належить прямій a. У такому випадку говорять, що з точки A на пряму a опущено перпендикуляр AB. Точку B називають основою перпендикуляра AB.

Довжину перпендикуляра AB називають відстанню від точки A до прямої a. Якщо точка A належить прямій a, то вважають, що відстань від точки A до прямої a дорівнює нулю.

Опустимо з точки A на пряму a перпендикуляр AB (рис. 6). Нехай X — довільна точка прямої a, відмінна від точки B. Відрізок AX називають похилою, проведеною з точки A до прямої a.

Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.

Пряму, яка перпендикулярна до відрізка і проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.

Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.

Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.

Трикутники

7. Трикутник і його елементи. Рівні трикутники

Три точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, сполучено відрізками (рис. 7). Утворена фігура обмежує частину площини, яку разом з відрізками AB, BC і CA називають трикутником. Точки A, B, C називають вершинами, а відрізки AB, BC, CA — сторонами трикутника.

Трикутник називають і позначають за його вершинами.

У трикутнику ABC, наприклад, кут B називають кутом, протилежним стороні AC, а кути A і C — кутами, прилеглими до сторони AC.

Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін.

Трикутник називають прямокутним, якщо один з його кутів прямий; тупокутним, якщо один з його кутів тупий. Якщо всі кути гострі, то трикутник називають гострокутним.

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають гіпотенузою, а сторони, прилеглі до прямого кута, — катетами.

Нерівність трикутника. Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити.

Ті пари сторін і кутів, які суміщаються при накладанні трикутників, називають відповідними сторонами і відповідними кутами.

У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.

У трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

8. Висота, медіана, бісектриса трикутника

Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.

Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.

Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.

9. Ознаки рівності трикутників

Перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами і кутом між ними. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Друга ознака рівності трикутників: за стороною і двома прилеглими до неї кутами. Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами. Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

10. Рівнобедрений трикутник і його властивості. Рівносторонній трикутник

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.

Рівні сторони трикутника називають бічними сторонами, а третю сторону — основою рівнобедреного трикутника.

Вершиною рівнобедреного трикутника називають спільну точку його бічних сторін.

У рівнобедреному трикутнику:

1) кути при основі рівні;
2) бісектриса кута при вершині є медіаною і висотою.

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.

У рівносторонньому трикутнику:

1) всі кути рівні;
2) бісектриса, висота і медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.

11. Ознаки рівнобедреного трикутника

Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.

Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.

Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.

Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

12. Паралельні прямі

Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.

Якщо прямі a і b паралельні, то пишуть $a \parallel b$ (читають: «прямі a і b паралельні» або «пряма a паралельна прямій b»).

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельних прямих). Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.

Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

13. Ознаки паралельності двох прямих

Якщо дві прямі a і b перетнути третьою прямою c, то утвориться вісім кутів (рис. 8). Пряму c називають січною прямих a і b.

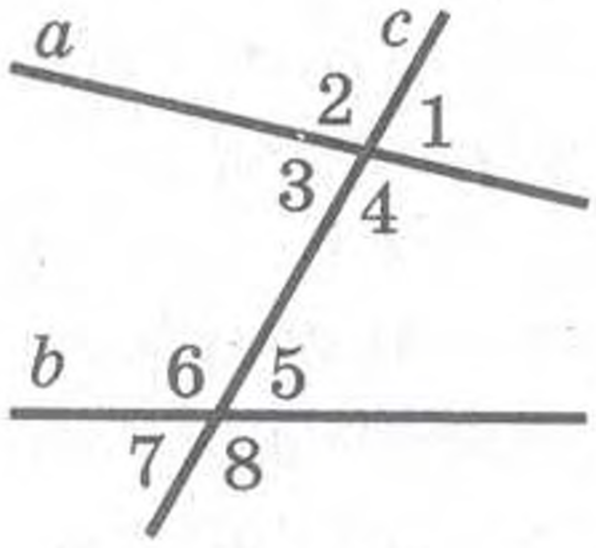


Рис. 8

Кути 3 і 6, 4 і 5 називають односторонніми.

Кути 3 і 5, 4 і 6 називають різносторонніми.

Кути 6 і 2, 5 і 1, 3 і 7, 4 і 8 називають відповідними.

Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.

Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

14. Властивості паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то:

- кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні;
- кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні;
- сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180°.

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.

15. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Зовнішній кут трикутника більший за кожний з кутів трикутника, не суміжних з ним.

16. Ознаки рівності прямокутних трикутників

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом. Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами. Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом. Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом. Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом. Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

17. Властивості прямокутного трикутника

У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.

Катет, який лежить проти кута, що дорівнює 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Коло і круг

18. Геометричне місце точок

Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.

Серединний перпендикуляр відрізка є ГМТ, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Бісектриса кута є ГМТ, які належать куту і рівновіддалені від його сторін.

19. Коло і круг та їх елементи

Колом називають геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки. Цю точку називають центром кола.

Будь-який відрізок, який сполучає точку кола з його центром, називають радіусом кола.

Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають хордою кола. Хорду, яка проходить через центр кола, називають діаметром. Діаметр кола вдвічі більший за його радіус.

Кругом називають геометричне місце точок, відстань від яких до заданої точки не більша за дане додатне число. Задану точку називають центром круга, а дане число — радіусом круга. Якщо X — довільна точка круга з центром O радіуса R, то $OX \leqslant R$.

Коло, яке обмежує круг, йому належить.

Хорда і діаметр круга — це хорда і діаметр кола, яке обмежує круг.

20. Властивості кола

Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.

Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

21. Взаємне розміщення прямої і кола. Дотична до кола

Пряма і коло можуть не мати спільних точок, мати дві спільні точки і мати одну спільну точку.

Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Якщо через точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

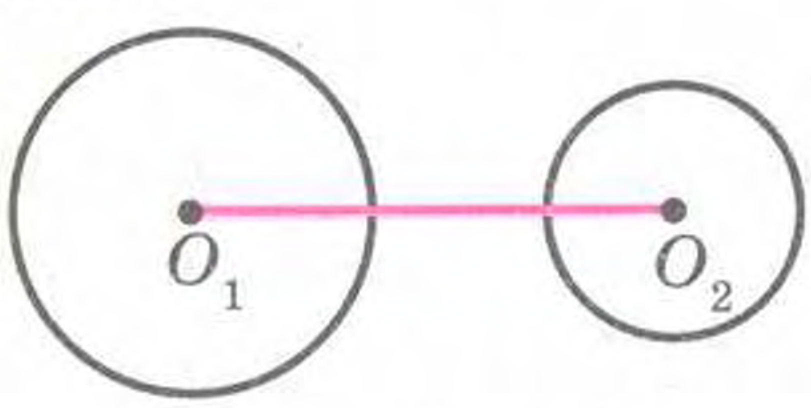
22. Взаємне розміщення двох кіл

Два кола можуть не мати спільних точок, мати одну спільну точку і мати дві спільні точки.

Нехай R_1 і R_2 — радіуси даних кіл, d — відстань між їх центрами.

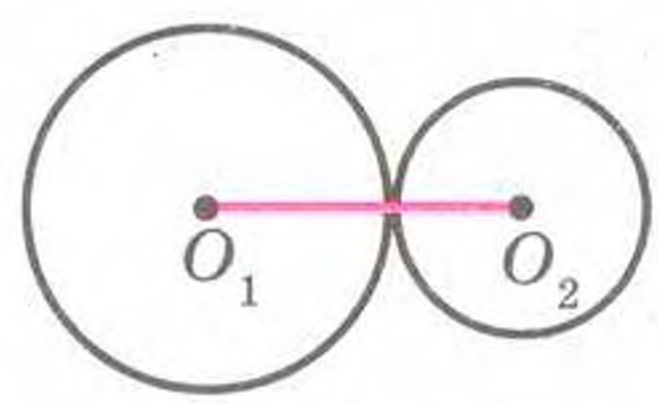
Якщо $d > R_1 + R_2$, то кола не мають спільних точок (рис. 9).

Якщо $d = R_1 + R_2$, то кола мають одну спільну точку (рис. 10). У цьому випадку кажуть, що кола мають зовнішній дотик.



$d > R_1 + R_2$

Рис. 9



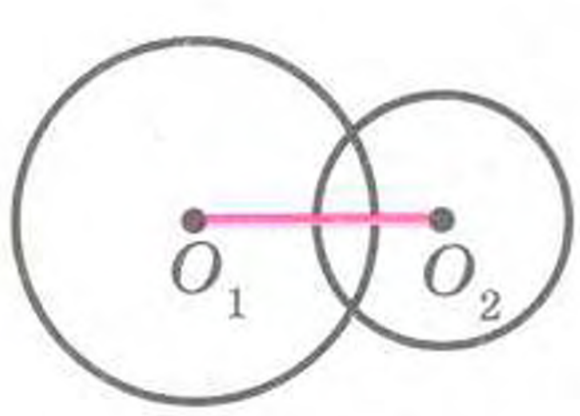
$d = R_1 + R_2$

Рис. 10

Якщо $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$, то кола мають дві спільні точки (рис. 11).

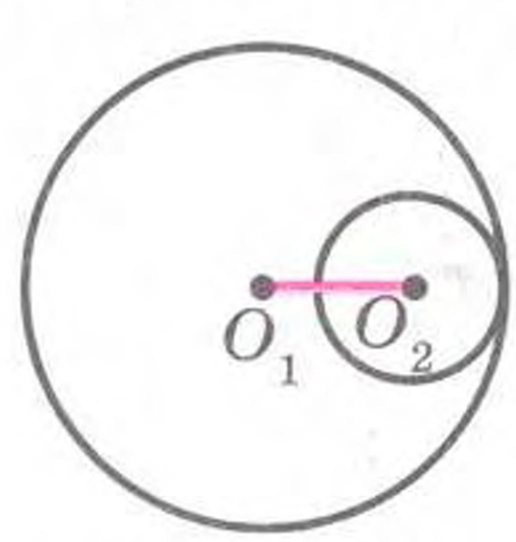
Якщо $d = R_1 - R_2$, то кола мають одну спільну точку (рис. 12). У цьому випадку кажуть, що кола мають внутрішній дотик.

Якщо $d < R_1 - R_2$, то кола не мають спільних точок (рис. 13).



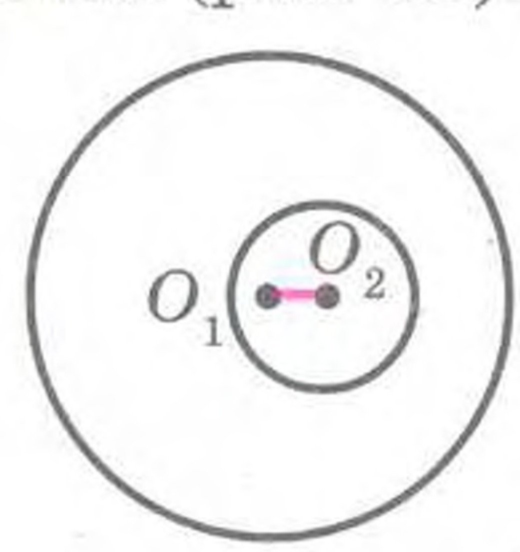
$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$

Рис. 11



$d = R_1 - R_2$

Рис. 12



$d < R_1 - R_2$

Рис. 13

23. Описане і вписане кола трикутника

Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника.

На рисунку 14 зображено коло, описане навколо трикутника. У цьому випадку також говорять, що трикутник вписаний у коло.

Центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин.

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Центр кола, описаного навколо трикутника,— це точка перетину серединних перпендикулярів його сторін.

Серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

На рисунку 15 зображено коло, вписане в трикутник. У цьому випадку також говорять, що трикутник описаний навколо кола.

Центр вписаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його сторін.

У будь-який трикутник можна вписати коло. Центр кола, вписаного в трикутник,— це точка перетину його бісектрис.

Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, визначається за формулою $r = \frac{a+b-c}{2}$, де r — радіус вписаного кола, a і b — катети, c — гіпотенуза.

