А.Г. Мерзляк,
В.Б. Полонский,
Е.М. Рабинович,
М.С. Якир

СБОРНИК

задач и заданий для тематического оценивания по алгебре и началам анализа для 10 класса

Рекомендовано Министерством науки и образования Украины

Харьков
«Гимназия»
2005

Тематическое распределение тренировочных упражнений

Тема	Номера упражнений
Функции и их свойства	1–13
Преобразование графиков функций	14–18
Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса	19–24
Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса	25-30
Периодические функции	31–35
Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента	36–44
Формулы приведения	45–52
Формулы сложения	53–61
Формулы двойного аргумента	62–68
Формулы понижения степени	69–72
Формулы суммы и разности тригонометрических функций	73–79
Формулы тангенса и котангенса половинного аргумента	80–82
Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму	83; 84
Построение графиков тригонометрических функций	85–90
Понятие обратной функции	91–94
Обратные тригонометрические функции	95–106
Решение простейших тригонометрических уравнений	107–116

Тема	Номера упражнений
Решение тригонометрических уравнений	117–130
Решение тригонометрических неравенств	131–134
Системы тригонометрических уравнений	135; 136
Определение корня *n*-й степени	137–147
Свойства арифметического корня *n*-й степени	148–164
Иррациональные уравнения	165–171
Иррациональные неравенства	172–175
Степень с рациональным показателем и ее свойства	176–181
Преобразование выражений, содержащих степени с дробным показателем	182–184
Показательная функция и ее свойства	185–188
Показательные уравнения	189–194
Показательные неравенства	195–198
Логарифмы и их свойства	199–203
Логарифмическая функция и ее свойства	204–208
Логарифмические уравнения	209–214
Логарифмические неравенства	215–218
Системы показательных и логарифмических уравнений	219

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Вариант 1

Функции и их свойства

1. Функция задана формулой $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$. Найти:

1) $f(1)$; 2) $f(0)$; 3) $f(-3)$; 4) $f(t)$.

2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, \text{ если } x \le -2; \\ x^2 - x + 1, \text{ если } -2 < x < 3; \\ 3, \text{ если } x \ge 3. \end{cases}$$

Найти: 1) $f(-4)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(1)$; 4) $f(3)$; 5) $f(4{,}9)$.

3. Найти область определения функции, заданной формулой:

1) $f(x) = 3x - 17$;

2) $f(x) = \frac{5}{x+9}$;

3) $f(x) = \frac{x-6}{8}$;

4) $f(x) = \frac{x+8}{x-7}$;

5) $f(x) = \sqrt{x-3}$;

6) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{5-x}}$;

7) $f(x) = \frac{6}{x^2-2}$;

8) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+5x-6}$;

9) $f(x) = \frac{x-4}{x^2+3x+3}$;

10) $f(x) = \frac{x}{|x|-5}$;

11) $f(x) = \frac{x^2+4}{|x|+7}$;

12) $f(x) = \frac{13}{|x|-x}$;

13) $f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{15-x}$;

14) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$;

15) $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x-2}{x-5}$;

16) $f(x) = \sqrt{x-8} + \frac{9}{\sqrt{10-x}}$;

17) $f(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{x+2}{x^2-6x}$;

18) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+4}} - \dfrac{5x-3}{x^2-8x+7}$;

19) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$;

20) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$;

21) $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{|x|-5}}$;

22) $f(x) = \dfrac{x+2}{|x|-4} + \dfrac{4}{x}$.

4. Найти область значений функции:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 2$;

2) $g(x) = x^2 + 4$;

3) $\varphi(x) = 5 - x^2$;

4) $h(x) = x^2 + 4x - 7$;

5) $g(x) = 5 + |x|$;

6) $f(x) = \sqrt{x^2+4} - 3$;

7) $f(x) = \sqrt[4]{-x^2}$;

8) $\varphi(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$;

9) $f(x) = \sin x + 1$;

10) $f(x) = 3\cos x - 4$;

11) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x - 6$;

12) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$;

13) $h(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$;

14) $\varphi(x) = 3 - 2\sin^2 x$.

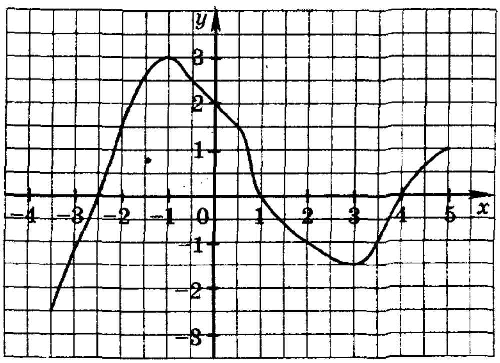


Рис. 1

5. На рис. 1 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-3{,}5;\ 5]$. Используя график, найти:

1) $f(-2{,}5)$; $f(-2)$; $f(-0{,}5)$; $f(0)$; $f(0{,}5)$; $f(3)$;

2) значения x, при которых $f(x) = -2$; $f(x) = 3$; $f(x) = 1{,}5$;

3) нули функции;

4) наибольшее и наименьшее значения функции;

5) область значений функции;

6) промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает;

7) количество корней уравнения $f(x) = a$.

6. Построить график функции, найти промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает:

1) $f(x) = 2x - 3$; 4) $f(x) = 4$; 7) $f(x) = x^2 - 2x$;

2) $f(x) = 4 - \frac{1}{3}x$; 5) $f(x) = \frac{10}{x}$; 8) $f(x) = 4 - x^2$;

3) $f(x) = -3x$; 6) $f(x) = -\frac{8}{x}$; 9) $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

7. Построить график функции, найти промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x}, & \text{если } x \le -3; \\ \frac{2}{3}x, & \text{если } -3 < x < 3; \\ \frac{6}{x}, & \text{если } x \ge 3; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} -2x - 3, & \text{если } x \le -4; \\ x^2 + 2x - 3, & \text{если } -4 < x < 2; \\ 5, & \text{если } x \ge 2; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & \text{если } x \le -2; \\ x + 1, & \text{если } -2 < x \le 4; \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$

8. На рис. 2 изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Используя график, найти:

1) нули функции;

2) решения неравенства $f(x) > 0$;

3) промежутки возрастания и убывания функции;

4) точки максимума и минимума функции;

5) экстремумы функции.

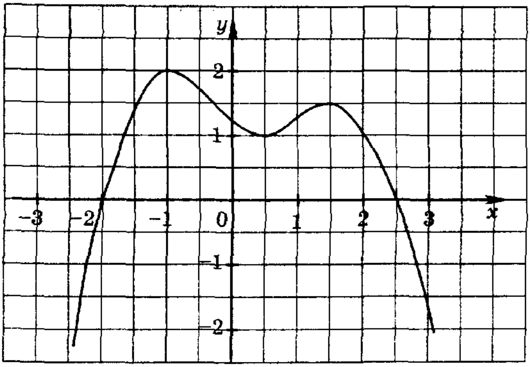
9. Найти область определения и построить график функции:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{4 - x}$; 3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4}$;

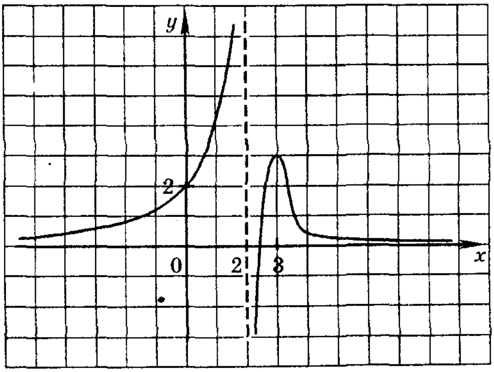
2) $f(x) = \frac{4x - 20}{x^2 - 5x}$; 4) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x - 3}$.

10. Известно, что $f(-4) = -20$. Найти $f(4)$, если функция f:

1) четная; 2) нечетная.



а)



б)

Рис. 2

11. Является ли функция $f(x) = x^2$ четной, если ее областью определения является множество:

1) $[-4; 4]$; 2) $(-\infty; -5) \cup (5; \infty)$; 3) $[-3; 3)$; 4) $(-\infty; 7]$?

12. Является ли четной или нечетной функция, заданная формулой:

1) $f(x) = 7x^6$;

2) $f(x) = 6x^5 - 3x^7$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 2}$;

4) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$;

5) $f(x) = x^2 - 2x + 3$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x}$;

7) $f(x) = x\,|x|$;

8) $f(x) = \sin^2 x$;

9) $f(x) = x - \sin x$;

10) $f(x) = \dfrac{\sin x + \operatorname{ctg} x}{1 + \cos x}$;

11) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 - 1}$;

12) $f(x) = \operatorname{tg} x + 2$;

13) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^3 - x}$;

14) $f(x) = \dfrac{(x - 1)\cos x}{x - 1}$?

13. На рис. 3 изображена часть графика функции $y = g(x)$, определенной на промежутке $[-7; 7]$. Построить график этой функции, если она является:

1) четной; 2) нечетной.

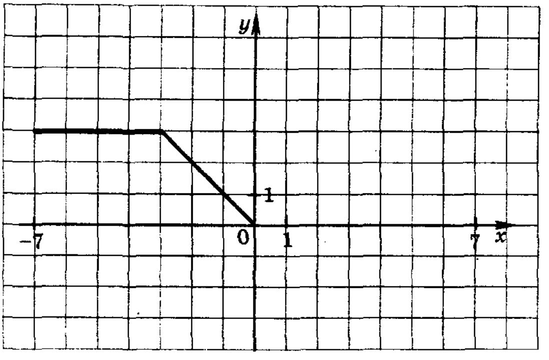


Рис. 3

Преобразование графиков функций

14. На рис. 4 изображен график функции $y = f(x)$. Построить график функции:

1) $y = f(x) + 2$; 2) $y = f(x) - 3$; 3) $y = f(x + 2)$;

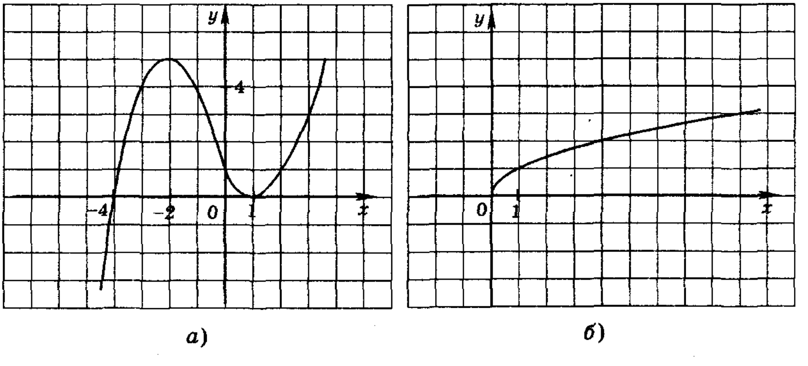


Рис. 4

4) $y = f(x - 3)$; 5) $y = -f(x)$; 6) $y = 4 - f(x)$.

15. Построить график функции:

1) $y = \frac{4}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x-2}$; 7) $y = \frac{2x+4}{x}$;

2) $y = \frac{4}{x} - 5$; 5) $y = \frac{4}{x+1}$; 8) $y = \frac{2x-2}{x-3}$.

3) $y = \frac{4}{x} + 1$; 6) $y = \frac{4}{x-1} + 3$;

16. Построить график функции:

1) $y = \sqrt{x}$; 7) $y = 2\sqrt{x}$;

2) $y = \sqrt{x} - 4$; 8) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$;

3) $y = \sqrt{x-4}$; 9) $y = \sqrt{2x-2}$;

4) $y = \sqrt{x-4} + 2$; 10) $y = \sqrt{2x+4} - 3$;

5) $y = \sqrt{2x}$; 11) $y = 2\sqrt{x-2} + 1$;

6) $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$; 12) $y = 0{,}5\sqrt{2x+6} - 2$.

17. Построить график функции:

1) $y = x^2 - 2x - 3$; 3) $y = |x^2 - 2x - 3|$;

2) $y = x^2 - 2|x| - 3$; 4) $y = |x^2 - 2|x| - 3|$.

18. Построить график функции:

1) $y = |x|$; 3) $y = |x + 3|$; 5) $y = -3|x|$;

2) $y = |x| - 4$; 4) $y = ||x| - 5|$; 6) $y = |x - 3| - 1$.

Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса

19. Найти значение выражения:

1) $2\cos 0^\circ + 5\sin 90^\circ - 4\,\mathrm{tg}\,180^\circ$;

2) $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2} + 3\cos\frac{\pi}{2} - 4\sin\frac{3\pi}{2}$;

3) $\mathrm{tg}\,45^\circ \cos 30^\circ\,\mathrm{ctg}\,60^\circ$;

4) $\dfrac{\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{2}\right)\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{6}}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} - \mathrm{tg}\,2\pi}$;

5) $\sqrt{(2\sin 45^\circ + 1)^2} - \sqrt{(1 - 2\cos 45^\circ)^2}$.

20. Найти значение выражения $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ при:

1) $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 15^\circ$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{6}$.

21. Возможно ли равенство:

1) $\cos\alpha = \frac{5}{7}$; 3) $\sin\alpha = \frac{\pi}{5}$;

2) $\sin\alpha = -\sqrt[3]{1,1}$; 4) $\cos\alpha = \sqrt{2} - 2$?

22. При каких значениях a возможно равенство:

1) $\cos x = a + 2$; 2) $\sin x = 4a - a^2 - 5$?

23. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $1 - 5\cos\alpha$; 2) $4 + \sin^2\alpha$; 3) $\frac{\sin\alpha\,(3-\cos\alpha)}{\sin\alpha}$.

24. Найти область значений выражения:

1) $\frac{1}{2-\sin 3x}$; 2) $\frac{1}{3\cos x - 2}$; 3) $\operatorname{tg}^2 x + 2$.

Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

25. Какой знак имеет:

1) $\sin 140^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 200^\circ$; 5) $\sin 2$;

2) $\cos 320^\circ$; 4) $\operatorname{ctg}(-84^\circ)$; 6) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}$?

26. Определить знак выражения:

1) $\sin 148^\circ \cos 116^\circ$; 3) $\sin 4 \operatorname{tg} 5$.

2) $\operatorname{tg} 216^\circ \cos(-232^\circ)$;

27. Углом какой четверти является угол α, если известно, что:

1) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; 2) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$?

28. Найти значение выражения:

1) $\sin(-30^\circ) - 2\operatorname{tg}(-45^\circ) - \cos(-60^\circ)$;

2) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin(-\pi) + 5\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

29. Сравнить:

1) $\sin 20^\circ$ и $\sin 21^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 220^\circ$ и $\operatorname{tg} 217^\circ$;

2) $\cos 20^\circ$ и $\cos 21^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 6$ и $\operatorname{ctg} 6,2$.

30. Возможно ли равенство $\cos\alpha = 2\sin 20^\circ$?

Периодические функции

31. Найти значение выражения:

1) $\sin 750°$; 3) $\cos 1260°$; 5) $\sin \frac{11\pi}{6}$;

2) $\operatorname{tg} 810°$; 4) $\operatorname{ctg}(-405°)$; 6) $\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

32. Показать, что число T является периодом функции f:

1) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $T = 4\pi$; 3) $f(x) = \left|\operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right|$, $T = \pi$;

2) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$, $T = 2$; 4) $f(x) = \sqrt{\cos x}$, $T = 2\pi$.

33. Показать, что число $T = -\pi$ не является периодом функции $f(x) = \sin x$.

34. Показать, что функция $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ не является периодической.

35. Найти наименьший положительный период функции:

1) $f(x) = \cos(2x + 3)$; 3) $f(x) = \left\{3x - \frac{5}{8}\right\}$;

2) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{7}$; 4) $f(x) = \sin^2 10x$.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

36. Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

2) $\operatorname{tg} \alpha = 5$ и $\operatorname{ctg} \alpha = 0{,}2$;

3) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ и $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$;

4) $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$?

37. Вычислить значения тригонометрических функций угла α, зная, что:

1) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = 4$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha = -\frac{2}{7}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

38. Упростить выражение:

1) $\sin^2 \beta - 1$;

2) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 5\alpha$;

3) $2\sin \frac{\alpha}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{3} - \cos \frac{\alpha}{3}$;

4) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1} + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$;

5) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$;

6) $\left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)$;

7) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$;

8) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;

9) $\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} - \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}$;

10) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;

11) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$;

12) $\frac{\cos^3 (-\alpha) + \sin^3 (-\alpha)}{\cos \alpha + \sin (-\alpha)}$.

39. Доказать тождество:

1) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;

2) $\sin^2\alpha \cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta + \cos^2\alpha \sin^2\beta + \cos^2\alpha \cos^2\beta = 1$;

3) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2\alpha$;

4) $\frac{\sin \alpha - \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha} = \frac{\sin \beta - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \beta}$;

5) $1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = 3 \sin^2\alpha \cos^2\alpha$.

40. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $3 \cos^2\alpha - 4 \sin^2\alpha$; 2) $2 \sin^2\alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

41. Упростить выражение:

1) $\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, если $3\pi < \alpha < 4\pi$;

2) $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

3) $\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)}$, если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

42. Дано: $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Найти:

1) $\sin \alpha \cos \alpha$;

2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$;

3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;

4) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$;

5) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$;

6) $\sin \alpha - \cos \alpha$.

43. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 8\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 4$;

2) $\dfrac{3\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -3$.

44. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $3\cos^2\alpha - 4\sin\alpha$.

Формулы приведения

45. Привести к тригонометрической функции угла α:

1) $\sin(\pi - \alpha)$;
2) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;
3) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$;
4) $\operatorname{ctg}(\alpha - \pi)$;
5) $\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{2} + \alpha\right)$;
6) $\cos^2(360^\circ - \alpha)$.

46. Привести к значению тригонометрической функции положительного аргумента, меньшего 45° $\left(\text{или } \dfrac{\pi}{4}\right)$:

1) $\cos 127^\circ$;
2) $\operatorname{tg} 172^\circ$;
3) $\sin 219^\circ$;
4) $\operatorname{ctg} 194^\circ$;
5) $\cos 400^\circ$;
6) $\operatorname{tg}(-298^\circ)$;
7) $\cos 1{,}2\pi$;
8) $\sin\dfrac{5\pi}{9}$;
9) $\sin 1916^\circ$;
10) $\cos 3000^\circ$;
11) $\operatorname{tg} 4{,}3\pi$;
12) $\operatorname{ctg}\dfrac{21\pi}{8}$.

47. Вычислить:

1) $\sin 120^\circ$;
2) $\cos 225^\circ$;
3) $\operatorname{tg}(-240^\circ)$;
4) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$;
5) $\operatorname{ctg}\dfrac{11\pi}{6}$;
6) $\cos 10\pi$;
7) $\sin 1110^\circ$;
8) $\cos\dfrac{74\pi}{3}$;
9) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{20\pi}{3}\right)$.

48. Найти значение выражения:

1) $3\operatorname{ctg} 135^\circ + 2\cos 120^\circ + \operatorname{tg} 420^\circ + 2\sin 300^\circ$;

2) $\sin\dfrac{7\pi}{4}\cos\dfrac{7\pi}{6}\operatorname{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{4\pi}{3}$;

3) $\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \ldots \operatorname{tg} 49^\circ$.

49. Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\mathrm{ctg}(2\pi-\alpha)+\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

2) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos(3\pi-\alpha)+\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)\sin(3\pi+\alpha)$;

3) $\dfrac{\sin(\pi-\beta)\cos(\pi+\beta)\,\mathrm{tg}(\pi-\beta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}$;

4) $\left(\mathrm{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)\right)^2+\dfrac{2\sin^2(\pi-\alpha)}{\mathrm{tg}(\alpha-\pi)}$.

50. Известно, что α, β, γ — углы треугольника. Доказать, что $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$.

51. Найти значения выражений $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$ и $\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)$, если $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

52. Доказать тождество:

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha-\pi)=\cos^2\alpha.$$

Формулы сложения

53. Упростить выражение:

1) $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$;

3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha-\sin\alpha$;

4) $\dfrac{\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)}{\sin(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)}$.

54. Упростить выражение:

1) $\sin\varphi\cos3\varphi+\cos\varphi\sin3\varphi$;

2) $\cos64^\circ\cos34^\circ+\sin64^\circ\sin34^\circ$;

3) $\sin(84^\circ - \alpha)\cos(\alpha + 24^\circ) - \sin(84^\circ - \alpha)\sin(\alpha + 24^\circ)$;

4) $\sin 200^\circ \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cos 50^\circ$.

55. Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + 2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha + \beta)} = \operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$;

3) $\sin 6\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha - \cos 6\alpha = 1$;

4) $\sin^2(\alpha - 30^\circ) + \sin^2(30^\circ + \alpha) - \sin^2\alpha = 0{,}5$.

56. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{tg} 46^\circ}{1 - \operatorname{tg} 14^\circ \operatorname{tg} 46^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\operatorname{tg}\alpha}$.

57. Доказать тождество:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 1.$$

58. Используя формулы сложения, найти:

1) $\sin 15^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 15^\circ$.

59. Дано: $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найти $\sin(30^\circ + \alpha)$.

60. Дано: $\sin\alpha = 0{,}6$; $\sin\beta = -0{,}8$; $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Найти $\cos(\alpha - \beta)$.

61. Найти наибольшее значение выражения:

1) $\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$;

2) $3\sin\alpha + 4\cos\alpha$.

Формулы двойного аргумента

62. Выразить данные тригонометрические функции через функции аргумента, вдвое меньше данного:

1) $\cos\alpha$;

2) $\sin 5\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{4}$;

4) $\sin(\alpha + \beta)$;

5) $\cos 1$;

6) $\sin 8\alpha$;

7) $\sin\left(\dfrac{2x}{3} - 20^\circ\right)$;

8) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7} + \gamma\right)$.

63. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sin \alpha}{2 \cos \dfrac{\alpha}{2}}$;

2) $\dfrac{\cos \alpha}{\sin \dfrac{\alpha}{2} - \cos \dfrac{\alpha}{2}}$;

3) $1 - 2 \sin^2 (45^\circ + 1{,}5\alpha)$;

4) $\sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\alpha}{2} \cos \alpha$;

5) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$;

6) $\dfrac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}$;

7) $\dfrac{\sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4}$;

8) $\dfrac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos^2 \left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)}$.

64. Найти значение выражения:

1) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

2) $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} - \sin^2 \dfrac{\pi}{8}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg} 22^\circ 30'}{1 - \operatorname{tg}^2 22^\circ 30'}$.

65. Дано: $\sin \alpha = 0{,}8$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найти:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

66. Дано: $\operatorname{tg} \dfrac{x}{6} = 0{,}5$. Найти: $\operatorname{tg} \left(45^\circ - \dfrac{x}{3}\right)$.

67. Упростить выражение $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha) \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, если $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

68. Доказать, что $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \dfrac{1}{8}$.

Формулы понижения степени

69. Представить в виде произведения выражение:

1) $1 + \cos \dfrac{\alpha}{2}$;

2) $1 - \cos 10\alpha$;

3) $1 - \cos 70^\circ$;

4) $1 - \cos \dfrac{3\alpha}{2}$;

5) $1 + \sin \alpha$;

6) $1 - \sin 40^\circ$.

70. Понизить степень следующих выражений:

1) $\cos^2 4x$; 2) $\sin^2 3x$;

3) $\sin^2\left(\frac{x}{2} - 10^\circ\right)$; 4) $\cos^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{8}\right)$.

71. Доказать тождество:

1) $2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha = 1$;

2) $\operatorname{ctg} 2\alpha\,(1 - \cos 4\alpha) = \sin 4\alpha$;

3) $\dfrac{1 + \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$;

4) $\dfrac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

72. Упростить выражение $\sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

73. Преобразовать в произведение:

1) $\cos 40^\circ + \cos 10^\circ$; 5) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

2) $\sin 4\alpha + \sin 10\alpha$; 6) $\cos\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right)$;

3) $\sin\frac{11\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}$; 7) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$;

4) $\cos 3\alpha - \cos 7\alpha$; 8) $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

74. Преобразовать в произведение:

1) $\sin 40^\circ + \cos 70^\circ$; 3) $\sin\alpha - \cos\beta$.

2) $\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{10}$;

75. Преобразовать в произведение:

1) $\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{tg} 16^\circ$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $\operatorname{tg} 7\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24} + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$.

76. Преобразовать в произведение:

1) $1 + 2\cos\alpha$; 2) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$; 3) $\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha$.

77. Доказать тождество:

1) $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha =$

$= 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

3) $\dfrac{\sin 3\alpha - \sin\alpha + \cos 2\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

4) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha)$.

78. Упростить выражение:

1) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}\right)\cdot\dfrac{\cos 10\alpha - \cos 6\alpha}{\sin 3\alpha}$;

2) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$;

3) $\dfrac{1 + \cos(2\alpha - 2\pi) + \cos(4\alpha + 2\pi) - \cos(\pi - 6\alpha)}{\cos(\pi - 2\alpha) + 1 - 2\cos^2(\pi + 2\alpha)}$;

4) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\dfrac{15\pi}{8} + \alpha\right)$.

79. Доказать тождество:

1) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha + \sin 2\alpha + \cos 3\alpha + \sin 4\alpha =$

$= 4\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{5\alpha}{2}\right)$.

Формулы тангенса и котангенса половинного аргумента

80. Дано: $\cos 2\alpha = -0{,}8$, $90^\circ < \alpha < 135^\circ$. Найти $\operatorname{ctg}\alpha$.

81. Представить данную дробь в виде тангенса некоторого угла:

1) $\dfrac{\cos 40^\circ}{1 + \sin 40^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$; 3) $\dfrac{1 - \sin(30^\circ + 2\alpha)}{\cos(30^\circ + 2\alpha)}$.

82. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\dfrac{9\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}+4\alpha\right)\right)}$.

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

83. Преобразовать в сумму произведение:

1) $\sin 4\alpha\cos 7\alpha$;
2) $\cos 25^\circ\cos 50^\circ$;
3) $\sin 2\alpha\sin\alpha$;
4) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

84. Доказать тождество:

1) $\sin 2\alpha+2\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}+\alpha\right)=0{,}5$;

2) $\sin 5\alpha\sin\alpha+\cos 7\alpha\cos\alpha=\cos 6\alpha\cos 2\alpha$;

3) $\sin^2 2\alpha-\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$;

4) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=1$.

Построение графиков тригонометрических функций

85. Построить график функции:

1) $y=\sin x-1$;
2) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$;
3) $y=\sin 2x$;
4) $y=2\sin x$;
5) $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-1$;
6) $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1$.

86. Построить график функции:

1) $y=\cos x+1{,}5$;
2) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \cos \frac{x}{3}$;

4) $y = -\frac{1}{2} \cos x$;

5) $y = -\frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1{,}5$;

6) $y = -\frac{1}{2} \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{12}\right) + 1{,}5$.

87. Построить график функции:

1) $y = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 3 \operatorname{tg} x - 2$; 3) $y = \operatorname{ctg} \frac{2x}{3}$.

88. Построить график функции:

1) $y = |\sin x|$; 2) $y = \operatorname{tg} |x|$; 3) $y = \cos \left|x - \frac{\pi}{4}\right|$.

89. Построить график функции:

1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \cos x - \sqrt{3} \sin x$.

90. Построить график функции:

1) $y = (\sqrt{\sin x})^2$;

2) $y = \sin x + \sin |x|$;

3) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$;

4) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$;

5) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$;

6) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;

7) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$;

8) $y = \operatorname{tg} x \cos x$;

9) $y = \frac{\cos x - |\cos x|}{\sin x + |\sin x|}$;

10) $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$.

Понятие обратной функции

91. Какие из графиков, изображенных на рис. 5, являются графиками оборотных функций?

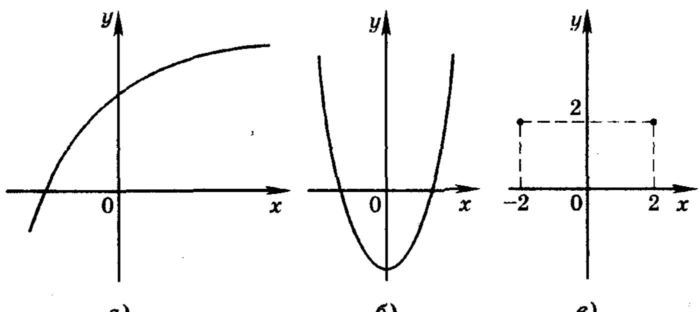


Рис. 5

92. Какие из следующих функций являются оборотными:

1) $y = \sqrt{x}$;
2) $y = \sqrt[3]{x^2}$;
3) $y = x\,|x|$;
4) $y = x^2,\ x \in [1; \infty)$;
5) $y = x^2,\ x \in [-2; 0]$;
6) $y = x^2,\ x \in [-2; \infty)$;
7) $y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
8) $y = \sin x,\ x \in [0; \pi]$;
9) $y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$?

93. Найти функцию, обратную данной:

1) $y = 2x + 4$;
2) $y = \dfrac{3}{x-2}$;
3) $y = \sqrt[3]{4 - 3x}$;
4) $y = 1 + \sqrt{x+3}$;
5) $y = x^2,\ x \in [2; \infty)$;
6) $y = x^4,\ x \in (-\infty; -3)$.

94. С помощью графика функции f, изображенного на рис. 6, построить график функции g, обратной функции f.

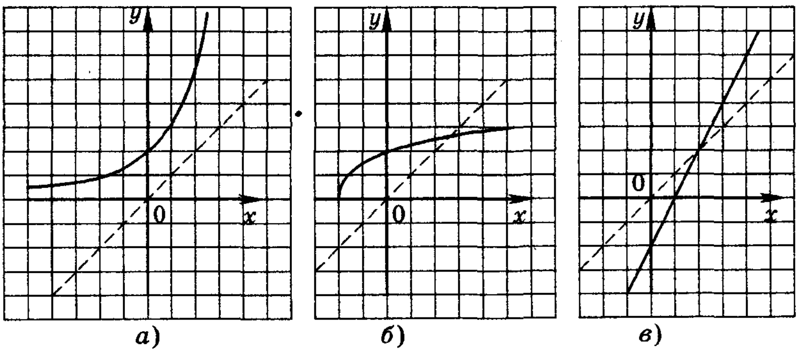


Рис. 6

Обратные тригонометрические функции

95. Найти:

1) $\arcsin \frac{1}{2}$;
2) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$;
4) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$;
5) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
6) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$;
7) $\operatorname{arctg} (-\sqrt{3})$;
8) $\operatorname{arcctg} (-1)$.

96. Найти значение выражения:

1) $\arcsin(-1) + \arccos 1 + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$;

2) $3\arccos 0 + 4\arcsin 1 - 2\arccos(-1) + 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

97. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

2) $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\operatorname{arctg} 1\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

98. Найти область определения функции:

1) $y = \arcsin(x - 1)$;

2) $y = \arccos(x^2 - 8)$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{2 - x}$.