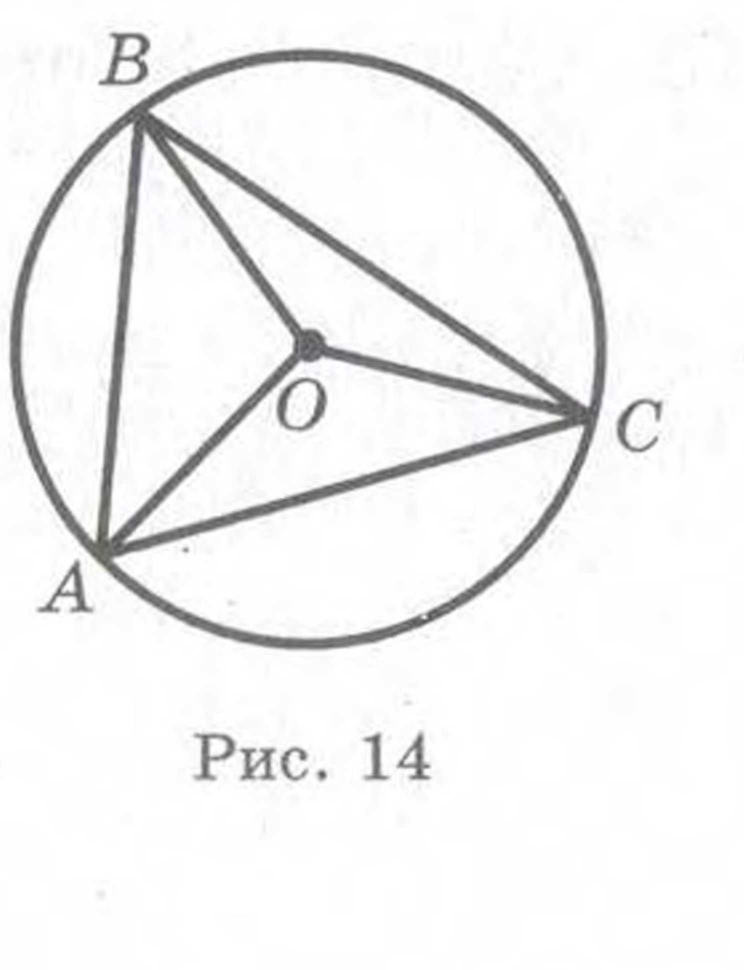


Рис. 14

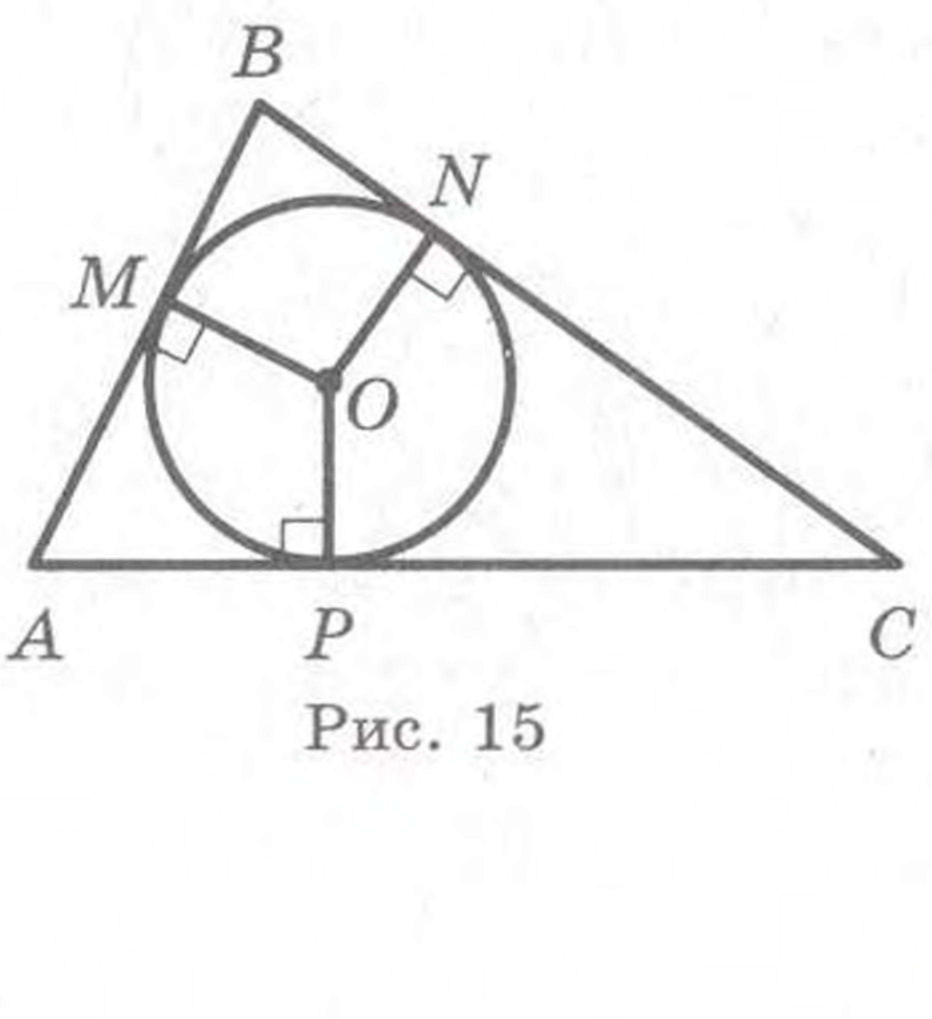


Рис. 15

1.8. 3 см. **1.10.** 2) *Вказівка.* Доведіть, що $\angle AOM = \angle BOK$. Кут AOB — розгорнутий. Тоді $\angle AOM + \angle MOB = 180°$. Звідси $\angle MOB + \angle BOK = 180°$. **1.12.** 26 см або 14 см. **1.13.** *Вказівка.* Доведіть рівність трикутників AKH і CMH. **1.14.** Ні. **1.15.** 2 см. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники KMC і KDA — рівнобедрені. **1.16.** 8 см. **1.17.** *Вказівка.* Зауважимо, що вказані медіана і бісектриса не можуть виходити з однієї вершини, оскільки тоді кут при цій вершині був би більшим за 180°. Нехай у трикутнику ABC бісектриса AD і медіана CE перетинаються в точці F. Тоді AF — бісектриса і висота трикутника ACE, отже, цей трикутник рівнобедрений ($AC = AE$), а оскільки CE — медіана, то $AB = 2AE = 2AC$. **1.18.** 2 см, 3 см, 4 см. *Вказівка.* Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC (див. рис. до задачі 1.18), відрізок CE — його медіана, $BD \perp CE$. Доведіть, що $\triangle CBE$ — рівнобедрений ($BC = BE$). Тоді $AB = 2BC$ і можуть мати місце такі випадки: $AB - BC = 1$ см або $AB - BC = 2$ см, тобто $BC = 1$ см або $BC = 2$ см. **1.19.** *Вказівка.* Трикутники ACG і BEF (див. рис. до задачі 1.19) рівні за стороною і двома прилеглими кутами. Отже, $\angle AGC = \angle BFE$ і $AG = BF$. **2.2.** 35°, 35°, 110°. **2.6.** $90° - \frac{\alpha}{2}$. **2.7.** 15 см. **2.10.** *Вказівка.* Проведіть через точку C пряму, паралельну прямій AB. **2.11.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники AMO і CKO — рівнобедрені. **2.12.** 45°. **2.14.** 36°, 72°, 72° або 90°, 45°, 45°. **2.16.** 8 см. **2.17.** 45°. *Вказівка.* Нехай точка D — основа висоти, опущеної з вершини A на сторону BC. Доведіть, що $\angle HCB = \angle DAB$ і $\triangle CHD = \triangle ABD$. Звідси $CD = AD$.

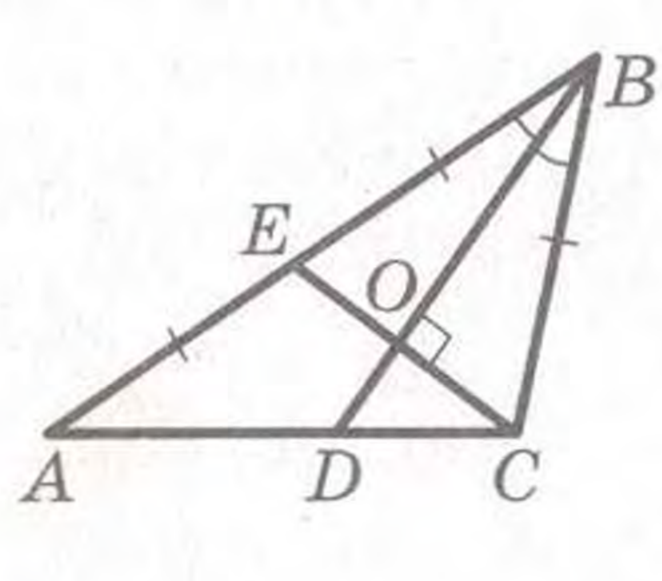


Рис. до задачі 1.18

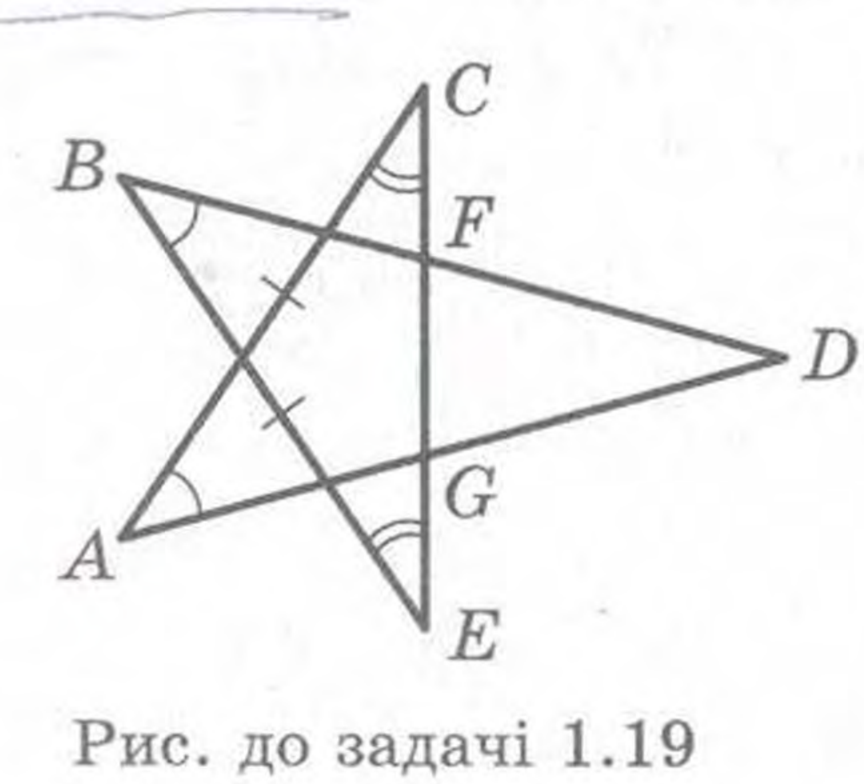


Рис. до задачі 1.19

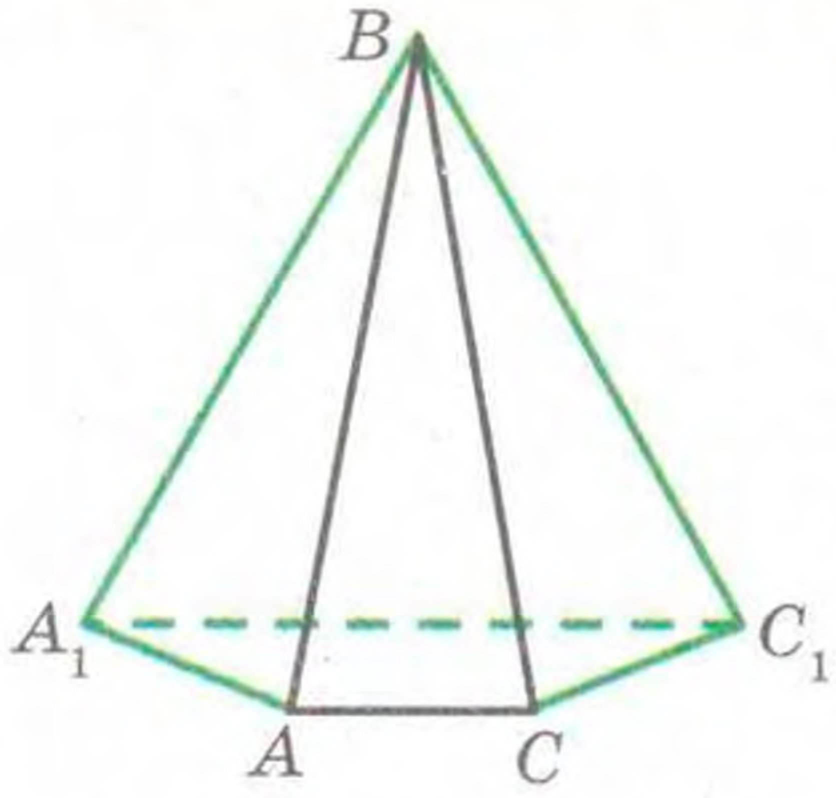


Рис. до задачі 2.31.2

2.18. 72°, 72°, 36°. **2.20.** *Вказівка.* Відкладіть на стороні AC відрізок $DC = CM$. Маємо: $DC = CM = BC$. **2.22.** 90°, 40°, 50°. *Вказівка.* Розгляньте трикутник DAK, де точка K — середина сторони AB. **2.23.** 60°. **2.24.** 15°, 75°. *Вказівка.* З вершини прямого кута проведіть медіану. **2.26.** *Вказівка.* Доведіть, що CM — бісектриса кута ACH. **2.27.** 30° і 60°. *Вказівка.* На продовженні сторони AB за точку A відкладіть відрізок $AF = AC$. Тоді $\angle CFA = \angle ABC$. **2.28.** 4 см. *Вказівка.* На стороні AB позначте точку D таку, що $BD = BC$. Нехай CE — бісектриса кута C. Доведіть, що трикутники ADC і DCE рівнобедрені. **2.29.** 2 см. *Вказівка.* На стороні AC позначте точку F так, що $DF \parallel CB$. Доведіть, що $CF = DF = FE = 1$ см. **2.30.** *Вказівка.* На сторонах AB і AC оберіть відповідно точки M і N так, щоб $BC = MC = MN$. Покажіть, що точки M і Q збігаються. **2.31.** *Вказівка.* 1) На стороні AB візьміть точку E таку, що $AE = AC$. Доведіть, що $BE > CE > AC$. 2) Побудуйте трикутники ABA_1 і CBC_1, рівні трикутнику ABC, як показано на рисунку до задачі 2.31.2. Тоді $A_1C_1 = AB$. **2.32.** 70°. *Вказівка.* Побудуйте рівносторонній трикутник AMC так, щоб точка M належала трикутнику ABC, і доведіть, що $\triangle AMB = \triangle CDB$. **2.33.** 60°, 60°, 60°. *Вказівка.* На промені AD позначте точку K так, щоб $AK = AB$. Доведіть, що $\triangle BKD = \triangle BAC$. **2.34.** *Вказівка.* На сторонах AB і CB відповідно позначте точки F і K так, щоб $DF \parallel BC$ і $CK = AD$. Доведіть, що $\triangle FAD = \triangle DKC$. Далі покажіть, що трикутник BDK рівнобедрений. **3.2.** 50°, 55°, 75°. **3.7.** Коло даного радіуса з центром у даній точці. **3.8.** Дві прямі, які складаються з бісектрис чотирьох кутів, утворених при перетині даних прямих. **3.9.** Пара паралельних прямих, кожна з яких віддалена від даної прямої на дану відстань. **3.10.** Усі точки площини, за винятком даної прямої. **3.11.** *Вказівка.* Розглянувши трикутник OAK, доведіть, що $OK = 2AK$. **3.12.** *Вказівка.* Скористайтеся властивістю відрізків дотичних, проведених до кола через одну точку. **3.16.** 30°, 60°. **3.17.** 45°, 45°.

3.22. *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, один з катетів якого дорівнює різниці даного катета і радіуса вписаного кола, а другий — радіусу. Тоді кут, протилежний другому катету, дорівнює половині гострого кута шуканого трикутника. **3.24.** *Вказівка.* Побудуйте коло, що проходить через три дані точки. **3.25.** *Вказівка.* Геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до даної прямої в даній точці B, є пряма, перпендикулярна до даної і така, що проходить через цю точку (дана точка B не належить ГМТ). Геометричним місцем центрів кіл, що проходять через точки A і B, є серединний перпендикуляр відрізка AB. **3.27.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням ключової задачі 3.13. **3.29.** Усі точки півплощини, якій належить точка B і межею якої є серединний перпендикуляр відрізка AB, за винятком межі цієї півплощини. **3.30.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що бісектриси трикутника, зокрема трикутника AMC, перетинаються в одній точці. **3.31.** *Вказівка.* Позначте на різних сторонах кута точки M і N. Проведіть бісектриси кутів BMN і BNM. Далі позначте на різних сторонах кута точки E і F. Проведіть бісектриси кутів BEF і BFE. **3.32.** 36°, 36°, 108°. **3.33.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник BCD, у якому катет BC дорівнює даному катету, а катет DC — сумі гіпотенузи і другого катета. Тоді вершина A шуканого трикутника ABC належить серединному перпендикуляру відрізка BD. **3.34.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADB, у якому $\angle D = 135°$, сторона DB дорівнює різниці даних катетів, а сторона AB — даній гіпотенузі. **3.35.** *Вказівка.* Побудуйте ΔADC, у якому сторона AC дорівнює даній стороні, сторона DC — сумі двох інших сторін, кут DCA — даному куту. **3.36.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC, у якому $\angle D = 90° + \frac{\beta}{2}$, де β — даний кут, сторона AC дорівнює даній стороні, сторона AD — даній різниці двох інших сторін. Тоді шукана вершина D лежить на серединному перпендикулярі відрізка DC. **3.38.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник BDM, у якому гіпотенуза BM дорівнює даній медіані, катет BD — даній висоті. Тоді центр описаного кола шуканого трикут-

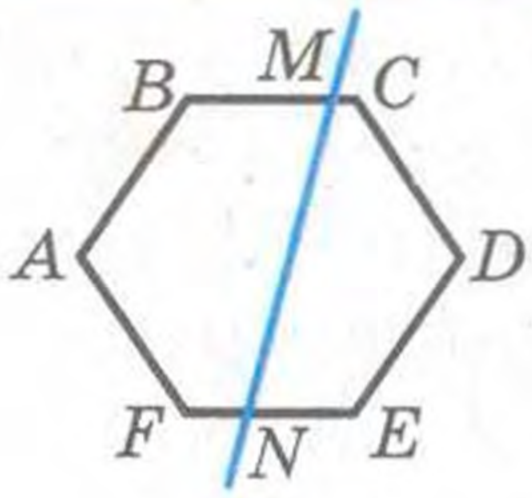


Рис. до задачі 4.15

ника лежить на прямій, перпендикулярній до відрізка DM, яка проходить через точку M. **3.39.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ABD, у якому сторони AB і AD дорівнюють двом даним сторонам, а сторона BD у два рази більша за дану медіану. **3.40.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники ACM і BCK рівнобедрені. **3.41.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням ключової задачі 3.13. **4.10.** 1) 72°, 130°, 78°, 80°; 2) 22°, 230°, 28°, 80°. **4.12.** 10 см. **4.14.** П'ятикутник. **4.15.** *Вказівка.* Нехай $ABCDEF$ — шестикутник, кожний з кутів якого дорівнює 120°. Якщо провести січну MN (див. рис. до задачі 4.15), то сума кутів п'ятикутника $ABMNF$ дорівнюватиме 540°. Тоді сума кутів BMN і FNM дорівнює 180°. **4.18.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник за двома сусідніми сторонами чотирикутника і відомим кутом між ними. Третя сторона цього трикутника є діагоналлю шуканого чотирикутника. **4.21.** 7. *Вказівка.* Доведіть, що даний зовнішній кут дорівнює 90°. **4.22.** Ні. *Вказівка.* $180° (17 - 2) > 14 \cdot 180°$. **4.25.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ABC за двома сторонами AB і BC та кутом B між ними. У трикутнику ACD відомі сторона AC, прилеглий кут CAD ($\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$) і сума сторін AD і CD. Побудуйте трикутник ADC за стороною, прилеглим кутом і сумою двох інших його сторін. **4.26.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta AKC = \Delta BKD$. **4.27.** 180°. **4.28.** *Вказівка.* Нехай K — точка перетину прямих BC і AD. Доведіть, що відрізок MN належить бісектрисі кута AKB. Окремо розгляньте випадок, коли $BC \parallel AD$. **4.29.** *Вказівка.* Через довільну точку площини проведіть 19 прямих, кожна з яких паралельна одній із сторін 19-кутника. Доведіть, що знайдуться дві прямі, які збігаються. **4.30.** 6. *Вказівка.* Кожний зовнішній кут многокутника дорівнює 60° або 120°. **4.31.** *Вказівка.* Будь-який трикутник можна розрізати на 6 рівнобедрених трикутників (див. рис. до задачі 4.31). **4.32.** *Вказівка.* Якщо розрізати чотирикутник по діа-

Рис. до задачі 4.31

гоналі BD і, перегорнувши трикутник BCD, знов «прикласти» його до діагоналі BD, то отримаємо рівнобедрений трикутник. **4.33.** Не більше двох. *Вказівка.* Якщо дві несусідні сторони AB і CD дорівнюють найбільшій діагоналі, то $AB + CD \geqslant AC + BD$, що суперечить твердженню задачі 4.23. **5.8.** Прямокутний. **5.11.** 45°, 135°. **5.12.** 48°, 132°. **5.13.** 6 см, 12 см. **5.15.** 9 см, 14 см. **5.17.** 6 см. **5.18.** 32 см. **5.21.** 80 см. **5.22.** 9 см, 24 см. **5.23.** 6 см. **5.26.** 36°, 144°. **5.27.** 40 см. **5.28.** 5 см, 9 см. **5.30.** 25 см. **5.31.** 3. **5.32.** 2 : 1. **5.33.** 72°, 108°. **5.34.** 8 см, 12 см або 5 см, 15 см. **5.37.** 60°, 120°. **5.38.** *Вказівка.* Доведіть, що проведені прямі містять висоти трикутника ABD. **5.40.** *Вказівка.* Доведіть, що проведені прямі містять висоти трикутника $A_1B_1C_1$. **5.41.** *Вказівка.* Доведіть, що точка J — ортоцентр трикутника AMC. **5.43.** *Вказівка.* Побудуйте паралелограм, одна вершина якого збігається з вершиною даного кута, дві інші вершини лежать на сторонах кута, а точка перетину діагоналей паралелограма збігається з даною точкою. **5.45.** *Вказівка.* Проведіть бісектрису BD трикутника ABC. Через точку D проведіть пряму, паралельну стороні AB. **5.46.** *Вказівка.* Побудуйте паралелограм, сусідніми сторонами якого будуть відрізки AC і AB. **5.47.** *Вказівка.* Вершини B і C лежать на серединних перпендикулярах відрізків MN і NK відповідно. Далі скористайтеся результатом задачі 5.43. **5.48.** *Вказівка.* Доведіть, що діагоналі чотирикутника містять висоти трикутників, вершинами яких є дві сусідні вершини паралелограма і точка перетину його діагоналей. **5.49.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням ключової задачі 2.3 і теоремою 5.4. **6.18.** 120°. *Вказівка.* На продовженні медіани BM за точку M позначте точку D таку, що $BM = MD$ (див. рис. до задачі 6.18). У трикутнику BDC $\angle BDC = 30°$. **6.19.** *Вказівка.* Скористайтеся результатом ключової задачі 6.9. **6.21.** *Вказівка.* На продовженні медіани AM за точку M відкладіть відрізок MD, який дорівнює цій медіані, і розгляньте $\triangle ABD$. **6.25.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює подвоєній

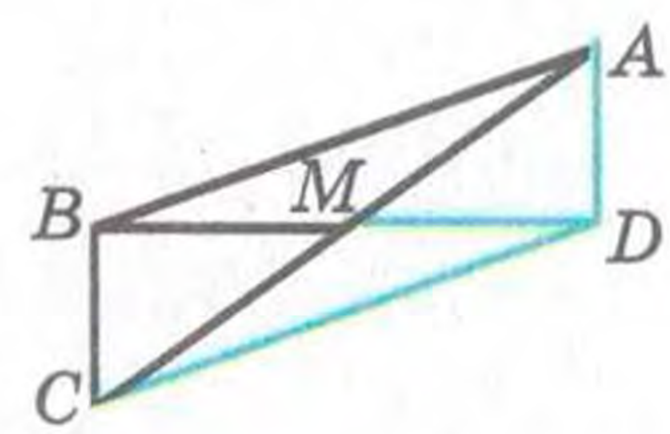


Рис. до задачі 6.18

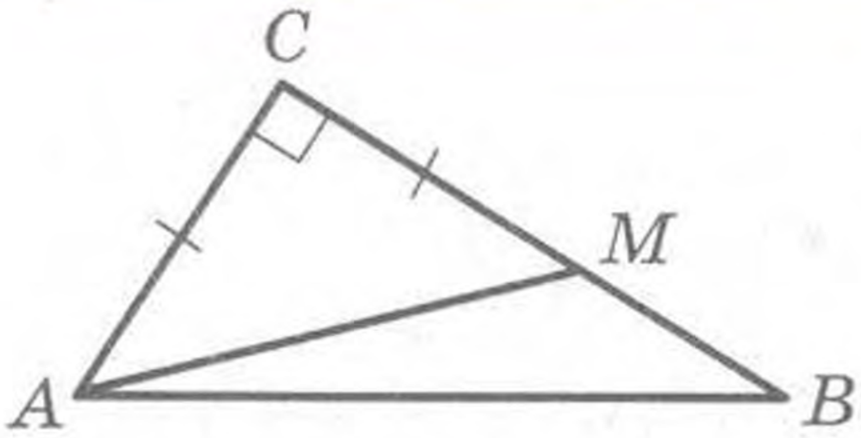


Рис. до задачі 8.46

даній медіані, а катет — даній висоті. **8.3.** 6 см, 12 см. **8.4.** 15 см, 25 см. **8.5.** 12 см. **8.30.** 28 см. **8.33.** 48 см. **8.36.** 6 см. **8.37.** 4,5 см. **8.39.** *Вказівка*. Доведіть, що $AC \perp MK$. **8.40.** *Вказівка*. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою MK. **8.41.** 75°. **8.42.** *Вказівка*. Нехай точка F — середина сторони AB. Побудуйте трикутник FMK. **8.44.** 30°, 60°. *Вказівка*. Покажіть, що в прямокутному трикутнику ABM гіпотенуза AM у 2 рази більша за катет BM. **8.45.** 60°. **8.46.** 1) *Вказівка*. Задача зводиться до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою та різницею катетів. На рисунку до задачі 8.46 зображено прямокутний трикутник ACB, у якому відомі гіпотенуза AB і різниця катетів. На катеті BC позначено точку M так, що $CM = AC$, $BM = BC - AC$. Звідси $\angle AMB = 135°$. Отже, можна побудувати трикутник AMB за сторонами AB і MB та кутом AMB. **8.48.** *Вказівка*. Побудуйте два прямокутних трикутники, у кожному з яких один катет дорівнює стороні квадрата, а гіпотенузи є даними відрізками. Доведіть рівність цих трикутників. **8.52.** 60°, 120°. *Вказівка*. Нехай точки M і N — середини сторін BC і AD відповідно. Доведіть, що чотирикутник $ABMN$ — ромб. **8.53.** *Вказівка*. З'єднайте середину сторони AB з точкою D. **8.54.** *Вказівка*. Доведіть, що бісектриса кута ABD паралельна бісектрисі DM. Далі скористайтеся твердженням ключової задачі 2.4. **8.55.** *Вказівка*. Доведіть, що точка N належить серединному перпендикуляру відрізка OC, де точка O — середина відрізка AC. **8.56.** *Вказівка*. Побудуйте рівносторонній трикутник BO_1C так, щоб точка O_1 належала квадрату. Покажіть, що $\angle O_1AD = \angle O_1DA = 15°$. Звідси випливає, що точки O і O_1 збігаються. **8.57.** *Вказівка*. Побудуйте прямокутник $BFMC$, який дорівнює прямокутнику $ABCD$ (див. рис. до задачі 8.57). Нехай точка K належить стороні FM і $FK = AN$. Тоді $\angle DBK = \angle ANB + \angle ADB$. До-

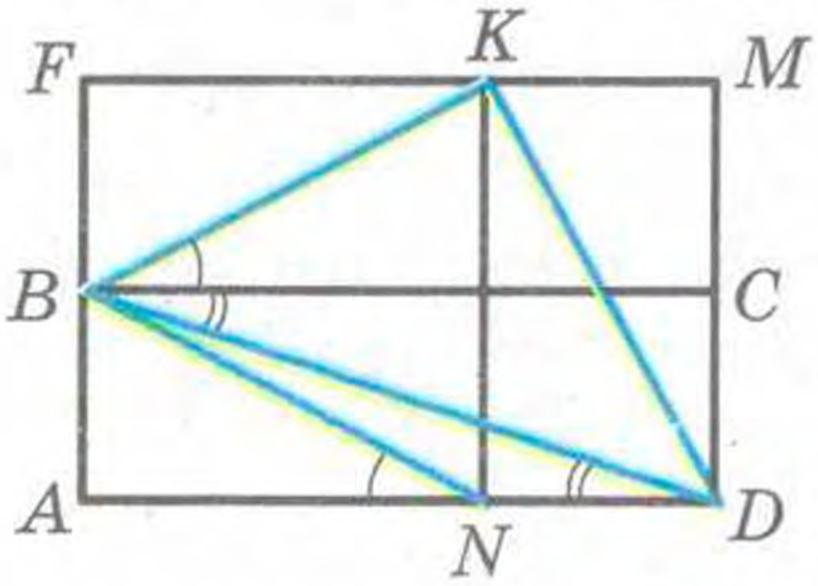


Рис. до задачі 8.57

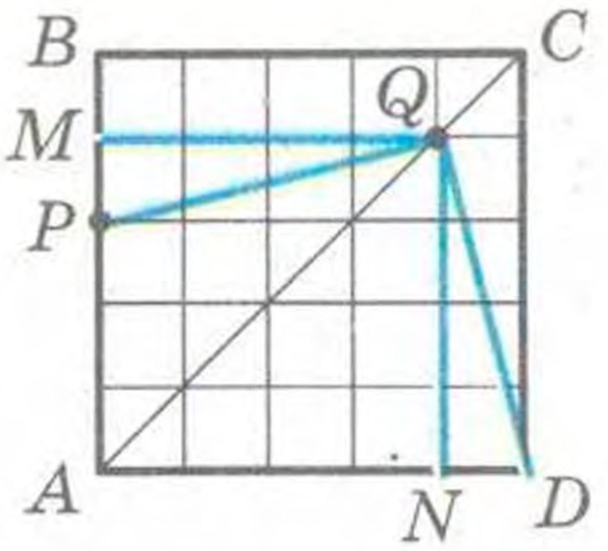


Рис. до задачі 8.58

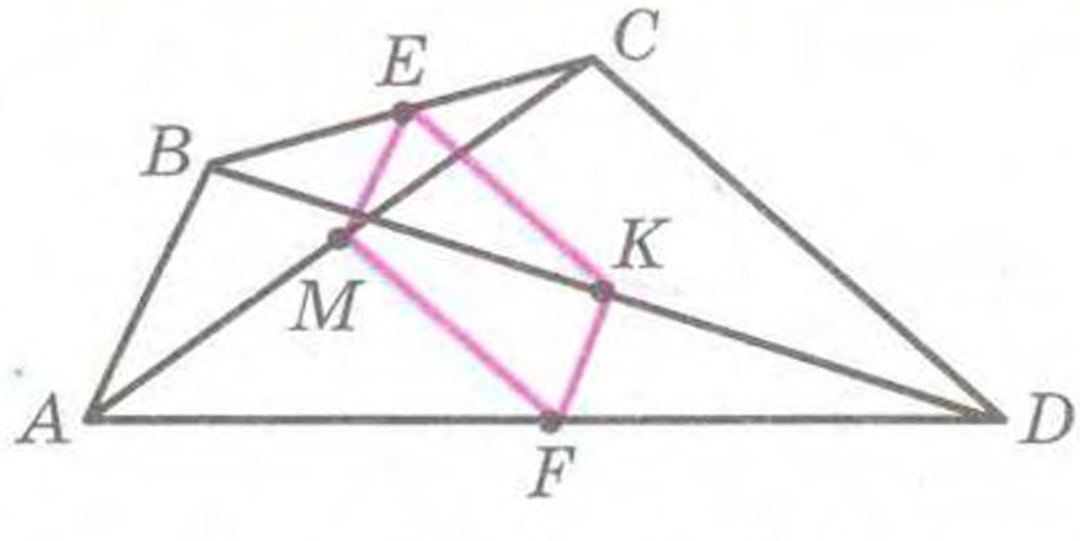


Рис. до задачі 9.18

ведіть, що $BK = KD$ і $BK \perp KD$. **8.58.** 45°, 45°, 90°. *Вказівка*. Розбийте квадрат $ABCD$ на 25 квадратів, як показано на рисунку до задачі 8.58. Скористайтеся тим, що $\triangle PMQ = \triangle DNQ$. **9.14.** $MK = 4$ см. *Вказівка*. Проведіть середню лінію трикутника ABC. **9.15.** 9 см. *Вказівка*. Розгляньте трикутник, для якого відрізок MK є середньою лінією. **9.18.** *Вказівка*. Доведіть, що чотирикутник $EKFM$ — паралелограм (див. рис. до задачі 9.18). **9.20.** *Вказівка*. З'єднайте точку M із серединою відрізка AH. **9.21.** $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 90°$. **9.23.** *Вказівка*. Розгляньте ламану $DMKE$, де точки M і K — відповідно середини сторін AB і BC. **9.24.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що бісектриса кута, перпендикулярна до відрізка, кінці якого лежать на сторонах кута, ділить цей відрізок навпіл. Усі зазначені точки лежать на прямій, яка містить середню лінію трикутника ABC, паралельну стороні BC. **9.26.** *Вказівка*. Доведіть, що відрізок MN перетинає діагональ AC в її середині. **9.28.** *Вказівка*. Доведіть, що середини сторін чотирикутника $ABMC$ є вершинами ромба. **9.29.** *Вказівка*. На промені BD позначте точку F так, щоб $DF = DB$. Точка C лежить на прямій, яка проходить через точку F паралельно хорді AD. **9.30.** *Вказівка*. Нехай точки M, K і F — середини відрізків AB, AD і AC відповідно. Визначте, яким прямим належать висоти трикутника MKF. **9.31.** *Вказівка*. Нехай точки E, F і K — середини відрізків AC, BC і BD відповідно. Доведіть, що $\triangle EFK$ — рівнобедрений. **9.32.** *Вказівка*. Доведіть, що середини сторін даного чотирикутника є вершинами ромба. **9.33.** $\frac{\alpha}{2}$. *Вказівка*. Проведіть середню лінію DK трикутника ABC. Доведіть, що $\triangle EDK$ — рівнобедрений. **10.6.** 16 см, 34 см. **10.8.** 16 см. **10.9.** 50°, 60°. **10.15.** 7,2 см, 10,8 см.