99. Найти область значений функции:

1) $y = 3\arcsin x + \frac{\pi}{4}$;

2) $y = 4 - 2\operatorname{arctg} 2x$.

100. Вычислить:

1) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{12}\right)$;

3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1)$.

101. Вычислить:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{9}\right)$;

2) $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$.

102. Вычислить:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{2}{9}\right)$;

2) $\sin\left(\arccos\frac{3}{4}\right)$;

3) $\sin(\operatorname{arctg} 3)$;

4) $\cos(\operatorname{arcctg}(-2))$;

5) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$;

6) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 6)$.

103. Решить уравнение:

1) $\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$;

2) $\arccos(x + 3) = \frac{2\pi}{3}$;

3) $\operatorname{arctg}(2x - 1) = \frac{\pi}{3}$

104. Решить неравенство:

1) $\arcsin x > \frac{\pi}{6}$;

2) $\arccos 3x \le \frac{2\pi}{3}$;

3) $\operatorname{arctg} (5x + 2) > -\frac{\pi}{3}$.

105. Построить график функции:

1) $y = 2 \arccos x$;

2) $y = \arcsin x - 2$;

3) $y = \frac{\arcsin |x|}{\arcsin x}$;

4) $y = \cos (\arccos x)$;

5) $y = \sin (\arccos x)$;

6) $y = \cos (2 \arcsin x)$.

106. При каких значениях параметра a имеет решение уравнение:

1) $\arcsin x = (a - 1) \pi$;

2) $\arccos x = \cos a$;

3) $\operatorname{arctg} x = \cos a$;

4) $\frac{\arccos x - a}{\arccos x + \frac{\pi}{6}} = 0$;

5) $\frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}{\operatorname{arcctg} x - a} = 0$;

6) $\frac{\arcsin x + a}{\sqrt{\arcsin x}} = 0$?

Решение простейших тригонометрических уравнений

107. Решить уравнение:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$;

2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;

4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\operatorname{tg} x = -1$.

108. Решить уравнение:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

5) $\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$;

6) $\cos (5x - 8) = -1$;

7) $\sin (4x + 3) = \frac{3}{5}$;

8) $\cos \frac{x}{\pi} = 1$;

9) $\cos(2x-1)=\frac{\pi}{4}$;

10) $\sin\left(\frac{\pi}{14}-\frac{2x}{3}\right)=\frac{1}{3}$;

11) $\cos\left(4-\frac{3x}{2}\right)=0{,}9$;

12) $\operatorname{tg}(3-2x)=2$.

109. Решить уравнение:

1) $2\sin\left(\frac{x}{7}-\frac{\pi}{28}\right)-2=0$;

2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)+1=0$;

3) $3-\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{10}\right)=0$;

4) $3\operatorname{ctg}(2x+6)-9=0$.

110. Решить уравнение:

1) $\sin\frac{2\pi}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos\pi\sqrt{x}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\pi x^2=0$;

4) $\sin(\pi\sin x)=-1$.

111. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

112. Сколько корней уравнения $\operatorname{tg}3x=1$ принадлежит промежутку $[0;\pi]$?

113. Найти все корни уравнения $\cos\left(7x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\frac{2\pi}{5}<x<\pi$.

114. При каких значениях параметра a имеет решения уравнение:

1) $\sin x=a+2$;

2) $\cos\frac{x}{10}=a^2+6a+9$;

3) $(a+1)\cos x=a-1$;

4) $(a^2-4)\sin x=a-2$?

115. При каких значениях параметра a данное уравнение имеет единственный корень на указанном промежутке:

1) $(x-a)(\operatorname{tg}x-1)=0$, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$;

2) $(x+a)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=0$, $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$?

116. Определить количество корней уравнения $\sin x=a$ на промежутке $\left[0;\frac{11\pi}{6}\right]$ в зависимости от значения параметра a.

Решение тригонометрических уравнений

117. Решить уравнение:

1) $\sin^2 3x - 3\sin 3x + 2 = 0$;
2) $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$;
3) $\cos 2x + 3\sin x = 2$;
4) $2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{4} - 2\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{4} = 3$.

118. Решить уравнение:

1) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;
2) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;
3) $4\sin^2 x + \sin 2x = 3$;
4) $2\sin x - 3\cos x = 2$.

119. Решить уравнение:

1) $\cos 3x + \cos 5x = 0$;
2) $\sin 9x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$;
3) $\sin 3x + \cos 7x = 0$;
4) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$;
5) $\cos x + \cos 5x = \cos 3x + \cos 7x$.

120. Решить уравнение:

1) $\sin^2 \frac{x}{4} = \frac{3}{4}$;
2) $\cos^2 x + \cos^2 5x = 1$;
3) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = 0{,}5$;
4) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

121. Решить уравнение:

1) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$;
2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin 3x$.

122. Решить уравнение:

1) $\sin(45^\circ + x)\sin(x - 15^\circ) = \frac{1}{2}$;
2) $\cos 7x\cos 3x = \cos 4x$;
3) $\sin 5x\cos 3x = \sin 9x\cos 7x$;
4) $2\sin^2 x = 1{,}5 - \sin x\sin 3x$.

123. Решить уравнение:

1) $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$;
2) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 0$;
3) $\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2\cos x$;
4) $\frac{1 - \cos x - \sin x}{\cos x} = 0$.

124. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x = 1$.

125. Найти наименьший положительный корень уравнения $\sin^3 x\cos x = 0{,}25 + \cos^3 x\sin x$.

126. Найти все корни уравнения $\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = \sqrt{3} + 2\sin x \cos x$, удовлетворяющие неравенству $0 < x < 2$.

127. Найти, сколько корней уравнения $\sin x + \cos x + \sin 3x = 0$ принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

128. Решить уравнение $\sqrt{9 - x^2}\,(2\sin 2\pi x + 5\cos \pi x) = 0$.

129. Найти, при каких значениях параметра a имеет решения уравнение:

1) $\sin^2 x - (3a + 1)\sin x + a(2a + 1) = 0$;

2) $\cos x + \cos 5x = a^2 - 2a + 3$;

3) $\sin^2 x - \sin x + a^2 - a + \frac{1}{2} = 0$;

4) $4\cos 2x - 3\sin 2x = 2a + 2$;

5) $\sin^4 x - 2(a - 1)\sin^2 x - 2a + 1 = 0$.

130. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x - \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x + \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$ имеет на промежутке $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$: 1) два корня; 2) три корня.

Решение тригонометрических неравенств

131. Решить неравенство:

1) $\sin x \le \frac{1}{2}$;

2) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\operatorname{tg} x > -1$;

6) $\operatorname{tg} x \le \sqrt{3}$;

7) $\operatorname{ctg} x \ge -\sqrt{3}$;

8) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

132. Решить неравенство:

1) $\sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos \frac{x}{2} \ge \frac{1}{2}$;

3) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \le -\frac{1}{2}$;

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$;

6) $\operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{5}\right) \le -1$.

133. Решить неравенство:

1) $1 \le \mathrm{tg}\, x \le 2$;

2) $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{4}$;

3) $|\sin x| > \frac{1}{2}$;

4) $|\mathrm{tg}\, x| \ge \sqrt{3}$.

134. Решить неравенство:

1) $2\cos^2 2x \ge 1{,}5$;

2) $\cos x \cos \frac{x}{2} - \sin x \sin \frac{x}{2} \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 \ge 0$;

4) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} \le 0$.

Системы тригонометрических уравнений

135. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x + \cos y = \frac{3}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \sin^2 y + \sin^2 x = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

136. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Определение корня *n*-й степени

137. Найти значение корня:

1) $\sqrt[3]{64}$; 2) $\sqrt{1{,}21}$; 3) $\sqrt[4]{0{,}0001}$; 4) $\sqrt[5]{-32}$; 5) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

138. Найти значение выражения:

1) $0{,}2\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\sqrt[4]{625}$;

2) $\sqrt[7]{-128} + 3(\sqrt[5]{9})^5 - 4\sqrt[8]{256}$;

3) $4\left(-\sqrt[8]{6}\right)^8 - 0{,}8\sqrt[4]{10000} + \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{270}\right)^3$;

4) $\sqrt[4]{2\frac{113}{256}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{8}{125}} + (-2\sqrt{7})^2 - \left(-\sqrt[9]{11}\right)^9$;

5) $\sqrt[6]{0{,}000064} + \frac{2}{9}\left(-3\sqrt[4]{0{,}4}\right)^4 + 6\sqrt[12]{0{,}3^{12}}$;

6) $\left(-\sqrt[5]{30}\right)^5 + \sqrt[6]{4^3} - \sqrt[3]{343} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[8]{13^8} - 100\sqrt[4]{0{,}0081}$.

139. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt[4]{x-8}$; 2) $y = \sqrt[8]{-x}$;

3) $y = \sqrt[5]{x+2}$; 4) $y = \sqrt[6]{x^2-4x}$.

140. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x} = 4$; 4) $\sqrt[4]{x} + 2 = 0$; 7) $\sqrt[5]{4x} + 2 = 0$;

2) $\sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}$; 5) $\sqrt[3]{x} + 6 = 0$; 8) $\sqrt[5]{4x+2} = 0$;

3) $\sqrt[4]{x} - 5 = 0$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{x} - 2 = 0$; 9) $\sqrt[5]{4x+2} = 3$.

141. Решить уравнение:

1) $x^5 = 32$; 5) $x^8 = 1$; 9) $(x+3)^3 = 27$;

2) $x^7 = 8$; 6) $x^6 = 729$; 10) $(x-2)^6 = 64$;

3) $x^9 = -16$; 7) $x^{10} = 5$; 11) $3x^4 + 475 = 0$;

4) $x^4 = \frac{1}{16}$; 8) $x^4 = -81$; 12) $8x^4 - 64 = 0$.

142. Решить уравнение:

1) $a\sqrt[6]{x} = 0$; 3) $a\sqrt[3]{x} = a$; 5) $x^4 = a + 3$; 7) $x^3 = a - 4$;

2) $\sqrt[4]{ax} = 0$; 4) $\sqrt[8]{x} = a$; 6) $ax^6 = 3$; 8) $x^6 = a^2 - 25$.

143. Решить уравнение:

1) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$; 3) $x^{12} + x^6 - 6 = 0$.

2) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$;

144. Найти два последовательных целых числа, между которыми находится число: 1) $\sqrt[3]{12}$; 2) $\sqrt[4]{50}$; 3) $-\sqrt[5]{30}$.

145. Оценить значение $\sqrt[3]{x}$, если:

1) $8 \le x \le 343$; 2) $-27 < x < 64$.

146. Оценить значение x, если:

1) $-1 \le \sqrt[5]{x} \le 2$; 2) $3 < \sqrt[4]{x} < 5$.

147. Указать все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

1) 2 и $\sqrt[3]{130}$; 2) $\sqrt[5]{-40}$ и $\sqrt[4]{650}$.

Свойства арифметического корня n-й степени

148. Найти значение корня:

1) $\sqrt[3]{27 \cdot 64}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 625}$;
3) $\sqrt[5]{243 \cdot 0{,}00032}$;
4) $\sqrt[3]{4^6 \cdot 3^9}$;
5) $\sqrt[7]{0{,}3^7 \cdot 5^{14}}$;
6) $\sqrt[4]{\dfrac{3^8 \cdot 7^4}{5^4 \cdot 2^{12}}}$.

149. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$;
2) $\sqrt[6]{10\,000} \cdot \sqrt[6]{100}$;
3) $\sqrt[3]{0{,}108} \cdot \sqrt[3]{2}$;
4) $\sqrt[8]{3^5 \cdot 5^2} \cdot \sqrt[8]{3^3 \cdot 5^6}$;
5) $\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{729}}$;
6) $\dfrac{\sqrt[3]{5^8 \cdot 7^{10}}}{\sqrt[3]{5^2 \cdot 7^{16}}}$;
7) $\sqrt[3]{5 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5 + \sqrt{17}}$;
8) $\sqrt[4]{26 + \sqrt{51}} \cdot \sqrt[4]{26 - \sqrt{51}}$;
9) $\sqrt[5]{3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[5]{3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}$.

150. Упростить выражение:

1) $\sqrt[4]{a^4}$, если $a \geq 0$;
2) $\sqrt[6]{b^6}$, если $b \leq 0$;
3) $\sqrt[5]{x^5}$;
4) $\sqrt[4]{16x^8y^4z^{12}}$, если $y \geq 0$; $z \leq 0$;
5) $3{,}5x\sqrt[8]{256x^{14}}$, если $x \leq 0$;
6) $\dfrac{\sqrt[10]{a^{10}b^{20}c^{30}}}{a^2b^3c^4}$, если $a < 0$, $c < 0$;
7) $\sqrt[3]{343m^6n^9}$;
8) $-0{,}2a^3 \cdot \sqrt[4]{625a^{16}b^{36}}$, если $b \leq 0$.

151. Упростить выражение:

1) $\sqrt[4]{(x-3)^4}$;

2) $\sqrt[6]{(a-23)^6}$, если $a \ge 23$;

3) $\sqrt[8]{(y+3)^8}$, если $y \le -3$;

4) $(32-a)\sqrt[4]{\dfrac{81}{(a-32)^4}}$, если $a > 32$.

152. Упростить выражение:

1) $\sqrt[4]{(4-\sqrt{3})^4}$;

2) $\sqrt[3]{(2-\sqrt{7})^3}$;

3) $\sqrt[6]{(\sqrt{6}-\sqrt{8})^6}$;

4) $\sqrt[5]{(8-\sqrt{11})^5} + \sqrt[8]{(3-\sqrt{11})^8}$.

153. Построить график функции:

1) $y = \sqrt[4]{x^4} - x$, если $x \le 0$;

2) $y = (\sqrt[6]{x-3})^6$;

3) $y = \sqrt[6]{(x-6)^6}$;

4) $y = x + \sqrt[4]{x^4}$;

5) $y = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$;

6) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[6]{x^6}} + 3$.

154. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[3]{24}$; 2) $\sqrt[5]{96}$; 3) $\sqrt[4]{1250}$; 4) $\sqrt[6]{320}$.

155. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{8a^4}$;

2) $\sqrt[4]{x^9}$;

3) $\sqrt[3]{-a^{10}}$;

4) $\sqrt[4]{x^4y^5}$;

5) $\sqrt[4]{32x^{10}y^{13}}$;

6) $\sqrt[3]{250m^7n^{20}}$;

7) $\sqrt[4]{-16x^7}$;

8) $\sqrt[6]{a^{26}b^{13}}$;

9) $\sqrt[4]{a^5b^5}$, если $a \le 0$, $b \le 0$;

10) $\sqrt[4]{a^6b^5}$, если $a \le 0$;

11) $\sqrt[6]{a^7b^{14}c^{18}}$, если $c \le 0$;

12) $\sqrt[8]{-a^{17}b^{26}}$, если $b \le 0$.

156. Внести множитель под знак корня:

1) $4\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt[3]{5}$; 3) $10\sqrt[4]{0{,}312}$; 4) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{135}$.

157. Внести множитель под знак корня:

1) $a\sqrt{7}$;

2) $a\sqrt{-a}$;

3) $a\sqrt[4]{a^3}$;

4) $2x\sqrt[3]{3x^2}$;

5) $b\sqrt[7]{4b}$;

6) $3x^2\sqrt[3]{\dfrac{x}{9}}$;

7) $m\sqrt[6]{m^4}$, если $m \le 0$;

8) $ab\sqrt[4]{a^2b}$, если $a \ge 0$;

9) $a^5b^3\sqrt[8]{a^6b^{10}}$, если $a \le 0$, $b \ge 0$.

158. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; 2) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}}$; 3) $\frac{14}{\sqrt[4]{8}}$; 4) $\frac{15}{\sqrt[3]{25}}$; 5) $\frac{24}{\sqrt[5]{8}}$; 6) $\frac{m^3}{\sqrt[7]{m^4}}$.

159. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{33}{\sqrt{17}-\sqrt{6}}$; 2) $\frac{18}{3+\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$; 4) $\frac{10}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$.

160. Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$; 3) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{m}}$; 5) $\sqrt[24]{a^{32}}$; 7) $\sqrt[6]{p\sqrt[5]{p}}$;

2) $\sqrt{\sqrt[5]{x}}$; 4) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 6) $\sqrt[10]{m^5n^{15}}$; 8) $\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^7}}$.

161. Сократить дробь:

1) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{a}-1}{\sqrt[6]{a}+1}$; 5) $\frac{\sqrt[6]{ab^2}-\sqrt[6]{a^2b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$;

2) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$; 4) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}{a-\sqrt[4]{a^3}}$; 6) $\frac{x+8}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}$.

162. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$.

163. Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{a}+2)(\sqrt[3]{a}-2)-(\sqrt[3]{a}+3)^2$;

2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}+1}$;

3) $\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{ab}-\sqrt[3]{b}}-\frac{2\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$;

4) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}-2}{\sqrt[4]{a}+2}-\frac{\sqrt[4]{a}+2}{\sqrt[4]{a}-2}\right):\frac{12\sqrt{a}}{4-\sqrt{a}}$;

5) $\frac{3\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}-4}-\frac{\sqrt[8]{a}+2}{2\sqrt[8]{a}-8}\cdot\frac{96}{\sqrt[4]{a}+2\sqrt[8]{a}}$;

6) $\left(\dfrac{2\sqrt[6]{x}}{2\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}-\dfrac{4\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[3]{x}+4\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}}\right):$

$$:\left(\frac{4\sqrt[6]{x}}{4\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}+\frac{1}{\sqrt[6]{y}-2\sqrt[6]{x}}\right).$$

164. Доказать, что значение выражения

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

есть число рациональное.

Иррациональные уравнения

165. Решить уравнение:

1) $\sqrt[3]{2x-3}=-3$;
2) $\sqrt{2x-3}=-3$;
3) $\sqrt{2x-3}=3$;
4) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{5-x}$;
5) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{3-2x}$;
6) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}$;
7) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x^2+x-23}$;
8) $\sqrt{2x-3}=3-2x$;
9) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{1-x}$;
10) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$.

166. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{2-x}=2$;
2) $\sqrt{7-x}=x-1$;
3) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$;
4) $\sqrt{3x-5}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$;
5) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$;
6) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;
7) $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$;
8) $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$;
9) $\sqrt{7-x}=\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}$;
10) $\sqrt{9-2x}+\sqrt{1-x}=2\sqrt{4-x}$;
11) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{2x+5}+\sqrt{3x}$.

167. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+3=0$;
2) $\sqrt[3]{x}-4\sqrt[6]{x}-5=0$;
3) $x-8\sqrt[4]{x}=0$;
4) $\sqrt{x+3}-3\sqrt[4]{x+3}+2=0$;

5) $\sqrt[3]{x^2-2x+1}+3\sqrt[3]{x-1}-4=0$;

6) $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$;

7) $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$;

8) $\sqrt{\dfrac{2-x}{x+4}}+\sqrt{\dfrac{x+4}{2-x}}=2$;

9) $x\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x^3}=2$;

10) $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}$.

168. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$; 3) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}=5$;

2) $\sqrt[3]{45+x}-\sqrt[3]{x-16}=1$; 4) $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$.

169. Решить уравнение:

1) $\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(6-x)^2}-\sqrt[3]{(x+3)(6-x)}=3$;

2) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6$.

170. Решить уравнение:

1) $\sqrt{5-4\operatorname{tg}x}=2-\operatorname{tg}x$; 3) $\sqrt{-\cos 2x-4\sin x}+\sqrt{2}\cos x=0$.

2) $\sqrt{\cos 2x}=-\cos x$;

171. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\sqrt[3]{y}-\sqrt{x}=7,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}=18;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-y=16,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2;\end{cases}$ 7) $\begin{cases}\sqrt{4-y+x}+\sqrt{9-2y+x}=7,\\ 2x-3y=12;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{3x-y+3}=2,\\ \sqrt{x+2y+4}=4-x;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2},\\ xy-x-y=9;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{41}{20},\\ x+y=41;\end{cases}$ 9) $\begin{cases}9x^2+\sqrt{9x^2+2y+1}=1-2y,\\ 6x+y=2;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ x-y=56;\end{cases}$ 10) $\begin{cases}x+y-\sqrt{x}-\sqrt{y}+2\sqrt{xy}=42,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3.\end{cases}$

Иррациональные неравенства

172. Решить неравенство:

1) $\sqrt{x+2} > 5$;
2) $\sqrt{x+2} < 5$;
3) $\sqrt{x+2} > -3$;
4) $\sqrt{x+2} < -3$.

173. Решить неравенство:

1) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$;
2) $\sqrt{2x^2+6x+3} \geq \sqrt{-x^2-4x}$;
3) $\sqrt{5-2x} < 6x-1$;
4) $\sqrt{2x^2-3x-5} \leq x-1$;
5) $\sqrt{x+33} > x+3$;
6) $\sqrt{x^2+4x-5} > x-3$.

174. Решить неравенство:

1) $(5-2x)\sqrt{x} \leq 0$;
2) $\sqrt{x} - 6\sqrt[4]{x} + 5 \geq 0$;
3) $\sqrt{x+1} > 8 - \sqrt{3x+1}$;
4) $\sqrt{x-5} - \sqrt{10-x} \geq 1$.

175. Найти решения неравенства $a\sqrt{x+1} < 1$ в зависимости от значения параметра a.

Степень с рациональным показателем и ее свойства

176. Заменить степень з дробным показателем корнем:

1) $3^{\frac{1}{2}}$;
2) $10^{\frac{4}{5}}$;
3) $6^{-\frac{1}{4}}$;
4) $12^{-\frac{2}{3}}$;
5) $(mn)^{\frac{2}{3}}$;
6) $mn^{\frac{2}{3}}$;
7) $(a+b)^{1,5}$;
8) $a^{-\frac{4}{5}} + b^{2,6}$.

177. Заменить арифметический корень степенью с дробным показателем:

1) $\sqrt{a}$;
2) $\sqrt[3]{m^2}$;
3) $\sqrt[8]{y^5}$;
4) $\sqrt[6]{2x}$;
5) $\sqrt[4]{5^{-3}}$;
6) $\sqrt[7]{36}$;
7) $\sqrt[9]{(x+y)^2}$;
8) $\sqrt[9]{x^2+y^2}$.

178. Найти значение выражения:

1) $16^{\frac{1}{2}}$; 2) $8^{-\frac{2}{3}}$; 3) $0{,}0016^{-0,5}$; 4) $32^{0,4}$; 5) $\left(11\frac{1}{9}\right)^{2,5}$.

179. Найти область определения фуңкции:

1) $y = x^{\frac{3}{4}}$;
2) $y = x^{-0,7}$;
3) $y = (x+4)^{1,2}$;
4) $y = (x^2+8x-9)^{-\frac{1}{5}}$.

180. Представить выражение в виде степени или произведения степеней:

1) $a^{-0,8} \cdot a^{1,3}$;
2) $a^{-\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{5}{12}}$;
3) $a^{\frac{7}{9}} : a^{\frac{5}{6}}$;
4) $(a^{-0,4})^8$;
5) $a^{\frac{5}{8}} \cdot a^{\frac{7}{12}} \cdot a^{-\frac{13}{24}}$;
6) $\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{15}}\right)^{\frac{6}{11}}$;
7) $\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{9}} \cdot \left(a^{-\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{21}}$;
8) $(a^3)^{-0,7} \cdot (a^{-0,4})^{-5} : (a^{-0,5})^8$;
9) $\left(a^{\frac{7}{30}}b^{-\frac{28}{45}}\right)^{\frac{15}{49}} \cdot \left(a^{-\frac{9}{35}}b^{\frac{36}{35}}\right)^{\frac{5}{18}}$.

181. Найти значение выражения:

1) $2^{2,4} \cdot 2^{-0,3} \cdot 2^{3,9}$;
2) $(3^{-0,6})^4 \cdot 3^{0,4}$;
3) $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{16}} \cdot 25^{\frac{11}{16}}$;
4) $16^{-0,75} \cdot 8^{-\frac{5}{12}} \cdot 4^{\frac{5}{8}}$;
5) $\left(\dfrac{3^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{5}{6}}}{5^{-\frac{1}{6}} \cdot 6}\right)^{-12}$;
6) $\left(\dfrac{8^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{4}{3}}}{27^{-\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{27^{\frac{5}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{5}}}{2^{-\frac{6}{5}} \cdot 81^{\frac{7}{16}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Преобразование выражений, содержащих степени с дробным показателем

182. Упростить выражение:

1) $x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} + 3\right) - \left(x^{\frac{1}{2}} + 3\right)^2$;
2) $\left(m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}}\right)\left(m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}}\right) + \left(2m^{\frac{1}{4}} - 3n^{\frac{1}{4}}\right)\left(5m^{\frac{1}{4}} + 2n^{\frac{1}{4}}\right)$;
3) $\left(a^{\frac{1}{12}} + b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{12}} - b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$;
4) $\left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}\right) - a^{\frac{1}{6}}\left(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{6}}\right)$.

183. Сократить дробь:

1) $\dfrac{a + 6a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}} + 6}$;
2) $\dfrac{2m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{2}} - 4m^{\frac{1}{3}}}$;
3) $\dfrac{a - b}{a^{0,5} + b^{0,5}}$;

4) $\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a+a^{0,5}b^{0,5}+b}$; 6) $\dfrac{x-5x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{6}{5}}-5x^{\frac{2}{5}}}$; 8) $\dfrac{x-16x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}-4x^{\frac{1}{2}}}$;

5) $\dfrac{m^{2,5}n^{1,5}-m^{1,5}n^{2,5}}{m-2m^{0,5}n^{0,5}+n}$; 7) $\dfrac{a+27}{a^{\frac{2}{3}}-9}$; 9) $\dfrac{12^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$.

184. Упростить выражение:

1) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}{a-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{5}{6}}b+ab^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}$;

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{8}}+8}{x^{\frac{1}{4}}+4x^{\frac{1}{8}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{8}}+1}{3x^{\frac{1}{8}}+12}-\dfrac{6-x^{\frac{1}{8}}}{3x^{\frac{1}{8}}}$;

4) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{xy^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y}$;

5) $\left(\dfrac{3m^{\frac{1}{10}}}{m^{\frac{1}{10}}+5}-\dfrac{8m^{\frac{1}{10}}}{m^{\frac{1}{5}}+10m^{\frac{1}{10}}+25}\right):\dfrac{3m^{\frac{1}{10}}+7}{m^{\frac{1}{5}}-25}+\dfrac{5m^{\frac{1}{10}}-25}{m^{\frac{1}{10}}+5}$.

Показательная функция и ее свойства

185. Построить график функции:

1) $y=2^x$; 3) $y=2^{x-2}$; 5) $y=3-2^x$;

2) $y=2^x+1$; 4) $y=2^{|x|}$; 6) $y=|2^x-1|$.

186. Сравнить значения выражений:

1) $3^{2,4}$ и $3^{3,14}$; 3) 1 и $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; 5) $(\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$ и $(\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}$;

2) $0,4^{0,5}$ и $0,4^{0,6}$; 4) $0,22^{-2}$ и 1; 6) $(\sqrt{2}-1)^{-1,4}$ и $(\sqrt{2}-1)^{-1,5}$.

187. Сравнить числа m и n, если:

1) $3{,}8^m < 3{,}8^n$; 2) $0{,}7^m < 0{,}7^n$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^m > \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

188. Сравнить a с единицей, если:

1) $a^{\frac{3}{5}} > a^{\frac{3}{5}}$; 2) $a^{-\frac{2}{3}} < a^{\frac{1}{9}}$; 3) $a^{0{,}2} > 1$.

Показательные уравнения

189. Решить уравнение:

1) $2^x = 128$;

2) $3^{5x+1} = 3^{2x}$;

3) $5^{x^2-5x-14} = 1$;

4) $4^x = 8$;

5) $\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x} = \left(\frac{8}{27}\right)^{x+3}$;

6) $(10^{x-5})^{x-6} = 100$;

7) $\left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{35}{12}\right)^x = \frac{9}{49}$;

8) $3^{4x-x^2} = 17^{4x-x^2}$;

9) $4^x \cdot 5^{x-1} = 0{,}2 \cdot 20^{3-2x}$;

10) $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$.

190. Решить уравнение:

1) $4^{x+1} + 4^x = 320$;

2) $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x-1} = 279$;

3) $2 \cdot 7^{x+1} - 6 \cdot 7^{x-1} - 7^x = 85$;

4) $2 \cdot 16^x - 3 \cdot 2^{4x-1} + 7 \cdot 4^{2x-2} = 120$;

5) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$;

6) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

191. Решить уравнение:

1) $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$;

2) $3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0$;

3) $2^{2x+6} + 2^{x+7} = 17$;

4) $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 = 0$;

5) $\frac{4}{2^{x-2}+2} - \frac{1}{2^{x-2}-3} = 2$;

6) $2^x + 2^{2-x} = 5$;

7) $3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$;

8) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 10$.

192. Решить уравнение:

1) $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$;

2) $6 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x - 4^x = 0$;

3) $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} = 8 \cdot 15^x$;

4) $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}$.

193. Решить уравнение:

1) $2^x = 3 - x$; 2) $3^x + 4^x = 5^x$; 3) $2^{\cos x} = x^2 + 2$.

194. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - (a+3) \cdot 2^x + 4a - 4 = 0$ имеет один действительный корень?

Показательные неравенства

195. Решить неравенство:

1) $4^x > \frac{1}{64}$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{81}$;

3) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2} \ge \left(\frac{6}{5}\right)^{4x-5}$;

4) $(0{,}6)^{\frac{x^2-7x+12}{x}} \le 1$;

5) $8 \cdot 2^{x^2+6x} > 0{,}25$;

6) $(0{,}4)^{\frac{x^2-4}{x}} \le \frac{125}{8}$;

7) $(0{,}2)^{x-2} \le 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{x}}$;

8) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2-\frac{x-3}{x+2}} \le \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{x-2}{x+1}}$.

196. Решить неравенство:

1) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \le 9$;

2) $(0{,}5)^{x-1} + (0{,}5)^{x+1} \le 26$;

3) $7^x - 2^{x+2} < 5 \cdot 7^{x-1} - 2^{x-1}$;

4) $12^x - 2 \cdot 6^x \le 36 \cdot 2^x - 72$.

197. Решить неравенство:

1) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \ge 0$;

2) $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \le 0$;

3) $5^{-x} + 24 < 25 \cdot 5^x$;

4) $(0{,}1)^{-2x} - 9 \cdot (0{,}1)^{-x} - 10 \ge 0$.

198. Решить неравенство:

1) $9 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{-\frac{1}{x}} < 4 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}$;

2) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \ge 0$.

Логарифмы и их свойства

199. Найти:

1) $\log_2 8$; 4) $\log_{20} 20$; 6) $\log_{81} 3$; 8) $\log_{36} 216$;

2) $\log_{13} \frac{1}{13}$; 5) $\log_5 0{,}04$; 7) $\lg 0{,}001$; 9) $\log_{0,5} 32$.