10.17. $2h$. **10.18.** 8 см, 20 см, 20 см, 20 см. **10.19.** 12 см, 12 см, 12 см. **10.20.** 60°, 120°. **10.21.** 8 см, 16 см. **10.22.** 60°, 120°. **10.23.** Якщо гострий кут трапеції дорівнює 45°. **10.29.** $\frac{3a}{4}$. **10.30.** 72°, 108°. **10.31.** 8 см. **10.32.** *Вказівка.* Через одну з вершин меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні трапеції. **10.36.** 1) *Вказівка.* Через одну з вершин меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні трапеції. Задача зводиться до побудови трикутника за трьома сторонами. **10.38.** *Вказівка.* Через середину меншої основи трапеції проведіть відрізки, паралельні бічним сторонам. **10.39.** 8 см, 2 см. **10.40.** 90°. *Вказівка.* Виберіть на основі AD точку M таку, що $CM \parallel AB$. **10.41.** 3 см. *Вказівка.* Через вершину B проведіть пряму, паралельну діагоналі AC. **10.42.** *Вказівка.* На продовженні відрізка AD за точку D відкладіть відрізок DE, який дорівнює основі BC. **10.43.** Так. *Вказівка.* Проведіть через точку M прямі, паралельні сторонам трикутника, і розгляньте діагоналі рівнобічних трапецій, які утворилися. **10.44.** *Вказівка.* З точки C опустіть перпендикуляр CB_1 на сторону кута, яка містить точку B. Проведіть середню лінію трапеції $BDCB_1$. **11.17.** 120°, 30°. **11.18.** 10°. **11.19.** 40°, 40°, 100°. **11.20.** 120°, 20°, 40°. **11.22.** 56°, 56°, 68°. **11.27.** 60°, 120°. *Вказівка.* Доведіть, що даний паралелограм є ромбом. **11.37.** *Вказівка.* Продовжте бісектрису BK до перетину з описаним колом трикутника ABC. Далі скористайтеся твердженням ключової задачі 11.36. **11.38.** 22,5°, 67,5°, 90°. **11.40.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням ключової задачі 11.36. **11.42.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням ключової задачі 11.36. **11.44.** *Вказівка.* Побудуйте висоти трикутника ABC, проведені з вершин A і B. **11.45.** *Вказівка.* Скористайтеся результатом ключової задачі п. 11. **11.47.** *Вказівка.* Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, точка M — середина сторони AD (див. рис. до задачі 11.47). Тоді $OM = \frac{1}{2} AB$. Трикутник AOD можна побудувати (див. зада-

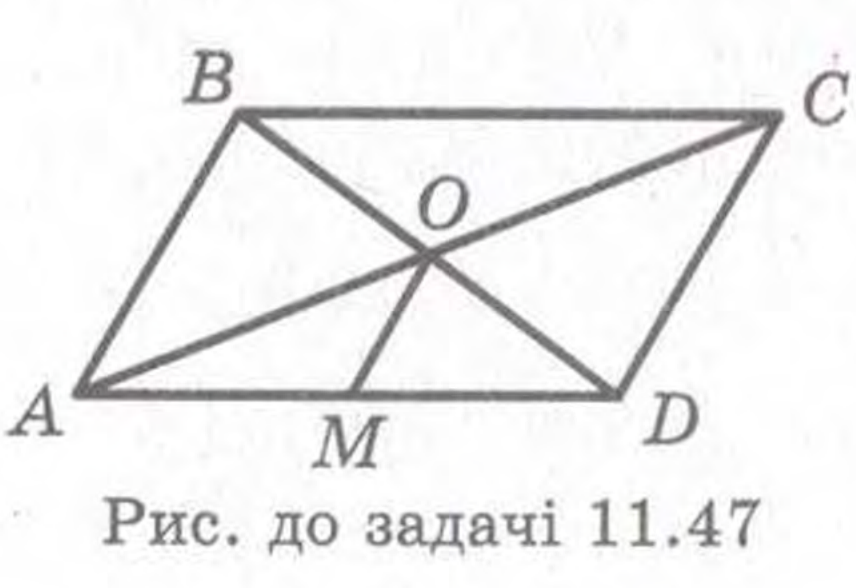


Рис. до задачі 11.47

чу 11.46). **11.49.** Шукане ГМТ складається з двох півкіл і чотирьох променів (див. рис. до задачі 11.49), точки A і B йому не належать. **11.50.** 165°. *Вказівка*. Доведіть, що $\angle ACB = 150°$. Далі скористайтеся твердженням ключової задачі 2.4. **11.51.** 45°. *Вказівка*. Доведіть, що $\angle C_1AB + \angle B_1AC = \angle BAC$. **11.52.** 60°. **11.53.** *Вказівка*. Доведіть, що точки H, O, J належать ГМТ, з яких відрізок BC видно під кутом 120°. **11.54.** *Вказівка*. Одне й те саме коло є описаним для всіх указаних трикутників. Центр цього кола може бути внутрішньою точкою лише одного з цих трикутників. **11.55.** 90°. *Вказівка*. Доведіть, що $\triangle ACE = \triangle BDE$. **11.56.** *Вказівка*. Побудуйте коло з центром у точці O_1 і радіусом, який дорівнює різниці радіусів даних кіл. Проведіть через точку O_2 дотичну до побудованого кола. **11.57.** *Вказівка*. Нехай точка O — центр вписаного кола трикутника ABC, у якому відомі кут B і сторона AC. Тоді $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$. У трикутнику AOC відомі сторона AC, кут AOC і висота, проведена з вершини O (радіус вписаного кола). Далі див. задачу 11.45. **11.58.** *Вказівка*. На рисунку до задачі 11.58 зображено трикутник ABC, у якому відомі сторона AC, кут B і медіана, проведена до сторони BC. Проведемо середню лінію MN трикутника ABC. Маємо: $\angle NMC = \angle B$. Будуємо геометричне місце точок X таких, що $\angle NXC = \angle B$. **11.59.** *Вказівка*. Доведіть, що $\angle AOD = \angle ACD = 2\angle ABD$. **11.60.** *Вказівка*. Нехай M_1, M_2, M_3, M_4 — дані точки. На відрізках M_1M_2 і M_3M_4 як на діаметрах побудуйте кола. Цим колам належать дві протилежні вершини квадрата. Діагональ квадрата ділить дуги цих кіл навпіл. **12.3.** 60°. **12.4.** 35°. **12.10.** 2α. **12.12.** $180° - \alpha$. **12.14.** α. **12.16.** Точка дотику. *Вказівка*. Скористайтеся твердженням ключової задачі 3 п. 12. **12.19.** *Вказівка*. Доведіть, що $\angle NAC = \angle ABC$. Далі скористайтеся твердженням, оберненим до ключової задачі 1 п. 12. **12.20.** *Вказівка*.

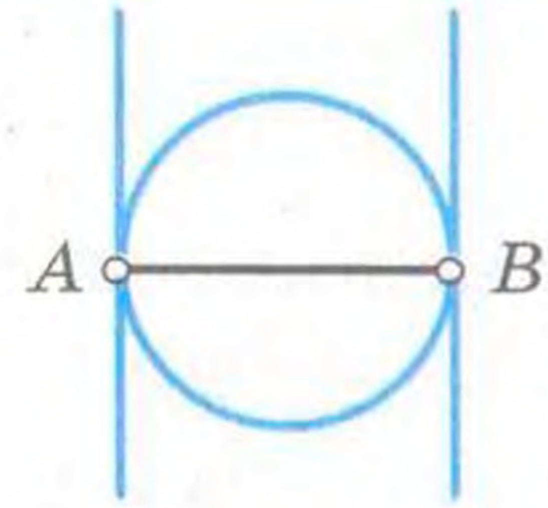


Рис. до задачі 11.49

Рис. до задачі 11.58

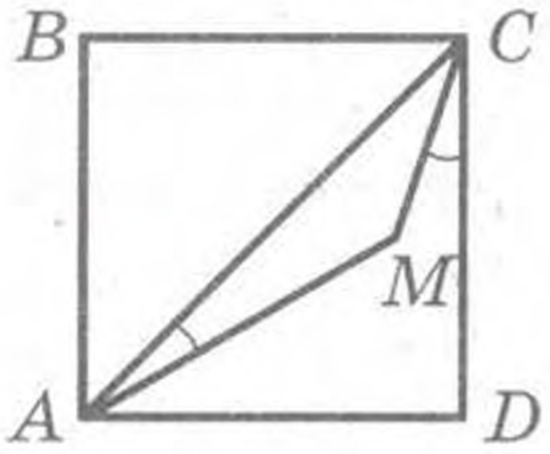


Рис. до задачі 12.29

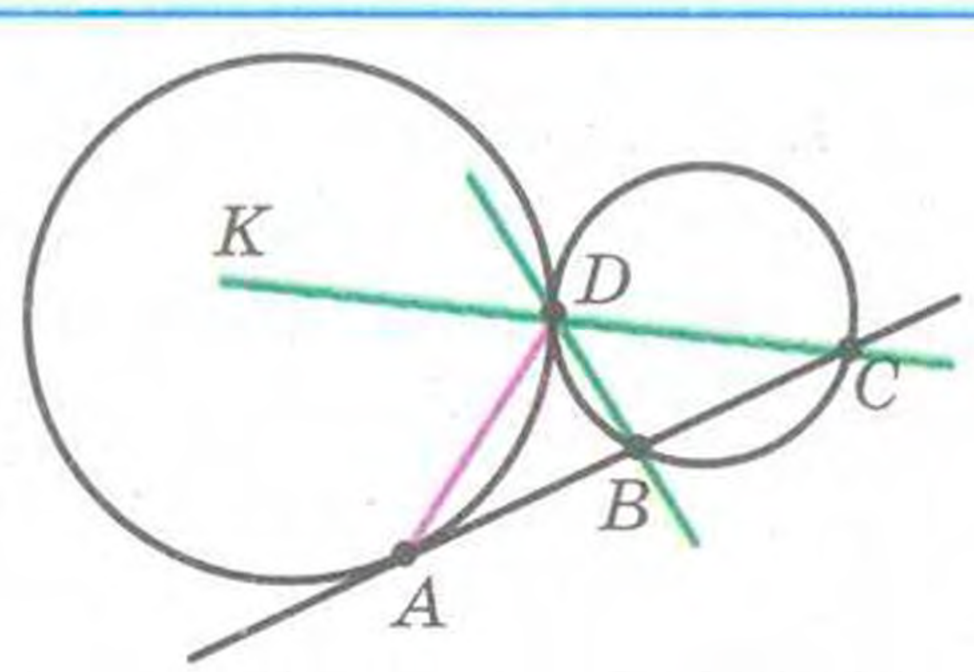


Рис. до задачі 12.31

Доведіть, що $\angle KMC = \frac{1}{2}\angle CAB$. **12.21.** *Вказівка.* Доведіть, що $\angle PAO = \angle ADB$. **12.22.** 30°. *Вказівка.* Знайдіть кут AEC, а далі скористайтеся твердженням ключової задачі 4 п. 12. **12.23.** 80°, 70°. *Вказівка.* Скористайтеся твердженням ключової задачі 5 п. 12. **12.24.** 160°. **12.25.** 20°. *Вказівка.* Точки A, B, C лежать на колі з центром у точці K. **12.26.** 5 см. **12.27.** *Вказівка.* Доведіть, що точка M — центр кола, якому належать точки A, B, O і H. **12.28.** *Вказівка.* Доведіть, що точка A лежить на колі з центром у точці O радіуса OC. Для цього покажіть, що $\angle COD = 2\angle BAC$. **12.29.** $90° - 2\alpha$. *Вказівка.* Покажіть, що $\angle AMC = 135°$ (див. рис. до задачі 12.29). Тоді точки A, M, C лежать на колі з центром у точці B. **12.31.** *Вказівка.* Доведіть, що DA — бісектриса кута BDK (див. рис. до задачі 12.31). Для цього проведіть через точку D дотичну до даних кіл. **12.32.** 70°. *Вказівка.* На стороні BC у зовнішній бік побудуйте рівносторонній трикутник BKC. Доведіть, що точки B, D і C належать колу з центром у точці K і радіусом, рівним стороні KB. **12.33.** *Вказівка.* Нехай відрізки AK і BK перетинають коло меншого радіуса в точках F і E відповідно. Доведіть, що $FE \parallel AB$. Для цього проведіть через точку K спільну дотичну до двох даних кіл. **13.6.** 88°, 74°, 92°, 106°. **13.7.** 62°, 118°. **13.10.** 60°, 120°. **13.14.** Коло з діаметром AB, за винятком точки A. **13.15.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням ключової задачі 13.8.2. **13.16.** 15°. *Вказівка.* Доведіть, що точки A, M, J, C лежать на одному колі. **13.17.** *Вказівка.* Виразіть кути PNC і POC через кут A. **13.20.** *Вказівка.* Навколо чотирикутників $ABKH$ і $HKCP$ можна описати кола. **13.21.** *Вказівка.* Скористайтеся результатом задачі 13.8. **13.23.** $\frac{d}{2}$.

Вказівка. Доведіть, що кут між діагоналлю і основою трапеції дорівнює 60°. Далі скористайтеся твердженням ключової задачі п. 10. **13.24.** *Вказівка*. Скористайтеся твердженням задачі 13.8. **13.25.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що навколо чотирикутників $AMBP$ і $PBNC$ можна описати кола. **13.26.** *Вказівка*. Чотирикутники $KBMC$ і $LDMC$ — вписані. **13.27.** *Вказівка*. $\angle APQ = \angle AMQ$. **13.28.** *Вказівка*. На стороні CB позначте точку C_1 таку, що $C_1A = C_1B$. Доведіть, що чотирикутник ACC_1D — вписаний. **13.29.** *Вказівка*. Доведіть, що точка H належить колу, описаному навколо чотирикутника $OMBN$. **13.30.** *Вказівка*. На відрізках AB і CH як на діаметрах побудуйте кола. Покажіть, що ці кола перетинаються в точках A_1 і B_1. **13.31.** 40°. *Вказівка*. Доведіть, що точка перетину відрізків AF і CD — центр описаного кола трикутника ABC. **13.32.** *Вказівка*. Доведіть, що навколо чотирикутника $AMOK$ можна описати коло, і скористайтеся тим, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. **13.33.** 60°. *Вказівка*. Позначивши $\angle N = \alpha$, виразіть через α кут AOB. **13.34.** *Вказівка*. Доведіть, що навколо чотирикутника $ACBO$ можна описати коло. **13.35.** *Вказівка*. Доведіть, що кут CPB не змінює свою величину. **13.36.** *Вказівка*. На основі BC позначте таку точку K, що $BK = BD$. Доведіть, що навколо чотирикутника $ABKD$ можна описати коло. **13.37.** 90°. *Вказівка*. Нехай точка N — середина відрізка AD. Доведіть, що точка M лежить на колі, описаному навколо прямокутника $ABKN$. Цю задачу можна розв'язати також способом, описаним у розв'язанні задачі 8.58. **13.38.** 90°. *Вказівка*. Нехай перпендикуляр BH перетинає сторону AD у точці N. Доведіть, що чотирикутник $NQCD$ — прямокутник. Покажіть, що точка H лежить на колі, описаному навколо цього прямокутника. **13.39.** *Вказівка*. На промені BM позначте точку D так, що $BM = MD$. Доведіть, що точки C, K, A і D лежать на одному колі. **14.6.** 90°. **14.7.** 6 см. **14.9.** 196 см. **14.10.** 6 см. **14.11.** *Вказівка*. Нехай спільна дотична, яка проходить через точку дотику кіл, перетинає відрізки AB і CD у точках M і N відповідно. Доведіть, що MN — середня лінія трапеції $ABCD$. **14.16.** *Вказівка*. Доведіть, що $\cup MN + \cup QP =$

= 180°. **14.19.** *Вказівка.* Доведіть, що умова рівносильна твердженню, що точки дотику є вершинами прямокутника або рівнобічної трапеції. **14.20.** *Вказівка.* Проведіть середню лінію DE трикутника ABC. Доведіть, що DE дотикається до кола, вписаного в трикутник ABC. **14.21.** *Вказівка.* Скориставшись твердженням задачі 14.17, знайдіть точку F, у якій коло, вписане в трикутник ADC, дотикається до сторони AC. Центр вписаного кола трикутника ADC лежить на прямій, яка перпендикулярна до сторони AC і проходить через точку F та одночасно належить ГМТ, з яких відрізок AC видно під кутом, що дорівнює $180° - \frac{1}{2}\angle B$. **15.6.** 12 см. **15.7.** 4 см. **15.8.** 6 см, 45°. **15.10.** 20 см, 24 см. **15.12.** 8 см, 12 см. **15.15.** 6 см, 5 см, 6 см. **15.16.** *Вказівка.* Точка перетину бісектрис є вершиною прямокутного трикутника, гіпотенузою якого є бічна сторона трапеції. Розгляньте медіану цього трикутника, проведену до гіпотенузи, і доведіть, що вона паралельна основам трапеції. **15.17.** 7 : 9. **15.18.** 3 : 5. **15.19.** 3 : 5. *Вказівка.* Проведіть через точку K пряму, паралельну прямій AM. **15.20.** 1) 3 : 7. *Вказівка.* Через точку M проведіть пряму, паралельну прямій BK; 2) 2 : 3. *Вказівка.* Проведіть через точку K пряму, паралельну прямій CM. **15.21.** 3 : 8. **15.23.** 2) *Вказівка.* Нехай ABC — даний кут. Проведіть $OK \parallel BC$ (точка K належить стороні AB). На промені KA позначте таку точку M, що $MK : KB = 2 : 3$. **15.24.** 1 см. **15.26.** 3 см. **15.27.** 108°. *Вказівка.* Через точку C_1 проведіть пряму C_1D, паралельну бісектрисі AA_1 (точка D лежить на стороні CB). Доведіть, що $\triangle C_1CD$ — рівнобедрений. **15.28.** 4 : 1. **15.29.** $a + b$. *Вказівка.* Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма. Проведіть перпендикуляри AM, OK і CE до прямої, яка проходить через точку B, і покажіть, що $OK = \frac{a+b}{2}$. **15.30.** *Вказівка.* Проведіть серединний перпендикуляр хорди C_1A_1 кола, описаного навколо чотирикутника AC_1A_1C. **15.31.** *Вказівка.* З центра O кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$, опустіть перпендикуляр на діагональ AC. **16.5.** 21 см, 15 см. **16.6.** 45 см, 18 см. **16.7.** 30 см, 50 см. **16.11.** 45 см.

16.13. 9 см. **16.14.** 50 см. **16.15.** 3 : 2. **16.18.** 3) *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник BDK, у якого катет BD дорівнює даній висоті, а гіпотенуза BK — даній медіані. За заданим кутом і кутом BKD знайдіть кут між двома медіанами трикутника. **16.19.** 2) *Вказівка.* Нехай ABC — шуканий трикутник, медіани AA_1 і CC_1 якого перетинаються в точці M. Трикутник AMC можна побудувати за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони. **16.20.** *Вказівка.* Точки P і Q — точки перетину медіан трикутників ABC і ACD відповідно. Нехай точка O — середина діагоналі AC. Доведіть, що точки B, P, O, Q і D лежать на одній прямій. **16.22.** 1 : 12. *Вказівка.* Нехай хорда AP перетинає сторону BC у точці F. Знайдіть відношення $BF : FC$. **16.24.** *Вказівка.* Вершина трикутника належить ГМТ, з яких одну з медіан видно під даним кутом. **17.14.** 6 см. **17.15.** 9 см. **17.16.** 40 см, 60 см. **17.18.** 36 см. **17.19.** 8 см. **17.20.** 4,8 см. *Вказівка.* Через вершину A проведіть пряму, паралельну бісектрисі BD. **17.21.** $\frac{2ab}{a+b}$. **17.22.** *Вказівка.* Нехай ABC — шуканий трикутник (див. рис. до задачі 17.22), AB і BC — дані сторони, BK — дана бісектриса. На продовженні сторони AB за точку B відкладемо відрізок BF, рівний BC. Доведіть, що $BK \parallel FC$. З подібності трикутників ABK і AFC випливає, що $\frac{FC}{BK} = \frac{AF}{AB}$. Побудуйте відрізок FC (див. задачу 15.22). Трикутник FBC можна побудувати за трьома сторонами. **18.8.** 30 см, 6 см. **18.9.** 10,5 см, 13,5 см. **18.15.** 42 см. **18.16.** 10 см, 14 см. **18.17.** 12,5 см, 3,5 см. **18.19.** 12 м. **18.20.** 33 м. **18.23.** 24 см. **18.24.** 16 см. **18.26.** 16 см. **18.27.** 5 см. **18.28.** 10 см. **18.29.** 27 см. **18.30.** 2) 36 см. **18.32.** 10 см. **18.33.** 6 см. **18.34.** 10 см. **18.35.** $\frac{ah}{a+h}$. **18.36.** 27 см, 15 см. **18.37.** $MK = \frac{4}{5}$ см, $AM = \frac{2}{5}$ см. *Вказівка.* Доведіть, що $\angle AKM = \angle MCB$. **18.38.** *Вказівка.* Доведіть, що $\angle CDA = \angle CBD$ і $\angle CDB = \angle CAD$. **18.39.** $\sqrt{2}$ см.

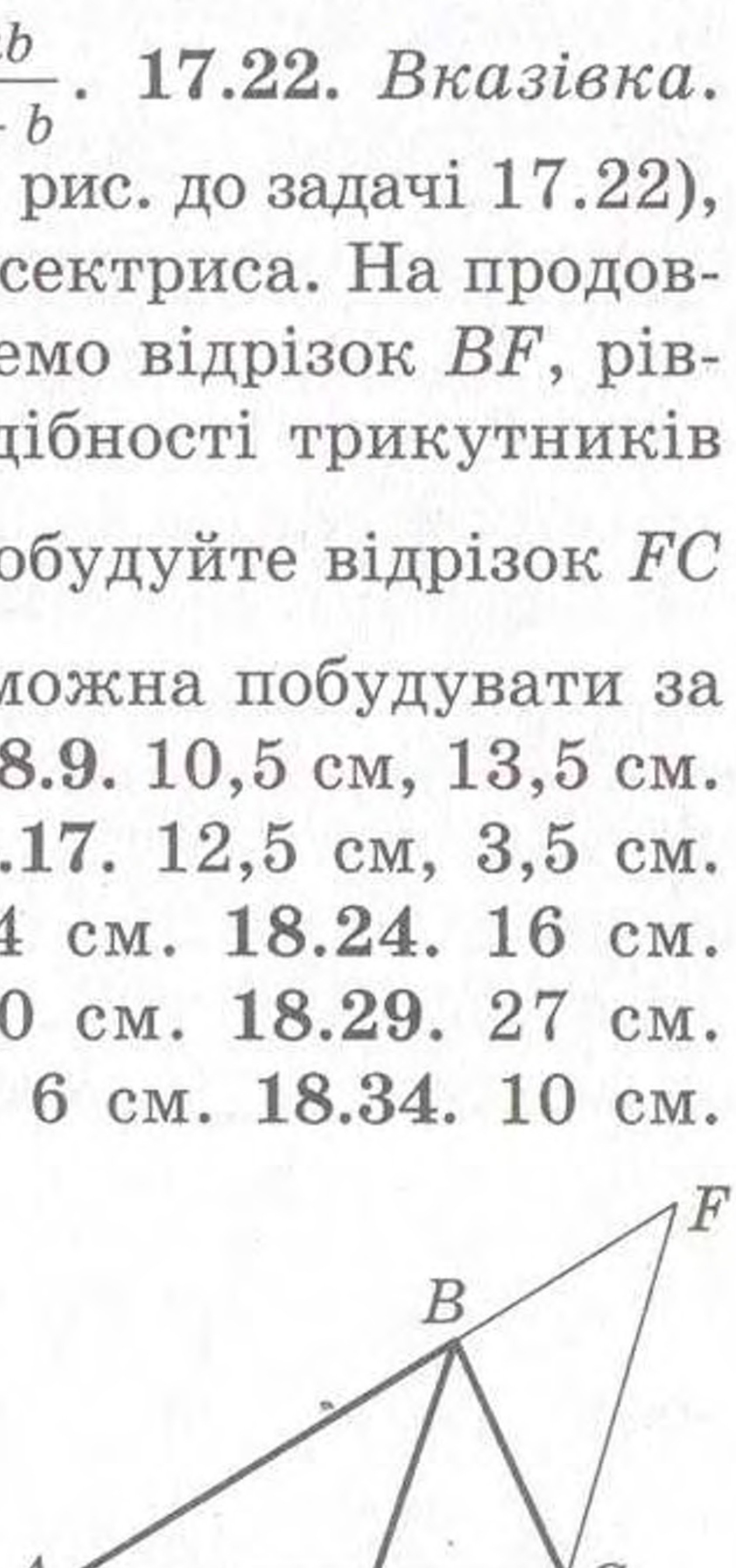


Рис. до задачі 17.22

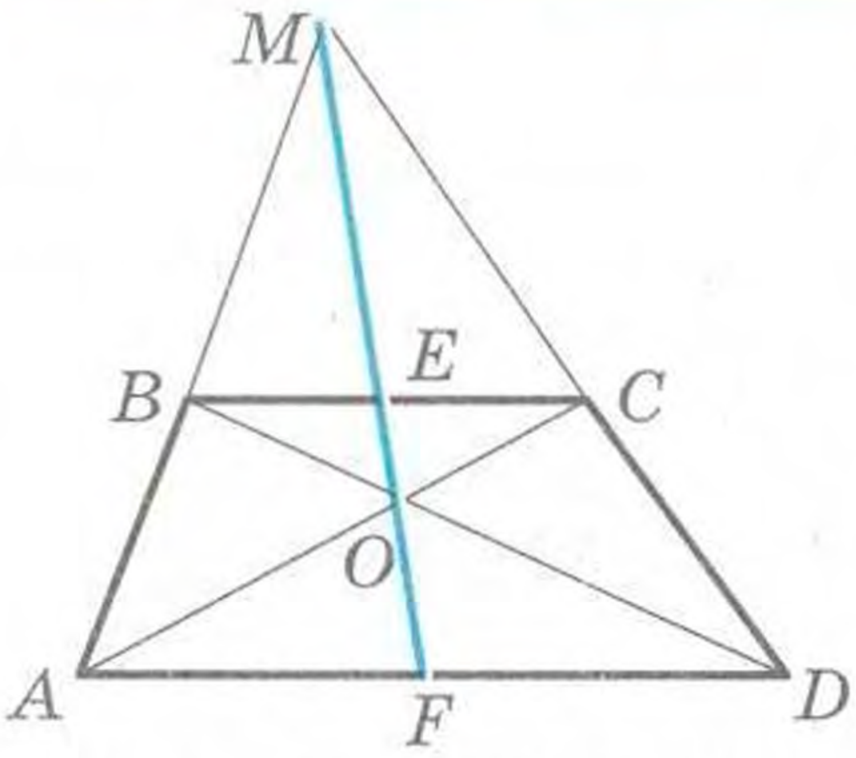


Рис. до задачі 18.46

Вказівка. Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle MAC$. **18.40.** 30 см, 33 см. **18.41.** 42 см, 66 см. **18.42.** *Вказівка*. Продовжте висоти до перетину з описаним колом. Скористайтеся твердженням ключової задачі 11.30. **18.43.** 6 см. *Вказівка*. Перемножте рівності, задані в умові задачі. **18.45.** *Вказівка*. Доведіть, що $CO \cdot CA = BO \cdot BD$. **18.46.** *Вказівка*. Нехай пряма MO перетинає основи трапеції в точках E і F (див. рис. до задачі 18.46). Доведіть, що $\frac{BE}{AF} = \frac{EC}{FD}$ і $\frac{BE}{FD} = \frac{EC}{AF}$. **18.47.** *Вказівка*. Скористайтеся твердженням задачі 18.46. **18.49.** *Вказівка*. Доведіть, що $\triangle CBM \backsim \triangle NCB$. **18.50.** *Вказівка*. Можна записати, що $KF \cdot FT = PF \cdot FM$, $FE \cdot DF = PF \cdot FM$. Скористайтеся тим, що $DK = KE = ET$. **18.51.** *Вказівка*. Застосуйте теорему Птолемея до чотирикутника $ACDB$. Скористайтеся тим, що $DC = DB > \frac{1}{2}BC$. **18.53.** *Вказівка*. Застосуйте теорему Птолемея до чотирикутника $ACDE$.

19.1. $\frac{CF}{FC_1} = 4$, $\frac{AF}{FA_1} = \frac{7}{8}$. **19.2.** $\frac{13}{12}$. *Вказівка*. Застосувавши теорему Менелая до трикутника CBB_1, знайдіть відношення $BA_1 : A_1C$. Далі застосуйте теорему Менелая до трикутника AA_1C. **19.3.** $\frac{AP}{PB} = 1$, $\frac{NP}{PM} = 3$. **19.8.** 2 : 1. **19.9.** *Вказівка*. Нехай продовження бічних сторін AB і DC трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M, а точка F — середина основи AD. До трикутника AMD і чевіан AC, DB і MF застосуйте теорему Чеви. **19.10.** *Вказівка*. Нехай прямі AB і CD перетинаються в точці E. Точки E, M і N лежать на одній прямій. Застосуйте теорему Чеви до трикутника AED. **19.11.** $\frac{2}{5}$. *Вказівка*. Нехай прямі BC і FE перетинаються в точці K. Доведіть, що $BK = \frac{1}{2}AF$. Застосуйте теорему Менелая до трикутника ABC. **19.12.** *Вказівка*. Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма. Для трикутника AOD і точок N, M, B застосуйте теорему Менелая. **19.13.** *Вказівка.* До трикутників ABC і ADC та прямих відповідно MN і KP застосуйте теорему Менелая. **19.14.** *Вказівка.* Застосуйте теорему Менелая до трикутника $O_1O_2O_3$. **19.15.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням ключової задачі 18.30.1. **19.16.** *Вказівка.* Застосуйте теорему Менелая до трикутника, вершини якого є серединами сторін трикутника ABC. **19.17.** *Вказівка.* Застосуйте теорему Чеви до трикутника, вершини якого є серединами сторін трикутника ABC. **19.18.** *Вказівка.* Проведемо через точку B пряму, паралельну стороні AC, і позначимо через M_1 і K_1 точки перетину цієї прямої з прямими B_1C_1 і B_1A_1 відповідно (див. рис. до задачі 19.18). Для розв'язання достатньо довести, що $BM_1 = BK_1$. З подібності трикутників AB_1C_1 і BM_1C_1 маємо: $\frac{BM_1}{AB_1} = \frac{BC_1}{AC_1}$, звідси $BM_1 = \frac{AB_1 \cdot BC_1}{AC_1}$. Аналогічно з подібності трикутників CB_1A_1 і BK_1A_1 можна отримати $BK_1 = \frac{CB_1 \cdot BA_1}{CA_1}$.