3) $\log_{14} 1$;

200. Найти значение выражения:

1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 512$;

2) $\log_9 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$;

3) $\log_2 32 - \log_{21}\sqrt{21} - 3\log_4 \frac{1}{64}$;

4) $\log_{12} 36 + \log_{12} 9$;

5) $\log_{13} 26 - \log_{13} 2$;

6) $\frac{\lg 27}{\lg 3}$;

7) $\log_{64} \sqrt[3]{2}$;

8) $10^{2\lg 7}$;

9) $27^{1 - \log_3 4}$;

10) $5^{\frac{4}{\log_3 5}}$.

201. Решить уравнение:

1) $3^x = 5$; 2) $7^{2x-3} = 6$; 3) $2^{x+9} = 12$.

202. Вычислить значение выражения

$$3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3} + \frac{1}{3}\log_3 8} - 27\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}.$$

203. Выразить через a и b $\log_{35} 28$, если $a = \log_{14} 7$, $b = \log_{14} 140$.

Логарифмическая функция и ее свойства

204. Найти область определения функции:

1) $y = \log_{0,2}(2x - 7)$; 3) $y = \log_{x-1}(5 - x)$;

2) $y = \lg(4 - x^2)$; 4) $y = \lg(1 + \sin x)$.

205. Сравнить с нулем:

1) $\log_3 7$; 2) $\log_5 0{,}6$; 3) $\log_{\frac{2}{3}} 0{,}1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} 3$.

206. Сравнить a и b, если:

1) $\log_{2,6} a > \log_{2,6} b$; 2) $\log_{\frac{3}{7}} a \le \log_{\frac{3}{7}} b$.

207. Сравнить с единицей основание логарифма, если:

1) $\log_a 10 < \log_a 9{,}6$; 2) $\log_a 0{,}4 > \log_a 0{,}3$.

208. Построить график функции:

1) $y = \log_2(-x)$;
2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$;
3) $y = \lg|x|$;
4) $y = \log_3 \operatorname{tg} x + \log_3 \operatorname{ctg} x$;
5) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;
6) $y = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 x}$.

Логарифмические уравнения

209. Решить уравнение:

1) $\log_2 x = 4$;
2) $\log_{0,2}(x+4) = -2$;
3) $\log_{\frac{8}{27}}(x^2-6x) = -\frac{2}{3}$;
4) $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$;
5) $\log_3(3^x-8) = 2-x$;
6) $\log_x 8 = 3$;
7) $\log_{x-1} 25 = 2$;
8) $\log_x 225 = \frac{2}{3}$;
9) $\log_{x-2}(4x^2-14x+7) = 2$.

210. Решить уравнение:

1) $\log_8(x^2-7x+4) = \log_8(x-3)$;
2) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$;
3) $\log_5(x+1) - \log_5(1-x) = \log_2(2x+3)$;
4) $\log_2(4\cdot 3^x-6) - \log_2(9^x-6) = 1$;
5) $2\log_4(4-x) = 4 - \log_2(-2-x)$;
6) $\lg 5 - 1 = \lg(x-3) - \frac{1}{2}\lg(3x+1)$;
7) $2\log_7(x-2) = \log_7(x-10)^2 - 2$;
8) $\log_3(4-x) + \log_9(2-x)^2 = 1$.

211. Решить уравнение:

1) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$;
2) $\lg^2 x - \lg x^2 - 3 = 0$;
3) $\log_5^2 x^3 - 10\log_5 x + 1 = 0$;
4) $\dfrac{1}{5-\lg x} + \dfrac{2}{1+\lg x} = 1$;

5) $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1x)=\lg x^3-3$;

6) $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^4-3)=0$;

7) $\log^2_{\frac{1}{2}} 4x+\log_2\frac{x^2}{8}=8$;

8) $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4$.

212. Решить уравнение:

1) $x^{\lg^3 x-5\lg x}=0{,}0001$;

2) $x^{\log_4 x}=2^{3(\log_4 x+3)}$;

3) $x^{\lg 3}+3^{\lg x}=54$.

213. Выяснить, при каких значениях a данное уравнение имеет корни. Найти эти корни.

1) $\log_8(x+2)=\log_8(2x-a)$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2ax)=\log_{\frac{1}{3}}(-x-2a+2)$.

214. При каком значении b уравнение

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x+3)=\log_{\frac{1}{2}}(2b+1)x$$

имеет единственный корень?

Логарифмические неравенства

215. Решить неравенство:

1) $\log_3 x>2$;

2) $\log_8 x\le 1$;

3) $\log_{0,2} x\ge -2$;

4) $\log_{\frac{1}{27}} x<\frac{1}{3}$;

5) $\log_5(2x-7)<3$;

6) $\log_{0,3}(6-x)>-1$;

7) $\log_{0,7}(3x-5)<\log_{0,7}(x+1)$;

8) $\log_5(4x-3)>\log_5(3-2x)$;

9) $\log_3\frac{2-3x}{x}\ge -1$;

10) $\log_{\frac{1}{6}}(x+4)>\log_{\frac{1}{6}}(x^2+2x-2)$;

11) $\log_{0,3} \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} \geq 0$;

12) $\lg (x-2) + \lg (27-x) < 2$;

13) $2 \lg (-x) > \lg (x+6)$;

14) $\log_{0,4} (x-1) + \log_{0,4} x \geq \log_{0,4} (x+3)$.

216. Решить неравенство:

1) $\log^2_{0,2} (x-1) > 4$;

2) $\log^2_2 x - 3 \log_2 x - 4 < 0$;

3) $\log^2_3 x - 2 \log_3 x - 8 \geq 0$;

4) $2 \log^2_{\frac{1}{4}} (x+2) + 3 \log_4 (x+2) - 2 \leq 0$.

217. Решить неравенство:

1) $\log_x (x^2+3x-3) > 1$; 2) $\log_{2x+4} (x^2+1) \leq 1$.

218. При каких значениях a число -1 является решением неравенства $\log_a (1-3x) < 4$?

Системы показательных и логарифмических уравнений

219. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3(\log_y x - \log_x y) = 8, \\ xy = 16; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} (y-x) + \log_2 \dfrac{1}{y} = -2, \\ 2y - x = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y-x) = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4^{x+y} - 3^{x-y} = 247, \\ 4^{\frac{x+y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{2}} = 13; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \\ \log_3 (x-2y) + \log_3 (3x-6y) = 3. \end{cases}$

Вариант 2

Функции и их свойства

1. Функция задана формулой $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Найти:

1) $f(2)$; 2) $f(0)$; 3) $f(-2)$; 4) $f(b)$.

2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \le -3; \\ 3x + 10, \text{ если } -3 < x < 0; \\ 10 - 2x^2, \text{ если } x \ge 0. \end{cases}$$

Найти: 1) $f(-3{,}01)$; 2) $f(-3)$; 3) $f(-2{,}5)$; 4) $f(0)$; 5) $f(2)$.

3. Найти область определения функции, заданной формулой:

1) $f(x) = 5 - 4x$;

2) $f(x) = \frac{3}{x+7}$;

3) $f(x) = \frac{x-10}{5}$;

4) $f(x) = \frac{x-6}{x-2}$;

5) $f(x) = \sqrt{5+x}$;

6) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4-x}}$;

7) $f(x) = \frac{x}{x^2-5}$;

8) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-20}$;

9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+6}$;

10) $f(x) = \frac{x^2}{|x|-8}$;

11) $f(x) = \frac{x+1}{|x|+1}$;

12) $f(x) = \frac{15}{|x|+x}$;

13) $f(x) = \sqrt{x+9} - \sqrt{4-x}$;

14) $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{2-x}$;

15) $f(x) = \sqrt{x+3} - \frac{x-6}{x}$;

16) $f(x) = \sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{5-x}}$;

17) $f(x) = \sqrt{x+2} + \dfrac{6x+1}{4x^2-7x-2}$; 20) $f(x) = \sqrt{1-4x-5x^2}$;

18) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} - \dfrac{5x+2}{x^2-7x+12}$; 21) $f(x) = \dfrac{x-6}{\sqrt{|x|-1}}$;

19) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$; 22) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9} - \dfrac{5}{|x|}$.

4. **Найти область значений функции:**

1) $f(x) = \sqrt{x} + 3$;
2) $g(x) = x^2 + 8$;
3) $f(x) = 3 - x^2$;
4) $\varphi(x) = 9 - 6x - 3x^2$;
5) $h(x) = |x| - 4$;
6) $g(x) = \sqrt{x^2+9} - 5$;
7) $f(x) = \sqrt[6]{-|x|}$;
8) $\varphi(x) = \sqrt{x-6} - \sqrt{6-x}$;
9) $h(x) = \cos x + 2$;
10) $f(x) = 4\sin x - 3$;
11) $\varphi(x) = \operatorname{ctg}^2 x + 0{,}6$;
12) $g(x) = \sqrt{4-x^2}$;
13) $h(x) = \dfrac{3}{x^2+2}$;
14) $f(x) = 5 - 3\cos^2 x$.

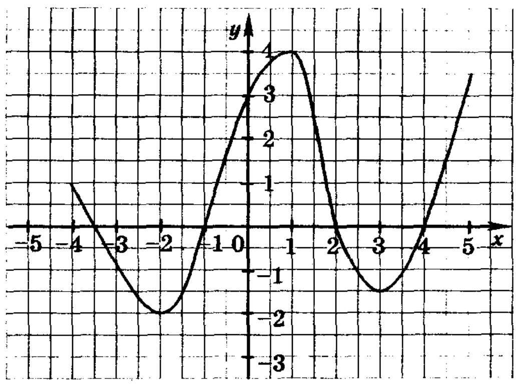


Рис. 7

5. На рис. 7 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-4; 5]$. Используя график, найти:

1) $f(-3{,}5)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1{,}5)$; $f(3)$; $f(4{,}5)$;
2) значения x, при которых $f(x) = -1{,}5$; $f(x) = 1{,}5$; $f(x) = 2{,}5$;
3) нули функции;
4) наибольшее и наименьшее значения функции;
5) область значений функции;

6) промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает;

7) количество корней уравнения $f(x) = a$.

6. Построить график функции, найти промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает:

1) $f(x) = 3x + 1$; 4) $f(x) = -2$; 7) $f(x) = 4x - x^2$;

2) $f(x) = 5 + \frac{1}{4}x$; 5) $f(x) = \frac{6}{x}$; 8) $f(x) = x^2 - 9$;

3) $f(x) = -0{,}5x$; 6) $f(x) = -\frac{4}{x}$; 9) $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

7. Построить график функции, найти промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x}, & \text{если } x \le -4; \\ \frac{3}{4}x, & \text{если } -4 < x < 4; \\ \frac{12}{x}, & \text{если } x \ge 4; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} -3x - 5, & \text{если } x \le 1; \\ x^2 - 4x - 5, & \text{если } 1 < x < 4; \\ -5, & \text{если } x \ge 4; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x \le -1; \\ 2x - x^2, & \text{если } -1 < x < 1; \\ -\sqrt{x}, & \text{если } x \ge 1. \end{cases}$

8. На рис. 8 изображен график функции $y = f(x)$. Используя график, найти:

1) нули функции;

2) решения неравенства $f(x) > 0$;

3) промежутки возрастания и убывания функции;

4) точки максимума и минимума функции;

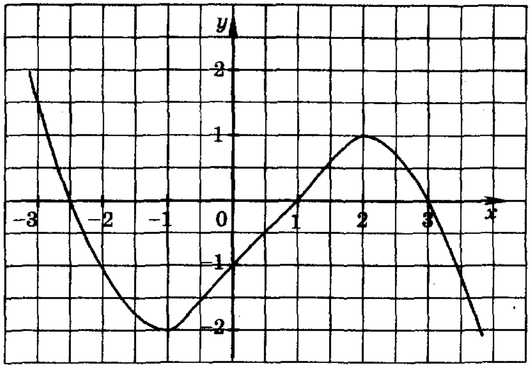
5) экстремумы функции.

9. Найти область определения и построить график функции:

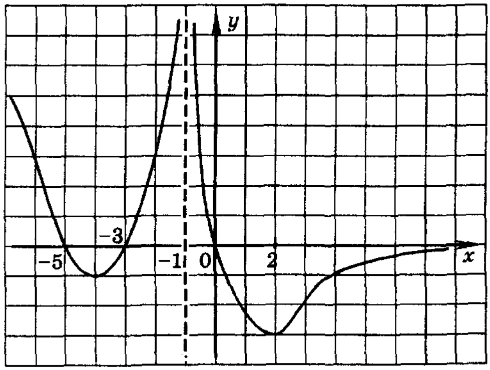
1) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{2 + x}$; 3) $f(x) = \frac{|x| - 1}{|x| - 1}$;

2) $f(x) = \frac{3x - 9}{x^2 - 3x}$; 4) $f(x) = \frac{8x - x^2 - 0{,}5x^3}{x}$.

10. Известно, что $f(5) = 17$. Найти $f(-5)$, если функция f:
1) четная; 2) нечетная.



а)



б)

Рис. 8

11. Является ли функция $y = x^3$ нечетной, если ее областью определения является множество:

1) $(-5; 5)$; 2) $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$; 3) $(-4; 4]$; 4) $(-3; \infty)$?

12. Является ли четной или нечетной функция, заданная формулой:

1) $f(x) = 4x^7$;

2) $f(x) = 2x^6 - 7x^4$;

3) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 6}$;

4) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4}$;

5) $f(x) = x^5 + x^2 + 4$;

6) $f(x) = \dfrac{x^7}{x^5 - x}$;

7) $f(x) = -x^2 |x|$;

8) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x$;

9) $f(x) = \text{tg } x + \sin x$;

10) $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$;

11) $f(x) = x^3 + \cos x$;

12) $f(x) = \dfrac{\text{ctg}^2 x}{9 - x^2}$;

13) $f(x) = \dfrac{9x^3}{(x + 9)^2}$;

14) $f(x) = \dfrac{(1 - \sin x)(x + 1)}{x + 1}$?

13. На рис. 9 изображена часть графика функции $y = g(x)$, определенной на промежутке $[-6; 6]$. Построить график этой функции, если она является:

1) четной; 2) нечетной.

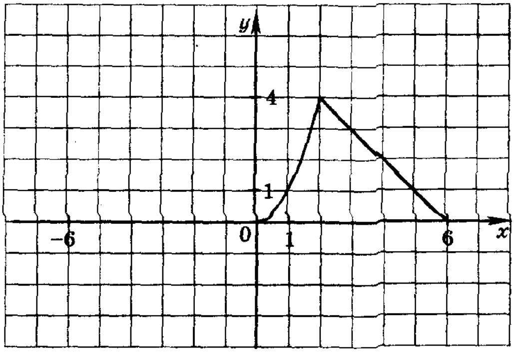
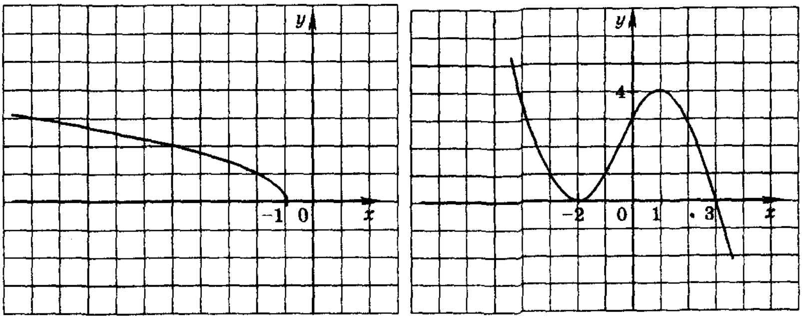


Рис. 9

Преобразование графиков функций

14. На рис. 10 изображен график функции $y = f(x)$. Построить график функции:

1) $y = f(x) + 1$; 2) $y = f(x) - 2$; 3) $y = f(x + 1)$;



а) б)

Рис. 10

4) $y = f(x - 2)$; 5) $y = -f(x)$; 6) $y = 2 - f(x)$.

15. Построить график функции:

1) $y = \frac{6}{x}$; 4) $y = \frac{6}{x-1}$; 7) $y = \frac{x+6}{x}$;

2) $y = \frac{6}{x} - 1$; 5) $y = \frac{6}{x+2}$; 8) $y = \frac{2x+10}{x+2}$.

3) $y = \frac{6}{x} + 2$; 6) $y = \frac{6}{x-4} - 1$;

16. Построить график функции:

1) $y = \sqrt{x}$; 7) $y = 3\sqrt{x}$;

2) $y = \sqrt{x} + 2$; 8) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$;

3) $y = \sqrt{x+3}$; 9) $y = \sqrt{3x+3}$;

4) $y = \sqrt{x-1} - 1$; 10) $y = \sqrt{2x-4} - 2$;

5) $y = \sqrt{3x}$; 11) $y = -2\sqrt{x+1} + 3$;

6) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$; 12) $y = \frac{1}{3}\sqrt{2x+4} - 4$.

17. Построить график функции:

1) $y = x^2 - 4x + 3$; 3) $y = |x^2 - 4x + 3|$;

2) $y = x^2 - 4|x| + 3$; 4) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

18. Построить график функции:

1) $y = |x|$; 3) $y = |x + 2|$; 5) $y = \frac{1}{3}|x|$;

2) $y = |x| + 3$; 4) $y = ||x| - 3|$; 6) $y = |x - 1| + 2$.

Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса

19. Найти значение выражения:

1) $8 \cos 90^\circ - 7 \cos 180^\circ + 3 \sin 270^\circ$;

2) $\sin \pi + \cos \pi + \operatorname{tg} \pi$;

3) $\sin 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ$;

4) $\dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{2}}{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} 0\right) \cos \frac{\pi}{6}}$;

5) $\sqrt{(2 \cos 30^\circ + 1)^2} - \sqrt{(1 - 2 \sin 60^\circ)^2}$.

20. Найти значение выражения $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ при:

1) $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 15^\circ$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{6}$.

21. Возможно ли равенство:

1) $\sin\alpha = -\frac{7}{8}$; 3) $\cos\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $\cos\alpha = \sqrt[4]{2}$; 4) $\sin\alpha = 3 - \sqrt{2}$?

22. При каких значениях a возможно равенство:

1) $\sin x = 4 - a$; 2) $\cos x = a^2 - 3a + 1$?

23. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $7\cos\alpha - 3$; 2) $5 - \sin^2\alpha$; 3) $\frac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha}$.

24. Найти область значений выражения:

1) $1 - 2\,|\sin 4x|$; 2) $\frac{3}{2\cos x + 1}$; 3) $1 - \operatorname{ctg}^4 x$.

Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

25. Какой знак имеет:

1) $\sin 230^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 330^\circ$; 5) $\cos 3$;

2) $\cos 170^\circ$; 4) $\operatorname{ctg}(-220^\circ)$; 6) $\sin\frac{13\pi}{8}$?

26. Определить знак выражения:

1) $\cos 260^\circ \sin 190^\circ$; 3) $\sin 2 \cos 3{,}5$.

2) $\cos 356^\circ \operatorname{tg}(-100^\circ)$;

27. Углом какой четверти является угол α, если известно, что:

1) $\cos\alpha > 0$ и $\operatorname{tg}\alpha < 0$; 2) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$?

28. Найти значение выражения:

1) $4\sin(-60^\circ) - 3\operatorname{ctg}(-60^\circ) + 5\cos(-30^\circ)$;

2) $2\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos(-\pi) + 6\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

29. Сравнить:

1) $\cos 40^\circ$ и $\cos 50^\circ$; 3) $\sin 2$ и $\sin 2{,}5$;

2) $\operatorname{tg} 40^\circ$ и $\operatorname{tg} 50^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 260^\circ$ и $\operatorname{ctg} 250^\circ$.

30. Возможно ли равенство $\sin\alpha = 2\sin 34^\circ$?

Периодические функции

31. Найти значение выражения:

1) $\cos 420^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 390^\circ$; 5) $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{4}$;

2) $\sin 540^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} (-780^\circ)$; 6) $\sin \left(-\frac{13\pi}{3}\right)$.

32. Показать, что число T является периодом функции f:

1) $f(x) = \cos 2x$, $T = \pi$; 3) $f(x) = \sin (\operatorname{tg} x)$, $T = \pi$;

2) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $T = 8$; 4) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $T = 2\pi$.

33. Показать, что число $T = \frac{\pi}{2}$ не является периодом функции $f(x) = \operatorname{tg} x$.

34. Показать, что функция $f(x) = x^3 + 8$ не является периодической.

35. Найти наименьший положительный период функции:

1) $f(x) = \sin \left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $f(x) = \{x\sqrt{3}\}$;

2) $f(x) = \operatorname{ctg} (4x + 1)$; 4) $f(x) = \cos^2 4x$.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

36. Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin \alpha = 0{,}4$ и $\cos \alpha = 0{,}6$;

2) $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = 2 + \sqrt{3}$;

3) $\sin \alpha = -\frac{2}{7}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{2}$;

4) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{4 + 2a}}{a + 4}$ и $\cos \alpha = -\frac{a}{a + 4}$, $a \neq -4$?

37. Вычислить значения тригонометрических функций угла β, зная, что:

1) $\sin \beta = -\frac{1}{4}$; 3) $\operatorname{tg} \beta = -3$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

2) $\cos \beta = \frac{3}{4}$ и $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$; 4) $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{6}$ и $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

38. Упростить выражение:

1) $1-\cos^2\gamma$;

2) $\mathrm{tg}^2 3\varphi+\cos^2 4\varphi+\sin^2 4\varphi$;

3) $5\cos\frac{\beta}{2}-4\,\mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$;

4) $\frac{\sin^2\varphi-1}{\cos^2\varphi-1}+\mathrm{ctg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi$;

5) $\frac{\mathrm{tg}^5\alpha\cos^3\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;

6) $(\sin x+1)(\sin x-1)$;

7) $(\mathrm{tg}\beta+\mathrm{ctg}\beta)^2-(\mathrm{tg}\beta-\mathrm{ctg}\beta)^2$;

8) $\mathrm{tg}\,x+\frac{\cos x}{1+\sin x}$;

9) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

10) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

11) $\frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{ctg}\,\alpha}$;

12) $\frac{\cos^2(-\beta)-\cos^4(-\beta)}{\sin^2(-\beta)\cos^3(-\beta)}$.

39. Доказать тождество:

1) $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}=\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$;

2) $\cos^4\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\beta-$
$-\sin^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$;

3) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\mathrm{tg}\,\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha$;

4) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

5) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$.

40. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha$;

2) $3\cos^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$.

41. Упростить выражение:

1) $\sqrt{1-\cos^2\frac{\beta}{4}}-\sqrt{1-\sin^2\frac{\beta}{4}}$, если $4\pi<\beta<5\pi$;

2) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, если $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

3) $\sqrt{\cos^2\beta\,(1+\mathrm{tg}\,\beta)+\sin^2\beta\,(1+\mathrm{ctg}\,\beta)}$, если $180^\circ<\beta<270^\circ$.

42. Дано: $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=a$. Найти:

1) $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$;

2) $\mathrm{tg}^3\alpha+\mathrm{ctg}^3\alpha$;

3) $\mathrm{tg}^4\alpha+\mathrm{ctg}^4\alpha$;

4) $\mathrm{tg}^6\alpha+\mathrm{ctg}^6\alpha$;

5) $\cos\alpha\sin\alpha$;

6) $\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

43. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{4\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha + 4\sin\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{3}$;

2) $\dfrac{7\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{5\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

44. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $3\cos\alpha - 2\sin^2\alpha$.

Формулы приведения

45. Привести к тригонометрической функции угла α:

1) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 5) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) $\cos(\pi + \alpha)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)$; 6) $\sin^2(180^\circ + \alpha)$.

46. Привести к значению тригонометрической функции положительного аргумента, меньшего 45° $\left(\text{или } \dfrac{\pi}{4}\right)$:

1) $\sin 204^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 343^\circ$; 7) $\sin 1{,}6\pi$; 10) $\sin 1600^\circ$;

2) $\cos 250^\circ$; 5) $\sin 500^\circ$; 8) $\cos\dfrac{7\pi}{11}$; 11) $\operatorname{ctg} 2{,}4\pi$;

3) $\operatorname{tg} 285^\circ$; 6) $\operatorname{ctg}(-108^\circ)$; 9) $\operatorname{tg} 925^\circ$; 12) $\sin\dfrac{32\pi}{7}$.

47. Вычислить:

1) $\sin 150^\circ$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right)$; 7) $\operatorname{tg} 1050^\circ$;

2) $\cos 135^\circ$; 5) $\sin\dfrac{5\pi}{3}$; 8) $\cos\dfrac{43\pi}{4}$;

3) $\operatorname{ctg} 300^\circ$; 6) $\sin 7\pi$; 9) $\sin\left(-\dfrac{58\pi}{3}\right)$.

48. Найти значение выражения:

1) $2\sin 210^\circ + \operatorname{tg} 240^\circ + \operatorname{ctg} 120^\circ + 6\cos 450^\circ$;

2) $\sin\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)\cos\dfrac{19\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$;

3) $\cos 30^\circ + \cos 40^\circ + \cos 50^\circ + \ldots + \cos 150^\circ$.

49. Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)-\sin(2\pi-\alpha)$;

2) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(\alpha-4\pi)\cos(3\pi-\alpha)$;

3) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$;

4) $\left(\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(3\pi+\alpha)}-\sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

50. Известно, что α, β, γ — углы треугольника. Доказать, что $\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

51. Найти значения выражений $\cos(\pi+\alpha)$ и $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

52. Доказать тождество:

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=1.$$

Формулы сложения

53. Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$;

2) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$;

4) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$.

54. Упростить выражение:

1) $\cos 6\alpha\cos 4\alpha-\sin 6\alpha\sin 4\alpha$;

2) $\sin 14^\circ\cos 31^\circ+\cos 14^\circ\sin 31^\circ$;

3) $\cos(24^\circ + \alpha)\cos(24^\circ - \alpha) + \sin(24^\circ + \alpha)\sin(24^\circ - \alpha)$;

4) $\sin 113^\circ \cos 323^\circ + \cos 247^\circ \cos 307^\circ$.

55. Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$;

3) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$;

4) $\cos^2(\alpha - 30^\circ) + \cos^2(\alpha + 30^\circ) + \sin^2\alpha = 1{,}5$.

56. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{tg} 47^\circ}{1 + \operatorname{tg} 2^\circ \operatorname{tg} 47^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)}$.

57. Доказать тождество:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) - \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0.$$

58. Используя формулы сложения, найти:

1) $\cos 75^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 75^\circ$.

59. Дано: $\cos\alpha = -\dfrac{9}{41}$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найти $\cos(\alpha + 45^\circ)$.

60. Дано: $\cos\alpha = 0{,}8$; $\cos\beta = -0{,}96$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Найти $\sin(\alpha - \beta)$.

61. Найти наименьшее значение выражения:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha$; 2) $2\sin\alpha - 7\cos\alpha$.

Формулы двойного аргумента

62. Выразить данные тригонометрические функции через функции аргумента, вдвое меньшего данного:

1) $\sin\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{6}$; 5) $\sin 2$; 7) $\sin\left(50^\circ + \dfrac{4x}{7}\right)$;

2) $\cos 3\alpha$; 4) $\cos(\alpha - \beta)$; 6) $\sin 10\alpha$; 8) $\cos\left(\dfrac{8\pi}{9} - 2\beta\right)$.

63. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sin\alpha}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

3) $2\cos^2(135^\circ-2{,}5\alpha)-1$;

4) $\cos^2\alpha-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$;

5) $\dfrac{\cos3\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin3\alpha}{\cos\alpha}$;

6) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$;

7) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\cos^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-4}$;

8) $\dfrac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-4\alpha\right)}$.

64. Найти значение выражения:

1) $2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1$; 2) $\sin75^\circ\cos75^\circ$; 3) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6}}{4\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}}$.

65. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=-2$, $270^\circ<\alpha<360^\circ$. Найти:

1) $\sin2\alpha$; 2) $\cos2\alpha$; 3) $\operatorname{tg}2\alpha$.

66. Дано: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=3$; $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=-5$. Найти: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

67. Упростить выражение $\sqrt{\dfrac{\cos2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}$, если $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$.

68. Доказать, что $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}=-\dfrac{1}{8}$.

Формулы понижения степени

69. Представить в виде произведения выражение:

1) $1+\cos6\alpha$; 3) $1+\cos100^\circ$; 5) $1-\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

2) $1-\cos\dfrac{\alpha}{4}$; 4) $1+\cos\dfrac{5\alpha}{2}$; 6) $1+\sin\dfrac{\pi}{10}$.

70. Понизить степень следующих выражений:

1) $\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2 12x$;

3) $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{10}-\beta\right)$.

71. Доказать тождество:

1) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$;

2) $\operatorname{tg}\alpha\,(1+\cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$;

3) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

4) $\dfrac{1-\sin(30^\circ-\alpha)}{1+\sin(30^\circ-\alpha)} = \operatorname{tg}^2\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$.

72. Упростить выражение $\sqrt{0{,}5-0{,}5\cos 4\alpha}$, если $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

73. Преобразовать в произведение:

1) $\sin 20^\circ + \sin 50^\circ$; 5) $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{10}\right)+\cos\left(\beta-\frac{\pi}{10}\right)$;

2) $\sin 13\alpha - \sin 7\alpha$; 6) $\sin\left(4\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}$; 7) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\cos 14\alpha - \cos 6\alpha$; 8) $\cos\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

74. Преобразовать в произведение:

1) $\sin 35^\circ - \cos 75^\circ$; 2) $\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{5}$; 3) $\sin\alpha+\cos\beta$.

75. Преобразовать в произведение:

1) $\operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 18^\circ$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+4\alpha\right)$;

2) $\operatorname{tg} 14\varphi + \operatorname{tg} 2\varphi$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$.

76. Преобразовать в произведение:

1) $1 + 2 \sin \alpha$; 2) $\sqrt{2} \cos \alpha + 1$; 3) $1 + \operatorname{tg} \alpha$.

77. Доказать тождество:

1) $\cos 5\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 12\alpha =$

$$= 4 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos 2\alpha \cos \frac{17\alpha}{2};$$

2) $\dfrac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha;$

3) $\dfrac{\sin \alpha - 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha - 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha;$

4) $\cos^2 (\alpha - \beta) - \cos^2 (\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

78. Упростить выражение:

1) $\dfrac{(\sin \alpha + \sin 5\alpha)(\cos 5\alpha - \cos \alpha)}{1 - \cos 6\alpha};$

2) $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2;$

3) $\dfrac{\cos \left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) + \sin (\pi + 4\alpha) + \sin (3\pi - \alpha)}{\sin \left(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos (4\alpha - 2\pi) + \cos (\alpha + 2\pi)};$

4) $\sin^2 \left(\dfrac{5\pi}{12} + \alpha\right) - \cos^2 \left(\dfrac{7\pi}{12} + \alpha\right).$

79. Доказать тождество:

1) $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha = 4 \cos \alpha \cos \left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{2}\right) \cos \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\alpha}{2}\right);$

2) $\cos \alpha - \dfrac{\cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{2 \cos \alpha} = \sqrt{2} \cos \left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right).$

Формулы тангенса и котангенса половинного аргумента

80. Дано: $\sin 2\alpha = \dfrac{1}{3}$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. Найти $\operatorname{tg} \alpha$.

81. Представить данную дробь в виде тангенса некоторого угла:

1) $\dfrac{1 - \sin 36^\circ}{\cos 36^\circ};$ 2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha};$ 3) $\dfrac{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{1 + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}.$

82. Упростить выражение:

1) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}$.

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

83. Преобразовать в сумму произведение:

1) $\cos 3\alpha \cos 2\alpha$;

2) $\sin 15^\circ \cos 40^\circ$;

3) $\sin 5\alpha \sin 3\alpha$;

4) $\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$.

84. Доказать тождество:

1) $\cos 2\alpha + 2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5$;

2) $\cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 4\alpha \sin\alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha$;

3) $\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}$;

4) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=1$.

Построение графиков тригонометрических функций

85. Построить график функции:

1) $y=\sin x+2$;

2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

3) $y=\sin\frac{x}{2}$;

4) $y=3\sin x$;

5) $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2$;

6) $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+2$.

86. Построить график функции:

1) $y=\cos x-1{,}5$;

2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = \cos 2x$;

4) $y = -\frac{1}{4}\cos x$;

5) $y = -\frac{1}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1{,}5$;

6) $y = -\frac{1}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1{,}5$.

87. Построить график функции:

1) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2\operatorname{ctg} x - 1$; 3) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

88. Построить график функции:

1) $y = |\cos x|$; 2) $y = \sin |x|$; 3) $y = \operatorname{tg}\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$.

89. Построить график функции:

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x$.

90. Построить график функции:

1) $y = (\sqrt{\cos x})^2$;

2) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} |x|$;

3) $y = \sin x + \sqrt{\sin^2 x}$;

4) $y = \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 2x$;

5) $y = \sqrt{-\operatorname{tg}^2 x}$;

6) $y = \sqrt{\sin x - 1}$;

7) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$;

8) $y = \operatorname{ctg} x \sin x$;

9) $y = \frac{\sin x + |\sin x|}{\cos x + |\cos x|}$;

10) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

Понятие обратной функции

91. Какие из графиков, изображенных на рис. 11, являются графиками оборотных функций?

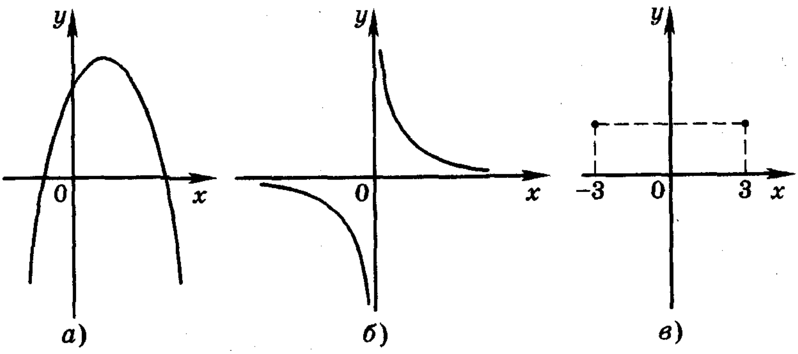


Рис. 11

92. Какие из следующих функций являются оборотными:

1) $y = \sqrt[3]{x}$;

2) $y = |x|$;

3) $y = \frac{1}{x}$;

4) $y = x^4$, $x \in [-3; 3]$;

5) $y = x^4$, $x \in (-\infty; -1]$;

6) $y = x^4$, $x \in (-\infty; 1]$;

7) $y = \cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$;

8) $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$;

9) $y = \cos x$, $x \in [\pi; 2\pi]$?

93. Найти функцию, обратную данной:

1) $y = 5 - 4x$;

2) $y = \frac{6}{1 - x}$;

3) $y = \sqrt[3]{2x - 1}$;

4) $y = 2 - \sqrt{x - 3}$;

5) $y = x^2$, $x \in (-\infty; -2]$;

6) $y = (x + 1)^4$, $x \in (-1; \infty)$.

94. С помощью графика функции f, изображенного на рис. 12, построить график функции g, обратной функции f.

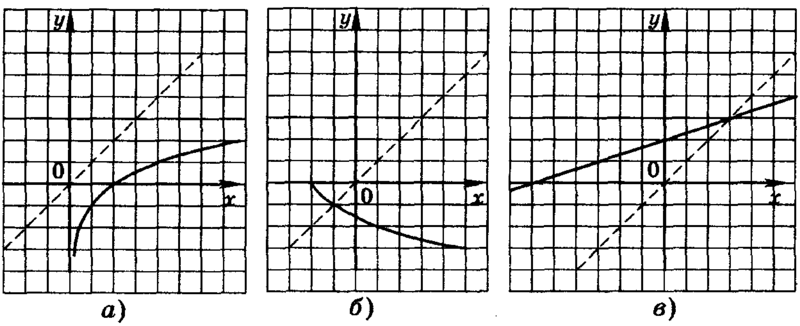


Рис. 12

Обратные тригонометрические функции

95. Найти:

1) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arcctg} 1$;

5) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$;

6) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

7) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

8) $\operatorname{arcctg} (-\sqrt{3})$.

96. Найти значение выражения:

1) $\arccos(-1) + \arcsin 0 + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}(-1)$;

2) $2\arcsin 1 - 3\arccos 0 + 4\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

97. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2) $\cos(2 \operatorname{arctg} 1)$;

3) $\operatorname{tg}\left(5 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $\sin\left(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arcsin \frac{1}{2}\right)$.

98. Найти область определения функции:

1) $y = \arccos(4 + x)$;

2) $y = \arcsin(3 - x^2)$;

3) $y = \operatorname{arcctg} \frac{5}{\sqrt{x - 1}}$.

99. Найти область значений функции:

1) $y = 2 \arccos x - \frac{\pi}{6}$;

2) $y = 3 - 4 \operatorname{arctg} 4x$.

100. Вычислить:

1) $\sin(\arcsin(-0{,}2))$;

2) $\cos\left(\arccos \frac{\pi}{5}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \sqrt{3})$.

101. Вычислить:

1) $\arccos\left(\cos \frac{7\pi}{12}\right)$;

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}\right)$;

3) $\arcsin(\sin 4)$.

102. Вычислить:

1) $\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$;

2) $\cos\left(\arcsin \frac{4}{9}\right)$;

3) $\sin(\operatorname{arcctg}(-5))$;

4) $\cos(\operatorname{arctg} 4)$;

5) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{2}{3}\right)$;

6) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg} \frac{11}{14}\right)$.

103. Решить уравнение:

1) $\arccos x = \frac{5\pi}{6}$; 3) $\arcsin(4x+3) = -\frac{\pi}{3}$.

2) $\operatorname{arcctg}(x-2) = \frac{3\pi}{4}$;

104. Решить неравенство:

1) $\operatorname{arctg} x \le \frac{\pi}{4}$; 3) $\arccos(2x-4) > \frac{5\pi}{6}$.

2) $\arcsin \frac{x}{2} > \frac{\pi}{3}$;

105. Построить график функции:

1) $y = -3\arcsin x$;
2) $y = \arccos x + 1{,}5$;
3) $y = \frac{|\arccos x|}{\arccos x}$;
4) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;
5) $y = \cos(\arcsin x)$;
6) $y = \cos(2\arccos x)$.

106. При каких значениях параметра a имеет решение уравнение:

1) $\arccos x = \pi + a$;
2) $\arcsin x = \sin a$;
3) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{tg} a$;
4) $\dfrac{\arcsin x + a}{\arcsin x - \frac{\pi}{4}} = 0$;
5) $\dfrac{\arccos x - \frac{\pi}{3}}{\arcsin x - a} = 0$;
6) $\dfrac{\arccos x + a}{\sqrt{\arccos x - \frac{\pi}{2}}} = 0$?

Решение простейших тригонометрических уравнений

107. Решить уравнение:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
4) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
5) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
6) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

108. Решить уравнение:

1) $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;
2) $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{10}\right) = 1$;
4) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$;
5) $\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = 1$;
6) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$;

7) $\cos(6x-12)=\frac{4}{7}$;

8) $\cos\frac{2x}{\pi}=0$;

9) $\sin(7x-2)=\frac{\pi}{6}$;

10) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{3x}{4}\right)=0{,}4$;

11) $\sin\left(\frac{\pi}{9}-\frac{2x}{5}\right)=\frac{2}{3}$;

12) $\operatorname{ctg}(5-4x)=-3$.

109. Решить уравнение:

1) $3+3\cos\left(\frac{x}{6}+\frac{\pi}{18}\right)=0$;

2) $3\operatorname{tg}(3x+1)+\sqrt{3}=0$;

3) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)+3=0$;

4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{3}=0$.

110. Решить уравнение:

1) $\operatorname{tg}\frac{2}{3x}=-1$;

2) $\sin\pi\sqrt{x}=-1$;

3) $\cos x^2=\frac{1}{2}$;

4) $\sin(\sin(\sin x))=0$.

111. Найти наименьший положительный корень уравнения $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

112. Сколько корней уравнения $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$ принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$?

113. Найти все корни уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{4}-8x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\frac{3\pi}{5}<x<\frac{7\pi}{8}$.

114. При каких значениях параметра a имеет решения уравнение:

1) $\cos x=a-5$;

2) $\sin 6x=4a-a^2-5$;

3) $(a+3)\sin x=a-1$;

4) $(a^2-5a+4)\cos x=a-4$?

115. При каких значениях параметра a данное уравнение имеет единственный корень на указанном промежутке:

1) $(x+a)\operatorname{tg}x=0$, $\left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$;

2) $(x-a)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=0$, $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$?

116. Определить количество корней уравнения $\cos x=a$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}\right]$ в зависимости от значения параметра a.

Решение тригонометрических уравнений

117. Решить уравнение:

1) $2\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}-1=0$; 3) $2\cos x-\cos 2x-\cos^2 x=0$;

2) $2\cos^2 x-7\sin x-5=0$; 4) $\operatorname{tg} 5x+3\operatorname{ctg} 5x+4=0$.

118. Решить уравнение:

1) $2\sin x-3\cos x=0$; 3) $22\cos^2 x+4\sin 2x=7$;

2) $3\sin^2 x-7\sin x\cos x+4\cos^2 x=0$; 4) $4\sin x-6\cos x=1$.

119. Решить уравнение:

1) $\sin 4x-\sin 2x=0$; 3) $\cos x-\sin 11x=0$;

2) $\cos 3x=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$; 4) $\sin 2x+\sin(\pi-8x)=\sqrt{2}\cos 3x$;

5) $\sin x+\sin 7x-\cos 5x-\cos(\pi-3x)=0$.

120. Решить уравнение:

1) $\cos^2\frac{3x}{2}=\frac{3}{4}$; 3) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x$;

2) $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$; 4) $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$.

121. Решить уравнение:

1) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{2}$; 2) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos 5x$.

122. Решить уравнение:

1) $\cos(x+70^\circ)\cos(x+10^\circ)=\frac{1}{2}$;

2) $\sin 3x\cos 2x=\sin 5x$;

3) $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$;

4) $4\sin^2 2x-1=\cos 2x\cos 6x$.

123. Решить уравнение:

1) $\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}}=0$; 3) $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}=2\sin x$;

2) $\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x-\sin x}=0$; 4) $\dfrac{1+\sin x+\cos x}{\sin x}=0$.

124. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\frac{x}{2}$.

125. Найти наименьший положительный корень уравнения $\sin 3x=\cos 5x$.

126. Найти все корни уравнения $\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$, удовлетворяющие неравенству $0 < x < 3$.

127. Найти, сколько корней уравнения $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}\sin 5x = 0$ принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.

128. Решить уравнение $\sqrt{49 - 4x^2}\left(\sin \pi x + 3\cos \frac{\pi x}{2}\right) = 0$.

129. Найти, при каких значениях параметра a имеет решения уравнение:

1) $\cos^2 x - (a + 7)\cos x + (4 - a)(2a + 3) = 0$;

2) $2\cos \frac{x}{3} + \cos 7x = a^2 - 6a + 12$;

3) $\sin^2 x + 2a\sin x + 2a^2 - 4a + 4 = 0$;

4) $8\sin \frac{x}{4} + 15\cos \frac{x}{4} = 2a + 4$;

5) $\cos^4 x + (a + 1)\sin^2 x - 2a - 3 = 0$.

130. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x - \left(a + \frac{7}{10}\right)\cos x + \frac{7a}{10} = 0$ имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right]$: 1) один корень; 2) два корня.

Решение тригонометрических неравенств

131. Решить неравенство:

1) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x \le \frac{1}{2}$;
7) $\operatorname{ctg} x \le -1$;
2) $\sin x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$;
8) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.
3) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
6) $\operatorname{tg} x \ge 1$;

132. Решить неравенство:

1) $\sin \frac{x}{5} > \frac{1}{2}$;
4) $\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\cos 4x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \le -\sqrt{3}$;
3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
6) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5x}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \ge 1$.

133. Решить неравенство:

1) $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$;

3) $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $|\operatorname{tg} x| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

134. Решить неравенство:

1) $2 \sin^2 \frac{x}{4} < 1{,}5$;

2) $\sin 4x \cos x - \cos 4x \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{ctg}^2 x - 3 \operatorname{ctg} x + 2 \geq 0$;

4) $\cos 2x - \cos x \geq 0$.

Системы тригонометрических уравнений

135. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x - y = \frac{2\pi}{3}, \\ \sin x - \sin \frac{y}{2} = \frac{1}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x - 2 \cos y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}. \end{cases}$

136. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sin x \cos y = -0{,}5, \\ \cos x \sin y = 0{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

Определение корня *n*-й степени

137. Найти значение корня:

1) $\sqrt[3]{125}$; 2) $\sqrt{3{,}24}$; 3) $\sqrt[6]{0{,}000064}$; 4) $\sqrt[7]{-128}$; 5) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$.

138. Найти значение выражения:

1) $0{,}7 \sqrt[4]{10\,000} - \frac{4}{3} \sqrt[5]{243}$;

2) $\sqrt[8]{512} + 2 (\sqrt[7]{7})^7 - 6 \sqrt[4]{81}$;

3) $3\left(-\sqrt[10]{18}\right)^{10} - 1{,}4\sqrt[3]{1\,000\,000} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{80}\right)^4$;

4) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} \cdot \sqrt[3]{4\frac{17}{27}} + (-3\sqrt{2})^2 - \left(-\sqrt[5]{13}\right)^5$;

5) $\sqrt[5]{0{,}00032} + \frac{1}{3}\left(-3\sqrt[6]{0{,}5}\right)^6 + 5\sqrt[13]{0{,}4^{13}}$;

6) $\left(-\sqrt[3]{17}\right)^3 + \sqrt[15]{32^3} - \sqrt[6]{729} + 2\sqrt[3]{-216} + \sqrt[6]{14^6} - 10\sqrt[3]{0{,}008}$.

139. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt[4]{x+7}$;
2) $y = \sqrt[6]{-x}$;
3) $y = \sqrt[7]{x-6}$;
4) $y = \sqrt[8]{x^2+3x}$.

140. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x} = 0{,}8$;
2) $\sqrt[5]{x} = \frac{3}{2}$;
3) $\sqrt[4]{x} - 4 = 0$;
4) $\sqrt[4]{x} + 3 = 0$;
5) $\sqrt[3]{x} + 7 = 0$;
6) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + 3 = 0$;
7) $\sqrt[6]{3x} - 2 = 0$;
8) $\sqrt[6]{3x-2} = 0$;
9) $\sqrt[6]{3x-2} = 2$.

141. Решить уравнение:

1) $x^7 = 128$;
2) $x^9 = 11$;
3) $x^5 = -25$;
4) $x^6 = \frac{1}{729}$;
5) $x^{10} = 1$;
6) $x^4 = 625$;
7) $x^8 = 9$;
8) $x^6 = -64$;
9) $(x-4)^3 = 125$;
10) $(x+1)^4 = 16$;
11) $2x^6 - 36 = 0$;
12) $3x^4 + 27 = 0$.

142. Решить уравнение:

1) $(a-1)\sqrt[8]{x} = 0$;
2) $\sqrt[6]{a(x-1)} = 0$;
3) $(a+2)\sqrt[4]{x} = a+2$;
4) $\sqrt[6]{x} = a-1$;
5) $x^4 = a-5$;
6) $ax^8 = 6$;
7) $x^5 = a+1$;
8) $x^{10} = 49 - a^2$.

143. Решить уравнение:

1) $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$;
2) $x^8 - 14x^4 + 13 = 0$;
3) $x^{12} - 5x^6 - 24 = 0$.

144. Найти два последовательных целых числа, между которыми находится число: 1) $\sqrt[3]{20}$; 2) $\sqrt[4]{90}$; 3) $-\sqrt[4]{40}$.

145. Оценить значение $\sqrt[5]{x}$, если:

1) $32 \le x \le 1024$;
2) $-100000 < x < 243$.

146. Оценить значение x, если:

1) $-2 \le \sqrt[3]{x} \le 6$;
2) $2 < \sqrt[4]{x} < 4$.

147. Указать все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

1) 7 и $\sqrt[3]{400}$; 2) $\sqrt[7]{-98}$ и $\sqrt[4]{1300}$.

Свойства арифметического корня n-й степени

148. Найти значение корня:

1) $\sqrt[3]{216 \cdot 343}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0625 \cdot 256}$;
3) $\sqrt[7]{128 \cdot 0{,}0000001}$;
4) $\sqrt[5]{11^5 \cdot 5^{10}}$;
5) $\sqrt[9]{0{,}2^9 \cdot 3^{18}}$;
6) $\sqrt[4]{\dfrac{10^4 \cdot 3^{16}}{9^4 \cdot 2^8}}$.

149. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$;
2) $\sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{4}$;
3) $\sqrt[3]{0{,}09} \cdot \sqrt[3]{2{,}4}$;
4) $\sqrt[9]{2^5 \cdot 5^4} \cdot \sqrt[9]{5^5 \cdot 2^{22}}$;
5) $\dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{54}}$;
6) $\dfrac{\sqrt[4]{2^7 \cdot 10^3}}{\sqrt[4]{10^{11} \cdot 2^3}}$;
7) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$;
8) $\sqrt[4]{9+\sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9-\sqrt{65}}$;
9) $\sqrt[5]{\sqrt{13}-16} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{13}+16}$.

150. Упростить выражение:

1) $\sqrt[8]{m^8}$, если $m \ge 0$;
2) $\sqrt[4]{n^4}$, если $n \le 0$;
3) $\sqrt[9]{p^9}$;
4) $\sqrt[4]{625x^{12}y^{28}z^8}$, если $x \ge 0$; $y \le 0$;
5) $2{,}5x^3\sqrt[4]{256x^{20}}$, если $x \ge 0$;
6) $\dfrac{\sqrt[3]{a^9b^{15}c^{18}}}{\sqrt[6]{a^{12}b^{18}c^{30}}}$, если $b > 0$; $c < 0$;
7) $\sqrt[3]{0{,}008m^{36}n^{48}}$;
8) $-0{,}8y^2 \cdot \sqrt[4]{81x^{44}y^{24}}$, если $x \ge 0$.

151. Упростить выражение:

1) $\sqrt[6]{(x+2)^6}$;

2) $\sqrt[8]{(b-10)^8}$, если $b \ge 10$;

3) $\sqrt[12]{(4-y)^{12}}$, если $y \le 4$;

4) $(21-b)\sqrt[6]{\dfrac{729}{(b-21)^6}}$, если $b > 21$.

152. Упростить выражение:

1) $\sqrt[4]{(\sqrt{5}-6)^4}$; 3) $\sqrt[8]{(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})^8}$;

2) $\sqrt[3]{(4-\sqrt{3})^3}$; 4) $\sqrt[6]{(7-5\sqrt{2})^6}+\sqrt[5]{(3-5\sqrt{2})^5}$.

153. Построить график функции:

1) $y=\sqrt[6]{x^6}+x$, если $x \le 0$; 4) $y=\sqrt[4]{x^4}-x$;

2) $y=(\sqrt[4]{x+1})^4$; 5) $y=\sqrt[6]{(x-1)^5}\cdot\sqrt[6]{x-1}$;

3) $y=\sqrt[4]{(x+1)^4}$; 6) $y=\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt[8]{(x-1)^8}}-1$.

154. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[3]{40}$; 2) $\sqrt[5]{128}$; 3) $\sqrt[4]{162}$; 4) $\sqrt[3]{375}$.

155. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{12a^8}$; 5) $\sqrt[4]{1250x^{18}y^{21}}$; 9) $\sqrt[6]{m^7n^7}$, если $m \le 0$, $n \le 0$;

2) $\sqrt[4]{x^{15}}$; 6) $\sqrt[3]{108a^{10}b^{25}}$; 10) $\sqrt[6]{a^8b^7}$, если $a \le 0$;

3) $\sqrt[3]{-m^{16}}$ 7) $\sqrt[4]{-81a^{13}}$; 11) $\sqrt[4]{a^5b^{10}c^{20}}$, если $c \ge 0$;

4) $\sqrt[4]{x^{28}y^9}$; 8) $\sqrt[8]{a^{34}b^{19}}$; 12) $\sqrt[10]{-p^{21}q^{34}}$, если $q \le 0$.

156. Внести множитель под знак корня:

1) $7\sqrt{2}$; 2) $4\sqrt[3]{5}$; 3) $10\sqrt[4]{0{,}24}$; 4) $\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{54}$.

157. Внести множитель под знак корня:

1) $x\sqrt{5}$; 4) $3a\sqrt[3]{2a}$; 7) $p\sqrt[10]{p^6}$, если $p \le 0$;

2) $y\sqrt{-y^5}$; 5) $m\sqrt[5]{7m^2}$; 8) $mn\sqrt[8]{m^4n^3}$, если $m \le 0$;

3) $b\sqrt[4]{b^7}$; 6) $5a^3\sqrt[3]{\dfrac{4}{25a^4}}$; 9) $m^3n^5\sqrt[6]{m^4n^8}$, если $m \ge 0$, $n \le 0$.

158. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{21}{\sqrt{7}}$; 2) $\frac{8}{\sqrt[3]{2}}$; 3) $\frac{18}{\sqrt[4]{27}}$; 4) $\frac{20}{\sqrt[3]{10}}$; 5) $\frac{64}{\sqrt[5]{16}}$; 6) $\frac{a^5}{\sqrt[7]{a^5}}$.

159. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{42}{\sqrt{26}+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{28}{5-\sqrt{18}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt[3]{3}+1}$; 4) $\frac{9}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$.

160. Упростить выражение:

1) $\sqrt{\sqrt[6]{m}}$; 3) $\sqrt[7]{\sqrt[5]{x}}$; 5) $\sqrt[21]{b^{14}}$; 7) $\sqrt[7]{c\sqrt[5]{c^2}}$;

2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}$; 4) $\sqrt[4]{b\sqrt[5]{b^2}}$; 6) $\sqrt[18]{a^9b^{27}}$; 8) $\sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^2}}$.

161. Сократить дробь:

1) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[6]{x}-2}$; 5) $\frac{\sqrt[10]{a^5b^4}+\sqrt[10]{a^4b^5}}{\sqrt[5]{b}-\sqrt[5]{a}}$;

2) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; 4) $\frac{\sqrt[4]{x^3}+x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 6) $\frac{x-27}{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}$.

162. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{15}-4}\cdot\sqrt[6]{31+8\sqrt{15}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}$.

163. Упростить выражение:

1) $(\sqrt[4]{x}+5)(\sqrt[4]{x}-5)-(\sqrt[4]{x}+6)^2$;

2) $\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c}-4}-\frac{\sqrt[6]{c}}{\sqrt[6]{c}-2}$;

3) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}}+\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;

4) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}+3}{\sqrt[4]{a}-3}+\frac{\sqrt[4]{a}-3}{\sqrt[4]{a}+3}\right):\frac{3\sqrt{a}+27}{9-\sqrt{a}}$;

5) $\frac{5\sqrt[10]{a}}{\sqrt[10]{a}+3}+\frac{\sqrt[10]{a}-6}{3\sqrt[10]{a}+9}\cdot\frac{135}{6\sqrt[10]{a}-\sqrt[5]{a}}$;

6) $\left(\dfrac{8\sqrt[8]{b}}{\sqrt[8]{b}+7}-\dfrac{15\sqrt[8]{b}}{\sqrt[4]{b}+14\sqrt[8]{b}+49}\right):$

$$:\frac{8\sqrt[8]{b}+41}{\sqrt[4]{b}-49}+\frac{7\sqrt[8]{b}-49}{\sqrt[8]{b}+7}.$$

164. Доказать, что значение выражения

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

есть число рациональное.

Иррациональные уравнения

165. Решить уравнение:

1) $\sqrt[5]{3x-1}=-1$;
2) $\sqrt{3x-1}=-1$;
3) $\sqrt{3x-1}=1$;
4) $\sqrt{3x-1}=\sqrt{9-2x}$;
5) $\sqrt{3x-1}=\sqrt{1-3x}$;
6) $\sqrt{3x-1}=\sqrt{4x+1}$;
7) $\sqrt{3x-1}=\sqrt{4x^2-6x+1}$;
8) $\sqrt{3x-1}=1-3x$;
9) $\sqrt{3x-1}=\sqrt{0,2-x}$;
10) $(x+5)\sqrt{x^2-x-20}=6x+30$.

166. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+2}=2$;
2) $\sqrt{x+7}=x-3$;
3) $2+\sqrt{4+2x-x^2}=x$;
4) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x+4}$;
5) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$;
6) $\sqrt{3x-5}+\sqrt{x-2}=3$;
7) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$;
8) $2\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}=1$;
9) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-1}$;
10) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$;
11) $\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}-\sqrt{4-5x}+\sqrt{5+x}=0$.

167. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+6=0$;
2) $3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-2=0$;
3) $x-9\sqrt[3]{x}=0$;
4) $\sqrt{x+2}=2\sqrt[4]{x+2}+3$;

5) $\sqrt[3]{9-6x+x^2}-\sqrt[3]{3-x}-2=0$;

6) $x^2-2\sqrt{x^2-24}=39$;

7) $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}=12$;

8) $\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{2x}}=1$;

9) $x\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}=4$;

10) $\sqrt{3x^2-6x+7}=7+2x-x^2$.

168. Решить уравнение:

1) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$;

2) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$;

3) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$;

4) $\sqrt[4]{80+x}+\sqrt[4]{2-x}=4$.

169. Решить уравнение:

1) $\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x-5)}=3$;

2) $\sqrt{x-4+4\sqrt{x-8}}-\sqrt{x-4-4\sqrt{x-8}}=2$.

170. Решить уравнение:

1) $\sqrt{10-9\operatorname{tg}x}=3\operatorname{tg}x-2$;

2) $\sqrt{-3\cos x}=\sqrt{2}\sin x$;

3) $\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0$.

171. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt[5]{y}=5,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt[5]{y}=14;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-y=75,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=15;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{6},\\ x-y=5;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2,\\ x+y=26;\end{cases}$

6) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ xy=8;\end{cases}$

7) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+3}=7,\\ 3x+2y=22;\end{cases}$

8) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+3\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=4,\\ x^2+4x+y^2-3y=0;\end{cases}$

9) $\begin{cases}3\sqrt{3x^2-2y+3}=2y+15-3x^2,\\ 3y-2x=5;\end{cases}$

10) $\begin{cases}7\sqrt[3]{xy}-3\sqrt{xy}=4,\\ x+y=20.\end{cases}$

Иррациональные неравенства

172. Решить неравенство:

1) $\sqrt{x-3} > 2$;
2) $\sqrt{x-3} < 2$;
3) $\sqrt{x-3} > -2$;
4) $\sqrt{x-3} < -2$.

173. Решить неравенство:

1) $\sqrt{x+5} < \sqrt{8-x}$;
2) $\sqrt{x^2-7x+5} \geq \sqrt{3x-4}$;
3) $\sqrt{x+18} < 2-x$;
4) $\sqrt{2x-x^2} \leq 5-x$;
5) $\sqrt{11-5x} \geq x-1$;
6) $\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x$.

174. Решить неравенство:

1) $(4-3x)\sqrt{x} \geq 0$;
2) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6 \leq 0$;
3) $\sqrt{x+3} \leq 6 - \sqrt{x+15}$;
4) $3\sqrt{x} - \sqrt{5x+5} > 1$.

175. Найти решения неравенства $(a+1)\sqrt{2-x} < 1$ в зависимости от значения параметра a.

Степень с рациональным показателем и ее свойства

176. Заменить степень с дробным показателем корнем:

1) $7^{\frac{1}{3}}$;
2) $5^{\frac{3}{7}}$;
3) $2^{-\frac{1}{5}}$;
4) $11^{-\frac{2}{9}}$;
5) $(ab)^{\frac{4}{5}}$;
6) $ab^{\frac{4}{5}}$;
7) $(m-n)^{2,5}$;
8) $m^{-\frac{3}{5}} - n^{2,4}$.

177. Заменить арифметический корень степенью с дробным показателем:

1) $\sqrt[3]{x}$;
2) $\sqrt[5]{y^3}$;
3) $\sqrt[8]{c^7}$;
4) $\sqrt[7]{3b}$;
5) $\sqrt[3]{7^{-5}}$;
6) $\sqrt[10]{27}$;
7) $\sqrt[11]{(a+b)^4}$;
8) $\sqrt[11]{a^4+b^4}$.

178. Найти значение выражения:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $32^{-\frac{2}{5}}$; 3) $0,0004^{-1,5}$; 4) $81^{0,75}$; 5) $\left(12\frac{1}{4}\right)^{1,5}$.

179. Найти область определения функции:

1) $y = x^{\frac{5}{8}}$;
2) $y = x^{-1,2}$;
3) $y = (x-2)^{3,4}$;
4) $y = (5-4x-x^2)^{-\frac{1}{7}}$.