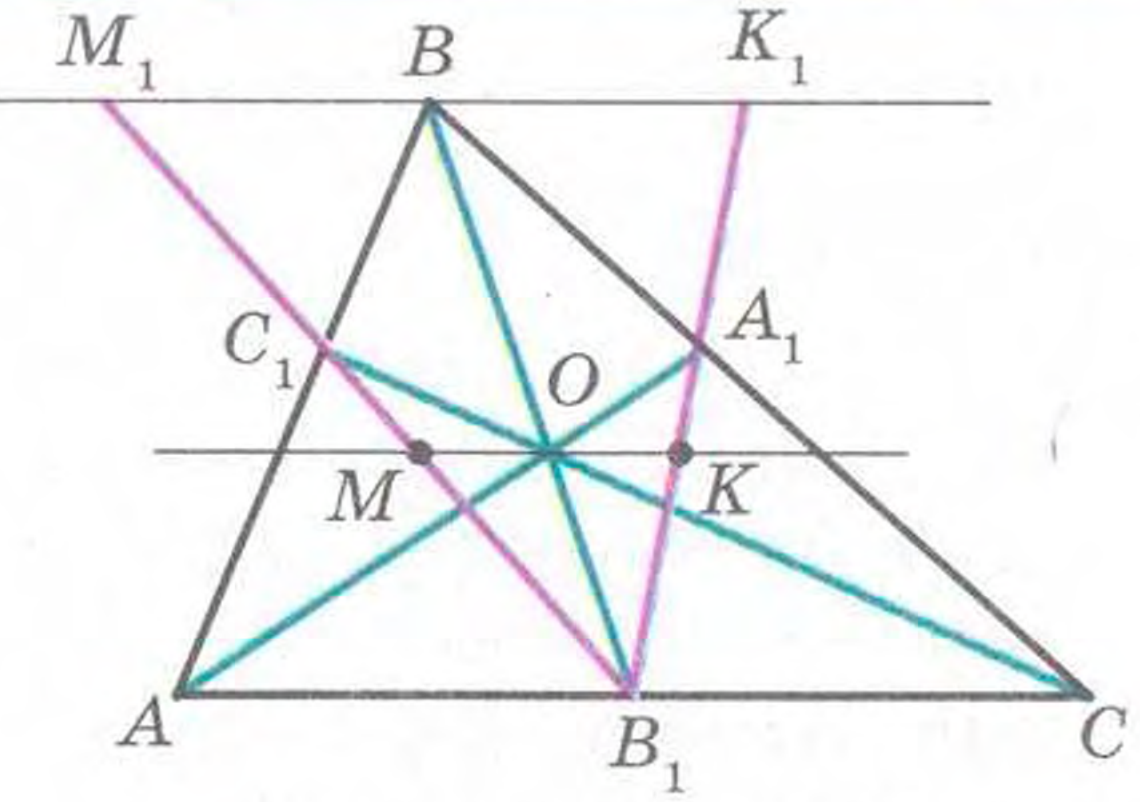


Рис. до задачі 19.18

Маємо: $\frac{BM_1}{BK_1} = \frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{AC_1 \cdot CB_1 \cdot BA_1} = 1$. **19.19.** *Вказівка.* Проведіть через точку B пряму, паралельну стороні AC, і позначте через K і F точки перетину цієї прямої з прямими HA_1 і HC_1 відповідно. Скористайтесь подібністю трикутників HA_1C і KA_1B, а також подібністю трикутників HC_1A і FC_1B. **20.7.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що прямі OA_1 і AH, де H — ортоцентр трикутника ABC, паралельні. **20.9.** $\frac{a}{4}$. *Вказівка.* Нехай точка E — середина відрізка AH, де точка H — ортоцентр трикутника ABC, точка M — середина сторони BC, точка A_1 — основа висоти, проведеної з вершини A. Доведіть, що шукана відстань — довжина середньої лінії трикутника EMA_1. **20.10.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням задачі 11.34. **20.11.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що коло дев'яти точок трикутника ABC містить середини сторін трикутників ABH, BCH, CAH. **20.12.** *Вказівка.* Пряма Ейлера проходить через центр кола дев'яти точок трикутника. Також скористайтеся результатом задачі 20.11. **20.13.** *Вказівка.* Скориставшись твердженням ключової задачі 11.31, доведіть, що відрізок, який з'єднує вершину A з ортоцентром, дорівнює радіусу описаного кола. **20.14.** *Вказівка.* Скориставшись твердженням ключової задачі 11.31, доведіть, що відрізок, який з'єднує вершину A з ортоцентром, дорівнює радіусу описаного кола. **20.15.** *Вказівка.* Доведіть, що перше коло є колом дев'яти точок трикутника ABK, де K — точка перетину прямих AM і BN. **21.7.** 18 см, 30 см. **21.8.** 50 см, 20 см. **21.10.** 6 см. **21.12.** Так. **21.13.** $\frac{ab}{a+b}$. *Вказівка.* Доведіть, що $\triangle KBM \backsim \triangle ABC$ з коефіцієнтом подібності $\frac{b}{a+b}$. **21.16.** 2 см. **21.17.** 6 см. *Вказівка.* Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle BDC$. **21.18.** *Вказівка.* Нехай кола перетинаються в точках E і F. Для двох пар хорд AB і EF, CD і EF застосуйте твердження ключової задачі 1 п. 18. **21.19.** *Вказівка.* Доведіть, що $\triangle MAC \backsim \triangle MCB$. Далі скористайтеся твердженням, оберненим до твердження ключової задачі 1 п. 12. **21.20.** *Вказівка.* Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма. Тоді $OM \cdot OC = OB \cdot OD$. Звідси $OM \cdot OA = OB^2 = OD^2$. **21.21.** *Вказівка.* Проведіть у точці B дотичну до описаного кола. **21.22.** *Вказівка.* Доведіть, що $\triangle BKO \backsim \triangle BOA$ і $\triangle OMA \backsim \triangle BOA$. **21.23.** *Вказівка.* Доведіть, що з подібності трикутників BMC і CMK випливає подібність трикутників ABM і KAM. **21.24.** *Вказівка.* Маємо: $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$. З урахуванням рівностей $BM = CN$ і $AB = BC$ скористайтеся твердженням ключової задачі 3 п. 21. **21.25.** *Вказівка.* На продовженні сторони AC за точку A позначте точку D так, щоб $AD = AB$. Скориставшись даною в умові задачі рівністю, доведіть, що $\triangle DBC \backsim \triangle BAC$. **22.5.** 15 см, 20 см. **22.6.** 30 см, 24 см. **22.7.** $2\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. **22.8.** 14,5 см. **22.9.** 12 см. **22.10.** 62 см. **22.11.** 12,5 см.

22.12. 12,8 см. **22.13.** 2,5 см. **22.14.** 26 см, 39 см. **22.15.** 5 см. **22.16.** $\frac{26}{3}$ см. **22.20.** 7 см, 13 см, 15 см, 21 см. **22.22.** 196 см. **22.23.** 18 см. **22.24.** 12 см. **22.25.** *Вказівка.* $AB_2^2 = AB_1 \cdot AC$, $AC_2^2 = AC_1 \cdot AB$. Скористайтеся твердженням ключової задачі 1 п. 21. **23.11.** 13 см. **23.12.** 10 см. **23.13.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **23.14.** $a\sqrt{2}$. **23.15.** *а*) $\sqrt{6}$ см; *б*) $\sqrt{3}$ см; *в*) $4\sqrt{2}$ см. **23.16.** *а*) $\sqrt{2}$ см; *б*) 1 см. **23.17.** $4\sqrt{5}$ см. **23.18.** $4\sqrt{10}$ см. **23.19.** $4\sqrt{13}$ см. **23.20.** $4\sqrt{5}$ см. **23.21.** 2 см або 18 см. **23.22.** 24 см. **23.23.** 1,5 см, 22,5 см. **23.24.** 20 см. **23.25.** 20 см. **23.26.** 8 см, 6 см, 10 см. **23.27.** 6 см, $2\sqrt{73}$ см. **23.28.** 168 см. **23.29.** 200 см. **23.32.** $8\sqrt{10}$ см. **23.33.** $12\sqrt{3}$ см. **23.34.** $2\sqrt{65}$ см. **23.35.** $12\sqrt{5}$ см. **23.36.** 128 см. **23.37.** 162 см. **23.38.** 54 см. **23.39.** $8\sqrt{10}$ см. **23.40.** 10 см, $4\sqrt{13}$ см, $2\sqrt{73}$ см. **23.41.** 26 см. **23.43.** 13 см. **23.44.** *Вказівка.* Через вершину меншої основи трапеції проведіть пряму, паралельну діагоналі. **23.45.** 7 см. *Вказівка.* Проведіть діаметр BD і розгляньте трапецію $ACBD$. **23.46.** *Вказівка.* Скористайтеся лемою з п. 20. **23.47.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см. *Вказівка.* За допомогою теореми Птолемея знайдіть CD. Доведіть, що $\angle KCD = 90°$. **23.48.** *Вказівка.* Проведіть відрізок CD так, що $CD = AC$, $\angle DCM = \angle MCA$ (див. рис. до задачі 23.48). Доведіть, що $\angle MDN = 90°$ і $MD = AM$, $ND = BN$. **24.14.** 45°, 135°. **24.18.** 1) 1; 2) 0. **24.19.** 0,28; 0,96; $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{7}$. **24.20.** $\frac{1}{6}$. *Вказівка.* З подібності трикутників AMC і BDC випливає, що $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BD} = \frac{1}{3}$. **24.21.** $\frac{6}{7}$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\frac{KC}{AC} = \frac{BD}{AB}$. **24.23.** *Вказівка.* З точки F опустіть перпендикуляр на відрізок ED. Знайдіть тангенси кутів E і B. **24.24.** 60°. *Вказівка.* З точки M опустіть