180. Представить выражение в виде степени или произведения степеней:

1) $x^{-1,3} \cdot x^{2,5}$;

2) $x^{\frac{11}{18}} \cdot x^{-\frac{5}{6}}$;

3) $x^{\frac{7}{12}} : x^{\frac{5}{8}}$;

4) $(x^{-6})^{0,6}$;

5) $x^{\frac{4}{7}} \cdot x^{\frac{9}{14}} \cdot x^{-\frac{15}{28}}$;

6) $\left(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{9}}\right)^{\frac{18}{25}}$;

7) $\left(x^{\frac{4}{15}}\right)^{\frac{5}{16}} \cdot \left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{9}{20}}$;

8) $(x^{4})^{0,8} \cdot (x^{-1,4})^{3} : (x^{-1,5})^{6}$;

9) $\left(x^{-\frac{6}{49}}y^{-\frac{9}{28}}\right)^{\frac{7}{18}} \cdot \left(x^{\frac{5}{14}}y^{\frac{9}{16}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

181. Найти значение выражения:

1) $3^{3,6} \cdot 3^{-1,2} \cdot 3^{1,6}$;

2) $(5^{-0,8})^{7} : 5^{-2,6}$;

3) $\left(6^{-\frac{4}{11}}\right)^{\frac{11}{20}} \cdot 36^{1,1}$;

4) $81^{-1,25} \cdot 9^{1,5} \cdot 27^{\frac{2}{3}}$;

5) $\left(\dfrac{7^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}}}{14^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}}}\right)^{-1,5}$;

6) $\left(\dfrac{16^{\frac{4}{3}} \cdot 125^{\frac{1}{9}}}{4^{-\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{5^{\frac{2}{7}} \cdot 256^{\frac{1}{5}}}{2^{-\frac{2}{5}} \cdot 625^{\frac{4}{7}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Преобразование выражений, содержащих степени с дробным показателем

182. Упростить выражение:

1) $a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}} - 2\right) - \left(a^{\frac{1}{4}} + 2\right)^{2}$;

2) $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right) - \left(3x^{\frac{1}{3}} + 2y^{\frac{1}{3}}\right)\left(2x^{\frac{1}{3}} - 3y^{\frac{1}{3}}\right)$;

3) $\left(m^{\frac{1}{20}} + n^{\frac{1}{20}}\right)\left(m^{\frac{1}{10}} + n^{\frac{1}{10}}\right)\left(m^{\frac{1}{5}} + n^{\frac{1}{5}}\right)\left(m^{\frac{1}{20}} - n^{\frac{1}{20}}\right)$;

4) $\left(b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}\right)\left(b - b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + c\right) - b^{\frac{5}{6}}\left(b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{6}}\right)$.

183. Сократить дробь:

1) $\dfrac{x - 9x^{\frac{2}{7}}}{x^{\frac{5}{7}} - 9}$;

2) $\dfrac{6y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}} - y^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a - b}$;

4) $\dfrac{m - m^{0,5}n^{0,5} + n}{m^{1,5} + n^{1,5}}$; 6) $\dfrac{3a^{\frac{1}{3}} + a}{3a^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{5}{6}}}$; 8) $\dfrac{m^{\frac{5}{8}} + 5m^{\frac{1}{4}}}{m - 25m^{\frac{1}{4}}}$;

5) $\dfrac{b + 2b^{0,5}c^{0,5} + c}{bc^{0,5} + b^{0,5}c}$; 7) $\dfrac{4a^{\frac{2}{3}} - 1}{8a - 1}$; 9) $\dfrac{14^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{1}{5}}}{28^{\frac{1}{5}} + 4^{\frac{1}{5}}}$.

184. Упростить выражение:

1) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}} + 4a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}} + 4b^{\frac{1}{4}}}{a - a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}} \cdot \dfrac{ab^{\frac{7}{8}} - a^{\frac{7}{8}}b}{a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}} + 2b^{\frac{1}{4}}}$;

2) $\dfrac{2y - 5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x - 4y} - \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}}$;

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{6}} - 1}{2x^{\frac{1}{6}} - 6} - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{6}}} - \dfrac{3\left(x^{\frac{1}{6}} - 1\right)}{2x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}}}$;

4) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{6}} + 4}{a^{\frac{1}{6}} - 4} - \dfrac{a^{\frac{1}{6}} - 4}{a^{\frac{1}{6}} + 4}\right) : \dfrac{32a^{\frac{1}{2}}}{16 - a^{\frac{1}{3}}}$;

5) $\left(\dfrac{9c^{\frac{1}{8}}}{c^{\frac{1}{8}} - 8} + \dfrac{7c^{\frac{1}{8}}}{c^{\frac{1}{4}} - 16c^{\frac{1}{8}} + 64}\right) : \dfrac{9c^{\frac{1}{8}} - 65}{c^{\frac{1}{4}} - 64} - \dfrac{8c^{\frac{1}{8}} + 64}{c^{\frac{1}{8}} - 8}$.

Показательная функция и ее свойства

185. Построить график функции:

1) $y = 3^x$; 3) $y = 3^{x+1}$; 5) $y = 2 - 3^x$;

2) $y = 3^x - 3$; 4) $y = 3^{-|x|}$; 6) $y = |3^x - 2|$.

186. Сравнить значения выражений:

1) $4^{0,7}$ и $4^{\frac{2}{3}}$; 3) $\pi^{\frac{1}{3}}$ и 1; 5) $(\sqrt{2})^{-3}$ и $(\sqrt{2})^{-4}$;

2) $\left(\dfrac{5}{9}\right)^6$ и $\left(\dfrac{5}{9}\right)^7$; 4) 1 и $0,8^{-\sqrt{3}}$; 6) $(2 - \sqrt{3})^3$ и $(2 - \sqrt{3})^4$.

187. Сравнить числа m и n,если:

1) $2{,}4^m > 2{,}4^n$; 2) $0{,}9^m > 0{,}9^n$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^m < \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$.

188. Сравнить a с единицей, если:

1) $a^{\frac{4}{3}} < a^{\frac{6}{5}}$; 2) $a^{-1{,}8} > a^{-1{,}9}$; 3) $a^{-0{,}4} < 1$.

Показательные уравнения

189. Решить уравнение:

1) $5^x = 625$;

2) $11^{4x-3} = 11^{8x}$;

3) $19^{x^2-4x-21} = 1$;

4) $27^x = 81$;

5) $(0{,}2)^{x^2-16x+37{,}5} = 5\sqrt{5}$;

6) $(3^{x-2})^{x-4} = \frac{1}{3}$;

7) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{64}{27}$;

8) $14^{x^2-3x+2} = 9^{-x^2+3x-2}$;

9) $3^x \cdot 7^x = \frac{1}{21} \cdot (21^{x-1})^5$;

10) $\sqrt[3]{8^{x^2-1}} = 4^x \cdot 0{,}25$.

190. Решить уравнение:

1) $5^x + 5^{x+2} = 130$;

2) $2^{3\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{3\sqrt{x}-1} = 20$;

3) $2 \cdot 3^{2x+1} - 4 \cdot 3^{2x-2} - 25 \cdot 3^{2x-3} = 375$;

4) $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 640$;

5) $2^{3x} + 2^{3x-1} - 2^{3x-2} = 5^{3x} + 5^{3x-1} - 28 \cdot 5^{3x-2}$;

6) $4^x - 3^{x-0{,}5} = 3^{x+0{,}5} - 2^{2x-1}$.

191. Решить уравнение:

1) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$;

2) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0$;

3) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$;

4) $8^{\frac{2}{x}} - 3 \cdot 2^{\frac{2x+3}{x}} + 32 = 0$;

5) $\frac{5}{3^{x+2}-2} - \frac{4}{3^{x+2}-1} = 3$;

6) $3^x - 3^{2-x} - 8 = 0$;

7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} = 80$;

8) $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 6$.

192. Решить уравнение:

1) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$;

2) $2 \cdot 81^x = 36^x + 3 \cdot 16^x$;

3) $4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x = 0$;

4) $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$.

193. Решить уравнение:

1) $7^{6-x} = x + 2$; 2) $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$; 3) $2^{|x|} = \cos x$.

194. При каких значениях параметра a уравнение $25^x - (a-4)\,5^x - 2a^2 + 10a - 12 = 0$ не имеет действительных корней?

Показательные неравенства

195. Решить неравенство:

1) $7^x < \frac{1}{49}$;

2) $(0{,}1)^x > 0{,}001$;

3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} \le \left(\frac{7}{3}\right)^{4x-21}$;

4) $(1{,}3)^{\frac{x^2-9x-10}{x}} \ge 1$;

5) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} < 0{,}25^{2x}$;

6) $(0{,}3)^{\frac{x^2-8}{x}} \ge 11\frac{1}{9}$;

7) $2 \cdot 8^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$;

8) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1+\frac{4}{x+2}} \ge \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{9}{x+3}}$.

196. Решить неравенство:

1) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \le 315$;

2) $0{,}5^x - 0{,}5^{x+1} \ge 256$;

3) $5^{-2x-4} - 5^{-2x-5} - 2 \cdot 5^{-2x-6} \le 2 \cdot 3^{-2x-4}$;

4) $10^x - 4 \cdot 5^x - 125 \cdot 2^x + 500 \ge 0$.

197. Решить неравенство:

1) $7^{2x+1} - 8 \cdot 7^x + 1 < 0$;

2) $(0{,}2)^{2x-2} - 126 \cdot (0{,}2)^x + 5 \ge 0$;

3) $3(\sqrt{2})^x - 7 \cdot 2^{\frac{x}{4}} - 20 \ge 0$;

4) $9^{x+1} + 26 \cdot 3^x - 3 < 0$.

198. Решить неравенство:

1) $2^{2x-1} + 3^{x+1} \cdot 2^{x-1} - 2 \cdot 3^{2x} < 0$;

2) $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \ge 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

Логарифмы и их свойства

199. Найти:

1) $\log_6 36$; 4) $\log_5 5$; 7) $\lg 10\,000$;

2) $\log_{17} \frac{1}{17}$; 5) $\log_2 0{,}125$; 8) $\log_9 27$;

3) $\log_{19} 1$; 6) $\log_{49} 7$; 9) $\log_{0,2} 625$.

200. Найти значение выражения:

1) $\log_{0,5} \log_3 81$;

2) $\log_4 \sin \frac{\pi}{6}$;

3) $\log_{169} 13 - \log_3 \frac{1}{81} + 2\log_3 \sqrt[3]{3}$;

4) $\log_{18} 3 + \log_{18} 6$;

5) $\log_5 250 - \log_5 2$;

6) $\frac{\log_4 0{,}0001}{\log_4 10}$;

7) $\log_{\sqrt{2}} 1024$;

8) $6^{3\log_6 2}$;

9) $49^{1 + \log_7 2}$;

10) $2^{\frac{1}{2\log_{81} 2}}$.

201. Решить уравнение:

1) $4^x = 9$; 2) $10^{3x+1} = 8$; 3) $6^{x-5} = 24$.

202. Вычислить значение выражения

$$3 \cdot 7^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}} 7} + \frac{1}{3}\log_7 8} - 3 \log_9 \sqrt[4]{9\sqrt[3]{9}}.$$

203. Выразить через m и n $\log_{30} 8$, если $m = \log_{30} 3$, $n = \log_{30} 5$.

Логарифмическая функция и ее свойства

204. Найти область определения функции:

1) $y = \log_6 (4x + 7)$; 3) $y = \log_{2-x} (x + 4)$;

2) $y = \log_{0,1} (3 - 2x - x^2)$; 4) $y = \lg (\arcsin x)$.

205. Сравнить с нулем:

1) $\log_8 10$; 2) $\log_{0,6} 0{,}4$; 3) $\log_2 \frac{4}{9}$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} 11$.

206. Сравнить m и n, если:

1) $\log_{3,8} m \le \log_{3,8} n$; 2) $\log_{0,1} m > \log_{0,1} n$.

207. Сравнить с единицей основание логарифма, если:

1) $\log_a 8{,}4 > \log_a 7{,}4$; 2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{3}{4}$.

208. Построить график функции:

1) $y = -\log_4 x$;
2) $y = \lg(x+3)$;
3) $y = |\log_3 |x||$;
4) $y = \log_x x$;
5) $y = \sqrt{\log_\pi (2 - \sin x)}$;
6) $y = \log_3 \log_{x+1}(x+1)$.

Логарифмические уравнения

209. Решить уравнение:

1) $\log_4 x = \frac{1}{2}$;
2) $\log_{0,1}(x-7) = -1$;
3) $\log_{\frac{1}{81}}(x^2 + 26x) = -0{,}75$;
4) $\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}} x = \frac{1}{2}$;
5) $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$;
6) $\log_x 128 = 7$;
7) $\log_{x+3} 256 = 4$;
8) $\log_x 32 = -\frac{5}{3}$;
9) $\log_x (2x^2 - 3x - 4) = 2$.

210. Решить уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 + 4x - 7) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$;
2) $\lg(2x-1) + \lg(x-9) = 2$;
3) $\lg x + \lg(x+1) = \lg(5-6x) - \lg 2$;
4) $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$;
5) $\log_6 \sqrt{x-2} + \log_{36}(x-11) = 1$;
6) $\log_3(x-5) - \log_3 2 - \frac{1}{2}\log_3(3x-20) = 0$;
7) $\lg(1 + 4x^2 - 4x) - \frac{1}{2}\lg(8 + x^2) = \lg(1-2x)$;
8) $\log_4 (x-2)^2 + \log_2(1-x) = \log_2 3 + 1$.

211. Решить уравнение:

1) $3\lg^2(x-1) - 10\lg(x-1) + 3 = 0$;
2) $\log_3^2 x + 2\log_3\sqrt{x} = 2$;
3) $\log_2^2 x^5 - 5\log_2 x^3 = 10$;

4) $\frac{1}{5-4\lg x}+\frac{4}{1+\lg x}=3$;

5) $\log_2(2x^2)\cdot\log_2(16x)=\frac{9}{2}\log_2^2 x$;

6) $2\log_{x-1}^2(2x+4)+\log_{x-1}(2x+4)=1$;

7) $\lg^2(100x)-\lg^2(10x)+\lg^2 x=6$;

8) $\log_5 x+\log_x 25=3$.

212. Решить уравнение:

1) $x^{\log_3 x-4}=\frac{1}{27}$;

2) $x^{\lg x}=1000x^2$;

3) $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$.

213. Выяснить, при каких значениях a данное уравнение имеет корни. Найти эти корни.

1) $\log_3(4x+a)=\log_3(1-2x)$;

2) $\lg(x^2-3ax)=\lg(x-6a+2)$.

214. При каком значении b уравнение $2\lg(x+1)=\lg bx$ имеет единственный корень?

Логарифмические неравенства

215. Решить неравенство:

1) $\log_2 x>4$;

2) $\log_9 x<2$;

3) $\log_{0,1} x\le -3$;

4) $\log_{\frac{1}{16}} x>\frac{1}{4}$;

5) $\log_4(x+6)>3$;

6) $\log_9(2x-1)\le\frac{1}{2}$;

7) $\log_5(5x-1)>\log_5(2-3x)$;

8) $\log_{0,6}(7x+8)<\log_{0,6}(2-5x)$;

9) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{35-x^2}{x}\ge-\frac{1}{2}$;

10) $1+\log_2(x-2)>\log_2(x^2-3x+2)$;

11) $\log_{0,5} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} \le 0$;

12) $\log_3 (2 - x) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 1) > \log_{\sqrt{3}} 3$;

13) $2 \log_2 (-x) \le 1 + \log_2 (x + 4)$;

14) $\log_{0,8} x + \log_{0,8} (x + 1) \le \log_{0,8} (8 - x)$.

216. Решить неравенство:

1) $\log^2_{0,5} (2x - 1) \le 9$;

2) $\lg^2 x - \lg x - 6 > 0$;

3) $2 \log^2_5 x - \log_5 x - 3 \le 0$;

4) $\log^2_{0,2} (x - 1) + 6 > 5 \log_{0,2} (x - 1)$.

217. Решить неравенство:

1) $\log_{2x} (x^2 - 5x + 6) < 1$; 2) $\log_{x^2} (3 - 2x) > 1$.

218. При каких значениях a число 3 является решением неравенства $\log_a (2x + 3) > 3$?

Системы показательных и логарифмических уравнений

219. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2 \log_y x + 2 \log_x y = 5, \\ xy = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 (x + 2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 2y) = 1, \\ x^2 + y^2 - 0,5y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5^{2x} \cdot 3^y = 675, \\ \log_{\sqrt[3]{2}} (x + y) = 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_2 xy = 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5^x - 6^y = 589, \\ 5^{\frac{x}{2}} + 6^{\frac{y}{2}} = 31; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2^{x - y} + 2^{y - x} = 2,5, \\ \lg (2x - y) + 1 = \lg (y + 2x) + \lg 6. \end{cases}$

Вариант 3

Функции и их свойства

1. Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{x-4}{x+3}$. Найти:

1) $f(-5)$; 2) $f(0)$; 3) $f(7)$; 4) $f(u)$.

2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } x < -1; \\ x^2 + 2x - 1, & \text{если } -1 \le x < 2; \\ 4x - 1, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

Найти: 1) $f(-1{,}34)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(0)$; 4) $f(1{,}5)$; 5) $f(5)$.

3. Найти область определения функции, заданной формулой:

1) $f(x) = 4 - 9x$;

2) $f(x) = \dfrac{7}{x+2}$;

3) $f(x) = \dfrac{x+3}{6}$;

4) $f(x) = \dfrac{3x+7}{2x-5}$;

5) $f(x) = \sqrt{7-x}$;

6) $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x+1}}$;

7) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-6}$;

8) $f(x) = \dfrac{x-1}{6x^2+11x-2}$;

9) $f(x) = \dfrac{x^2+10}{2x^2-3x+5}$;

10) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|-7}$;

11) $f(x) = \dfrac{x-5{,}2}{|x|+2}$;

12) $f(x) = \dfrac{13}{x-\sqrt{x^2}}$;

13) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x}$;

14) $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x-3}$;

15) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{2x-3}{6x-3}$;

16) $f(x) = \sqrt{x-6} - \dfrac{4}{\sqrt{5-x}}$;

17) $f(x) = \sqrt{x+1} - \dfrac{7x+8}{x^2+4x}$;

18) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}} - \dfrac{3x-1}{x^2-x-6}$;

19) $f(x) = \sqrt{x^2-4x}$;

20) $f(x) = \sqrt{4+4x-3x^2}$;

21) $f(x) = \dfrac{5x+1}{\sqrt{9-|x|}}$;

22) $f(x) = \dfrac{x+3}{|x|-4} - \dfrac{x}{x^2+x}$.

4. Найти область значений функции:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 9$;

2) $f(x) = x^2 + 3$;

3) $g(x) = 7 - x^2$;

4) $\varphi(x) = 3 + 4x + x^2$;

5) $h(x) = |x| - 6$;

6) $f(x) = \sqrt{x^4+16} + 4$;

7) $h(x) = \sqrt[8]{-|x-2|}$;

8) $\varphi(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{-x-4}$;

9) $g(x) = -7\cos x$;

10) $f(x) = 5\sin x + 1$;

11) $g(x) = 3 - \operatorname{tg}^2 x$;

12) $\varphi(x) = \sqrt{25-|x|}$;

13) $h(x) = -\dfrac{5}{x^2+5}$;

14) $f(x) = 1 - 6\sin^2 x$.

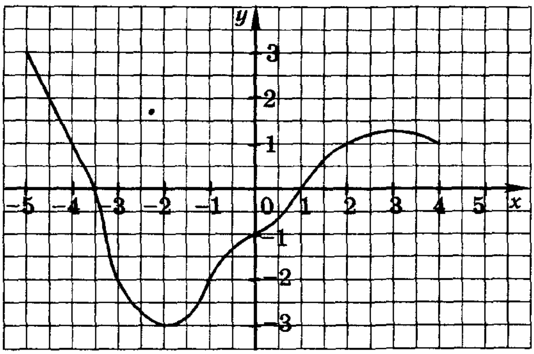


Рис. 13

5. На рис. 13 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-5; 4]$. Используя график, найти:

1) $f(-4)$; $f(-3{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(0)$; $f(3)$;

2) значения x, при которых $f(x) = -2$; $f(x) = -1$; $f(x) = 1$;

3) нули функции;

4) наибольшее и наименьшее значения функции;

5) область значений функции;

6) промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает;

7) количество корней уравнения $f(x) = a$.

6. Построить график функции, найти промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает:

1) $f(x) = 1 - 2x$; 4) $f(x) = 3$; 7) $f(x) = 2x^2 - 4x$;

2) $f(x) = 0{,}3x + 2$; 5) $f(x) = \dfrac{12}{x}$; 8) $f(x) = 3 - x^2$;

3) $f(x) = 4x$; 6) $f(x) = -\dfrac{5}{x}$; 9) $f(x) = 4x - 3 - x^2$.

7. Построить график функции, найти промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x}, & \text{если } x < -2; \\ \dfrac{x}{2} - 1, & \text{если } -2 \le x < 4; \\ \dfrac{4}{x}, & \text{если } x \ge 4; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{если } x \le -1; \\ x^2 - 2x + 1, & \text{если } -1 < x < 3; \\ 4, & \text{если } x \ge 3; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & \text{если } x \le 0; \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x < 4; \\ 4 - 0{,}5x, & \text{если } x \ge 4. \end{cases}$

8. На рис. 14 изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Используя график, найти:

1) нули функции;

2) решения неравенства $f(x) \le 0$;

3) промежутки возрастания и убывания функции;

4) точки максимума и минимума функции;

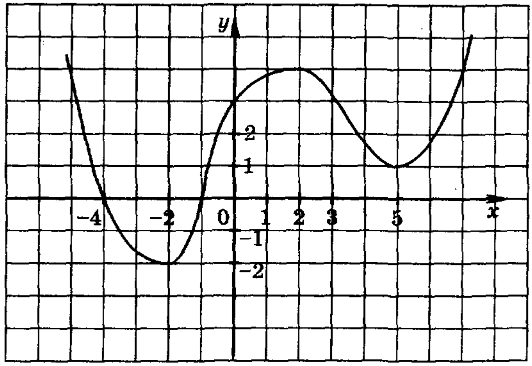
5) экстремумы функции.

9. Найти область определения и построить график функции:

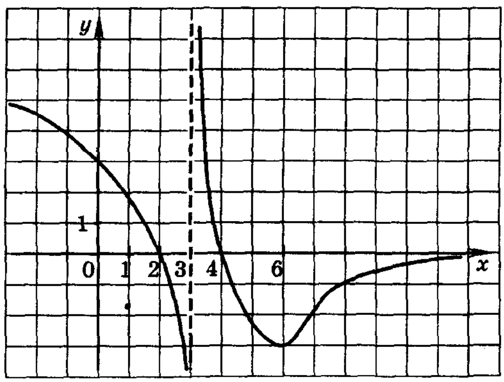
1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$; 3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$;

2) $f(x) = \dfrac{2x + 6}{x^2 + 3x}$; 4) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2x}{x - 2}$.

10. Известно, что $f(-6) = -10$. Найти $f(6)$, если функция f:
1) четная; 2) нечетная.



а)



б)

Рис. 14

11. Является ли функция $f(x) = |x|$ четной, если ее областью определения является множество:

1) $[-8; 8]$; 2) $(-7; -2] \cup [2; 7)$; 3) $[-5; 5)$; 4) $(8; \infty)$?

12. Является ли четной или нечетной функция, заданная формулой:

1) $f(x) = -6x^8$;

2) $f(x) = 3x^5 + 4x^2$;

3) $f(x) = \dfrac{x^3}{9 - x^2}$;

4) $f(x) = \sqrt[6]{3 - |x|}$;

5) $f(x) = x^7 + 3x^5 - x$;

6) $f(x) = \dfrac{5}{x^4 + 4x^2}$;

7) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

8) $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9) $f(x) = \cos x + \operatorname{ctg} x$;

10) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{tg} x}{2 - \cos x}$;

11) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \cos x$;

12) $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x| - 3}$;

13) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$;

14) $f(x) = \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{4}}$?

13. На рис. 15 изображена часть графика функции $y = g(x)$, определенной на промежутке $[-5; 5]$. Построить график этой функции, если она является:

1) четной; 2) нечетной.

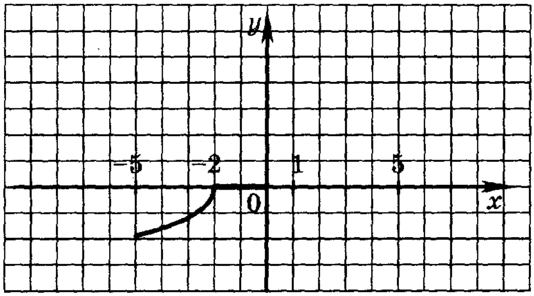


Рис. 15

Преобразование графиков функций

14. На рис. 16 изображен график функции $y = f(x)$. Построить график функции:

1) $y = f(x) + 3$; 2) $y = f(x) - 1$; 3) $y = f(x + 3)$;

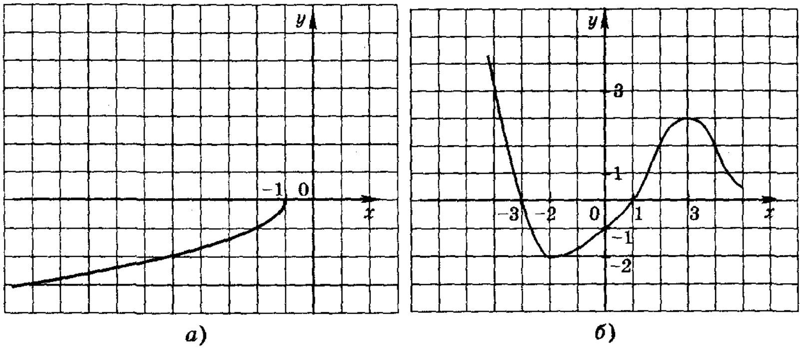


Рис. 16

4) $y = f(x - 1)$; 5) $y = -f(x)$; 6) $y = -1 - f(x)$.

15. Построить график функции:

1) $y = \frac{12}{x}$; 4) $y = \frac{12}{x-3}$; 7) $y = \frac{3x+12}{x}$;

2) $y = \frac{12}{x} - 2$; 5) $y = \frac{12}{x+4}$; 8) $y = \frac{2x+8}{x-2}$.

3) $y = \frac{12}{x} + 3$; 6) $y = \frac{12}{x+1} + 1$;

16. Построить график функции:

1) $y = \sqrt{x}$; 7) $y = 5\sqrt{x}$;

2) $y = \sqrt{x} + 1$; 8) $y = \frac{1}{6}\sqrt{x}$;

3) $y = \sqrt{x-2}$; 9) $y = \sqrt{2x+6}$;

4) $y = \sqrt{x+2} + 3$; 10) $y = \sqrt{3x+12} + 2$;

5) $y = \sqrt{5x}$; 11) $y = -3\sqrt{x-1} + 4$;

6) $y = \sqrt{\frac{x}{6}}$; 12) $y = \frac{1}{5}\sqrt{3x-6} - 1$.

17. Построить график функции:

1) $y = 3 - 2x - x^2$; 3) $y = |3 - 2x - x^2|$;

2) $y = 3 - 2|x| - x^2$; 4) $y = |3 - 2|x| - x^2|$.

18. Построить график функции:

1) $y = |x|$; 3) $y = |x - 2|$; 5) $y = 2|x|$;

2) $y = |x| - 2$; 4) $y = ||x| - 2|$; 6) $y = |x + 3| - 4$.

Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса

19. Найти значение выражения:

1) $6\sin 270^\circ - 3\cos 0^\circ + 4\operatorname{ctg} 90^\circ$;

2) $\cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$;

3) $\cos 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{ctg} 45^\circ$;

4) $\dfrac{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot 4\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\cos\pi + 2\sin\frac{\pi}{2}}$;

5) $\sqrt{(\operatorname{ctg} 30^\circ + 2)^2} + \sqrt{(\operatorname{tg} 60^\circ - 2)^2}$.

20. Найти значение выражения $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$ при:

1) $\alpha = 75^\circ$; $\beta = 15^\circ$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{12}$.

21. Возможно ли равенство:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; 3) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$;

2) $\cos\alpha = -\sqrt[3]{0,6}$; 4) $\sin\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}$?

22. При каких значениях a возможно равенство:

1) $\sin x = a + 6$; 2) $\cos x = a^4 + 1$?

23. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $1 + 3\sin\alpha$; 2) $\cos^2\alpha - 5$; 3) $\frac{\cos\alpha\,(1 - \sin\alpha)}{\cos\alpha}$.

24. Найти область значений выражения:

1) $\frac{1}{4 + \cos 5x}$; 2) $\frac{2}{5\sin x - 4}$; 3) $\operatorname{tg}^6 x - 4$.

Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

25. Какой знак имеет:

1) $\cos 260^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 310^\circ$; 5) $\operatorname{tg} 4$;

2) $\sin 185^\circ$; 4) $\operatorname{tg}(-220^\circ)$; 6) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$?

26. Определить знак выражения:

1) $\operatorname{ctg} 204^\circ \sin 164^\circ$; 3) $\cos 5 \operatorname{ctg} 2,4$.

2) $\cos 100^\circ \sin(-193^\circ)$;

27. Углом какой четверти является угол α, если известно, что:

1) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; 2) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha = 0$?

28. Найти значение выражения:

1) $8\sin^3(-45^\circ) - \sqrt{2}\operatorname{ctg}(-45^\circ) + \cos(-45^\circ)$;

2) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 10\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

29. Сравнить:

1) $\sin 1$ и $\sin 1,4$; 3) $\operatorname{ctg} 200^\circ$ и $\operatorname{ctg} 250^\circ$;

2) $\cos 1$ и $\cos 1,4$; 4) $\operatorname{tg} 320^\circ$ и $\operatorname{tg} 300^\circ$.

30. Возможно ли равенство $\cos\alpha = \operatorname{tg} 50^\circ$?

Периодические функции

31. Найти значение выражения:

1) $\sin 405^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 1110^\circ$; 5) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$;

2) $\cos 390^\circ$; 4) $\sin(-900^\circ)$; 6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{35\pi}{6}\right)$.

32. Показать, что число T является периодом функции f:

1) $f(x) = \sin(5x - 1)$, $T = \frac{4\pi}{5}$; 3) $f(x) = |\sin x|$, $T = \pi$;

2) $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{2} - \frac{\pi}{7}\right)$, $T = \frac{8}{3}$; 4) $f(x) = \sqrt{-\cos^2 x}$, $T = \pi$.

33. Показать, что число $T = 2$ не является периодом функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

34. Показать, что функция $f(x) = x^2 - 1$ не является периодической.

35. Найти наименьший положительный период функции:

1) $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{4} + 2\right)$; 3) $f(x) = \left\{\frac{x}{2} - 6\right\}$;

2) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $f(x) = \sin^2\left(8x - \frac{\pi}{5}\right)$.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

36. Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ и $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{22}}{5}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} + 1$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3} - 1$;

3) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{7}$;

4) $\sin\alpha = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ и $\cos\alpha = \frac{2a}{a^2 + 1}$?

37. Вычислить значения тригонометрических функций угла γ, зная, что:

1) $\sin\gamma = 0{,}2$; 3) $\operatorname{tg}\gamma = 5$ и $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos\gamma = -\frac{3}{8}$ и $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$; 4) $\operatorname{ctg}\gamma = -\sqrt{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi$.