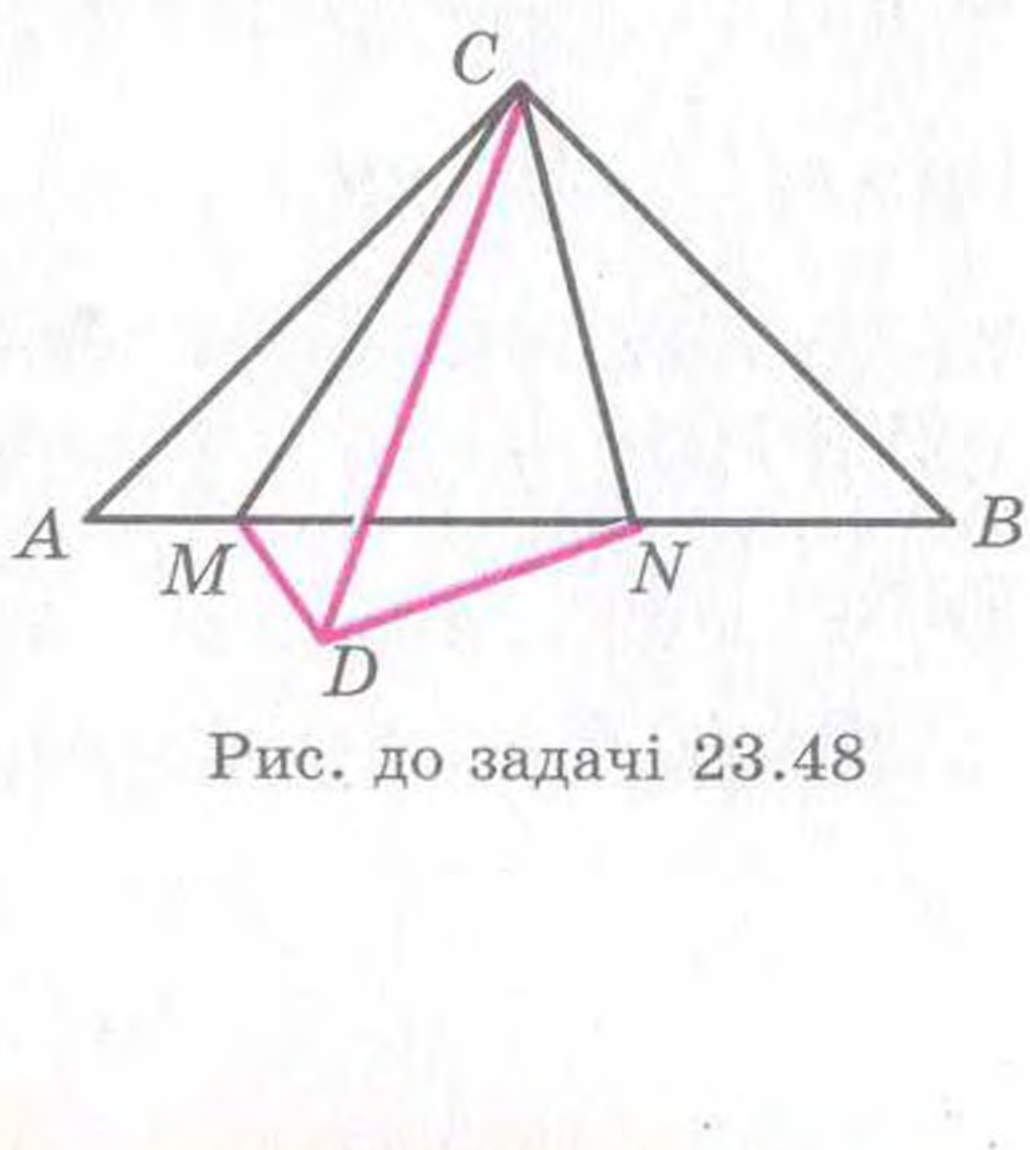


Рис. до задачі 23.48

перпендикуляр на основу трикутника. **24.25.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $AH = 2OM$, де точка M — середина сторони BC, точка O — центр описаного кола. **24.26.** 60°. **24.27.** 45°. **24.29.** *Вказівка.* Скористайтеся теоремою Чеви. **25.11.** 2°. **25.12.** 65°. **25.15.** $2a$, $a\sqrt{3}$. **25.16.** a, $a\sqrt{3}$. **25.17.** 8 см. **25.18.** 16 см. **25.19.** 15 см. **25.20.** $4\sqrt{2}$ см. **25.21.** $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **25.22.** $\frac{h}{\sin\alpha}$, $\frac{h}{\cos\alpha}$, $\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$. **25.23.** $a\operatorname{tg}\varphi$, $\frac{a}{\cos\varphi}$, $a\sin\varphi$. **25.24.** $\frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, $d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **25.25.** $\frac{2r}{\sin\alpha}$, $\frac{2r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{2r}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **25.26.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **25.27.** $\frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$. **25.28.** $2\sqrt{3}$ см, $\sqrt{93}$ см, $\sqrt{181}$ см. **26.1.** $d^2\sin\alpha\cos\alpha$. **26.2.** $75\sqrt{3}$ см^2. **26.6.** У 2 рази. **26.7.** Жодного, або два, або три. **26.8.** Жодного або два. **26.9.** 504 см^2. **26.10.** 30 см. **26.11.** *Вказівка.* Проведіть пряму через точки перетину діагоналей прямокутників $ABCD$ і $MNKF$. **26.12.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють сторонам даних квадратів. **26.13.** *Вказівка.* Сторона шуканого квадрата $x = \sqrt{ab}$. **26.14.** $\frac{S+Q}{2}$. **27.3.** 1) Два розв'язки: 4 см або 9 см; 2) один розв'язок: 8 см. **27.4.** 300 см^2. **27.5.** 120 см^2. **27.6.** $108\sqrt{3}$ см^2. **27.7.** $ab\sin\alpha$. **27.8.** $64\sqrt{3}$ см^2. **27.9.** $140\sqrt{2}$ см^2. **27.10.** 37,5 см^2. **27.11.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **27.13.** 72 см^2. **27.14.** 360 см^2. **28.5.** $\frac{200}{3}$ см^2. **28.6.** $11\sqrt{3}$ см^2. **28.7.** 170 см^2. **28.8.** $b^2\sin\alpha\cos\alpha$. **28.9.** $h^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **28.10.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **28.11.** $\frac{c^2}{4}$. **28.12.** $\frac{120}{13}$ см. **28.13.** 96 см^2. **28.15.** 336 см^2. **28.16.** 1080 см^2. **28.26.** 120 см^2. **28.27.** 20 см, $6\sqrt{10}$ см, $2\sqrt{10}$ см. **28.28.** 1176 см^2. **28.29.** 9,6 см^2. **28.30.** $\frac{4000}{3}$ см^2. **28.31.** $\frac{4000}{3}$ см^2. **28.32.** 2 : 1. **28.33.** *Вказівка.* Якщо K — точка дотику кола до гіпотенузи AB, то $AK =$

$= p - BC$, $BK = p - AC$, де p — півпериметр трикутника ABC. **28.34.** 25 см^2. **28.35.** 1 см^2, 9 см^2. **28.40.** 19 см^2. **28.41.** *Вказівка.* Проведіть прямі AM, BM і CM та скористайтеся твердженнями ключової задачі 2 п. 28. **28.42.** *Вказівка.* Скориставшись твердженням ключової задачі 3 п. 28, доведіть, що $S_{ABO} = S_{DCO}$. **28.44.** $\frac{15}{4}$ см^2.

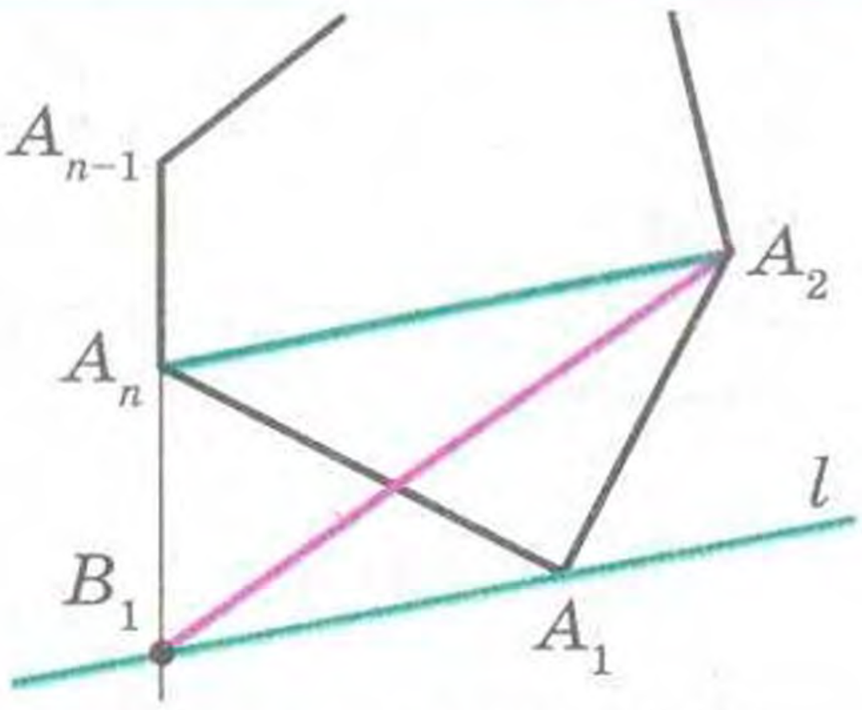


Рис. до задачі 28.47

Вказівка. Для чотирикутника $MNKF$ скористайтеся твердженням ключової задачі 3 п. 28. **28.45.** *Вказівка.* Доведіть, що площа трикутника BCK дорівнює половині площі кожного з паралелограмів. **28.46.** *Вказівка.* Проведіть медіану BM. Через точку M проведіть пряму, паралельну BD. Нехай N — точка перетину проведеної прямої з однією із сторін BA або BC. Тоді DN — шукана пряма. **28.47.** *Вказівка.* Проведіть пряму l паралельно прямій A_2A_n (див. рис. до задачі 28.47). $B_1A_2 \ldots A_{n-1}$ — шуканий $(n-1)$-кутник. **28.48.** Усі точки квадрата, які не належать його сторонам, і прямі, які містять діагоналі квадрата, за винятком точок A, B, C і D. **28.49.** *Вказівка.* Проведіть діагоналі чотирикутника $ABCD$. **28.50.** 3 см. *Вказівка.* Скориставшись твердженнями ключових задач 1 і 3 п. 28, доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. **28.51.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням ключової задачі 18.46. **29.6.** $108\sqrt{3}$ см^2. **29.7.** 195 см^2. **29.8.** 840 см^2. **29.9.** 132 см^2. **29.10.** $600\sqrt{3}$ см^2. **29.11.** 1640 см^2. **29.12.** $(32 + 32\sqrt{2})$ см^2. **29.13.** 294 см^2. **29.15.** 512 см^2. **29.16.** 192 см^2. **29.17.** 2 : 3. **29.18.** 59 : 53. **29.20.** 156 см^2. **29.22.** 588 см^2. **29.23.** 2187 см^2. **29.24.** 936 см^2. **29.25.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. *Вказівка.* Доведіть, що кут при більшій основі трапеції дорівнює 60°. **29.26.** 336 см^2. *Вказівка.* У даній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) через вершину C проведіть пряму CF, паралельну діагоналі BD (точка F належить прямій AD), і розгляньте $\triangle ACF$. **29.27.** 150 см^2. **29.28.** $h^2\sqrt{3}$. **29.29.** $\frac{S}{2}$. *Вказівка.* Проведіть середню лінію MN трапеції.

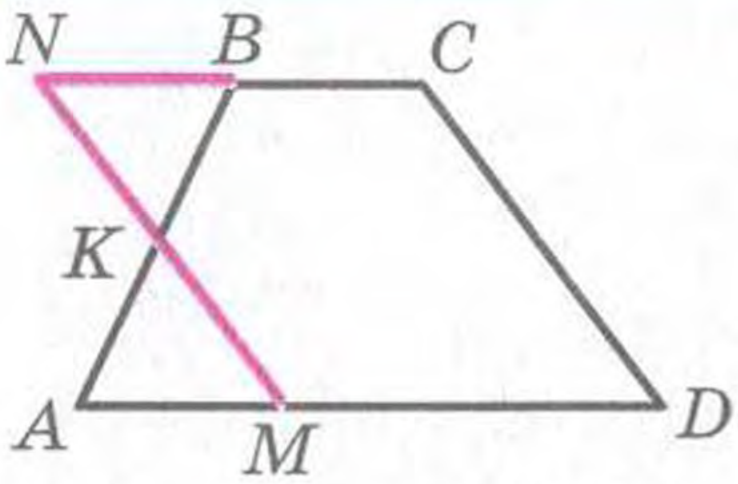


Рис. до задачі 29.32

Скористайтеся тим, що висоти трикутників MCN і MND, проведені з вершин C і D, дорівнюють половині висоти трапеції. **29.32.** *Вказівка.* Нехай точка K — середина бічної сторони AB трапеції $ABCD$ (див. рис. до задачі 29.32). Доведіть, що трапеція $ABCD$ і паралелограм $MNCD$ — рівноскладені. **29.33.** 1 см^2. **29.34.** $\frac{1}{4}$ см^2. **29.35.** 1 см^2. *Вказівка.* Розріжте п'ятикутник $ABCDE$ по діагоналях AC і CE та з трикутників ABC і CDE складіть трикутник, рівний трикутнику ACE. **29.36.** *Вказівка.* Доведіть, що площі трапецій, на які пряма ділить квадрат, відносяться як їх середні лінії. **30.5.** 16 см. **30.7.** 4 см або 6 см. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що периметри подібних трикутників відносяться як відповідні сторони. **30.8.** $R_1 + R_2 + R_3$. **30.9.** 18 см. **30.10.** *Вказівка.* Побудуйте коло, яке дотикається до сторін кута в точках P_1 і P_2 так, що $OP_1 = OP_2 = \frac{1}{2}P$, де P — даний периметр. **30.11.** $\frac{a\sqrt{3}\,(a-2b)}{12}$. **30.12.** r, $\frac{4}{3}r$, $\frac{5}{3}r$. **30.14.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутник OBO_A — прямокутний. **30.15.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням задачі 30.14. **30.16.** *Вказівка.* Доведіть, що точки A, B, C є основами висот трикутника $O_AO_BO_C$. **30.17.** *Вказівка.* Скористайтеся теоремою Чеви. **30.18.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\angle BO_AA = \frac{1}{2}\angle ADB$. **30.19.** 120°. **30.20.** 45°. *Вказівка.* Доведіть, що точка A — центр зовнівписаного кола трикутника MNC. **30.21.** 30°. *Вказівка.* Доведіть, що точка A — центр зовнівписаного кола трикутника KBN. **30.22.** k. *Вказівка.* Проведіть бісектрису AF трикутника ABC. Подовжте сторону AB за точку B. Переконайтеся, що точка F — центр зовнівписаного кола трикутника ABD. Звідси DF — бісектриса кута BDC. **30.23.** 45°. *Вказівка.* Проведіть коло з центром у точці D і радіусом 1 см. Доведіть, що це коло є зовнівписаним для трикутника PBQ. **30.24.** 10°. *Вказівка.* Подовжте сторону CB за точку B. Доведіть, що точка E — центр зовнівписаного кола трикутника BDC. **30.25.** 2 : 1. *Вказівка.* Доведіть, що точка C — центр зовнівписаного кола трикутника ABD.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ДОДАТОК 1

Таблиця значень тригонометричних функцій

Величина кута (у градусах)	Синус	Косинус	Тангенс	Величина кута (у градусах)	Синус	Косинус	Тангенс
0	0,000	1,000	0,000	46	0,719	0,695	1,036
1	0,017	1,000	0,017	47	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,999	0,035	48	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,999	0,052	49	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,998	0,070	50	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,996	0,087	51	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,995	0,105	52	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,993	0,123	53	0,799	0,602	1,327
8	0,139	0,990	0,141	54	0,809	0,588	1,376
9	0,156	0,988	0,158	55	0,819	0,574	1,428
10	0,174	0,985	0,176	56	0,829	0,559	1,483
11	0,191	0,982	0,194	57	0,839	0,545	1,540
12	0,208	0,978	0,213	58	0,848	0,530	1,600
13	0,225	0,974	0,231	59	0,857	0,515	1,664
14	0,242	0,970	0,249	60	0,866	0,500	1,732
15	0,259	0,966	0,268	61	0,875	0,485	1,804
16	0,276	0,961	0,287	62	0,883	0,469	1,881
17	0,292	0,956	0,306	63	0,891	0,454	1,963
18	0,309	0,951	0,335	64	0,899	0,438	2,050
19	0,326	0,946	0,344	65	0,906	0,423	2,145
20	0,342	0,940	0,364	66	0,914	0,407	2,246
21	0,358	0,934	0,384	67	0,921	0,391	2,356
22	0,375	0,927	0,404	68	0,927	0,375	2,475
23	0,391	0,921	0,424	69	0,934	0,358	2,605
24	0,407	0,914	0,445	70	0,940	0,342	2,747
25	0,423	0,906	0,466	71	0,946	0,326	2,904
26	0,438	0,899	0,488	72	0,951	0,309	3,078
27	0,454	0,891	0,510	73	0,956	0,292	3,271
28	0,469	0,883	0,532	74	0,961	0,276	3,487
29	0,485	0,875	0,554	75	0,966	0,259	3,732
30	0,500	0,866	0,577	76	0,970	0,242	4,011
31	0,515	0,857	0,601	77	0,974	0,225	4,331
32	0,530	0,848	0,625	78	0,978	0,208	4,705
33	0,545	0,839	0,649	79	0,982	0,191	5,145
34	0,559	0,829	0,675	80	0,985	0,174	5,671
35	0,574	0,819	0,700	81	0,988	0,156	6,314
36	0,588	0,809	0,727	82	0,990	0,139	7,115
37	0,602	0,799	0,754	83	0,993	0,122	8,144
38	0,616	0,788	0,781	84	0,995	0,105	9,514
39	0,629	0,777	0,810	85	0,996	0,087	11,430
40	0,643	0,766	0,839	86	0,998	0,070	14,301
41	0,656	0,755	0,869	87	0,999	0,052	19,081
42	0,669	0,743	0,900	88	0,999	0,035	28,636
43	0,682	0,731	0,933	89	1,000	0,017	57,290
44	0,695	0,719	0,966	90	1,000	0,000	
45	0,707	0,707	1,000				

ДОДАТОК 2

Зміст програми з геометрії (8 клас) для класів з поглибленим вивченням математики

Затверджено Міністерством освіти і науки України (лист № 1/11-2151 від 30.05.2008 р.)

Структура програми

Програма подана у формі таблиці, яка містить дві частини: зміст навчального матеріалу і вимоги до підготовки учнів.

У частину «Зміст навчального матеріалу», яка оформлена прямим шрифтом, включено зміст програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Текст, оформлений курсивом, містить навчальний матеріал, який вивчається у класах з поглибленим рівнем математики.

Програма передбачає можливість вивчення змісту курсу з різним степенем повноти. Додаткові питання і теми, узяті у квадратні дужки, можна не вивчати, що дозволяє вчителеві залежно від конкретних умов варіювати об'єм матеріалу, який вивчається, і відповідно ступінь поглиблення і розширення курсу.

8-й клас. Геометрія
(105 год. I семестр — 48 год, 3 год на тиждень,
II семестр — 57 год, 3 год на тиждень)

К-ть год	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
6	**Тема 1. ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ 7 КЛАСУ**	
17	**Тема 2. МНОГОКУТНИКИ** *Ламана.* Многокутник і його елементи. *Опуклі та неопуклі многокутники.* Сума кутів опуклого многокутника. Чотирикутники. Паралелограм і його властивості. Ознаки паралелограма. Прямокутник, ромб, квадрат та їх властивості. Трапеція, види і властивості трапеції. Середні лінії трикутника і трапеції, їх властивості.	**Описує** поняття ламаної, многокутник і його елементи. **Формулює** означення і властивості зазначених у змісті чотирикутників; теореми: про середні лінії трикутника і трапеції. **Доводить** зазначені в змісті властивості чотирикутників, теореми про середні лінії трикутника і трапеції. **Застосовує** вивчені означення і властивості для розв'язування задач.

К-ть год	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
16	**Тема 3. ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ** Дуга кола. Центральний кут кола. Градусна міра дуги. Вписаний кут і його властивості. *Величина кута між хордою і дотичною. Величина кута з вершиною всередині і поза колом.* *Необхідна і достатня умова* існування кола, описаного навколо чотирикутника. *Необхідна і достатня умова* існування кола, вписаного в чотирикутник. [*Метод допоміжного кола. Пряма Сімсона.*]	**Формулює** означення: центрального і вписаного кутів, вписаного і описаного чотирикутників; теореми: про вписаний кут, про кут між дотичною і хордою, про величину кута з вершиною всередині і поза колом, про необхідну і достатню умову існування кола, описаного навколо чотирикутника, про необхідну і достатню умову існування кола, вписаного в чотирикутник. **Доводить** теореми: про вписаний кут, про величину кута між дотичною і хордою, про необхідну і достатню умову існування кола, описаного навколо чотирикутника, про необхідну і достатню умову існування кола, вписаного в чотирикутник. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.
25	**Тема 4. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ** Теорема Фалеса. Узагальнена теорема Фалеса. *Теореми про перетин медіан і висот трикутника.* Властивість бісектриси трикутника. *Теорема про бісектрису зовнішнього кута трикутника.* Подібні трикутники. Ознаки подібності трикутників. *Властивість хорд, що перетинаються. Властивість дотичної та січної.* [*Формула обчислення довжини бісектриси трикутника через його елементи. Коло Аполлонія. Теорема Менелая. Теорема Чеви. Теорема Пто-*	**Формулює** означення подібних трикутників; ознаки подібності трикутників; теореми: Фалеса, про пропорційні відрізки, про медіани і висоти трикутника, про бісектрису трикутника, про властивість хорд, що перетинаються, про дотичну і січну. **Доводить** ознаки подібності трикутників; теорему Фалеса, теореми: про медіани і висоти трикутника, про бісектрису трикутника, про властивість хорд, що перетинаються, про дотичну і січну. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.

К-ть год	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
	лемея. Чудові точки трикутника та їх властивості. Пряма Ейлера. Коло дев'яти точок.]	
15	**Тема 5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ** Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора. *Теорема, обернена до теореми Піфагора.* Перпендикуляр і похила, їх властивості. Синус, косинус, тангенс *і котангенс* гострого кута прямокутного трикутника. Тотожності $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$, $\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса деяких кутів. Розв'язування прямокутних трикутників.	**Формулює** означення: синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника; теореми: про пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику; Піфагора. **Записує** основні тригонометричні тотожності. **Доводить** теореми: про пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику; Піфагора; основні тригонометричні тотожності. **Розв'язує** прямокутні трикутники. **Застосовує** вивчені теореми для розв'язування задач.
16	**Тема 6. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ** Поняття площі многокутника. Площі прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції. [*Рівноскладені й рівновеликі многокутники.*] *Зовнівписані кола трикутника.*	**Описує** поняття площі многокутника. **Формулює** означення зовнівписаного кола трикутника. **Записує** формулу для обчислення площі прямокутника. **Доводить** формули: для обчислення площі паралелограма, трикутника, трапеції. **Застосовує** вивчені означення і властивості для розв'язування задач.
10	**Тема 7. ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ**	

ДОДАТОК 3

Орієнтовне календарне планування з геометрії (8 клас) для класів з поглибленим вивченням математики

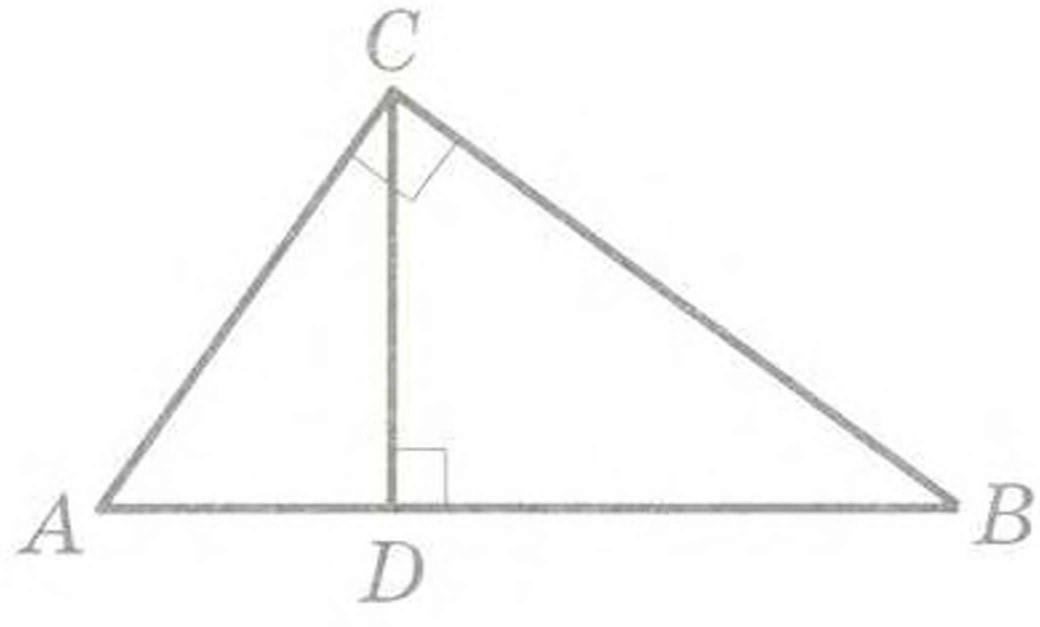
№ з/п	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
	І. Повторення і систематизація навчального матеріалу з курсу геометрії 7 класу (6 год)	
1	Повторення і систематизація навчального матеріалу з курсу геометрії 7 класу	5
2	Тематичне оцінювання № 1	1
	ІІ. Многокутники (17 год)	
3	Многокутник. Види і властивості многокутників	2
4	Паралелограм. Властивості паралелограма	2
5	Ознаки паралелограма	2
6	Необхідні й достатні умови	1
7	Прямокутник. Ромб. Квадрат	5
8	Середня лінія трикутника	2
9	Трапеція. Види і властивості трапеції. Середня лінія трапеції	2
10	Тематичне оцінювання № 2	1
	ІІІ. Вписані та описані чотирикутники (16 год)	
11	Дуга кола. Центральні і вписані кути	2
12	Застосування властивостей центральних і вписаних кутів при розв'язуванні задач	5
13	Вписані чотирикутники	6
14	Описані чотирикутники	2
15	Тематичне оцінювання № 3	1
	IV. Подібність трикутників (25 год)	
16	Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки	4
17	Теорема про перетин медіан трикутника. Теорема про бісектриси трикутника	4
18	Подібні трикутники	1
19	Перша ознака подібності трикутників	6
20	*Теорема Менелая. Теорема Чеви*[1]	2

[1] Курсивом позначено теми, не обов'язкові для вивчення. Якщо ці теми не вивчаються, то вчитель розподіляє час, запланований для їх вивчення, на свій розсуд.

№ з/п	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
21	*Пряма Ейлера. Коло дев'яти точок*	2
22	Друга і третя ознаки подібності трикутників	5
23	Тематичне оцінювання № 4	1
	V. Розв'язування прямокутних трикутників (15 год)	
24	Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику	3
25	Теорема Піфагора	6
26	Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника	2
27	Розв'язування прямокутних трикутників	3
28	Тематичне оцінювання № 5	1
	VI. Площі многокутників (16 год)	
29	Поняття площі многокутника. Площа прямокутника	2
30	Площа паралелограма	3
31	Площа трикутника	5
32	Площа трапеції	3
33	Зовнівписані кола трикутника	2
34	Тематичне оцінювання № 6	1
	VII. Повторення і систематизація навчального матеріалу (10 год)	
35	Повторення і систематизація навчального матеріалу	9
36	Підсумкове тематичне оцінювання	1

ЗМІСТ

МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ У ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ



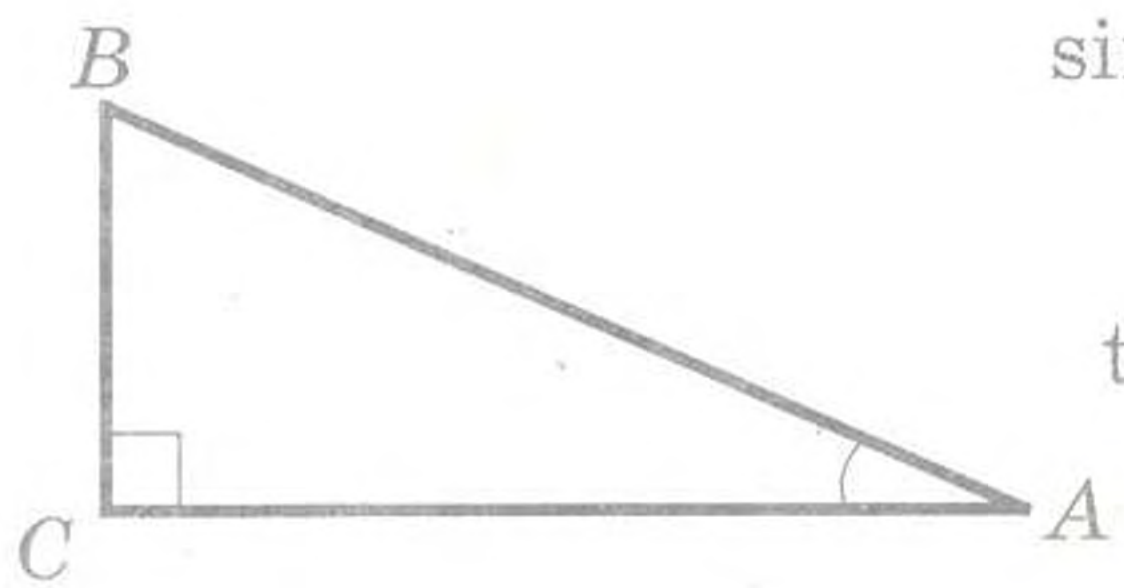
$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (теорема Піфагора)

$CD^2 = AD \cdot DB$

$AC^2 = AB \cdot AD$

$BC^2 = AB \cdot DB$

СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА



$\sin A = \frac{BC}{AB}$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$

$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$ $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$

	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані літери		Назви літер
A	a	а
B	b	бе
C	c	це
D	d	де
E	e	е
F	f	еф
G	g	ге
H	h	аш
I	i	і
J	j	йот
K	k	ка
L	l	ель
M	m	ем
N	n	ен
O	o	о
P	p	пе
Q	q	ку
R	r	ер
S	s	ес
T	t	те
U	u	у
V	v	ве
W	w	дубль-ве
X	x	ікс
Y	y	ігрек
Z	z	зет

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані літери		Назви літер
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	епсілон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	ета
Θ	θ, ϑ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	ламбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	ксі
Ο	ο	омікрон
Π	π	пі
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сігма
Τ	τ	тау
Υ	υ	іпсілон
Φ	φ	фі
Χ	χ	хі
Ψ	ψ	псі
Ω	ω	омега

Геометрія 8 клас

Навчально-методичний комплект

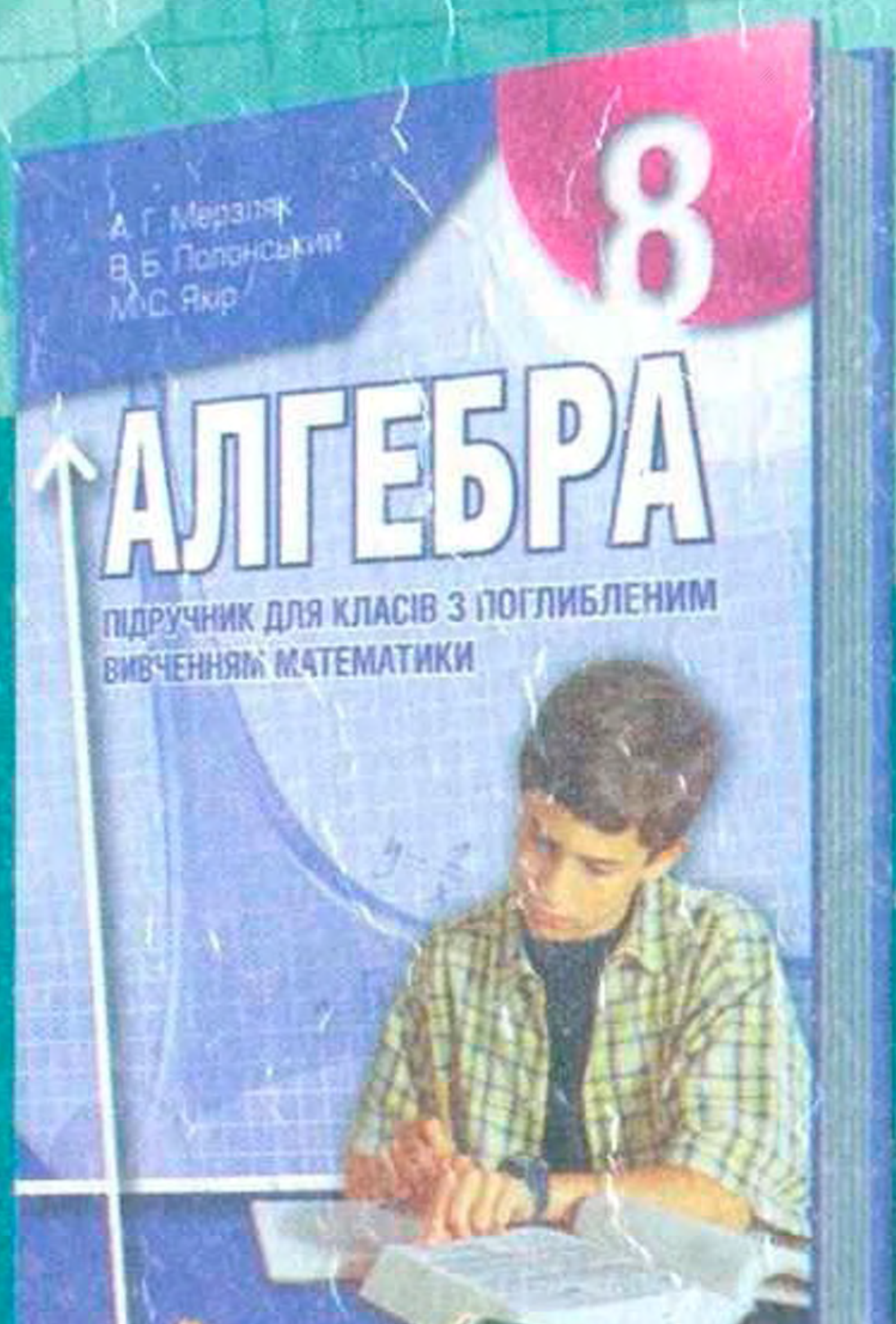
Підручник

Книга для вчителя

Збірник задач і контрольних робіт

ДЛЯ ТИХ, ХТО ПРАГНЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Підручник для класів з поглибленим вивченням математики



9 789664 740125

61052 Харків, вул. Восьмого Березня, 31
Тел. : (057) 719-46-80, 719-17-26
факс: (057) 758-83-93
e-mail: contact@gymnasia.com.ua