38. Упростить выражение:

1) $\cos^2\varphi - 1$;

2) $\cos^2 3\gamma + \sin^2 3\gamma + \mathrm{tg}^2 4\gamma$;

3) $3\cos\frac{\alpha}{4}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{4} - 2\sin\frac{\alpha}{4}$;

4) $\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{ctg}\,\beta - \frac{\sin^2\beta - 1}{1-\cos^2\beta}$;

5) $\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha \sin\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;

6) $\left(1-\sin\frac{\beta}{4}\right)\left(1+\sin\frac{\beta}{4}\right)$;

7) $(1+\mathrm{ctg}\beta)^2 + (1-\mathrm{ctg}\beta)^2$;

8) $\mathrm{ctg}\,x - \frac{\sin x}{1-\cos x}$;

9) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$;

10) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha$;

11) $\frac{1-\mathrm{ctg}\,\gamma}{1-\mathrm{tg}\,\gamma}$;

12) $\frac{\cos^2\beta + \sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} - \mathrm{tg}(-\beta)$.

39. Доказать тождество:

1) $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta} = -\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$;

2) $\sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\beta - \cos^2\alpha$;

3) $\frac{\cos^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha - 1} = \mathrm{ctg}^2\alpha$;

4) $\frac{\sqrt{3} - 2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1} = \frac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha + \sqrt{3}}$;

5) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) = -1$.

40. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $5\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$;

2) $4\sin^2\alpha - 3\,\mathrm{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

41. Упростить выражение:

1) $\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{3}} + \sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{3}}$, если $2\pi < \alpha < 3\pi$;

2) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$, если $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;

3) $\sqrt{\mathrm{tg}^2\beta(1+\mathrm{ctg}^2\beta) + \mathrm{ctg}^2\beta(1+\mathrm{tg}^2\beta)}$, если $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

42. Дано: $\sin\alpha - \cos\alpha = a$. Найти:

1) $\sin\alpha\cos\alpha$;

2) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$;

3) $\frac{1}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\cos^4\alpha}$;

4) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$;

5) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$;

6) $\cos\alpha + \sin\alpha$.

43. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{4}$;

2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 5$.

44. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $5\sin^2\alpha + 2\cos\alpha$.

Формулы приведения

45. Привести к тригонометрической функции угла α:

1) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 3) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$; 5) $\cos^2(\pi - \alpha)$;

2) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 4) $\sin(\alpha - \pi)$; 6) $\operatorname{ctg}^2(270^\circ + \alpha)$.

46. Привести к значению тригонометрической функции положительного аргумента, меньшего 45° $\left(\text{или } \dfrac{\pi}{4}\right)$:

1) $\operatorname{tg} 104^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 168^\circ$; 7) $\operatorname{tg} 2{,}1\pi$; 10) $\operatorname{tg} 2000^\circ$;

2) $\sin 253^\circ$; 5) $\sin 410^\circ$; 8) $\operatorname{ctg}\dfrac{15\pi}{7}$; 11) $\sin 6{,}3\pi$;

3) $\cos 295^\circ$; 6) $\sin(-244^\circ)$; 9) $\cos 1325^\circ$; 12) $\cos\dfrac{27\pi}{8}$.

47. Вычислить:

1) $\sin 210^\circ$; 4) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)$; 7) $\cos 855^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 120^\circ$; 5) $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}$; 8) $\sin\dfrac{37\pi}{6}$;

3) $\cos(-315^\circ)$; 6) $\cos 13\pi$; 9) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)$.

48. Найти значение выражения:

1) $4\sin 225^\circ - 6\cos 120^\circ + \operatorname{tg} 300^\circ + 3\operatorname{ctg} 240^\circ$;

2) $\sin\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)\cos\dfrac{13\pi}{4}\operatorname{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{6}$;

3) $\operatorname{ctg} 20^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ + \operatorname{ctg} 60^\circ + \ldots + \operatorname{ctg} 160^\circ$.

49. Упростить выражение:

1) $\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-3\pi)\cos\left(\alpha+\frac{7\pi}{2}\right)$;

3) $\dfrac{\sin(\beta-\pi)\cos(2\pi-\beta)\sin(2\pi+\beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{ctg}(\pi-\beta)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}$;

4) $\dfrac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right)^2-1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}$.

50. Известно, что α, β, γ — углы треугольника. Доказать, что $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\gamma}{2}$.

51. Найти значения выражений $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

52. Доказать тождество: $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\cos^2\alpha.$$

Формулы сложения

53. Упростить выражение:

1) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha+\cos\alpha$;

4) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin(60^\circ-\alpha)}{2\cos(30^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}$.

54. Упростить выражение:

1) $\cos 2\beta\cos 5\beta+\sin 2\beta\sin 5\beta$;

2) $\sin 53^\circ\cos 7^\circ+\cos 53^\circ\sin 7^\circ$;

3) $\cos(4^\circ + \alpha)\sin(\alpha - 41^\circ) - \cos(\alpha - 41^\circ)\sin(\alpha + 4^\circ)$;

4) $\sin 463^\circ \cos 373^\circ + \cos 103^\circ \sin 193^\circ$.

55. Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin(30^\circ + \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)}{\sin(30^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)} = \mathrm{tg}\,(\alpha + \beta)$;

3) $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha$;

4) $\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) = 1{,}5$.

56. Упростить выражение:

1) $\dfrac{1 + \mathrm{tg}\,47^\circ\,\mathrm{tg}\,17^\circ}{\mathrm{tg}\,47^\circ - \mathrm{tg}\,17^\circ}$; 2) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$.

57. Доказать тождество: $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,(\alpha - \beta)}{\mathrm{tg}\,(\alpha - \beta)\,\mathrm{tg}\,\beta} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

58. Используя формулы сложения, найти:

1) $\cos 105^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\,105^\circ$.

59. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Найти $\sin(60^\circ - \alpha)$.

60. Дано: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\beta = -\frac{5}{13}$; $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Найти $\cos(\alpha + \beta)$.

61. Найти наибольшее значение выражения:

1) $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$; 2) $3\sin\alpha - \cos\alpha$.

Формулы двойного аргумента

62. Выразить данные тригонометрические функции через функции аргумента, вдвое меньше данного:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\,4\alpha$; 5) $\cos 4$; 7) $\sin\left(\beta + \frac{3\pi}{5}\right)$;

2) $\cos 7\alpha$; 4) $\sin(\alpha - \beta)$; 6) $\sin 12\alpha$; 8) $\cos\left(\frac{6x}{7} - 60^\circ\right)$.

63. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sin 70^\circ}{2\cos 35^\circ}$;

2) $\dfrac{\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$;

3) $\cos^4(45^\circ + \alpha) - \sin^4(45^\circ + \alpha)$;

4) $\cos^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

5) $\dfrac{\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha} - \dfrac{\cos 9\alpha}{\cos 3\alpha}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}$;

7) $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}$;

8) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4} + 4\alpha\right)}{1 - 2\cos^2 4\alpha}$.

64. Найти значение выражения:

1) $\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30'$; 2) $1 - 2\sin^2 15^\circ$; 3) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}}$.

65. Дано: $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Найти:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

66. Дано: $\operatorname{tg}\gamma = 4$. Найти: $\operatorname{tg}\left(2\gamma + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

67. Упростить выражение

$\sqrt{(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\cdot 2\operatorname{ctg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\alpha + 2}$, если $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$.

68. Доказать, что $\sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \sin 42^\circ = \dfrac{1}{16}$.

Формулы понижения степени

69. Представить в виде произведения выражение:

1) $1 + \cos 4\beta$; 3) $1 - \cos 80^\circ$; 5) $1 - \sin 8\alpha$;

2) $1 - \cos\dfrac{\gamma}{3}$; 4) $1 + \cos\dfrac{6\alpha}{5}$; 6) $1 + \sin\dfrac{4\pi}{9}$.

70. Понизить степень следующих выражений:

1) $\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$; 2) $\cos^2 5x$; 3) $\sin^2(3\beta + 5^\circ)$; 4) $\cos^2\left(\dfrac{\varphi}{6} - \dfrac{\pi}{14}\right)$.

71. Доказать тождество:

1) $2\cos^2(45^\circ - \alpha) - \sin 2\alpha = 1$;

2) $\dfrac{1+\cos 8\alpha}{1-\cos 8\alpha} \cdot \operatorname{tg}^2 4\alpha - \cos^2 4\alpha = \sin^2 4\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $\dfrac{1+\sin(60^\circ + 4\alpha)}{1-\sin(60^\circ+4\alpha)} = \operatorname{ctg}^2(15^\circ - 2\alpha)$.

72. Упростить выражение $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}} - \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}$, если $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

73. Преобразовать в произведение:

1) $\sin 100^\circ - \sin 40^\circ$;

2) $\cos 3\alpha + \cos 11\alpha$;

3) $\sin\dfrac{5\pi}{8} + \sin\dfrac{3\pi}{8}$;

4) $\cos 2\alpha + \cos 8\alpha$;

5) $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{5}\right)$;

6) $\cos\left(3\alpha - \dfrac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 3\alpha\right)$;

7) $\sin(x-y) + \sin(x+y)$;

8) $\cos\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

74. Преобразовать в произведение:

1) $\cos 70^\circ - \sin 36^\circ$; 2) $\sin\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{5}$; 3) $\sin\alpha + \cos\alpha$.

75. Преобразовать в произведение:

1) $\operatorname{tg} 34^\circ + \operatorname{tg} 26^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 3\varphi - \operatorname{tg} 10\varphi$;

3) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}(60^\circ + \alpha)$.

76. Преобразовать в произведение:

1) $2\cos\alpha - 1$; 2) $\sqrt{3} + 2\sin\alpha$; 3) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1$.

77. Доказать тождество:

1) $\sin 5\alpha - \sin 6\alpha + \sin 8\alpha - \sin 7\alpha =$

$$= -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{13\alpha}{2};$$

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)} = -\mathrm{ctg}\,\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \mathrm{tg}\,2\alpha$;

4) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

78. Упростить выражение:

1) $\dfrac{(\sin 8\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)\cos 10\alpha}{1 - \cos 6\alpha}$;

2) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$;

4) $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\dfrac{17\pi}{8} - \alpha\right)$.

79. Доказать тождество:

1) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $\sin\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 4\alpha =$

$$= 4\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{2}\right).$$

Формулы тангенса и котангенса половинного аргумента

80. Дано: $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$, α не является углом третьей четверти. Найти $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$.

81. Представить данную дробь в виде тангенса некоторого угла:

1) $\dfrac{\cos 24^\circ}{1 + \sin 24^\circ}$; 2) $\dfrac{1 - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}$; 3) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{8} - 2\alpha\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{8} - 2\alpha\right)}$.

82. Упростить выражение:

1) $\frac{\sin 8\alpha}{1+\cos 8\alpha}\cdot\frac{\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\frac{\sin 4\alpha}{1-\cos 4\alpha}$;

2) $\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)(1+\sin 2\alpha)$;

3) $\frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)}$.

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

83. Преобразовать в сумму произведение:

1) $\sin\alpha\sin 7\alpha$;

2) $\sin 36^\circ\cos 24^\circ$;

3) $\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$;

4) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

84. Доказать тождество:

1) $\sin\alpha-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)=0{,}5$;

2) $\sin 4\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\cos 5\alpha=\sin 6\alpha\cos\alpha$;

3) $\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)=\sin^2\frac{\beta}{2}$;

4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}+2\alpha\right)=\sin 2\alpha$.

Построение графиков тригонометрических функций

85. Построить график функции:

1) $y=\sin x-2$;

2) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y=\sin 3x$;

4) $y=\frac{1}{2}\sin x$;

5) $y=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2$;

6) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)-2$.

86. Построить график функции:

1) $y=\cos x+1$;

2) $y=\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$;

3) $y = \cos\frac{x}{2}$;

4) $y = -3\cos x$;

5) $y = -3\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1$;

6) $y = -3\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

87. Построить график функции:

1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}x + 2$; 3) $y = \operatorname{ctg} 2x$.

88. Построить график функции:

1) $y = |\operatorname{tg} x|$; 2) $y = \operatorname{ctg}|x|$; 3) $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{6}\right|$.

89. Построить график функции:

1) $y = \sin^2 x + \cos 2x$; 2) $y = \sin x - \cos x$.

90. Построить график функции:

1) $y = (\sqrt{\operatorname{tg} x})^2$;

2) $y = \operatorname{ctg}|x| - \operatorname{ctg} x$;

3) $y = \sqrt{\cos^2 x} - \cos x$;

4) $y = |\operatorname{tg} x|\operatorname{ctg} x$;

5) $y = \sqrt{-\cos^2 x}$;

6) $y = \sqrt{\cos 2x - 1}$;

7) $y = \frac{\sin|x|}{\sin x}$;

8) $y = \operatorname{tg} x\,|\cos x|$;

9) $y = \frac{\cos x + |\cos x|}{\sin x - |\sin x|}$;

10) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

Понятие обратной функции

91. Какие з графиков, изображенных на рис. 17, являются графиками обратимых функций?

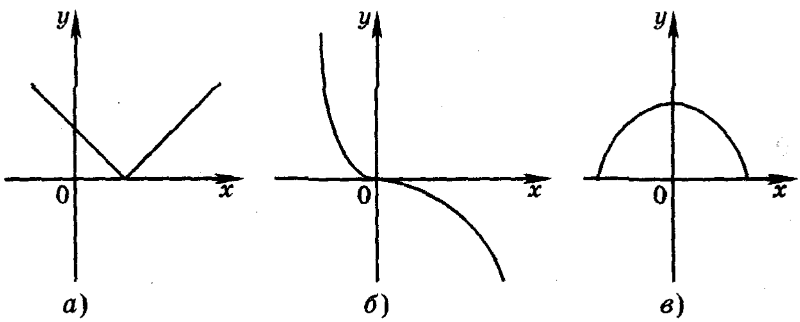


Рис. 17

92. Какие из следующих функций являются обратимыми:

1) $y = 2x - 3$;

2) $y = \frac{1}{x^2}$;

3) $y = \sqrt[4]{x}$;

4) $y = |x|,\ x \in [-9; -2)$;

5) $y = |x|,\ x \in [0; \infty)$;

6) $y = |x|,\quad x \in [-9; \infty)$;

7) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

8) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

9) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

93. Найти функцию, обратную данной:

1) $y = 3x + 2$;

2) $y = \frac{x}{x + 3}$;

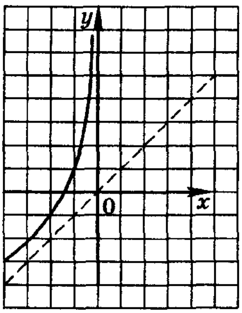
3) $y = \sqrt[4]{1 - 4x}$;

4) $y = \sqrt{x + 4} + 2$;

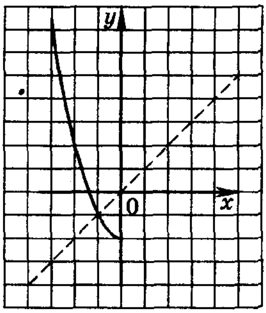
5) $y = x^2,\ x \in [0,1; \infty)$;

6) $y = (x - 3)^2,\ x \in (-\infty; 1)$.

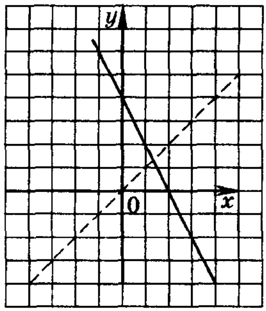
94. С помощью графика функции f, изображенного на рис. 18, построить график функции g, обратной функции f.



а)



б)



в)

Рис. 18

Обратные тригонометрические функции

95. Найти:

1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\arccos \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arctg} 1$;

4) $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$;

5) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

6) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

7) $\operatorname{arctg} (-1)$;

8) $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

96. Найти значение выражения:

1) $\arccos 0 + \arcsin 1 + \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

2) $5\arccos 1 - 6\arcsin(-1) + 3\operatorname{arctg} 1 + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

97. Вычислить:

1) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\sin(2\operatorname{arctg}(-1))$;

3) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arcsin \frac{1}{2}\right)$;

4) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 1\right)$.

98. Найти область определения функции:

1) $y = \arcsin(2x - 3)$;

2) $y = \arccos(x^2 - 2)$;

3) $y = \operatorname{arctg} \frac{6}{\sqrt{x+5}}$.

99. Найти область значений функции:

1) $y = 4\arcsin x + \frac{\pi}{3}$;

2) $y = 2 - 5\operatorname{arcctg} 3x$.

100. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5)$; 2) $\sin\left(\arcsin \frac{\pi}{7}\right)$; 3) $\cos\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

101. Вычислить:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{11}\right)\right)$; 2) $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{9}\right)$; 3) $\arccos(\cos 5)$.

102. Вычислить:

1) $\cos\left(\arcsin \frac{4}{7}\right)$;

2) $\sin\left(\arccos \frac{1}{4}\right)$;

3) $\cos(\operatorname{arcctg} 0{,}3)$;

4) $\sin(\operatorname{arctg} 8)$;

5) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{4}{9}\right)$;

6) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-10))$.

103. Решить уравнение:

1) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$;

2) $\arccos(3 - x) = \frac{3\pi}{4}$;

3) $\arcsin(5x - 6) = \frac{\pi}{2}$.

104. Решить неравенство:

1) $\arcsin x < -\frac{\pi}{4}$;

2) $\arccos \frac{4x}{5} \geq \frac{3\pi}{4}$;

3) $\operatorname{arctg} (1 - 2x) \geq -\frac{\pi}{4}$.

105. Построить график функции:

1) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$;

2) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$;

3) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} |x|}$;

4) $y = \sin (\arcsin x)$;

5) $y = \operatorname{ctg} (\operatorname{arctg} x)$;

6) $y = \cos^2 (\operatorname{arctg} x)$.

106. При каких значениях параметра a имеет решение уравнение:

1) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + a$;

2) $\arccos x = \cos a$;

3) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{ctg} a$;

4) $\dfrac{\arcsin x - a}{\arcsin x + \frac{\pi}{3}} = 0$;

5) $\dfrac{\arccos x - \frac{2\pi}{3}}{\operatorname{arctg} x - a} = 0$;

6) $\dfrac{\operatorname{arctg} x + a}{\sqrt{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}} = 0$?

Решение простейших тригонометрических уравнений

107. Решить уравнение:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos x = \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x = 1$;

4) $\sin x = -\frac{1}{2}$;

5) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

6) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

108. Решить уравнение:

1) $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 1$;

4) $\operatorname{tg} \left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$;

5) $\sin \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{18}\right) = -1$;

6) $\cos (3x - 5) = 0$;

7) $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{5} + 2\right) = \frac{3}{8}$;

8) $\sin \frac{x}{4\pi} = 0$;

9) $\sin(8x+1) = \frac{\pi}{5}$; 11) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3x}{5}\right) = -\frac{2}{13}$;

10) $\cos\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{4x}{3}\right) = 0{,}7$; 12) $\operatorname{tg}(10 - 5x) = -4$.

109. Решить уравнение:

1) $4 - 4\sin\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{24}\right) = 0$; 3) $\sqrt{3} - 3\operatorname{ctg}\left(10x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

2) $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{3} = 0$; 4) $5 - 5\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - 4x\right) = 0$.

110. Решить уравнение:

1) $\cos\frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin\pi x^2 = 0$;

2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt{x}} = 1$; 4) $\sin(\sin(\cos x)) = 0$.

111. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

112. Сколько корней уравнения $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$?

113. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$, удовлетворяющие неравенству $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.

114. При каких значениях параметра a имеет решения уравнение:

1) $\cos x = 3 - a$; 3) $(a-5)\cos x = a + 2$;

2) $\sin\frac{x}{5} = a^2 - 8a + 17$; 4) $(a^2 - 6a)\sin x = a^2 - 2a - 24$?

115. При каких значениях параметра a данное уравнение имеет единственный корень на указанном промежутке:

1) $(x-a)\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$, $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$;

2) $(x+a)\left(\operatorname{ctg} x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

116. Определить количество корней уравнения $\sin x = a$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ в зависимости от значения параметра a.

Решение тригонометрических уравнений

117. Решить уравнение:

1) $6\cos^2 4x + \cos 4x - 1 = 0$; 3) $5\sin\frac{x}{4} - \cos\frac{x}{2} + 3 = 0$;

2) $2\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x = 0$; 4) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} - 5\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = 4$.

118. Решить уравнение:

1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$; 3) $6\sin^2 x - 1{,}5\sin 2x - 5\cos^2 x = 2$;

2) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$; 4) $2\sin x - 3\cos x = 3$.

119. Решить уравнение:

1) $\cos 7x - \cos x = 0$;

2) $\sin 12x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$;

3) $\sin 10x - \cos 4x = 0$;

4) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$;

5) $\sin x - \sin 2x + \sin 5x - \sin(\pi + 8x) = 0$.

120. Решить уравнение:

1) $\sin^2\frac{x}{6} = \frac{1}{2}$;

2) $2\cos^2 2x + \cos 10x - 1 = 0$;

3) $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$;

4) $\cos^4\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4 3x = \frac{1}{4}$.

121. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = 1$; 2) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin 2x$.

122. Решить уравнение:

1) $\sin(x + 60^\circ)\cos(x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$;

2) $\sin 3x\sin x + \cos 4x = 0$;

3) $\cos 3x\cos 6x = \cos 4x\cos 7x$;

4) $12\cos^2\frac{x}{2} = 9 - 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$.

123. Решить уравнение:

1) $\frac{\sin 5x}{1 - \cos 5x} = 0$; 3) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$;

2) $\frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x} = 0$; 4) $\frac{1 + \sin x - \cos x}{\sin 2x} = 0$.

124. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $5(1+\cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

125. Найти наименьший положительный корень уравнения $1 + \cos 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2$.

126. Найти все корни уравнения $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - \cos^2 x = -2$, удовлетворяющие неравенству $0 < x < 4$.

127. Найти, сколько корней уравнения $\sin 2x + \sin(\pi - 8x) = \sqrt{2}\cos 3x$ принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

128. Решить уравнение $\sqrt{1-4x^2}\left(\sin \pi x - \sqrt{5}\sin\frac{\pi x}{2}\right) = 0$.

129. Найти, при каких значениях параметра a имеет решения уравнение:

1) $\sin^2 x - (4a-9)\sin x + (a-5)(3a-4) = 0$;
2) $\sin x - \cos 2x = 4a^2 + 4a + 3$;
3) $5\cos^2 x - 2(2a-1)\cos x + a^2 - 2a + 2 = 0$;
4) $5\cos 3x + 12\sin 3x = a - 5$;
5) $\sin^4 x + (2a-1)\cos^2 x - 6a - 1 = 0$.

130. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\sin x + \frac{a}{2} = 0$ имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$: 1) один корень; 2) два корня.

Решение тригонометрических неравенств

131. Решить неравенство:

1) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x > -\frac{1}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} x > 1$;

2) $\sin x \ge -\frac{1}{2}$; 5) $\operatorname{tg} x < 1$; 8) $\operatorname{ctg} x \le \sqrt{3}$.

3) $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\operatorname{tg} x \ge -\sqrt{3}$;

132. Решить неравенство:

1) $\cos 2x < \frac{1}{2}$; 4) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$;

2) $\sin\frac{x}{6} \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{10}\right) \le \frac{\sqrt{3}}{3}$;

3) $\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \ge -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

133. Решить неравенство:

1) $\frac{1}{2} \le \cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $-3 \le \operatorname{tg} x \le \sqrt{3}$; 4) $|\operatorname{ctg} x| \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$.

134. Решить неравенство:

1) $\sin^2 3x > \frac{1}{4}$;

2) $\sin 2x \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3} \cos 2x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 4 \ge 0$;

4) $2\cos^2 x - \sqrt{3} \sin x + 1 \le 0$.

Системы тригонометрических уравнений

135. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \cos 6x + \cos 6y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ 2 \sin x - \sin y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\frac{3}{4}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\sqrt{3}. \end{cases}$

136. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin \pi x \cos \pi y = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} \pi y = -1. \end{cases}$

Определение корня *n*-й степени

137. Найти значение корня:

1) $\sqrt[4]{16}$; 2) $\sqrt{1,44}$; 3) $\sqrt[3]{0,027}$; 4) $\sqrt[5]{-100000}$; 5) $\sqrt[4]{2\frac{113}{256}}$.

138. Найти значение выражения:

1) $0,6 \sqrt[3]{8000} - \frac{5}{3} \sqrt[4]{81}$;

2) $\sqrt[3]{-216} + 4 (\sqrt[6]{5})^6 - 3 \sqrt[9]{512}$;

3) $2\left(-\sqrt[12]{12}\right)^{12} - 30\sqrt[3]{0{,}001} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}\right)^5$;

4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} \cdot \sqrt[6]{\frac{64}{729}} + (-5\sqrt{3})^2 - \left(-\sqrt[11]{14}\right)^{11}$;

5) $\sqrt[8]{0{,}00000256} + 54\left(-\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\right)^3 + 6\sqrt[8]{1{,}5^8}$;

6) $\left(-\sqrt[5]{18}\right)^5 + \sqrt[10]{4^5} - 2\sqrt[3]{-125} + \sqrt[9]{12^9} - 100\sqrt[4]{0{,}0625}$.

139. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt[6]{-x-1}$;
3) $y = \sqrt[3]{x-4}$;
2) $y = \sqrt[8]{-x^3}$;
4) $y = \sqrt[4]{5x - x^2}$.

140. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x} = 1{,}2$;
4) $\sqrt[4]{x} + 5 = 0$;
7) $\sqrt[4]{6x} - 4 = 0$;
2) $\sqrt[7]{x} = 2$;
5) $\sqrt[3]{x} + 5 = 0$;
8) $\sqrt[4]{6x-4} = 0$;
3) $\sqrt[4]{x} - 6 = 0$;
6) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x} - 3 = 0$;
9) $\sqrt[4]{6x-4} = 2$.

141. Решить уравнение:

1) $x^9 = 512$;
5) $x^{12} = 1$;
9) $(x+2)^3 = 125$;
2) $x^5 = 6$;
6) $x^4 = 1296$;
10) $(x-5)^4 = 256$;
3) $x^7 = -10$;
7) $x^6 = 8$;
11) $5x^8 - 95 = 0$;
4) $x^4 = \frac{1}{81}$;
8) $x^4 = -625$;
12) $7x^6 + 14 = 0$.

142. Решить уравнение:

1) $a\sqrt[8]{x-1} = 0$;
4) $\sqrt[4]{x-2} = a$;
7) $x^7 = a - 10$;
2) $\sqrt[5]{(a-1)\,x} = 0$;
5) $x^6 = 8 - a$;
8) $x^4 = a^2 + 3a$.
3) $a\sqrt[6]{x-1} = a$;
6) $(a-3)\,x^{10} = 8$;

143. Решить уравнение:

1) $3x^6 - 22x^3 - 16 = 0$;
3) $x^{16} + x^8 - 30 = 0$.
2) $x^8 - 84x^4 + 243 = 0$;

144. Найти два последовательных целых числа, между которыми находится число: 1) $\sqrt[3]{42}$; 2) $\sqrt[4]{300}$; 3) $-\sqrt[3]{250}$.

145. Оценить значение $\sqrt[4]{x}$, если:

1) $0{,}0016 \le x \le 81$;
2) $625 < x < 1296$.

146. Оценить значение x, если:

1) $6 \le \sqrt[3]{x} \le 10$;
2) $0{,}3 < \sqrt[4]{x} < 0{,}4$.

147. Указать все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

1) 3 и $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[5]{-30}$ и $\sqrt[6]{750}$.

Свойства арифметического корня *n*-й степени

148. Найти значение кореня:

1) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$;

2) $\sqrt[4]{0{,}0016 \cdot 81}$;

3) $\sqrt[5]{32 \cdot 0{,}00001}$;

4) $\sqrt[3]{7^6 \cdot 2^9}$;

5) $\sqrt[8]{0{,}5^8 \cdot 3^{16}}$;

6) $\sqrt[6]{\dfrac{6^{12} \cdot 5^6}{2^{18} \cdot 3^{18}}}$.

149. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{4}$;

2) $\sqrt[5]{1000} \cdot \sqrt[5]{100}$;

3) $\sqrt[3]{0{,}054} \cdot \sqrt[3]{4}$;

4) $\sqrt[7]{7^4 \cdot 2^9} \cdot \sqrt[7]{7^3 \cdot 2^5}$;

5) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}}$;

6) $\dfrac{\sqrt[3]{6^{10} \cdot 3^5}}{\sqrt[3]{3^{14} \cdot 6^7}}$;

7) $\sqrt[3]{\sqrt{37}+8} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{37}-8}$;

8) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$;

9) $\sqrt[5]{12\sqrt{3}-3\sqrt{21}} \cdot \sqrt[5]{12\sqrt{3}+3\sqrt{21}}$.

150. Упростить выражение:

1) $\sqrt[6]{x^6}$, если $x \ge 0$;

2) $\sqrt[8]{y^8}$, если $y \le 0$;

3) $\sqrt[7]{a^7}$;

4) $\sqrt[4]{81x^{16}y^{20}z^4}$, если $y \le 0$, $z \ge 0$;

5) $4{,}5a^2\sqrt[6]{64a^{18}}$, если $a \le 0$;

6) $\dfrac{m^7n^6k^5}{\sqrt[8]{m^8n^{16}k^{40}}}$, если $m > 0$, $k < 0$;

7) $\sqrt[3]{125a^9c^{12}}$;

8) $-0{,}6x^4 \cdot \sqrt[4]{256x^8y^{28}}$, если $y \le 0$.

151. Упростить выражение:

1) $\sqrt[4]{(5-x)^4}$;

2) $\sqrt[6]{(m-3)^6}$, если $m \le 3$;

3) $\sqrt[8]{(y+1)^8}$, если $y \ge -1$;

4) $(x-12)\sqrt[10]{\dfrac{1024}{(12-x)^{10}}}$, если $x < 12$.

152. Упростить выражение:

1) $\sqrt[4]{(3-\sqrt{10})^4}$;

2) $\sqrt[5]{(1-7\sqrt{2})^5}$;

3) $\sqrt[6]{(\sqrt{10}-\sqrt{7})^6}$;

4) $\sqrt[8]{(3-5\sqrt{3})^8} - \sqrt[3]{(3-4\sqrt{3})^3}$.

153. Построить график функции:

1) $y = \sqrt[4]{x^4} + x$, если $x \ge 0$;

2) $y = (\sqrt[6]{x+2})^6$;

3) $y = \sqrt[6]{(x+2)^6}$;

4) $y = \sqrt[4]{x^4} + 2x$;

5) $y = \sqrt[8]{(x-3)^5} \cdot \sqrt[8]{(x-3)^3}$;

6) $y = \dfrac{(x-4)^2}{\sqrt[4]{(x-4)^4}}$.

154. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[3]{54}$; 2) $\sqrt[4]{1875}$; 3) $\sqrt[5]{160}$; 4) $\sqrt[4]{243}$.

155. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{48x^{16}}$;

2) $\sqrt[4]{x^{17}}$

3) $\sqrt[5]{-b^{12}}$;

4) $\sqrt[4]{x^{12}y^7}$;

5) $\sqrt[4]{810a^{26}b^{17}}$;

6) $\sqrt[3]{128m^{13}n^8}$;

7) $\sqrt[4]{-625a^{15}}$;

8) $\sqrt[6]{x^{14}y^{17}}$;

9) $\sqrt[4]{a^{13}b^{13}}$, если $a \le 0$, $b \le 0$;

10) $\sqrt[8]{m^{10}n^9}$, если $m \le 0$;

11) $\sqrt[4]{x^{23}y^{18}z^{36}}$, если $z \le 0$;

12) $\sqrt[6]{-m^{49}n^{20}}$, если $n \ge 0$.

156. Внести множитель под знак корня:

1) $3\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt[3]{4}$; 3) $0{,}1\sqrt[4]{23}$; 4) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{500}$.

157. Внести множитель под знак корня:

1) $m\sqrt{6}$;

2) $m\sqrt{-m^3}$;

3) $m\sqrt[4]{m^5}$;

4) $3y\sqrt[5]{2y^2}$;

5) $a\sqrt[9]{6a}$;

6) $2b^4\sqrt[3]{\dfrac{3}{4b^2}}$;

7) $c\sqrt[8]{c^6}$, если $c \le 0$;

8) $xy\sqrt[6]{xy^4}$, если $y \ge 0$;

9) $x^3y^7\sqrt[10]{x^8y^{12}}$, если $x \le 0$, $y \ge 0$.

158. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{15}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{20}{\sqrt[3]{5}}$; 3) $\frac{24}{\sqrt[4]{216}}$; 4) $\frac{32}{\sqrt[3]{16}}$; 5) $\frac{6}{\sqrt[5]{27}}$; 6) $\frac{c^6}{\sqrt[9]{c^7}}$.

159. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{16}{\sqrt{7}-\sqrt{15}}$; 2) $\frac{24}{4+\sqrt{10}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{5}}$; 4) $\frac{7}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}$.

160. Упростить выражение:

1) $\sqrt{\sqrt[4]{b}}$; 3) $\sqrt[6]{\sqrt{y}}$; 5) $\sqrt[32]{m^8}$; 7) $\sqrt[8]{c\sqrt[5]{c^3}}$;

2) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{c}}$; 4) $\sqrt[7]{a\sqrt[3]{a}}$; 6) $\sqrt[20]{a^{15}b^{10}}$; 8) $\sqrt[9]{p^5\sqrt[4]{p^7}}$.

161. Сократить дробь:

1) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 3) $\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}+3}$; 5) $\frac{\sqrt[8]{a^5b^3}-\sqrt[8]{a^3b^5}}{\sqrt[8]{a^5b}-\sqrt[8]{ab^5}}$;

2) $\frac{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$; 4) $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}$; 6) $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$.

162. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{3+\sqrt{10}}\cdot\sqrt[6]{19-6\sqrt{10}}$; 2) $\sqrt[4]{8-2\sqrt{15}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

163. Упростить выражение:

1) $(\sqrt[5]{a}-1)(\sqrt[5]{a}+1)-(\sqrt[5]{a}-2)^2$;

2) $\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-9}$;

3) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}$;

4) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}+4}{\sqrt[4]{a}-4}-\frac{\sqrt[4]{a}-4}{\sqrt[4]{a}+4}\right)\cdot\frac{16-\sqrt{a}}{32\sqrt[4]{a^3}}$;

5) $\frac{2\sqrt[8]{m}}{\sqrt[8]{m}-2}+\frac{\sqrt[8]{m}+7}{8-4\sqrt[8]{m}}\cdot\frac{32}{7\sqrt[8]{m}+\sqrt[4]{m}}$;

6) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}}\right):$

$$:\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\right).$$

164. Доказать, что значение выражения

$$\sqrt[3]{14\sqrt{2}+20}-\sqrt[3]{14\sqrt{2}-20}$$

есть число рациональное.

Иррациональные уравнения

165. Решить уравнение:

1) $\sqrt[5]{x+4}=-2$;
2) $\sqrt{x+4}=-2$;
3) $\sqrt{x+4}=2$;
4) $\sqrt{x+4}=\sqrt{5-2x}$;
5) $\sqrt{x+4}=\sqrt{-x-4}$;
6) $\sqrt{x+4}=\sqrt{2x+9}$;
7) $\sqrt{x+4}=\sqrt{x^2+5x-1}$;
8) $\sqrt{x+4}=-x-4$;
9) $\sqrt{x+4}=\sqrt{-x-6}$;
10) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$.

166. Решить уравнение:

1) $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{2-x}=\sqrt{2}$;
2) $\sqrt{5x+1}=1-x$;
3) $x+\sqrt{2x^2-14x+13}=5$;
4) $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{2x+1}$;
5) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$;
6) $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8$;
7) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{16-3x}=5$;
8) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}=1$;
9) $\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}$;
10) $2\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+7}=\sqrt{x}$;
11) $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$.

167. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x}-6\sqrt[4]{x}+8=0$;
2) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-3=0$;
3) $x+27\sqrt[4]{x}=0$;
4) $\sqrt{x-5}-8=2\sqrt[4]{x-5}$;

5) $4\sqrt[3]{x+2}+5=\sqrt[3]{x^2+4x+4}$;

6) $x^2+2\sqrt{41-x^2}=26$;

7) $x^2-x+\sqrt{x^2-x-2}=8$;

8) $\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}-2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}}=\frac{7}{3}$;

9) $x\sqrt[4]{x}+2\sqrt[8]{x^5}=3$;

10) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

168. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{4x+15}=0$;

2) $\sqrt[3]{13-x}+\sqrt[3]{22+x}=5$;

3) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$;

4) $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

169. Решить уравнение:

1) $\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+7$;

2) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3$.

170. Решить уравнение:

1) $\sqrt{13-6\operatorname{tg}x}=2\operatorname{tg}x-3$;

2) $\sqrt{6\sin x}=-2\cos x$;

3) $\sqrt{1-3\cos x-\cos 2x}-2\sin x=0$.

171. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y}=3,\\ \sqrt[4]{y}\cdot\sqrt[3]{x}=10;\end{cases}$

2) $\begin{cases}y-x=-7,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{2x-y+1}=2,\\ \sqrt{x+4y+3}=5-2y;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2},\\ x+y=25;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}=5,\\ x-y=-35;\end{cases}$

6) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ xy=27;\end{cases}$

7) $\begin{cases}\sqrt{x+2y}+\sqrt{x-y+2}=3,\\ 2x+y=3;\end{cases}$

8) $\begin{cases}\sqrt{\frac{3y-2x}{y}}+2\sqrt{\frac{y}{3y-2x}}=2\sqrt{2},\\ 3x^2+x+2=y^2-yx+2y;\end{cases}$

9) $\begin{cases}5y^2-30x+13=3\sqrt{y^2-6x+3},\\ 2x-y=4;\end{cases}$

10) $\begin{cases}x+25y+10\sqrt{xy}=100,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4.\end{cases}$

Иррациональные неравенства

172. Решить неравенство:

1) $\sqrt{4-x} > 3$;
2) $\sqrt{4-x} < 3$;
3) $\sqrt{4-x} > -4$;
4) $\sqrt{4-x} < -4$.

173. Решить неравенство:

1) $\sqrt{3-2x} > \sqrt{x+1}$;
2) $\sqrt{x^2-4} \le \sqrt{2x^2-x-6}$;
3) $\sqrt{x+7} < x-2$;
4) $\sqrt{x^2-3x-10} \le 8-x$;
5) $\sqrt{2x+14} \ge x+3$;
6) $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$.

174. Решить неравенство:

1) $(6-7x)\sqrt{x} \ge 0$;
2) $\sqrt[5]{x} + 2\sqrt[10]{x} - 8 \ge 0$;
3) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15} \le 5$;
4) $2\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} \le 1$.

175. Найти решения неравенства $a\sqrt{3-x} \ge 1$ в зависимости от значения параметра a.

Степень с рациональным показателем и ее свойства

176. Заменить степень с дробным показателем корнем:

1) $5^{\frac{1}{4}}$;
2) $8^{\frac{7}{10}}$;
3) $3^{-\frac{1}{3}}$;
4) $6^{-\frac{4}{11}}$;
5) $(xy)^{\frac{3}{7}}$;
6) $xy^{\frac{3}{7}}$;
7) $(b+c)^{3,5}$;
8) $b^{-\frac{2}{5}} + c^{1,8}$.

177. Заменить арифметический корень степенью с дробным показателем:

1) $\sqrt[4]{m}$;
2) $\sqrt[6]{a^5}$;
3) $\sqrt[5]{b^3}$;
4) $\sqrt[8]{4a}$;
5) $\sqrt[9]{4^{-4}}$;
6) $\sqrt[5]{25}$;
7) $\sqrt[16]{(m-n)^{13}}$;
8) $\sqrt[16]{m^{13}-n^{13}}$.

178. Найти значение выражения:

1) $27^{\frac{1}{3}}$; 2) $64^{-\frac{5}{6}}$; 3) $0{,}0001^{-0{,}25}$; 4) $256^{0{,}375}$; 5) $\left(2\frac{23}{49}\right)^{-1{,}5}$.

179. Найти область определения функции:

1) $y = x^{\frac{6}{7}}$;
2) $y = x^{-2{,}3}$;
3) $y = (3-x)^{2{,}8}$;
4) $y = (2x^2-5x+2)^{-\frac{1}{6}}$.

180. Представить выражение в виде степени или произведения степеней:

1) $y^{3,4}\cdot y^{-1,8}$;

2) $y^{\frac{17}{24}}\cdot y^{-\frac{3}{8}}$;

3) $y^{\frac{15}{28}}:y^{\frac{6}{7}}$;

4) $(y^{-4})^{0,9}$;

5) $y^{\frac{5}{9}}\cdot y^{\frac{5}{12}}\cdot y^{-\frac{5}{6}}$;

6) $\left(x^{\frac{10}{21}}y^{\frac{16}{35}}\right)^{\frac{49}{20}}$;

7) $\left(y^{\frac{7}{12}}\right)^{\frac{3}{14}}\cdot\left(y^{\frac{17}{42}}\right)^{-\frac{21}{34}}$;

8) $(y^{6})^{-0,9}\cdot(y^{2,3})^{4}:(y^{-2,5})^{4}$;

9) $\left(x^{\frac{5}{36}}y^{-\frac{40}{81}}\right)^{\frac{9}{20}}\cdot\left(x^{-\frac{15}{64}}y^{\frac{5}{32}}\right)^{\frac{8}{45}}$.

181. Найти значение выражения:

1) $5^{3,2}\cdot5^{-2,8}\cdot5^{2,6}$;

2) $(3^{-0,9})^{8}:3^{-10,2}$;

3) $\left(7^{\frac{16}{17}}\right)^{-\frac{51}{32}}\cdot49^{1,25}$;

4) $625^{-2,25}\cdot25^{-\frac{2}{3}}\cdot125^{\frac{25}{9}}$;

5) $\left(\dfrac{3^{-\frac{5}{7}}\cdot5^{-\frac{5}{7}}}{15^{-1}\cdot2^{\frac{2}{7}}}\right)^{-7}$;

6) $\left(\dfrac{128^{\frac{3}{14}}\cdot9^{-\frac{2}{9}}}{3^{-\frac{1}{6}}\cdot8^{\frac{1}{4}}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{64^{\frac{1}{4}}\cdot81^{\frac{9}{8}}}{27^{2}\cdot2^{-\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Преобразование выражений, содержащих степени с дробным показателем

182. Упростить выражение:

1) $b^{\frac{1}{6}}\left(b^{\frac{1}{6}}-4\right)-\left(b^{\frac{1}{6}}-2\right)^{2}$;

2) $\left(b^{\frac{1}{8}}-c^{\frac{1}{4}}\right)\left(b^{\frac{1}{8}}+c^{\frac{1}{4}}\right)-\left(5b^{\frac{1}{8}}+2c^{\frac{1}{4}}\right)\left(3b^{\frac{1}{8}}-4c^{\frac{1}{4}}\right)$;

3) $\left(a^{\frac{1}{24}}+b^{\frac{1}{24}}\right)\left(a^{\frac{1}{24}}-b^{\frac{1}{24}}\right)\left(a^{\frac{1}{12}}+b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)$;

4) $\left(x^{\frac{1}{9}}+1\right)\left(x^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{9}}+1\right)-x^{\frac{1}{6}}\left(x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{12}}\right)$.

183. Сократить дробь:

1) $\dfrac{m+4m^{\frac{5}{8}}}{m^{\frac{3}{8}}+4}$;

2) $\dfrac{7b^{\frac{4}{9}}}{b^{\frac{7}{12}}-b^{\frac{4}{9}}}$;

3) $\dfrac{a-4b}{a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}}$;

4) $\dfrac{x+y}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}$; 6) $\dfrac{4m-m^{\frac{3}{4}}}{4m^{\frac{5}{4}}-m}$; 8) $\dfrac{p-7p^{\frac{7}{9}}}{p-49p^{\frac{5}{9}}}$;

5) $\dfrac{a-6a^{0,5}b^{0,5}+9b}{a^3b^{2,5}-3a^{2,5}b^3}$; 7) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-16b^{\frac{2}{3}}}{a-64b}$; 9) $\dfrac{15^{\frac{1}{4}}+45^{\frac{1}{4}}}{10^{\frac{1}{4}}+30^{\frac{1}{4}}}$.

184. Упростить выражение:

1) $\dfrac{a+a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}}{4a^{\frac{1}{5}}+a^{\frac{1}{10}}b^{\frac{1}{10}}}\cdot\dfrac{16a^{\frac{1}{5}}+8a^{\frac{1}{10}}b^{\frac{1}{10}}+b^{\frac{1}{5}}}{ab^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{1}{5}}b}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{2n}{n-m}-\dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-2,4}{a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-3}{5a^{\frac{1}{4}}-10}+\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+2}{5a^{\frac{1}{4}}}$;

4) $\left(\dfrac{m^{\frac{1}{5}}}{m^{\frac{1}{5}}+n^{\frac{1}{5}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{5}}}{m^{\frac{1}{5}}-n^{\frac{1}{5}}}\right):\dfrac{m^{\frac{6}{5}}n^{\frac{1}{5}}-m^{\frac{1}{5}}n^{\frac{6}{5}}}{m^{\frac{2}{5}}-n^{\frac{2}{5}}}$;

5) $\left(\dfrac{8b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}+7}-\dfrac{15b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{2}}+14b^{\frac{1}{4}}+49}\right):\dfrac{8b^{\frac{1}{4}}+41}{b^{\frac{1}{2}}-49}+\dfrac{7b^{\frac{1}{4}}-49}{b^{\frac{1}{4}}+7}$.

Показательная функция и ее свойства

185. Построить график функции:

1) $y=0,5^x$; 3) $y=0,5^{x-1}$; 5) $y=1-0,5^x$;

2) $y=0,5^x+2$; 4) $y=0,5^{|x|}$; 6) $y=|0,5^x-3|$.

186. Сравнить значения выражений:

1) $2^{1,2}$ и $2^{\frac{7}{6}}$; 3) $8^{\sqrt{2}}$ и 1; 5) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{0,4}$ и $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2}$;

2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ и $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2,1}$; 4) 1 и $\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 6) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-7}$ и $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-8}$.

187. Сравнить числа m и n, если:

1) $1{,}3^m < 1{,}3^n$; 2) $\left(\frac{4}{7}\right)^m > \left(\frac{4}{7}\right)^n$; 3) $\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^m < \left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^n$.

188. Сравнить a с единицей, если:

1) $a^{22} > a^{18}$; 2) $a^{\frac{1}{2}} < a^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{-1{,}6} > 1$.

Показательные уравнения

189. Решить уравнение:

1) $3^x = 729$;

2) $12^{3x-7} = 12^{5-4x}$;

3) $23^{2x^2-5x+2} = 1$;

4) $25^x = 125$;

5) $2^{x^2-6x-1{,}5} = 32\sqrt{2}$;

6) $(6^{x+9})^{x+5} = \frac{1}{216}$;

7) $\left(\frac{18}{49}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{x-1} = \frac{343}{8}$;

8) $5^{3x^2-2x} = 7^{3x^2-2x}$;

9) $11^{x+1} \cdot 4^x = 0{,}25 \cdot 44^{5x-4}$;

10) $\sqrt[3]{625^{2-x}} = \sqrt[4]{125^{x+1}}$.

190. Решить уравнение:

1) $2^x + 2^{x+3} = 36$;

2) $7^{x+1} - 5 \cdot 7^{x-1} = 44$;

3) $5^{3x} - 2 \cdot 5^{3x-1} - 3 \cdot 5^{3x-2} = 300$;

4) $2 \cdot 81^{x-1} - 5 \cdot 9^{2x-1} + 4 \cdot 3^{4x-1} = 195$;

5) $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0$;

6) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} = 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

191. Решить уравнение:

1) $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$;

2) $2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$;

3) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 128$;

4) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$;

5) $\frac{20}{3^x - 1} - \frac{1}{3^{x-3}} = 1$;

6) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$;

7) $3^{\cos^2 x} - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos^2 x} = 2$;

8) $(\sqrt{9-4\sqrt{5}})^x + (\sqrt{9+4\sqrt{5}})^x = 18$.

192. Решить уравнение:

1) $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$; 2) $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x$;

3) $2 \cdot 7^x - 3 \cdot 2^x = 6\frac{1}{7} \cdot 14^{0,5x}$;

4) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

193. Решить уравнение:

1) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$; 2) $4^{x-2} + 6^{x-3} = 100$; 3) $2^{-|x|} = x^2 + 1$.

194. При каких значениях параметра a уравнение $49^x + (a-1)\,7^x + a - 2a^2 = 0$ имеет два действительных различных корня?

Показательные неравенства

195. Решить неравенство:

1) $2^x \geq \frac{1}{512}$;

2) $\left(\frac{1}{6}\right)^x \geq \frac{1}{36}$;

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^{9x-22} \leq \left(\frac{9}{4}\right)^{x^2}$;

4) $(0,8)^{\frac{x^2+8x+15}{x}} \leq 1$;

5) $25 \cdot 0,2^{x^2-4x} > 0,008$;

6) $(0,75)^{\frac{x^2-3}{x}} \leq 1\frac{7}{9}$;

7) $(0,6)^{x-3} \geq \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{4}{x}} \cdot 2\frac{7}{9}$;

8) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{2x+7}{x-1}} \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^{x+1}$.

196. Решить неравенство:

1) $5^{x+1} - 5^{x-1} - 5^{x-2} - 3 \cdot 5^{x-3} \geq 2960$;

2) $0,6^{2x-1} - 0,36^x - 0,4 \geq 0$;

3) $3^x - 2^{x+4} > 3^{x-1} - 55 \cdot 2^{x-2}$;

4) $21^x - 81 \cdot 7^x - 3^x + 81 \leq 0$.

197. Решить неравенство:

1) $2^x + 2^{1-x} - 3 \leq 0$;

2) $9^{x+1} - 28 \cdot 3^x + 3 > 0$;

3) $36^{x+1} + 35 \cdot 6^x - 1 \geq 0$;

4) $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 < 0$.

198. Решить неравенство:

1) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x \leq 0$;

2) $2 \cdot 7^x - 3 \cdot 2^x > \frac{43}{7} \cdot 14^{\frac{x}{2}}$.

Логарифмы и их свойства

199. Найти:

1) $\log_{11} 121$; 4) $\log_7 7$; 7) $\log_4 8$;

2) $\log_2 0{,}5$; 5) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$; 8) $\lg 10\sqrt{10}$;

3) $\log_4 1$; 6) $\log_{1000} 10$; 9) $\log_{0{,}25} 64$.

200. Найти значение выражения:

1) $\log_2 \log_3 \sqrt[8]{3}$; 6) $\dfrac{\log_2 324}{\log_2 18}$;

2) $\log_3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$; 7) $\log_{729} \sqrt[4]{3}$;

3) $\lg 1000 + \log_{14} \sqrt[4]{14} - 2 \log_7 \frac{1}{343}$; 8) $81^{\log_9 6}$;

4) $\log_6 72 + \log_6 3$; 9) $100^{2 - \lg 25}$;

5) $\log_3 108 - \log_3 4$; 10) $3^{-\frac{3}{\log_4 3}}$.

201. Решить уравнение:

1) $5^x = 11$; 2) $8^{4x + 3} = 13$; 3) $4^{x - 2} = 48$.

202. Вычислить значение выражения

$$2^{\frac{2}{\log_{\sqrt{3}} 2} - \frac{1}{3}\log_2 125} + 33 \log_5 \sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}.$$

203. Выразить через a $\log_4 36$, если $\log_{12} 3 = a$.

Логарифмическая функция и ее свойства

204. Найти область определения функции:

1) $y = \lg (5 - 2x)$; 3) $y = \log_x (9 - x^2)$;

2) $y = \log_3 (x^2 - 4x)$; 4) $y = \lg (1 - \cos x)$.

205. Сравнить с нулем:

1) $\log_2 1{,}1$; 2) $\log_{0{,}3} 1{,}2$; 3) $\log_7 3$; 4) $\log_{0{,}4} 0{,}2$.

206. Сравнить a и b, если:

1) $\log_{\sqrt{3}} b > \log_{\sqrt{3}} a$; 2) $\log_{\sin 1} b \ge \log_{\sin 1} a$.

207. Сравнить с единицей основание логарифма, если:

1) $\log_a 0{,}4 < \log_a \frac{1}{3}$; 2) $\log_a \cos 40^\circ > \log_a \cos 50^\circ$.

208. Построить график функции:

1) $y = \log_{0,5}(x + 1)$;
2) $y = \log_3(1 - x)$;
3) $y = |\log_2 x|$;
4) $y = \log_x 1$;
5) $y = \sqrt{\lg \cos x}$;
6) $y = 3^{\log_3 x}$.

Логарифмические уравнения

209. Решить уравнение:

1) $\log_{0,1} x = 3$;
2) $\lg(10 - x) = 4$;
3) $\log_{25}(x^2 + 10x + 114) = 1{,}5$;
4) $\log_{19} \log_2 \log_4 \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$;
5) $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4$;
6) $\log_x 243 = 5$;
7) $\log_{3-x} 3 = 4$;
8) $\log_x 16 = -\frac{4}{3}$;
9) $\log_{1-x}(x^2 - 8x - 7) = 1$.

210. Решить уравнение:

1) $\log_{0,7}(x^2 - 4x - 5) = \log_{0,7}(5 - x)$;
2) $\log_6(x + 1) + \log_6(2x + 1) = 1$;
3) $\lg(x - 1) + \lg(x + 1) = 3\lg 2 + \lg(x - 2)$;
4) $\log_3(4^x - 3) + \log_3(4^x - 1) = 1$;
5) $3\log_{64}(x + 3) - \log_4(x - 1) = 2 - \log_4 8$;
6) $\log_2 182 - 2\log_2\sqrt{5 - x} = \log_2(11 - x) + 1$;
7) $\frac{1}{6}\log_2(x - 2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x - 5}$;
8) $\log_{25}(2x - 3)^2 + \log_5(2 - 2x) = \log_5 2$.

211. Решить уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{3}} x - 3\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0$;
2) $\log_2^2(3 - x) + \log_{\sqrt[3]{2}}(3 - x) = 4$;
3) $\log_3^2(x + 1)^2 - \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) = 5$;

4) $\frac{1}{\lg x + 3} + \frac{2}{3 - \lg x} = 1;$

5) $\log_7 x \cdot \log_7 7x = \log_7 49x;$

6) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0;$

7) $\log_2^2 (2x) = \log_2 x^4;$

8) $2 \log_x 27 - \log_{27} x = 1.$

212. Решить уравнение:

1) $x^{\log_2 x + 2} = 256;$

2) $x^{2 - \lg^2 x - \lg x^2} = \frac{1}{x};$

3) $7^{\lg x} = 98 - x^{\lg 7}.$

213. Выяснить, при каких значениях a данное уравнение имеет корни. Найти эти корни.

1) $\log_7 (x - 4) = \log_7 (3x + a);$

2) $\lg(x^2 - ax) = \lg(2x - a - 1).$

214. При каком значении b уравнение

$$2 \lg(x + 2) = \lg(b + 2)\, x$$

имеет единственный корень?

Логарифмические неравенства

215. Решить неравенство:

1) $\lg x < 1;$

2) $\log_{0,5} x > -5;$

3) $\log_6 x > 3;$

4) $\log_{0,9} x \leq -1;$

5) $\log_{\frac{1}{4}} (3x - 8) < -2;$

6) $\log_2 (12 - 4x) > 4;$

7) $\log_{15} (9x - 1) \geq \log_{15} (5 - x);$

8) $\log_{\frac{2}{3}} (3 - x) \leq \log_{\frac{2}{3}} (1 - 3x);$

9) $\log_2 \frac{x}{x - 1} \leq -1;$

10) $\lg(x^2 - 2x - 3) \geq \lg(2x^2 - 2);$

11) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x+1}{x-1} \geq 0$;

12) $\log_{0,5} (x-1) + \log_{0,5} x \geq -1$;

13) $\log_{0,7} (2x^2 - 9x + 4) \leq 2 \log_{0,7} (x+2)$;

14) $\log_3 (3x-1) + \log_3 (x+1) \leq \log_3 (3x+9)$.

216. Решить неравенство:

1) $\log_3^2 (2-x) \leq 1$;

2) $\lg^2 x - \lg x - 2 \leq 0$;

3) $\log_{0,1}^2 x + \log_{0,1} x - 12 \geq 0$;

4) $2 \log_{\frac{1}{2}}^2 (x-3) + 9 \log_{\frac{1}{2}} (x-3) - 5 \leq 0$.

217. Решить неравенство:

1) $\log_{x-4} (2x^2 - 9x + 4) > 1$;

2) $\log_{3x+5} (9x^2 + 8x + 2) < 2$.

218. При каких значениях a число 2 является решением неравенства $\log_a (2x-1) < 2$?

Системы показательных и логарифмических уравнений

219. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = 1 + \lg 8, \\ \lg (x+y) - \lg (x-y) = \lg 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}} (x-y) = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 (x+14) + \log_2 (x+y) = 6, \\ \log_4 (x+y) = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = 6, \\ \lg (3x-y) + \lg (y+x) = 4 \lg 2. \end{cases}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 1

Тематическое оценивание № 1

Тема. *Числовые функции и их основные свойства. Тригонометрические функции числового аргумента*

1°. Найти область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-x-12}$; 2) $f(x) = \sqrt{x-3}$.

2°. Определить знак выражения $\sin\dfrac{7\pi}{10}\cos\dfrac{13\pi}{12}$.

3°. Найти значение выражения

$$2\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\pi-2\sin\frac{\pi}{4}.$$

4•. Является ли четной или нечетной функция, заданная формулой:

1) $f(x) = 4x^7 - 2x^3$; 3) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x}{1-\sin x}$?

2) $f(x) = x^2 + 4\cos x$;

5•. Построить график функции $f(x) = \cos 3x$, указать ее промежутки возрастания и убывания.

6••. Построить график функции:

1) $y = \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$; 2) $y = \sqrt{\sin x - 1}$.

Тематическое оценивание № 2

Тема. *Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы сложения и их следствия*

1°. Упростить выражение:

1) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

2) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 8\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 8\alpha}$.

2°. Найти значение выражения $\sin 210^\circ + \mathrm{tg}\, 135^\circ$.

3•. Дано: $\cos\alpha = 0{,}6$; $\sin \beta = -0{,}8$; $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$.

Найти $\sin (\alpha + \beta)$.

4•. Доказать тождество:

1) $\mathrm{ctg}\, x - \dfrac{\sin x}{1 - \cos x} = -\dfrac{1}{\sin x}$;

2) $\dfrac{\left(\sin (\pi - 3\alpha) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)\cos\left(\alpha - \dfrac{5\pi}{2}\right)}{1 + \cos (\pi - 2\alpha)} = \cos 2\alpha.$

5••. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $4 \cos^2\alpha - 5\, \mathrm{tg}\, \alpha\, \mathrm{ctg}\, \alpha$;

2) $\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha$.

Тематическое оценивание № 3

Тема. *Тригонометрические уравнения и неравенства*

1°. Решить уравнение:

1) $\sin 4x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right) = 0$;

3) $3 \cos^2 x + 7 \sin x - 5 = 0$.

2°. Решить неравенство $\sin \dfrac{x}{3} \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3•. Найти корни уравнения:

1) $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 1$;

2) $\sin x + \sin 3x + \cos x = 0$.

4••. Найти, сколько корней уравнения $\dfrac{\cos 3x + \cos x}{1 - \sin x} = 0$ принадлежит промежутку $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Тематическое оценивание № 4

Тема. *Степенная функция*

1°. Найти значение выражения:

1) $3\sqrt[3]{8}+4\sqrt[5]{-32}+\sqrt[4]{625}$; 2) $\sqrt[3]{27\cdot 0{,}008}$.

2°. Представить выражение в виде степени:

1) $a^{0,6}\cdot a^{3,4}$; 3) $a^{\frac{7}{15}}:a^{\frac{1}{6}}$.

2) $\left(a^{\frac{5}{12}}\right)^{\frac{3}{5}}$;

3°. Решить уравнение:

1) $x^3=1000$; 3) $\sqrt[3]{x}=2$;

2) $x^6=12$; 4) $\sqrt[4]{x}=-1$.

4•. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2x+8}=x$; 2) $\sqrt{x+4}-\sqrt[4]{x+4}=2$.

5•. Упростить выражение:

1) $\sqrt[18]{a^3}$; 3) $\sqrt[8]{a^8}$, если $a\ge 0$;

2) $\sqrt[3]{m^2\sqrt[4]{m}}$; 4) $\sqrt[4]{(a-1)^4}$, если $a\le 1$.

6•. Сократить дробь:

1) $\dfrac{m-3m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}-3}$; 2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}$; 3) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}$.

7••. Решить уравнение $\sqrt{x+5}-\sqrt{8-x}=1$.

Тематическое оценивание № 5

Тема. *Показательная функция. Показательные уравнения и неравенства*

1°. Сравнить m и n, если:

1) $10{,}4^m>10{,}4^n$; 2) $(\sin 1)^m<(\sin 1)^n$.

2°. Решить уравнение $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x = 250$.

3°. Решить неравенство $(0{,}75)^{x^2} \le \left(1\frac{1}{3}\right)^{2x-3}$.

4•. Решить уравнение:

1) $(7^{x+3})^{x-4} = \left(\frac{1}{7}\right)^x \cdot 49^{x+6}$; 2) $4^x - 3 \cdot 2^x = 40$.

5•. Решить неравенство:

1) $(0{,}1)^{\frac{x^2-4x-15}{x+1}} \ge 0{,}001$;

2) $(0{,}5)^{2x-3} - 17 \cdot (0{,}5)^x + 2 \le 0$.

6••. Решить уравнение $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

Тематическое оценивание № 6

Тема. *Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства*

1°. Найти область определения функции $y = \lg(4x - 1)$.

2°. Сравнить с единицей основание логарифма, если $\log_a 7 < \log_a 6{,}8$.

3°. Решить уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(3x + 4) = -2$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x + 4) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x - 14)$.

4•. Решить неравенство:

$$\log_{0,9}(x - 4) \ge \log_{0,9}(8 - x).$$

5•. Найти корни уравнения:

1) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$;

2) $3 + 2\log_{x+1} 3 = 2\log_3(x + 1)$.

6•. Решить неравенство:

$$2\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) - 5\log_3(x + 1) \ge 7.$$

7••. Построить график функции $y = \sqrt{\lg \sin x}$.

Тематическое оценивание № 7

Тема. *Обобщение и систематизация знаний учащихся*

1°. Решить уравнение:

1) $\cos 2x - 2\cos x + 1 = 0$;

2) $\sqrt{3x - 2} + 2 = x$;

3) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^{x} = 4$;

4) $\lg(x - 3) + \lg(x + 45) = 2$.

2•. Найти корни уравнения:

1) $\sqrt{x - 4} + 2\sqrt[4]{x - 4} = 35$;

2) $2^{x+1} + 4 \cdot 2^{x} - 3 \cdot 2^{x-1} = 72$;

3) $\log_2^2 x - \log_{\frac{1}{2}} x^4 = 21$.

3•. Решить неравенство:

1) $2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) \geq \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$;

2) $2\log_8(-x) > \log_8(5 - 4x)$.

4••. Решить неравенство $\lg^2 10x - \lg x \geq 3$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 2

Тематическое оценивание № 1

Тема. *Числовые функции и их основные свойства. Тригонометрические функции числового аргумента*

1°. Найти область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 6x - 16}$; 2) $f(x) = \sqrt{8 - x}$.

2°. Определить знак выражения $\cos \dfrac{13\pi}{15} \operatorname{ctg} \dfrac{23\pi}{18}$.

3°. Найти значение выражения

$$3 \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{2} - 4 \cos \frac{\pi}{4}.$$

4•. Является ли четной или нечетной функция, заданная формулой:

1) $f(x) = x^3 - 5 \sin x$; 3) $f(x) = 6x^6 - 7x^5$?

2) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 3 \cos x$;

5•. Построить график функции $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$, указать ее промежутки возрастания и убывания.

6••. Построить график функции:

1) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$; 2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$.

Тематическое оценивание № 2

Тема. *Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы сложения и их следствия*

1°. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{1 - \sin^2\alpha} - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$;

2) $2 \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) - \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$;

3) $\dfrac{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}$.

2°. Найти значение выражения $\cos 240° - \operatorname{ctg} 135°$.

3*. Дано: $\sin \alpha = -\dfrac{5}{13}$; $\cos \beta = -\dfrac{12}{13}$; $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

Найти $\cos(\alpha - \beta)$.

4*. Доказать тождество:

1) $\operatorname{tg} x - \dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = -\dfrac{1}{\cos x}$;

2) $\dfrac{\left(\cos(2\pi - \alpha) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 5\alpha\right)\right)\cos\left(3\alpha - \dfrac{9\pi}{2}\right)}{1 + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 6\alpha\right)} = \sin 2\alpha$.

5.** Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + 2 \sin^2\alpha$;

2) $\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$.

Тематическое оценивание № 3

Тема. *Тригонометрические уравнения и неравенства*

1°. Решить уравнение:

1) $\cos 6x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$;

3) $4 \sin^2 x - 11 \cos x - 1 = 0$.

2°. Решить неравенство $\cos \dfrac{x}{2} \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3*. Найти корни уравнения:

1) $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$;

2) $\cos x - \cos 3x + \sin x = 0$.

4.** Найти, сколько корней уравнения $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{1 - \cos x} = 0$ принадлежит промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Тематическое оценивание № 4

Тема. *Степенная функция*

1°. Найти значение выражения:

1) $5\sqrt[4]{16} - 2\sqrt[3]{-216} - \sqrt[3]{64}$; 2) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$.

2°. Представить выражение в виде степени:

1) $c^{3,8} \cdot c^{1,2}$; 3) $c^{\frac{5}{8}} : c^{\frac{1}{6}}$.

2) $\left(c^{\frac{15}{28}}\right)^{\frac{14}{45}}$;

3°. Решить уравнение:

1) $x^3 = 27$; 3) $\sqrt[5]{x} = 1$;

2) $x^8 = 3$; 4) $\sqrt[6]{x} = -3$.

4•. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2x + 48} = -x$; 2) $\sqrt{x - 2} + \sqrt[4]{x - 2} = 20$.

5•. Упростить выражение:

1) $\sqrt[28]{a^7}$; 3) $\sqrt[6]{m^6}$, если $m \le 0$;

2) $\sqrt[5]{b^3 \sqrt[4]{b^3}}$; 4) $\sqrt[10]{(x - 2)^{10}}$, если $x \ge 2$.

6•. Сократить дробь:

1) $\dfrac{x + 7x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{3}{5}} + 7}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}}$; 3) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}} + 3m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} + 6m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{4}} + 9n^{\frac{1}{2}}}$.

7••. Решить уравнение $\sqrt{2x + 7} - \sqrt{x - 5} = 3$.

Тематическое оценивание № 5

Тема. *Показательная функция. Показательные уравнения и неравенства*

1°. Сравнить a и b, если:

1) $(12,3)^a < (12,3)^b$; 2) $(\cos 1)^a > (\cos 1)^b$.

2°. Решить уравнение $2^x + 2^{x-3} = 72$.

3°. Решить неравенство $\left(\frac{2}{7}\right)^{x^2} \ge (3{,}5)^{x-2}$.

4•. Решить уравнение:

1) $(5^{x+4})^{x-3} = 0{,}2^x \cdot 25^{x-4}$; 2) $9^x - 2 \cdot 3^x = 63$.

5•. Решить неравенство:

1) $(0{,}3)^{\frac{x^2-3x-24}{x}} \le 0{,}09$;

2) $3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 \ge 0$.

6••. Решить уравнение $2 \cdot 25^x - 5 \cdot 4^x = 3 \cdot 10^x$.

Тематическое оценивание № 6

Тема. *Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства*

1°. Найти область определения функции $y = \lg(6 - 4x)$.

2°. Сравнить m и n, если $\log_{0,6} m > \log_{0,6} n$.

3°. Решить уравнение:

1) $\log_{0,1}(10x - 7) = -3$;

2) $\log_{0,1}(2x + 9) = \log_{0,1}(x^2 + 5x - 1)$.

4°. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{2}{3}}(6 - x) \le \log_{\frac{2}{3}}(x + 1).$$

5•. Найти корни уравнения:

1) $\log_5 x + \log_5 (x - 4) = 1$;

2) $1 + 2\log_{x+2} 5 = \log_5 (x + 2)$.

6•. Решить неравенство:

$$\log_2^2(3 - x) + \log_{\sqrt[3]{2}}(3 - x) \le 0.$$

7••. Построить график функции $y = \sqrt{\lg \cos x}$.

Тематическое оценивание № 7

Тема. *Обобщение и систематизация знаний учащихся*

1°. Решить уравнение:

1) $\cos 2x - 2\sin x - 1 = 0$;

2) $\sqrt{7 - x} + x = 5$;

3) $5^{2x} - 8 \cdot 5^{x-1} - 17 = 0$;

4) $\log_4 (x + 3) + \log_4 (x + 15) = 3$.

2•. Найти корни уравнения:

1) $\sqrt[3]{1 - x} + 2\sqrt[6]{1 - x} = 3$;

2) $3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{x-1} = 342$;

3) $\log_5^2 x + 0{,}5 \log_5 x^2 = 6$.

3•. Решить неравенство:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \le \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$;

2) $2\log_{0,7} x \ge \log_{0,7}(9 - 8x)$.

4••. Решить неравенство $\lg^2 100x - 7\lg x \ge 8$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ТРЕНИРОВОЧНЫМ УПРАЖНЕНИЯМ

Вариант 1

15. 7) *Указание.* $\frac{2x+4}{x} = 2 + \frac{4}{x}$. 8) *Указание.* $\frac{2x-2}{x-3} = \frac{(2x-6)+4}{x-3} = 2 + \frac{4}{x-3}$. **19.** 5) 2. **22.** 1) $-3 \le a \le -1$; 2) $a = 2$. **23.** 1) Наибольшее значение равно 6, наименьшее — -4; 2) наибольшее значение равно 5, наименьшее — 4; 3) выражение не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений. *Указание.* Данное выражение не определено при всех $\alpha = \pi k$, $k \in Z$. **24.** 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; \infty)$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что если a и b — числа одного знака и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. 3) $[2; \infty)$. **30.** Да. *Указание.* $\sin 20^\circ < \sin 30^\circ$. **34.** *Указание.* Периодическая функция не может иметь один ноль. **35.** 1) π; 2) 7π; 3) $\frac{1}{3}$. **40.** 1) Наибольшее значение равно 3, наименьшее — -4; 2) Выражение не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений. *Указание.* В область определения данного выражения не входят числа, при которых $\sin \alpha = 0$ и $\sin^2\alpha = 1$. **41.** 1) $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}$; 2) $-2 \operatorname{tg} \alpha$; 3) $\cos \alpha - \sin \alpha$. **42.** 1) $\frac{a^2-1}{2}$. *Указание.* Возведите обе части равенства $\sin\alpha + \cos\alpha = a$ в квадрат. 2) $\frac{a(3-a^2)}{2}$. *Указание.* Воспользуйтесь формулой суммы кубов и результатами пункта 1). 3) $\frac{1-a^4+2a^2}{2}$. *Указание.* $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2 + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha \cos^2\alpha$. 4) $\frac{1+6a^2-3a^4}{4}$; 5) $\frac{2}{a^2-1}$; 6) $\sqrt{2-a^2}$ или $-\sqrt{2-a^2}$. *Указание.* Обозначив $\sin\alpha - \cos\alpha = x$, возведите обе части полученного равенства в квадрат. **43.** 1) $\frac{29}{4}$. *Указание.* Разделите числитель и знаменатель данной дроби на $\cos\alpha$. 2) $\frac{24}{13}$. **44.** Наибольшее значение выражения равно $\frac{13}{3}$, наименьшее — -4. *Указание.* Представьте данное выражение в виде $3 - 4\sin\alpha -$

$-\ 3\sin^2\alpha$. Рассмотрите функцию $f(t) = 3 - 4t - 3t^2$ при $t \in [-1;\ 1]$. **61.** 1) 2. *Указание.*

$\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)$. 2) 5. *Указание.* $3\sin\alpha +$

$+\ 4\cos\alpha = \sqrt{3^2 + 4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\sin\alpha + \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\cos\alpha\right) =$

$= 5\left(\frac{3}{5}\sin\alpha + \frac{4}{5}\cos\alpha\right) = 5\sin(\alpha + \varphi)$, где $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$.

66. $-\frac{1}{7}$. **67.** -2. **68.** *Указание.* Умножив и разделив данное произведение на $2\cos 10^\circ$, применить формулу синуса двойного аргумента. **72.** $-2\cos\alpha$. **89.** 2) *Указание.* $\cos x -$ $-\ \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. **101.** 1) $\frac{\pi}{9}$;

2) $\frac{6\pi}{7}$. *Указание.* $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos\left(2\pi - \frac{8\pi}{7}\right)\right)$.

3) $2 - \pi$. *Указание.* $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2 - \pi))$. **102.**

1) $\frac{\sqrt{77}}{9}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; 3) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. *Указание.* Обозначим $\operatorname{arctg}3 = \alpha$,

$\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{10}{9}$.

4) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. *Указание.* $\cos(\operatorname{arcctg}(-2)) = \cos(\pi - \operatorname{arcctg}2) =$

$= -\cos(\operatorname{arcctg}2)$. Пусть $\operatorname{arcctg}2 = \alpha$, $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$\operatorname{ctg}\alpha = 2$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{5}{4}$. 5) $\frac{\sqrt{6}}{12}$; 6) $\frac{1}{6}$. *Указание.* $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}6) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}6)}$. **104.** 1) $\frac{1}{2} < x \le 1$;

2) $-\frac{1}{6} \le x \le \frac{1}{3}$. *Указание.* Данное неравенство равносильно

системе $\begin{cases}\cos(\arccos 3x) \ge \cos\frac{2\pi}{3}, \\ -1 \le 3x \le 1.\end{cases}$ 3) $x > -\frac{2 + \sqrt{3}}{5}$.

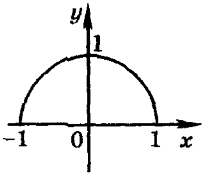


Рис. 19

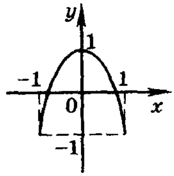


Рис. 20

105. 5) рис. 19; 6) рис. 20. *Указание.* $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x)$. Теперь несложно показать, что графиком данной функции является дуга параболы $y = 1 - 2x^2$ при $x \in [-1; 1]$. **106.** 1) $\frac{1}{2} \le a \le \frac{3}{2}$; 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le a \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; 3) a — любое; 4) $0 \le a \le \pi$; 5) $a \ne \frac{\pi}{4}$;

6) $-\frac{\pi}{2} \le a < 0$. **115.** 1) $a \le 0$ или $a \ge \frac{\pi}{2}$, или $a = \frac{\pi}{4}$; 2) $a < -\frac{3\pi}{2}$ или $a > -\pi$, или $a = -\frac{7\pi}{6}$. **116.** Если $-1 < a \le -\frac{1}{2}$ или $0 \le a < 1$, то два решения; если $-\frac{1}{2} < a < 0$ или $|a| = 1$, то одно решение. *Указание.* Рассмотрите график функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[0; \frac{11\pi}{6}\right]$.

123. 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 2) πn, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, или $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $2\pi n$, $n \in Z$. **126.** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$. **128.** $x \in \left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm 3\right\}$. *Указание.* Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos \pi x = 0, \\ 9 - x^2 = 0, \end{array}\right. \\ 9 - x^2 \ge 0. \end{cases}$ **129.** 1) $-1 \le a \le 1$. *Указание.* Решив данное уравнение как квадратное относительно $\sin x$, получим $\left[\begin{array}{l} \sin x = a, \\ \sin x = 2a + 1. \end{array}\right.$ Тогда искомое значение a — решение совокупности $\left[\begin{array}{l} |a| \le 1, \\ |2a + 1| \le 1. \end{array}\right.$ 2) $a = 1$. *Указание.* Данное уравнение может иметь решение только при условии $a^2 - 2a + + 3 \le 2$. Убедитесь, что при $a = 1$ уравнение имеет решение. 3) $a = \frac{1}{2}$; 4) $-\frac{7}{2} \le a \le \frac{3}{2}$. *Указание.* Запишите данное уравнение в виде $\cos(2x + \varphi) = \frac{2a + 2}{5}$, где $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. 5) $\frac{1}{2} \le a \le 1$. **130.** 1) $a > 1$ или $a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, или $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le a < 0$ или $a = 1$. *Указание.* Данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = a. \end{array}\right.$

Рассмотрите график функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$.

134. 1) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \le x \le \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi k}{3} \le x \le \frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi k}{3}$, $k \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi k \le x \le \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$;

4) $\frac{\pi}{6} + \pi k \le x \le \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$. **136.** 1) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(k + 2n)}{2}$, $y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k - 2n)}{2}$ или $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k + 2n)}{2}$, $y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(k - 2n)}{2}$, $n \in Z$, $k \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{6} + \pi(k + n)$, $y = \frac{\pi}{6} + \pi(k - n)$ или $x = -\frac{\pi}{6} + \pi(k + n)$, $y = -\frac{\pi}{6} + \pi(k - n)$, $k \in Z$, $n \in Z$.

163. 4) $\frac{2}{3\sqrt[4]{a}}$; 5) $\frac{3(\sqrt[8]{a} + 4)}{\sqrt[8]{a}}$; 6) $\frac{2\sqrt[6]{xy}}{2\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}}$. **164.** *Указание.* Пусть $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = a$, $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = b$. Нужно показать, что $x = a + b$ — число рациональное. Имеем: $a^3 + b^3 = 4$, $(a + b)((a + b)^2 - 3ab) = 4$, $x(x^2 + 3) = 4$, откуда $x = 1$. **165.** 10) -3; 2. **166.** 5) 4; 6) 6; 7) -4; 4; 8) 6; 9) $\frac{11 + \sqrt{161}}{4}$; 10) 0; 11) 3. **167.** 6) 5; -5. *Указание.* Замена $\sqrt{x^2 + 11} = t$. 7) 3; $-4{,}5$; 10) 2. *Указание.* Замена $\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = t$. **168.** 1) 2; 2) 80; -109; 3) 10; 4) $-3{,}4$; 12,6. **169.** 1) -2; 5; 2) 4. **170.** 1) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; 3) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **171.** 7) (3; -2); (24; 12). *Указание.* Замена $\sqrt{4 - y + x} = a$, $\sqrt{9 - 2y + x} = b$. Тогда $2x - 3y = 4 - y + x + 9 - 2y + x - 13 = a^2 + b^2 - 13$. 8) (6; 3); ($-3$; $-1{,}5$); $\left(\frac{12 + 3\sqrt{39}}{23}; 12 + 3\sqrt{39}\right)$; $\left(\frac{12 - 3\sqrt{39}}{23}; 12 - 3\sqrt{39}\right)$; 9) $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$; 10) (25; 4). *Указание.* $x + y - \sqrt{x} - \sqrt{y} + 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} + \sqrt{y})$. Тогда замена $\sqrt{x} + \sqrt{y} = t$. **173.** 4) [2,5; 3]; 6) $(-\infty; -5] \cup [1; \infty)$. **174.** 3) $(8; \infty)$; 4) [9; 10]. **175.** Если $a \le 0$, то $x \ge -1$, если $a > 0$, то $-1 \le x < \frac{1}{a^2} - 1$. **184.** 3) 0; 4) $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}}$; 5) $5m^{\frac{1}{10}} - 5$.

190. 4) 1,75; 5) 0; 6) −0,5. **191.** 5) 1; 3; 6) 0; 2; 7) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 8) 2; −2. **192.** 1) 2; 1; 2) 0; 3) 0; 1; 4) нет корней. **193.** 1) 1. *Указание.* Очевидно $x = 1$ — корень данного уравнения. Функция $y = 2^x$ — возрастающая, $y = 3 - x$ — убывающая. Таким образом, данное уравнение имеет не более одного корня. 2) 2. *Указание.* Перепишем данное уравнение в виде $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Функция $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ — убывающая, $y = 1$ — постоянная. 3) 0. *Указание.* $2^{\cos x} \le 2$, $x^2 + 2 \ge 2$. **194.** $a \le 1$ или $a = 5$. *Указание.* Замена $2^x = t$, $t > 0$. Тогда $t^2 - (a + 3)\,t + 4a - 4 = 0$ и нужно рассмотреть случаи, когда дискриминант $D = 0$ и корень $t > 0$ и когда $D > 0$ и лишь один из корней t_1 и t_2 положительный. **195.** 6) $[-4; 0) \cup [1; \infty)$; 7) $[-1; 0) \cup [2; \infty)$; 8) $(-\infty; -2) \cup \cup \left[-\frac{11}{8}; -1\right)$. **196.** 3) $(-\infty; 2)$; 4) $[1; 2]$. **197.** 3) $(0; \infty)$; 4) $[1; \infty)$. **198.** 1) $(-\infty; -1] \cup [0; \infty)$; 2) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. **202.** 1. **203.** $\frac{2-a}{b+2a-2}$. **204.** 3) $D(y) = (1; 2) \cup (2; 5)$; 4) $x \ne -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **208.** 4) рис. 21; 5) рис. 22; 6) рис. 23. **210.** 4) 1; 5) −4; 6) 5; 7) 3; 8) 1. **211.** 4) 100; 1000; 5) 10; 100; 6) 10; 7) $\frac{1}{128}$; 2; 8) $\frac{1}{9}$; 3. **212.** 1) 100; 0,01; 10; 0,1; 2) $\frac{1}{8}$; 64;

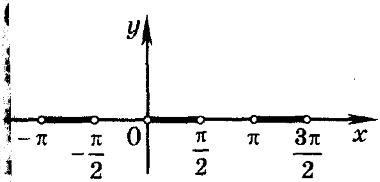


Рис. 21

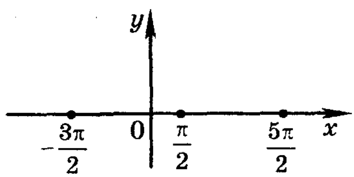


Рис. 22

3) 1000. **213.** 1) Если $a > -4$, то $x = a + 2$. *Указание.* Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 2 = 2x - a, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

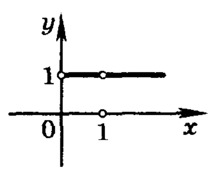


Рис. 23

2) Если $a < \frac{1}{2}$, то $x = 1$ или $x = 2a - 2$, если $\frac{1}{2} \le a < 1$, то $x = 2a - 2$. *Указание.* Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2ax = -x - 2a + 2, \\ -x - 2a + 2 > 0. \end{cases}$$

214. $b < -\frac{1}{2}$ или $b = 5,5$. **215.** 11) $[-3; -2) \cup (2; 8]$; 12) $(2; 7) \cup (22; 27)$; 13) $(-\infty; -2)$; 14) $[1; 3]$.
216. 3) $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [81; \infty)$; 4) $\left[-\frac{31}{16}; 0\right]$. **217.** 1) $\left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}; 1\right) \cup \cup (1; \infty)$; 2) $(-2; -1,5) \cup [-1; 3]$. **218.** $0 < a < 1$ або $a > \sqrt{2}$.
219. 1) (8; 2); (0,25; 64); 2) (3; 4); (−3; 1); 3) (2; 6); 4) (4; 2); 5) (3; 1); 6) (5; 1).

Вариант 2

15. 7) *Указание.* $\frac{x+6}{x} = 1 + \frac{6}{x}$. 8) *Указание.* $\frac{2x+10}{x+2} = 2 + \frac{6}{x+2}$. **19.** 5) 2. **22.** 1) $3 \le a \le 5$; 2) $0 \le a \le 1$ или $2 \le a \le 3$. **23.** 1) Наибольшее значение равно 4, наименьшее — −10; 2) наибольшее значение равно 5, наименьшее — 4; 3) наибольшее значение равно 1, наименьшего значения выражение не достигает. **24.** $[-1; 1]$; 2) $(-\infty; -3] \cup [1; \infty)$; 3) $(-\infty; 1]$. **30.** Равенство невозможно. **35.** 1) 10π; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **40.** 1) Наибольшее значение равно 4, наименьшее — 1; 2) наибольшее значение равно 3, наименьшего значения выражение не принимает. **41.** 1) $\sin\frac{\beta}{4} + \cos\frac{\beta}{4}$; 2) $2\,\mathrm{ctg}\alpha$; 3) $-\cos\beta - \sin\beta$. **42.** 1) $a^2 - 2$; 2) $a(a^2 - 3)$; 3) $a^4 - 4a^2 + 2$; 4) $(a^2 - 2)(a^4 - 4a^2 + 1)$; 5) $\frac{1}{a}$; 6) $\sqrt{a^2-4}$ или $-\sqrt{a^2-4}$. **43.** 1) $\frac{11}{13}$; 2) $\frac{30}{23}$. **44.** Наибольшее значение выражения равно 3, наименьшее — $-\frac{25}{8}$. **61.** 1) $-\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{53}$. **66.** $-\frac{56}{33}$. **67.** $-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. **68.** *Указание.* Умножив и разделив данное произведение на $2\sin\frac{\pi}{7}$, применить формулу синуса двойного аргумента. **72.** $\sin 2\alpha$. **89.** 2) *Указание.* $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. **101.** 1) $\frac{7\pi}{12}$; 2) $-\frac{\pi}{5}$; 3) $\pi - 4$. **102.** 1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{65}}{9}$; 3) $\frac{\sqrt{26}}{26}$. *Указание.* $\sin(\operatorname{arcctg}(-5)) = \sin(\pi - \operatorname{arcctg} 5) = \sin(\operatorname{arcctg} 5)$. Пусть $\operatorname{arcctg} 5 = \alpha$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\operatorname{ctg}\alpha = 5$, $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 26$. 4) $\frac{\sqrt{17}}{17}$; 5) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. *Указание.* Пусть $\arccos\frac{2}{3} = \alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Отсюда несложно получить $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 6) $\frac{14}{11}$. **104.** 1) $x \le 1$; 2) $\sqrt{3} < x \le 2$; 3) $\frac{3}{2} \le x < 2 + \frac{\sqrt{3}}{4}$. **105.** 5) рис. 19; 6) рис. 24.

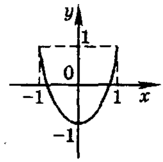


Рис. 24

Указание. $\cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1$. **106.** 1) $-\pi \le a \le 0$; 2) a — любое; 3) $-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2} + \pi k < a < \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{2} \le a < -\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4} < a \le \frac{\pi}{2}$; 5) $a \ne \frac{\pi}{6}$; 6) $-\pi \le a < -\frac{\pi}{2}$. **115.** 1) $a \le -\frac{\pi}{6}$ или $a \ge \frac{\pi}{3}$, или $a = 0$; 2) $a < \pi$ или $a > \frac{3\pi}{2}$, или $a = \frac{4\pi}{3}$. **116.** Если $0 \le a < 1$, то два корня; если $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le a < 0$ или $a = 1$, то один корень. **123.** 1) $\pi + 4\pi k$, $k \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 3) $\pi + 2\pi k$ или $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **126.** $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. **129.** 1) $-2 \le a \le -1$ или $3 \le a \le 5$; 2) $a = 3$; 3) таких a не существует; 4) $-10{,}5 \le a \le 6{,}5$; 5) $-2 \le a \le -1$. **130.** 1) $a < -1$ или $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $a = \frac{7}{10}$; 2) $a = -1$ или $\frac{1}{2} < a < \frac{7}{10}$, или $\frac{7}{10} < a \le \frac{\sqrt{3}}{2}$. **134.** 1) $-\frac{4\pi}{3} + 4\pi k < x < \frac{4\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \le x \le \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$; 3) $\pi k < x \le \operatorname{arcctg} 2 + \pi k$ или $\frac{\pi}{4} + \pi k \le x < \pi + \pi k$, $k \in Z$; 4) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$, или $x = 2\pi n$, $n \in Z$. *Указание.* Данное неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\cos x \le -\dfrac{1}{2},\\ \cos x = 1.\end{array}\right.$

136. 1) $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi(k+2n)}{2}$, $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi(k-2n)}{2}$, $k \in Z$, $n \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(k+2n)}{2}$, $y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-2n)}{2}$ или $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k+2n)}{2}$, $y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(k-2n)}{2}$, $k \in Z$, $n \in Z$. **163.** 4) $-\frac{2}{3}$; 5) $\frac{5(\sqrt[10]{a}-3)}{\sqrt[10]{a}}$; 6) $\sqrt[8]{b} - 7$. **165.** 10) 5; −4; −5. **166.** 5) 20; 6) 3; 7) −1; 2; 8) 7; 9) нет корней; 10) 4; 11) −1; $-\frac{1}{6}$. **167.** 6) 7; −7; 7) −4; 2; 10) −1; 3. **168.** 1) 1; 2) −15; 13; 3) 1; 2; 10; 4) −79; 1. **169.** 1) −3; 4; 2) 9. **170.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 3) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **171.** 7) (−10; 26); (4; 5); 8) (−4; 0); $\left(-\frac{40}{41}; -\frac{32}{41}\right)$; 9) (2; 3); $\left(-\frac{14}{9}; \frac{17}{27}\right)$; 10) $(10 + 3\sqrt{11}; 10 - 3\sqrt{11})$; $(10 - 3\sqrt{11}; 10 + 3\sqrt{11})$; (16; 4); (4; 16). **173.** 4) [0; 2]; 6) $\left(\frac{24}{19}; \infty\right)$. **174.** 3) [−3; 1]; 4) (4; ∞). **175.** Если $a \le -1$, то $x \le 2$, если $a > -1$, то $2 - \frac{1}{(a+1)^2} < x \le 2$. **184.** 3) $\frac{x^{\frac{1}{6}} - 3}{2x^{\frac{1}{6}}}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $c^{\frac{1}{8}} + 8$. **190.** 4) $\frac{11}{12}$; 5) 1; 6) 1,5. **191.** 5) −1; −3; 6) 2; 7) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; 8) 2; −2. **192.** 1) 1; 0; 2) 0,5; 3) 0; 4) 1; −1. **193.** 1) 5; 2) 3; 3) 0. **194.** $2 \le a \le 3$. **195.** 6) $(-\infty; -4] \cup (0; 2]$; 7) $[-1; 0) \cup [3; \infty)$; 8) $(-3; -2) \cup \{0\}$. **196.** 3) $[-3; \infty)$; 4) $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$. **197.** 2) $(-\infty; -1] \cup [2; \infty)$; 3) $[8; \infty)$; 4) $(-\infty; -2)$. **198.** 1) $(0; \infty)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (0; \infty)$. **202.** 11. **203.** $3(1 - m - n)$. **204.** 3) $D(y) = (-4; 1) \cup (1; 2)$; 4) $D(y) = (0; 1]$. **210.** 4) 2; 5) 14; 6) 7; 15; 7) −1; 8) −1. **211.** 1) $\sqrt[3]{10} + 1$; 1001; 3) 2; $2^{-0,4}$; 5) 16; $2^{-0,4}$; 6) $\frac{\sqrt{11} - 1}{2}$;

7) **10; 0,001;** 8) 25; 5. **212.** 1) 3; 27; 2) **0,1; 1000;** 3) $\frac{1}{6}$; 6.

213. 1) Если $a > -2$, то $x = \frac{1-a}{6}$; 2) если $a < \frac{1}{3}$, то $x = 2$ или $x = 3a - 1$, если $\frac{1}{3} \le a < \frac{2}{3}$, то $x = 2$. **214.** $b < 0$ или $b = 4$. **215.** 11) $(3; 4] \cup [6; \infty)$; 12) $(1; 1{,}1)$; 13) $[-2; 0)$; 14) $[2; 8)$. **216.** 3) $[0{,}2; 5\sqrt{5}]$; 4) $(1; 1{,}008) \cup (1{,}04; \infty)$. **217.** 1) $(0; 0{,}5) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$; 2) $(-3; -1)$. **218.** $1 < a < \sqrt[3]{9}$. **219.** 1) (2; 4); (4; 2); 2) (2; 0,5); 3) (1; 3); 4) (4; 2); 5) (4; 2); 6) (2; 1).

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов 3

Тематическое распределение тренировочных упражнений 4

Тренировочные упражнения 6

Вариант 1 6

Вариант 2 45

Вариант 3 84

Задания для тематического оценивания знаний 123

Вариант 1 123

Вариант 2 128

Ответы и указания 133